Матричные представления алгебры Вирасоро

Максим Грицков

Август 2022

Алгебры бесконечных матриц

В этой лекции будем жить в пространстве $\mathbb{C}^{\infty}$ - финитных комлексных столбцов v с нумерацией целыми числами $v_i, i \in \mathbb{Z}$.

Определение 1 *Алгебра* $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$ *- финитные матрицы* a *с элементами* a_{ij}*, где* $i, j \in \mathbb{Z}$ *со стандарнтным коммутатором.*

Базис в этой алгебре образуют матричные единицы E_{ij}, легко проверить соотношения:

$$E_{ij}\nu_k = \delta_{jk}\nu_i, E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} \Rightarrow [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \tag{1}$$

Здесь ν_k - k-ый элемент стандартного базиса в $\mathbb{C}^{\infty}$.

Комментарий 1 *Алгебра* $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$ *есть алгебра Ли группы* $GL(\infty, \mathbb{C})$*, тоесть* $T_{\mathrm{id}}GL(\infty, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$*. Группа устроена так - это обратимые матрицы* a*, такие что матрица* $a_{ij} - \delta_{ij}$ *финитна. Тоесть среди диагональных элементов* a *лишь конечное число отличается от 1, а среди недиагональных лишь конечное число ненулевых.*

Определение 2 *Алгебра Ли* $\alpha_{\infty} = \{a \in \mathrm{Mat}(\infty, \mathbb{C}) | \exists n \in \mathbb{N}_0 : |i-j| \geq n \Rightarrow a_{ij} = 0\}$.

Убедимся, что это действительно Алгебра Ли относительно обычного коммутатора. Для этого нужно убедиться в том, что она замкнута относительно взятия линейных комбинаиций и умножения. Про л-е комбинации очевидно - пусть $a, b \in \alpha_{\infty}$ и для a есть натуральное число n, такое что $|i-j| \geq n \Rightarrow a_{ij} = 0$, а для b есть число m. Тогда действительно $|i-j| \geq m+n \Rightarrow \alpha a_{ij} + \beta b_{ij} = 0$. Теперь проверим замкнутость относительно умножения:

$$(ab)_{ik} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j:|i-j| \leq n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{l=-n}^{n} a_{i,i+l}b_{i+l,k}. \tag{2}$$

Покажем, что такая сумма обнуляется, если $|i-k| \geq m+n$. Рассмотрим два случая, пусть сначала $i > k$:

$$|i-k+l| \geq |i-k-n| = i-k-n \geq m+n-n = m. \tag{3}$$

Тогда второй сомножитель во всех слагаемых суммы (2) обнуляется. Пусть теперь наоборот $i < k$, тогда

$$|i-k+l| = |k-i+(-l)| \geq |k-i-n| = k-i-n \geq m+n-n = m. \tag{4}$$

В этом случае тоже обнуляется каждое слагаемое из-за второго сомножителя. Значит, α_{∞} действительно ассоциативная алгебра относительно умножения, а значит и алгебра Ли относительно коммутатора.

Комментарий 2 *Алгебра* $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$ *является подалгеброй* α_{∞}.

Комментарий 3 *О представлениях* $V_{\alpha,\beta}$.

Рассмотрим оператора сдвига номера базисного вектора:

$$\Lambda_k \nu_j = \nu_{j-k}. \tag{5}$$

Его можно выразить в терминах E_{ij}:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i+k}\nu_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{i+k,j}\nu_i = \nu_{j-k} \Rightarrow \Lambda_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i+k}. \tag{6}$$

В первой лекции были найдены представления генераторов алгебры Витта d_n в пространствах $V_{\alpha,\beta}$. Мы можем выписать формулы для аналогичных генераторов в терминах матричных единиц:

$$d_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [i - \alpha - \beta(n+1)] \cdot E_{i,i+n} \Rightarrow d_n \nu_k = [k - \alpha - \beta(n+1)] \cdot \nu_{k-n}. \tag{7}$$

Обращаю внимание читателя на то, что здесь другое соглашение об зависимости α, β, они связаны так: $\beta = \beta_{\mathrm{Kac}} - 1, \alpha = \alpha_{\mathrm{Kac}} + 1$.

Бесконечное внешнее произведение

Главным объектом обсуждения в этом разделе будет бесконечная внешняя степень пространства $\mathbb{C}^\infty$:

$$F := \Lambda^\infty \mathbb{C}^\infty. \tag{8}$$

Определение 3 *Пространство $F^{(m)}$ с зарядовым числом m есть линейное подпространство F натянутое на полубесконечные мономы вида $\psi = \nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge ...$, причем $i_0 > i_{-1} > ...$ и $\exists k \in \mathbb{N}_0 : n \leq -k \Rightarrow i_n = n + m$. Степень монома:*

$$\deg(\psi) = \sum_{s=0}^{\infty} (i_{-s} + s - m). \tag{9}$$

Благодаря второму свойству из определения эта сумма конечная.

Утверждение 1 *Формула Дирака:*

$$\deg(\psi) = \sum_{s \leq 0} (i_s > m \,\text{which occur in}\, \psi) - \sum_{s \leq 0} (i_s \leq m \,\text{which do not occur in}\, \psi). \tag{10}$$

Док-во у-я 1

Во-первых заметим, что на самом деле эти суммы конечны. Рассмотрим первую из них:

$$\sum_{s \leq 0} (i_s > m \,\text{which occur in}\, \psi) = \sum_{s=-k}^{0} (i_s > m \,\text{which occur in}\, \psi) + \sum_{s=-\infty}^{-k-1} (i_s > m \,\text{which occur in}\, \psi). \tag{11}$$

Так как во втором куске $s < -k$ то используя второе свойство из определения ψ получаем, что $i_s = s + m$, причем $s < 0$, значит вторая сумма пуста. Во втором слагаемом (10) сыграет роль второе утверждение из скобок:

$$\sum_{s \leq 0} (i_s \leq m \,\text{which do not occur in}\, \psi) = \sum_{s=-k}^{0} (i_s \leq m \,\text{which do not occur in}\, \psi) + \sum_{s=-\infty}^{-k-1} (i_s \leq m \,\text{which do not occur in}\, \psi). \tag{12}$$

Вторая сумма тут пуста потому что все индексы $s + m$ при $s < -k$ с необходимостью встречаются в ψ. Итого

$$(10) = \sum_{s=-k}^{0} (i_s > m \,\text{which occur in}\, \psi) - \sum_{s=-k}^{0} (i_s \leq m \,\text{which do not occur in}\, \psi). \tag{13}$$

Прибавим и вычтем из этого слагаемое

$$\sum_{s=-k}^{0} (i_s \leq m \,\text{which occur in}\, \psi). \tag{14}$$

Тогда получаем, что

$$(10) = \sum_{s=-k}^{0} (i_s \,\text{which occur in}\, \psi) - \sum_{-k+m=i_{-k} \leq n \leq m} n = \sum_{s=-k}^{0} \{(i_s \,\text{which occur in}\, \psi) - s - m\}. \tag{15}$$

Производя преобразование $s \mapsto -s$ получаем, что

$$\sum_{s=0}^{k} \{(i_{-s} \,\text{which occur in}\, \psi) + s - m\} = \sum_{s=0}^{\infty} \{i_{-s} + s - m\} = \deg(\psi). \tag{16}$$

Что бы наглядно понять переход от (13) к (15) проделаем эту процедуру для $\psi = \nu_3 \wedge \nu_2 \wedge \nu_0 \wedge \nu_{-1} \wedge \nu_{-2} \wedge ... \in F^{(2)}$ - для него число $-k = -2$. Таким образом:

$$\sum_{s=-2}^{0} (i_s > 2 \,\text{which occur in}\, \psi) = 3, \sum_{s=-2}^{0} (i_s \leq 2 \,\text{which do not occur in}\, \psi) = 1, \sum_{s=-2}^{1} (i_s \leq 2 \,\text{which occur in}\, \psi) = 2. \tag{17}$$

Все сходится так как

$$\sum_{s=-2}^{0} (i_s \,\text{which occur in}\, \psi) = 5, \quad \sum_{0=-2+2=i_{-2} \leq k \leq 2} k = 3. \tag{18}$$

Утверждение 2 *Подпространство $F^{(m)}$ раскладывается в прямую сумму подпр-в векторов фиксированных степеней:*

$$F^{(m)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_k^{(m)}. \tag{19}$$

Здесь, например $F_0^{(m)}$ это одномерное пространство, натянутое на $\nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge \dots$.

Док-во у-я 2

Продемонстрируем это утверждение только для случая $m = 0$. Пусть $\deg(\psi) = k \in \mathbb{N}$ и $k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-1}$ набор положительных чисел осуществляющих разложение k. Такое раложение задает полубесконечный моном:

$$\psi = \nu_{j_0} \wedge \nu_{j_{-1}} \wedge \dots \wedge \nu_{j_{-n+1}} \nu_{-n} \wedge \nu_{-n-1} \wedge \dots j_{-i} = k_i - i. \tag{20}$$

Здесь $i + 1 \in \overline{1, n}$. Это разложение задает куски базиса в F, так что получаем прямую сумму пр-в, с размерностями $p(k)$.

Утверждение 3 *Пространство F раскладывается в прямую сумму подпр-в векторов фиксированных зарядов:*

$$F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^{(m)}. \tag{21}$$

Док-во у-я 3

Без доказательства.

Комментарий 4 *Что происходит с точки зрения Дирака?*

Попробуем осознать аналогию с теорией Дирака. Наше пространство C^{∞} это якобы пространство состояний электрона. Векторы ν_j олицетворяют собственные состояния Дираковского гамильтониана с собственным числом(энергией) j, которая бывает отрицательной. Что бы с этим бороться было предложено рассматривать в качестве вакуума не ν_0, а $\nu_0 \wedge \nu_{-1} \wedge \dots \in F^{(0)}$. По утверждению 2 это подпространство раскладывается на пространства $F_k^{(0)}$ - это пространства состояний с неотрицательными энергиями и нулевым зарядом - тоесть состояния олицетворяющее электрон-позитронные пары. Степень монома это энергия состояния относительно Дираковского вакуума, а условия из определения 3 могут быть проинтерпертированы как равенство числа электронов и позитронов. Соответственно состояния из $F^{(m)}$ олицетворяют состояния с разным числом позитронов и электронов, и, следовательно, ненулевым зарядом m.

Представления алгебр бесконечных матриц в F

Определение 4 *Представление группы $GL(\infty, \mathbb{C})$ и индуцированное им представление алгебры $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$.*

Определим представление группы $GL(\infty, \mathbb{C})$ на полубесконечных мономах из F:

$$T(A)[\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots] = (A\nu_{i_1}) \wedge (A\nu_{i_2}) \wedge \dots . \tag{22}$$

Представление алгебры $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$ определим как $\rho(a) = \partial_t T(\mathrm{e}^{ta})|_{t=0}$. В силу того, что a содержит лишь конечное число ненулевых элементов, матрица e^a определена и действительно является элементом группы $GL(\infty, \mathbb{C})$. Явная формула следующая:

$$\rho(a)[\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots] = (a\nu_{i_1}) \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots + \nu_{i_1} \wedge (a\nu_{i_2}) \wedge \dots . \tag{23}$$

Так как a содержит лишь конечное число ненулевых элементов, написанная здесь сумма имеет конечное число слагаемых:

$$a\nu_n = a_{ij} E_{ij} \nu_n = a_{ij} \delta_{jn} \nu_i = a_{in} \nu_i, \tag{24}$$

а как мы знаем для матрицы a существует такое натуральное число k, что $|i - n| > k \Rightarrow a_{in} = 0$. Так что все определено корректно. Полезно вывести формулу для действия представления матричных единиц:

$$\rho(E_{ij}) \left[\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots \wedge \nu_{i_{k-1}} \wedge \nu_{i_k = j} \wedge \nu_{i_{k+1}} \wedge \dots\right] = \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots \wedge \nu_{i_{k-1}} \wedge \nu_i \wedge \nu_{i_{k+1}} \wedge \dots . \tag{25}$$

Если среди индексов ψ вообще нет j, то получится ноль.

Комментарий 5 *На самом деле $\rho(E_{ij})$ - операторы рождения.*

Возьмем произвольное состояние-моном с зарядом m:

$$\psi = \nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \dots \wedge \nu_{i_{-k}} \wedge \nu_{m-k-1} \wedge \dots . \tag{26}$$

Его можно следующим образом выразить через низшее по энергии состояние с зарядом m:

$$\psi = \rho(E_{i_0, m}) \dots \rho\left(E_{i_{-k}, m-k}\right) [\nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge \dots] . \tag{27}$$

Определение 5 *Определим форму на полубесконечных мономов в F, а затем продолжим ее по полуторалинейности:*

$$\langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \rangle = \delta_{i_1, j_1} \cdot \delta_{i_2, j_2} \cdot ... . \tag{28}$$

Утверждение 4 *Форма* (28) *контра-на относительно инволюции $a \mapsto a^\dagger$, и, следовательно, представление* (23) *унитарно.*

Док-во у-я 4

Положительную определенность имеем просто по определению. Проверим, что для любых $\psi, \varphi \in F$ верно, что

$$\langle \rho(a) \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \rho(a^\dagger) \psi \rangle . \tag{29}$$

Это достаточно проверить на мономах и матричных единицах. Убедимся, что

$$\langle \rho(E_{ij}) [\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ...] | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... = \psi \rangle = \langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... = \varphi | \rho(E_{ji}) [\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ...] \rangle . \tag{30}$$

Сначала покажем, что

$$\langle \rho(E_{ij}) [\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ...] | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... | \rho(E_{ji}) [\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ...] \rangle = 0. \tag{31}$$

Для этого рассмотрим 4 случая: $\varphi \in (\notin) \operatorname{Ker} [\rho(E_{ij})], \psi \notin (\in) \operatorname{Ker} [\rho(E_{ji})]$.

Пусть $\varphi \in \operatorname{Ker} [\rho(E_{ij})]$, тоесть $\rho(E_{ij})$ действует на левый сомножитель нулем. Это может быть по двум причинам: $j \notin \{i_1, i_2, ...\}$ или $i \neq j$ при том что $i, j \in \{i_1, i_2, ...\}$. В первой ситуации $\rho(E_{ji}) = \rho\left(E_{ij}^\dagger\right)$ будет действовать на правый сомножитель или нулем, или в лучшем случае заменит какой-нибудь индекс $j_k = i$ на j, которого нет во множестве индексов левого сомножителя, значит они будут ортогональны. Во второй ситуации если оператор подействует не нулем, то он тоже заменит индекс j_k на j, при этом среди оставшихся индексов другого i быть не может, иначе вектор был бы нулевой, а среди $i_1, i_2, ...$ есть i, значит векторы ортогональны. Случай когда $\psi \in \operatorname{Ker} [\rho(E_{ji})]$ сводится к разобранному комплексным сопряжением.

Остается единственный нетривиальный случай $\varphi \notin \operatorname{Ker} [\rho(E_{ij})], \psi \notin \operatorname{Ker} [\rho(E_{ji})]$. Для левой части это означает, что среди индексов $i_1, i_2 ...$ нашелся $i_k = j$ при том что среди остальных индексов $i_1, i_2, ...$ нет i. Тогда

$$\langle \rho(E_{ij}) \left[\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... \wedge \nu_{i_{k-1}} \wedge \nu_{i_k = j} \wedge \nu_{i_{k+1}} \wedge ...\right] | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \rangle = \langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... \wedge \nu_{i_{k-1}} \wedge \nu_i \wedge \nu_{i_{k+1}} \wedge ... | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \rangle . \tag{32}$$

Таким образом скалярное произведение из левой части не равно нулю при $(\{i_1, ...\} \setminus \{j\}) \sqcup \{i\} = \{j_1, ...\}$. Аналогичный результат получаем для скалярного произведения из правой части: среди $j_1, ...$ нашелся $j_l = i$ при том что среди остальных $j_1, ...$ нет j:

$$\langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... | \rho(E_{ji}) \left[\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \wedge \nu_{j_{l-1}} \wedge \nu_{j_l = i} \wedge \nu_{j_{l+1}} \wedge ...\right] \rangle = \langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \wedge \nu_{j_{l-1}} \wedge \nu_j \wedge \nu_{j_{l+1}} \wedge ... \rangle . \tag{33}$$

Это скалярное произведение не ноль, только если $(\{j_1, ...\} \setminus \{i\}) \sqcup \{j\} = \{i_1, ...\}$. В нашей ситуации:

$$(\{j_1, ...\} \setminus \{i\}) \sqcup \{j\} = \{i_1, ...\} \Leftrightarrow (\{i_1, ...\} \setminus \{j\}) \sqcup \{i\} = \{j_1, ...\} . \tag{34}$$

Таким образом

$$\langle \rho(E_{ij}) [\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ...] | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... | \rho(E_{ji}) [\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ...] \rangle = 0. \tag{35}$$

Когда они не равны нулю, то они равны ± 1. Осталось проверить, что эти знаки равны. Напишем вот такое равенство:

$$\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \wedge \nu_{j_{l-1}} \wedge \nu_{j_l = i} \wedge \nu_{j_{l+1}} \wedge ... = \rho(E_{ij}) \left[\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \wedge \nu_{j_{l-1}} \wedge \nu_j \wedge \nu_{j_{l+1}} \wedge ...\right] . \tag{36}$$

Так как скалярное произведение не равно 0, множество индексов выражения в аргументе ρ совпадает со множеством $i_1, ...$, но оно неупорядочено. Что бы его упорядочить нужно сделать точно такую же перестановку, как в (33) для того что бы в нем упорядочить второй сомножитель. Назовем эту перестановку σ. Тогда с одной стороны:

$$\langle \rho(E_{ij}) [\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ...] | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \rangle = \langle \rho(E_{ij}) [\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ...] | \rho(E_{ij}) \left[\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \wedge \nu_{j_{l-1}} \wedge \nu_j \wedge \nu_{j_{l+1}} \wedge ...\right] \rangle = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} . \tag{37}$$

С другой стороны, по уравнению (33)

$$\langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... | \rho(E_{ji}) [\nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ...] \rangle = \langle \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge ... | \nu_{j_1} \wedge \nu_{j_2} \wedge ... \wedge \nu_{j_{l-1}} \wedge \nu_j \wedge \nu_{j_{l+1}} \wedge ... \rangle = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} . \tag{38}$$

Что и требовалось доказать.

Комментарий 6 *Подпространства с разными зарядами ортогональны друг другу.*

Это очевидно, так как наборы индексов в базисных мономах пространств разных зарядов попросту разные.

Утверждение 5 *Разложение (21) есть суть разложение по неприводимым подпредставлениям.*

Док-во у-я 5

Сначала следует понять, что $F^{(m)}$ вообще подпредставление алгебры $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$. Что бы это увидеть подействуем произвольной матричной единицей на произвольный моном из $F^{(m)}$:

$$\rho(E_{ij})\left[\psi = \nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge ... \wedge \nu_{i_{-n+1}} \wedge \nu_{i_{-n}=j} \wedge \nu_{i_{-n-1}} \wedge ...\right]. \quad (39)$$

Утверждается, что в худшем случае поменяется степень $\deg(\psi) \mapsto \deg(\psi) + i - j$, и, естественно, знак, но это не важно. Тут поможем формула Дирака. Пусть $j < -k$, тогда степень вообще не поменяется, так как обе суммы в (13) этого не почувствуют. Если же $j \geq -k$ то в первую сумму прибавиться i, а во вторую j, так что как раз получится, что $\rho(E_{ij}) F_k^{(m)} \subset F_{k+i-j}^{(m)}$. Неприводимость понять легко: пусть $F^{(m)}$ приводимо, значит, $F^{(m)} = A^{(m)} \oplus B^{(m)}$, где $A^{(m)}, B^{(m)}$ - подпредставления. В одном из них лежит вакуум с зарядом m. Из (27) мы знаем, что такой вакуум порождает $F^{(m)}$ целиком, а это в свою очередь означает, что $A^{(m)}$ или $B^{(m)}$ - нулевое подпредставление.

Теперь, когда мы нашли целую серию неприводимых представлений $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$, зададимся вопросом: как их можно нумеровать?

Определение 6 *Определим понятия главной градуировки* $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$. *Степенью оператор будем называть*

$$\deg(E_{ij}) = i - j. \quad (40)$$

Определим подпространства g_k как подпространства, натянутые на матричные единицы степени k. Легко заметить, что это не подалгебры, так как по (1) степени единиц при перемножении складываются, или итоговая матрица вообще получается нулевой. В связи с чем можно написать разложение в прямую сумму в смысле векторых пространств:

$$\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} g_n. \quad (41)$$

Матрицы из g_n имеют ненулевую $|j|$-ую наддиагональ если $j < 0$ и поддиагональ если $j > 0$. Соответственно матрицы нулевой степени это диагональные матрицы. Соответственно имеет место формула $\rho(g_n) F_k^{(m)} \subset F_{k+n}^{(m)}$. Разложение (31) и есть главная градуировка пространства $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$. Несмотря на то что g_n не подалгебры, из них можно соорудить нетривиальную подалгебру:

$$\mathfrak{gl}^{+}(\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{n < 0} g_n. \quad (42)$$

Это подалгебра строго верхнетреугольных матриц. Теперь мы готовы дать важное определение.

Определение 7 *Неприводимое представление старшего веса.*

Заданный набор чисел $\{\lambda_i | i \in \mathbb{Z}\}$ будем называть старшим весом, а представление ρ_λ - неприводимым представлением старшего веса $\mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$ на пространстве $L(\lambda)$, если это неприводимое пр-е и, кроме того, в нем существует ненулевой ν_λ, такой, что:

$$\rho_\lambda\left(\mathfrak{gl}^{+}(\infty, \mathbb{C})\right)\nu_\lambda = 0, \rho_\lambda(E_{ii})\nu_\lambda = \lambda_i \nu_\lambda. \quad (43)$$

Представления $\rho_m = \rho|_{F^{(m)}}$ на соответствующих пространствах удовлетворяют этим условиям:

$$i > j \Rightarrow \rho(E_{ij})[\nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge ...] = 0, i \leq m \Rightarrow \rho(E_{ii})[\nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge ...] = [\nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge ...], i > m \Rightarrow \rho(E_{ii})[\nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge ...] = 0. \quad (44)$$

Веса представлений $F^{(m)}$ это $\omega_m = \{\lambda_i = \theta(i - m) | i \in \mathbb{Z}\}$. Эти представления и веса называются фундаментальными.

Теперь будем строить представления алгебры α_∞, сразу только на $F^{(m)}$. Сначала определим ее пр-е как ассоциативной алгебры.

Определение 8 *Представление алгебры* α_∞*:*

$$i \neq j \,\mathrm{or}\, i = j > 0 \Rightarrow \hat{\rho}_m(E_{ij}) = \rho_m(E_{ij}), i = j \leq 0 \Rightarrow \hat{\rho}_m(E_{ij}) = \rho_m(E_{ij}) - \mathrm{id}_\infty. \quad (45)$$

Проверим корректность этого определения. Достаточно проверять корректность лишь при действии на вакуум, так как по (27) любые векторы из сектора $F^{(m)}$ есть действие конечного числа операторов $\hat{\rho}(E_{ij})$ на него. Любая матрица из α_∞ есть конечная линейная комбинация таких:

$$a_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i E_{i,i+k}, \lambda_i \in \mathbb{C} \Rightarrow \hat{\rho}_m(a_0)\psi_m = (\lambda_1 + ... + \lambda_m)\psi_m \,\mathrm{if}\, m \geq 1;\, 0 \,\mathrm{if}\, m = 0;\, -(\lambda_{m+1} + ... + \lambda_0)\psi_m \,\mathrm{if}\, m \leq -1. \quad (46)$$

При $k \neq 0$ все очевидно - при действии $\hat{\rho}_m(a_k)$ на $\nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge ...$ выживают те слагаемые из (34), для которых $i + k \leq m, i > m$.

Утверждение 6 *Определенное представление $\hat{\rho}_m$ является проективным представлением алгебры Ли α_∞. Если смотреть на $\hat{\rho}_m$ как на обычное представление центрального расширения этой алгебры, то оно унитарно и неприводимо.*

Док-во у-я 6

Коммутационные соотношения (1) более не будут выполнены для представления $\hat{\rho}_m(E_{ij})$. Перепишем (1) в виде 4 условий:

$$\begin{cases} [E_{ij}, E_{kl}] = 0, \text{ if } i \neq l, j \neq k; \\ [E_{ij}, E_{kl}] = E_{il} \text{ if } i \neq l, j = k; \\ [E_{ij}, E_{kl}] = -E_{kj} \text{ if } i = l, j \neq k; \\ [E_{ij}, E_{kl}] = E_{ii} - E_{jj} \text{ if } i = l, j = k. \end{cases} \tag{47}$$

Для представления с крышкой первые три уравнения не поменяются. Последнее уравнение модифицируется:

$$[\hat{\rho}_m(E_{ij}), \hat{\rho}_m(E_{ji})] = \hat{\rho}_m(E_{ii}) - \hat{\rho}_m(E_{jj}) + \alpha(E_{ij}, E_{ji}) \cdot \mathrm{id}_\infty. \tag{48}$$

Здесь функция $\alpha(E_{ij}, E_{ji}) = -\alpha(E_{ji}, E_{ij}) = 1$ когда $i \leq 0, j \geq 1$ и ноль в остальных случаях. Для того что бы понять, что это правда, подействуем на четвертое уравнение системы (47) представлением ρ_m В единственном нетривиальном случае $j > i$ в левой его части можно заменить ρ_m на $\hat{\rho}_m$. Теперь рассмотрим два случая: $i \leq 0$ и $i > 0$. Имеем уравнение

$$[\hat{\rho}_m(E_{ij}), \hat{\rho}_m(E_{ji})] = \rho_m(E_{ii}) - \rho_m(E_{jj}). \tag{49}$$

В случае $i > 0$ безболезненно вешаем крышку на представления справа - в этом случае формула (48) получилась. Теперь второй случай $i \leq 0$. Он тоже разбивается на два случая: $i < j \leq 0$ и $i \leq 0 < j$. В первом случае можно безболезненно вычесть из ρ единицы, превратив их тем самым в $\hat{\rho}$ и снова получив (48). Во втором случае необходимо вычесть и прибавить единицу - вычитаемая единица навесит крышку на $\rho_m(E_{ii})$, а прибавляемая и есть $\alpha(E_{ij}, E_{ji})$. Таким образом мы получаем, что

$$\hat{\rho}_m([E_{ij}, E_{kl}]) = [\hat{\rho}_m(E_{ij}), \hat{\rho}_m(E_{kl})] - \alpha(E_{ij}, E_{kl}). \tag{50}$$

Тоесть построенное нами представление на самом деле проективно. Как известно проективное представление алгебры α_∞ это обычное представление ее центрального расширения $\alpha_\infty \oplus \mathbb{C} \cdot c$, причем $\hat{\rho}_m(c) = \mathrm{id}_\infty$. Что бы сохранить унитарность этого представления(да, оно было унитарным, на самом деле мы показали это при доказательстве утверждения 4), нужно потребовать самосопряженности центрального элемента $\omega(c) = c$. Можно показать, что каждое неприводимое представление со старшим весом ρ_m расширяется до унитарного неприводимого представления $\hat{\rho}_m$ центрального расширения алгебры α_∞ (?).

Комментарий 7 *О представлении осцилляторной алгебры.*

Вспомним, что наша алгебра(если смотреть на нее как на ассоциативную) содержит коммутативную подалгебру, натянутую на

$$\Lambda_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i+k}. \tag{51}$$

По формуле (50) получаем, что

$$[\hat{\rho}_m(\Lambda_n), \hat{\rho}_m(\Lambda_k)] = \alpha(\Lambda_n, \Lambda_k). \tag{52}$$

Вычислим этот коммутатор:

$$[\hat{\rho}_m(\Lambda_n), \hat{\rho}_m(\Lambda_k)] = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} [\hat{\rho}_m(E_{i,i+n}), \hat{\rho}_m(E_{j,j+k})] = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \{\delta_{j,i+n} \cdot \hat{\rho}_m(E_{i,j+k}) - \delta_{i,j+k} \cdot \hat{\rho}_m(E_{j,i+n}) + \alpha(E_{i,i+n}, E_{j,j+k})\}. \tag{53}$$

Видно, что первые два слагаемых просто сокращаются. Для α есть такая формула(по определению):

$$\alpha(E_{ij}, E_{kl}) = \delta_{il}\delta_{jk} \cdot (\theta(-i)\theta(j-1) - \theta(-j)\theta(i-1)). \tag{54}$$

Подставляя эту формулу в последнюю двукратную сумму (53) получаем:

$$[\hat{\rho}_m(\Lambda_n), \hat{\rho}_m(\Lambda_k)] = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \delta_{i,j+k}\delta_{j,i+n} \cdot (\theta(-i)\theta(j-1) - \theta(-j)\theta(i-1)) = \delta_{n,-k} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\theta(-i)\theta(i+n-1) - \theta(-i-n)\theta(i-1)). \tag{55}$$

Рассмотрим два случая: $n \geq 0$ и $n < 0$. В первом случае второе слагаемое ноль, а первое просто n. Второй случай аналогичен:

$$[\hat{\rho}_m(\Lambda_n), \hat{\rho}_m(\Lambda_k)] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{i,i+k+n} (\theta(-i)\theta(i+n-1) - \theta(-i-n)\theta(i-1)) = \mathrm{sign}(n) \cdot |n| \cdot \delta_{n,-k} = n \cdot \delta_{n,-k}. \tag{56}$$

Заметим так же, что $\hat{\rho}_m(\Lambda_0) = m \cdot \mathrm{id}_\infty$. Коммутационные соотношения (56) это коммутационные соотношения осцилляторной алгебры, так что мы построили еще и унитарное представление осцилляторной алгебры.

Представление алгебры Вирасоро

Вспомним уравнение (7):

$$\alpha_{\infty} \ni d_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[i-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right]\cdot E_{i,i+n} \Rightarrow d_n\nu_k = \left[k-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right]\cdot \nu_{k-n}. \tag{57}$$

Утверждение 7 *Коммутатор в представлении бесконечной внешней степени:*

$$\left[\hat{\rho}_m\left(d_n\right), \hat{\rho}_m\left(d_k\right)\right] = \left(n-k\right)\hat{\rho}_m\left(d_{n+k}\right) + \alpha\left(d_n, d_k\right). \tag{58}$$

Док-во у-я 7

Раскроем генераторы:

$$\left[\hat{\rho}_m\left(d_n\right), \hat{\rho}_m\left(d_k\right)\right] = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left(i-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(j-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right)\cdot\left[\hat{\rho}_m\left(E_{i,i+n}\right), \hat{\rho}_m\left(E_{j,j+k}\right)\right]. \tag{59}$$

Снова пользуемся уравнением (50) с подставленным в него (54):

$$\left[\hat{\rho}_m\left(E_{i,i+n}\right), \hat{\rho}_m\left(E_{j,j+k}\right)\right] = \hat{\rho}_m\left(\delta_{j,i+n}\cdot E_{i,j+k} - \delta_{i,j+k}\cdot E_{j,i+n}\right) + \delta_{i,j+k}\delta_{j,i+n}\cdot\left(\theta(-i)\theta(j-1)-\theta(-j)\theta(i-1)\right). \tag{60}$$

Вычислим сначала вклад от первого слагаемого:

$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left(i-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(j-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right)\cdot\delta_{j,i+n}\cdot\hat{\rho}_m\left(E_{i,j+k}\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(i-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(i+n-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right)\cdot\hat{\rho}_m\left(E_{i,i+n+k}\right). \tag{61}$$

Аналогично слагаемое со второй дельтой:

$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left(i-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(j-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right)\cdot\delta_{i,j+K}\cdot\hat{\rho}_m\left(E_{i,j+k}\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(j+k-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(j-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right)\cdot\hat{\rho}_m\left(E_{j,j+n+k}\right). \tag{62}$$

Вычитаем одно из другого:

$$\left(i-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(i+n-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right) - \left(i+k-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(i-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right) = \left(n-k\right)\cdot\left(i-\alpha-\beta\left(n+k\right)\alpha\right). \tag{63}$$

Таким образом первое слагаемое это $\left(n-k\right)\cdot\hat{\rho}_m\left(d_{n+k}\right)$. Теперь вычислим 2-коцикл $\alpha\left(d_n, d_k\right)$. Ограничимся случаем $n \geq 0$:

$$\alpha\left(d_n, d_k\right) = \delta_{n,-k}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(i-\alpha-\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(i+n-\alpha-\beta\left(k+1\right)\right)\theta\left(-i\right)\theta\left(i+n-1\right). \tag{64}$$

Тета символы вырежут сумму от $-n+1$ до 0, так что

$$\alpha\left(d_n, d_k\right) = \delta_{n,-k}\sum_{i=0}^{n-1} \left(i+\alpha+\beta\left(n+1\right)\right)\left(i+\alpha+\beta\left(k+1\right)-n\right). \tag{65}$$

Эту сумму легко вычислить:

$$\alpha\left(d_n, d_k\right) = \delta_{n,-k}\cdot\left\{\frac{n\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6} + \frac{n\left(n-1\right)}{2}\cdot\left(2\alpha+2\beta-n\right) + n\cdot\left(\alpha+\beta\left(n+1\right)\right)\cdot\left(\alpha-\beta\left(n-1\right)-n\right)\right\}. \tag{66}$$

Если повозиться с перегруппировкой слагаемых то получится:

$$\alpha\left(d_n, d_k\right) = \delta_{n,-k}\cdot\left\{\frac{n^3-n}{12}\cdot\left(-12\beta^2+12\beta-2 := c_\beta\right) + n\alpha\left(\alpha+2\beta-1\right)\right\}. \tag{67}$$

Определение 9 *Представление алгебры Вирасоро на пространстве $F^{(m)}$:*

$$n \neq 0 \Rightarrow L_n = \hat{\rho}_m\left(d_n\right), L_0 = \hat{\rho}_m\left(d_0\right) + \frac{\alpha\left(\alpha+2\beta-1\right)}{2}. \tag{68}$$

Вторая добавка нужна для сохранения коммутационного соотношения с центральным зарядом:

$$\left[L_n, L_{-n}\right] = \left[\hat{\rho}_m\left(d_n\right), \hat{\rho}_m\left(d_{-n}\right)\right] = 2n\hat{\rho}_m\left(d_0\right) + 2n\cdot\frac{\alpha\left(\alpha+2\beta-1\right)}{2} + \frac{n^3-n}{12}\cdot c_\beta = 2nL_0 + \frac{n^3-n}{12}\cdot c_\beta. \tag{69}$$

В случае $n \neq -k$ все понятно. Таким образом мы построили представление. Выясним, какая у него минимальная энергия.

Утверждение 8 *Действие на вакуум:*

$$n>0 \Rightarrow L_n\psi_m = 0, L_0\psi_m = \frac{(\alpha-m)(\alpha+2\beta-m-1)}{2}\cdot\psi_m. \tag{70}$$

Док-во у-я 8

Первое очевидно - оно нулиться потому что в каждом слагаемом будет оператор, какой-нибудь заменяющий индекс на уже имеющийся. Для того что бы понять второе вычислим действие $\hat{\rho}_m(d_0)$ на состояние с нихшей энергией ψ_m:

$$\hat{\rho}_m(d_0)\psi_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(k-\alpha-\beta)\hat{\rho}_m(E_{k,k})\psi_m = \sum_{k\leq 0}(k-\alpha-\beta)(\rho_m(E_{k,k})-\mathrm{id}_\infty)\psi_m + \sum_{k>0}(k-\alpha-\beta)\rho_m(E_{k,k})\psi_m. \tag{71}$$

Рассмотрим два случая. В случае $m\leq 0$ второе слагаемое есть 0, а в первом слагаемом выживут k от 0 до $m+1$:

$$\hat{\rho}_m(d_0)\psi_m = \left\{\sum_{k=0}^{|m|-1} k+\alpha+\beta\right\}\cdot\psi_m = -\left(-\frac{|m|(|m|-1)}{2}+m(\alpha+\beta)\right)\cdot\psi_m = -\left(m(\alpha+\beta)-\frac{m(m+1)}{2}\right)\cdot\psi_m. \tag{72}$$

Случай $m>0$ аналогичен. Сложим это с добавкой из (68):

$$\frac{-2m(\alpha+\beta)+m(m+1)+\alpha^2+2\alpha\beta-\alpha}{2} = \frac{(\alpha-m)(\alpha+2\beta-m-1)}{2}. \tag{73}$$

Комментарий 8 *О, вообще говоря, неунитарности представления на бесконечной внешней степени.*

Это связано с тем что инволюция на α_∞ не согласована с инволюцией в алгебре Vir, тоесть $L_n^\dagger \neq L_{-n}$ в случае общих α,β.

Утверждение 9 *Достаточные условия для унитарности построенного представления* - $\beta=-1/2, \mathrm{Im}(\alpha)=0$.

Док-во у-я 9

Пишем уравнение, олицетворяющее унитарность

$$\hat{\rho}_m^\dagger(d_{n\neq 0}) = \hat{\rho}_m(d_{-n}) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(k-\bar{\alpha}-\bar{\beta}(n+1)\right)E_{k+n,k} = \hat{\rho}_m(d_{-n}) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}}(k-\alpha+\beta(n-1))E_{k,k-n}. \tag{74}$$

Отсюда получается уравнение:

$$-n-\bar{\alpha}-\bar{\beta}(n+1) = -\alpha+\beta(n-1) \Rightarrow \mathrm{Re}[\beta]=-1/2, \mathrm{Im}[\alpha+\beta]=0. \tag{75}$$

Теперь потребуем эрмитовости L_0. Оно содержит второе слагаемое из (68), вещественность которого приводит к уравнению

$$\mathrm{Im}[\alpha(\alpha+2\beta-1)] = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}[\alpha]\cdot\mathrm{Im}[\alpha+2\beta-1]+\mathrm{Im}[\alpha]\cdot\mathrm{Re}[\alpha+2\beta-1] = 0 \Rightarrow 2\mathrm{Im}[\alpha] = \mathrm{Re}[\alpha]\cdot\mathrm{Im}[\alpha+\beta] = 0. \tag{76}$$

Вещественность каждого слагаемого в первой сумме (68) приводит к тому, что $\mathrm{Im}[\beta]=0$.

Комментарий 9 *Интересные случаи.*

Утверждается, что есть 4 особо интересных представления: $\beta_{\mathrm{Kac}}=1/2$ - здесь $c=1$ и представление очевидно унитарно, так как подлежащее представление унитарно(?). Следующие два случая $\beta_{\mathrm{Kac}}=0$ и $\beta_{\mathrm{Kac}}=1$ - в них $c=-2$, чем этот случай интересен не ясно. В четвером случае, когда $\beta_{\mathrm{Kac}}=-1, \alpha_{\mathrm{Kac}}=1$ получается, что $c=-26$ - это как раз тот случай, который встречается при вычислении критической размерности в теории бозонной струны. Это соответственно представления на плотностях, функциях, дифференциальных формах и векторных полях, тоесть значки $\alpha_{\mathrm{Kac}},\beta_{\mathrm{Kac}}$ имеют какое-то отношение к типу тензоров, на которых строится представление(?) - см. конец лекции 5.