

А. В. СМИЛГА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
ЧЕРЕЗ
СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ
ОЧКИ

А. В. Смилга

Дифференциальная геометрия через суперсимметричные очки

Авторизованный перевод с английского

Москва
Издательство МЦНМО

УДК 530.22

ББК 22.31

C50

Смилга А. В.

Дифференциальная геометрия через суперсимметричные очки

Электронное издание

М. : МЦНМО, 2024

415 с.

ISBN 978-5-4439-3801-1

Суперсимметричные теории поля — это теории, в которых спектр состояний точно вырожден и имеется равное число бозонов и фермионов с одинаковыми массами. Они были изобретены физиками, и с некоторыми вариантами этих теорий связывается надежда на построение «Единой теории всего» — гипотетической фундаментальной теории, описывающей наш мир.

Но оказалось также, что суперсимметрия представляет очень красивый и удобный язык, на котором можно описывать известные математические конструкции дифференциальной геометрии, такие как комплекс де Рама или комплекс Дольбо, и он позволил также получить несколько новых интересных математических результатов в этой области. В предлагаемой книге читатель найдёт подробный обзор этих интересных вопросов.

Написанная на физическом уровне строгости книга адресована, однако, как физической, так и математической аудитории. Поэтому основная часть предвзрета краткими сведениями по геометрии гладких многообразий и по аналитической механике систем с обычными и грасмановыми переменными.

Подготовлено на основе книги:

Смилга А. В.

Дифференциальная геометрия через суперсимметричные очки.

М.: МЦНМО, 2024. — 416 с. — ISBN 978-5-4439-1801-3

Авторизованный перевод с английского:

Smilga A. V.

Differential Geometry through Supersymmetric Glasses.

Singapore: World Scientific, 2020.

ISBN 978-5-4439-1801-3

© А. Смилга, 2023.

© МЦНМО, 2024.

Оглавление

Введение	7
----------	---

Часть I. Геометрия

<i>Глава 1. Вещественные многообразия</i>	19
§1.1. Риманова геометрия	19
§1.2. Дифференциальные формы	26
§1.3. Главные расслоения и калибровочные поля	32
§1.4. Касательное пространство и фильбайны	35
<i>Глава 2. Комплексные многообразия</i>	41
§2.1. Комплексное описание	41
§2.2. Вещественное описание	52
§2.3. Примеры	61
<i>Глава 3. Гиперкэлеровы многообразия и многообразия НКТ</i>	65
§3.1. Гиперкэлеровы многообразия	65
§3.2. Многообразия НКТ	78

Часть II. Физика

<i>Глава 4. Динамические системы</i>	99
§4.1. Классическая механика	99
§4.2. Стандартная квантовая механика	110
§4.3. Грассмановы переменные	114
§4.4. Грассманова динамика	116
<i>Глава 5. Суперсимметрия</i>	121
§5.1. Основные определения	121
§5.2. Суперсимметричный осциллятор	124
§5.3. Электроны в магнитном поле	126
§5.4. Модель Виттена	131
§5.5. Расширенная суперсимметрия	134
§5.6. Классическая суперсимметрия	136

Глава 6. Интегралы по траекториям и индекс Виттена	141
§ 6.1. Интегралы по траекториям в квантовой механике .	141
§ 6.2. Ядро грассманова оператора эволюции	148
§ 6.3. Индекс Виттена	152
Глава 7. Суперпространства и суперполя	163
§ 7.1. $\mathcal{N} = 1$	164
§ 7.2. $\mathcal{N} = 2$	169
§ 7.3. $\mathcal{N} = 4$	176
§ 7.4. Гармоническое суперпространство.	183
Часть III. Синтез	
Глава 8. Суперсимметричное описание комплекса де Рама	197
§ 8.1. Основные структуры	197
§ 8.2. Эйлерова характеристика	205
§ 8.3. Деформации. Теория Морса. Квазикручения	209
Глава 9. Суперсимметричное описание комплекса Дольбо	217
§ 9.1. Описание через суперполя $\mathcal{N} = 2$	217
§ 9.2. Описание через суперполя $\mathcal{N} = 1$	225
§ 9.3. Комплекс Дольбо на S^4 с выколотой точкой.	235
Глава 10. Сигма-модели с расширенными суперсимметриями	241
§ 10.1. Кэлеровы и кэлеровоподобные многообразия	241
§ 10.2. Симплектическая сигма-модель	252
§ 10.3. Модели НКТ и би-НКТ.	259
§ 10.4. Модели $\mathcal{N} = 8$	268
Глава 11. Укращение модельного зверинца	279
§ 11.1. Преобразования подобия	279
§ 11.2. Гамильтонова редукция.	284
Глава 12. НК и НКТ через гармонические очки	297
§ 12.1. Гиперкэлерова модель.	298
§ 12.2. Модель НКТ	306
§ 12.3. Метрика. Семейства Обаты. НКТ \rightarrow НК	315
§ 12.4. Примеры	325
§ 12.5. Калибровочные поля.	331

Глава 13. Калибровочные поля на многообразиях	335
§ 13.1. Спиноры. Оператор Дирака	335
§ 13.2. Магнитное поле на S^2	344
§ 13.3. Линейные расслоения на $\mathbb{C}P^n$	355
§ 13.4. Неабелевы поля. Инстантоны на S^4	358
§ 13.5. Теорема КЛВ и её НКТ обобщение	369
Глава 14. Теорема Атьи—Зингера	373
§ 14.1. Формулировка и интерпретация	373
§ 14.2. Сигнатура Хирцебруха	376
§ 14.3. Индекс Дирака	379
§ 14.4. Вычисление функционального интеграла	387
§ 14.5. Неабелев индекс Дирака	393
Литература	395
Предметный указатель	411

Введение

В 1982 году Эдвард Виттен опубликовал свою знаменитую статью [1], где он показал, что некоторые классические задачи дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии — такие как комплекс де Рама и теория Морса — могут быть описаны весьма простым и прозрачным образом на языке суперсимметричной квантовой механики. Однако, насколько я могу судить на основании моих бесед с математиками, язык суперсимметрии не стал для них рабочим языком. Специалисты, изучающие эту область математики, предпочитают работать более традиционными методами.

Об этом можно пожалеть, поскольку суперсимметрия не только довольно просто описывает известные ранее факты, но также позволяет получить много *новых* математических результатов. И это послужило для меня основным побудительным мотивом к написанию данной книги. Я попытаюсь описать суперсимметричный формализм так, чтобы это было понятно как физикам, так и математикам, и вывести на его основе как хорошо известные, так и недавно полученные математические результаты по дифференциальной геометрии многообразий.

Можно сделать следующее общее замечание. Очевидна тесная связь математики с теоретической физикой. Можно вспомнить, что геометрия впервые появилась в Древнем Вавилоне как прикладная дисциплина, обслуживавшая нужды крестьян и сборщиков налогов. Только позднее люди поняли, что геометрия интересна не только с практической, но и с эстетической точки зрения, и стали играть в геометрические игры, не думая о народно-хозяйственных приложениях. А ещё позднее они с удивлением обнаружили, что чисто, как им казалось, абстрактные многомерные геометрические конструкции оказались удобным инструментом для описания окружающего мира.

Диалог между чистой математикой и теоретической физикой полезен для обеих этих дисциплин, нет нужды останавливаться

на многочисленных иллюстрирующих это примерах. К сожалению, этому диалогу сильно мешает сегодня различие языков, на котором говорят и думают физики и математики. Такое различие приводит к тому, что физику трудно понять статью, написанную математиком, даже если факты, изложенные в статье, ему хорошо знакомы. Они, однако, изложены в необычной для него форме, с которой он плохо знаком и к которой не привык. Математику не менее трудно разобраться в статье, написанной физиком...

Здесь стоит сделать философско-терминологическое отступление (или, если угодно, отступление в отступлении). Дело в том, что слово «физик» означает сегодня не совсем то, что оно означало во времена Ньютона, и не то, что оно означало ещё полвека назад. Тогда оно имело вполне ясный смысл: «физика» в переводе с греческого значит природоведение, и физик — это учёный, занимающийся физикой и изучающий свойства мира, в котором мы живём. Это относилось как к экспериментаторам, так и к теоретикам. Теоретик мог использовать в своей работе сложный математический аппарат, но суть его работы состояла в объяснении результатов опыта и в генерации предсказаний, которые могли быть проверены на опыте. Высшим судьёй его деятельности был эксперимент. Всё остальное, включая логическую строгость вывода этих предсказаний, имело второстепенное, подчинённое значение.

Сейчас ситуация иная, поскольку мы практически достигли технологического предела в строительстве новых ускорителей и эксперимент в физике высоких энергий перестал развиваться. Новой существенной экспериментальной информации больше, увы, почти не поступает, и живая связь между теорией и экспериментом прервалась. В этих условиях многие теоретики перестали изучать природу, т. е. перестали быть физиками в традиционном понимании, и занялись изучением *воображаемых* миров, используя методы, развитые в прошлом столетии для описания мира реального. При отсутствии эксперимента единственным критерием правильности научной работы стала её логическая непротиворечивость. Фактически родилась новая область математики, но занимаются ей теоретики, получившие образование на физических факультетах университетов и часто (если речь

не идёт о самых молодых людях) имеющие опыт работы в роли «физических физиков». И взаимное вавилонское непонимание, о котором говорилось выше, — это в значительной мере непонимание между исследователями, работающими в этой новой области науки (физиками в современном смысле, но правильнее их назвать «физическими математиками») и в традиционных математических областях.

Такой раскол существовал не всегда. 200 лет назад его ещё почти не было. 100 лет назад он уже существовал, но не был таким глубоким. Раскол углубился в середине прошлого века, когда Никола Бурбаки написал влиятельную серию монографий по разным областям математики и сделал это в весьма строгой формальной манере. Нравится это нам, или нет, но расхождение языков — это свершившийся факт, с которым нельзя не считаться.

Что касается предлагаемой читателю книги, она написана на «суржике» — смеси этих двух языков. Я сделал это в надежде, что книга окажется понятной учёным из обоих «лагерей».

Более детально:

1. Изучая геометрию многообразий, мы интересуемся их инвариантными свойствами, не зависящими от выбора координат. Можно сформулировать утверждения римановой геометрии в строгой рафинированной манере без использования координат, и математики часто поступают именно так. Но более, как нам кажется, удобно использовать *какие-то* координаты, параметризующие многообразие (не забывая, конечно, что эти координаты могут быть выбраны многими разными способами). В частности, *векторное поле* на многообразии размерности D будет пониматься просто как набор D функций V^N координат x^M , преобразующихся соответствующим образом при общекординатных преобразованиях. Под *аффинной связностью* мы будем понимать объект с тремя индексами G_{MN}^P , который входит в определение ковариантной производной. G_{MN}^P может быть симметричным относительно перестановки $M \leftrightarrow N$, если нет кручения, или не обладать такой симметрией, если кручение присутствует.

2. Будучи физиком (в современном смысле, обрисованном выше), автор этой книги говорит на математическом языке с сильным акцентом. Однако книга эта посвящена математическим вопросам, и я попытаюсь организовать её так, как организованы

математические книги, — с определениями, теоремами и леммами. Я буду пытаться так делать (хотя и непоследовательно) даже при описании чисто физических сюжетов, таких как классическая механика.

Все понятия, кроме самых элементарных, будут определены на страницах книги, так что читатель — и физик, и математик — сможет понять, о чём идёт речь. Должен предостеречь: эти определения будут с неизбежностью иметь отчётливый физический привкус. Доказательства теорем не будут неверными, но будут лишены настоящей математической строгости. По двум причинам: во-первых, не будучи математиком, я просто не могу такую строгость обеспечить, и, во-вторых, наша цель — быть понятным обоим сообществам.

Основная идея Виттена состояла в следующем. Рассмотрим гладкое многообразие размерности D , параметризованное координатами x^M . Рассмотрим классический комплекс де Рама, т. е. множество всех p -форм

$$\alpha^{(p)} = \alpha_{M_1 \dots M_p}(x^N) dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}, \quad (0.1)$$

$p = 0, \dots, D$. Определим оператор внешнего дифференциала (или внешней производной) формы d ,

$$d\alpha = \partial_N \alpha_{M_1 \dots M_p} dx^N \wedge dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}, \quad (0.2)$$

и сопряжённый оператор d^\dagger , который действует на p -форму как $(-1)^{pD+D+1} \star d \star$, где \star — оператор дуальности (читатель найдёт дальнейшие детали в главе 1). Операторы d и d^\dagger нильпотентны, а антикоммутатор $\{d, d^\dagger\}$ есть некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Фактически он представляет обобщение оператора Лапласа—Бельтрами Δ , действующее на дифференциальные формы.

И мы замечаем, что алгебра

$$d^2 = (d^\dagger)^2 = 0, \quad \{d, d^\dagger\} = -\Delta \quad (0.3)$$

изоморфна простейшей алгебре суперсимметрии

$$\hat{Q}^2 = (\hat{Q}^\dagger)^2 = 0, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \hat{H}, \quad (0.4)$$

где \hat{Q} и \hat{Q}^\dagger — эрмитово сопряжённые суперзаряды и \hat{H} — гамиль-

тониан. Отсюда следует, что $[\hat{Q}, \hat{H}] = [\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] = 0$, так что система имеет один комплексный или два вещественных интеграла движения. На этом языке p -форма (0.1) интерпретируется как волновая функция, лежащая в гильбертовом пространстве, где действуют операторы суперзарядов и гамильтониан. Эта волновая функция зависит от обычных динамических переменных x^M и также от *грасмановых* антикоммутирующих переменных ψ^M . Волновую функцию

$$\Psi(x^M, \psi^M) \quad (0.5)$$

можно разложить в ряд по ψ^M . Замечательно то, что такой ряд *конечен*, поскольку в произведении $D + 1$ нильпотентных антикоммутирующих факторов $\prod_{i=1}^{D+1} \psi^{M_i}$ по крайней мере один фактор повторяется дважды и выражение обращается в ноль. В этой гамильтоновой картине p -форма (0.1) отображается в волновую функцию, включающую произведение p *грасмановых* факторов.

Такая интерпретация комплекса де Рама весьма полезна, поскольку:

1. Она позволяет использовать всё многообразие физических методов, которые были развиты для изучения динамических систем со времён Ньютона и Шрёдингера.

2. Все важные для геометрических приложений динамические системы суперсимметричны. И это позволяет использовать мощные методы — в частности, методы, основанные на понятиях *суперпространства* и *суперполя*, — которые были развиты физиками за полвека, истекшие с 1971 года, года рождения суперсимметрии [2].

Следует отметить следующее. Суперсимметрия была открыта и затем изучалась физиками главным образом как новая интересная симметрия *полевых* систем. Однако для геометрических приложений нам будут интересны только суперсимметричные *квантово-механические* (СКМ) системы, в которых динамические переменные не зависят от пространственных координат, как это имеет место в теориях поля, а только от времени. По этой причине пространственные координаты в роли независимых переменных [не путать с динамическими переменными $x^M(t)$] не появятся на страницах нашей книги практически никогда.

В уравнениях (0.4) записана простейшая алгебра СКМ с одним комплексным или двумя вещественными суперзарядами. Позже мы увидим, что эта алгебра релевантна для описания геометрии произвольных вещественных многообразий, где определены внешняя производная d комплекса де Рама и сопряжённый к ней оператор, и также геометрии комплексных многообразий, где определены внешняя производная комплекса Дольбо и сопряжённый оператор.

Но алгебра суперсимметрии может быть богаче и включать несколько пар сопряжённых суперзарядов. Мы увидим, что такая *расширенная* суперсимметрия релевантна для описания многообразий специального типа, в частности *кэлеровых* и *гиперкэлеровых* многообразий, а также так называемых многообразий НКТ¹. Все эти и некоторые другие многообразия будут подробно обсуждаться дальше.

План книги следующий.

Часть *Геометрия* содержит предварительную математическую информацию — некоторые известные факты теории гладких многообразий. Она адресована главным образом физикам. Мы начинаем с краткого описания римановой геометрии (физик, изучавший общую теорию относительности, может это описание пропустить). Затем мы описываем комплекс де Рама, комплекс Дольбо для комплексных многообразий, геометрию кэлеровых и гиперкэлеровых многообразий и в заключение подробно разбираем геометрию многообразий НКТ (этот сюжет не так хорошо известен и может представлять интерес и для математиков).

В части *Физика*, адресованной в основном математикам, мы даём необходимую информацию об обычных и суперсимметричных механических системах. Мы начинаем с краткого ликбеза по лагранжеву и гамильтонову формализму в обычной классической механике и описываем также квантовую механику. В принципе, эти вопросы изучаются не только на физических, но и на математических факультетах хороших университетов, однако мой опыт обсуждений с коллегами-математиками говорит, что многие из них не знакомы с ними достаточно хорошо.

¹НКТ — это сокращение от «hyper-Kähler with torsion».

Что в университетах определённо не изучается — это классические и квантовые динамические системы с *грассмановыми* динамическими переменными. Им посвящена вторая часть четвёртой главы.

После этого мы переходим к суперсимметричным системам. В пятой главе мы определяем суперсимметричную систему как систему, где действует алгебра (0.4) (математическое определение), или как систему, где все возбуждённые состояния спектра двукратно вырождены (физическое определение). Мы обсуждаем простейший физический пример такой системы (движение электрона в однородном магнитном поле — задача, решённая Ландау 90 лет назад) и некоторые другие простые примеры.

Математическая структура этих моделей прояснена в седьмой главе, где мы вводим понятия *суперпространства* (для квантово-механических систем правильнее говорить о «супервремени») и одномерных *суперполей* (или «суперпеременных»). В заключение мы определяем одномерное *гармоническое* суперпространство, которое мы используем в дальнейшем для описания многообразий НКТ.

В предыдущей, шестой главе мы описываем формализм континуального интеграла для обычных и суперсимметричных систем и вводим важное понятие *индекса Виттена*.

Главная часть книги — это *Синтез*. Мы возвращаемся к геометрическим структурам, обсуждавшимся в первой части, но описываем теперь известные и не столь хорошо известные новые результаты на языке суперсимметрии. Восьмая глава посвящена комплексу де Рама (мы также касаемся теории Морса, смысл которой очень просто раскрывается на суперсимметричном языке). Глава 9 посвящена комплексу Дольбо. В числе прочего мы даём суперсимметричное доказательство теоремы Ньюландера—Ниренберга и показываем, что комплекс Дольбо можно определить не только для комплексных, но и для некоторых некомплексных чётномерных многообразий, таких как S^4 .

В главе 10 мы рассматриваем системы СКМ с *расширенной* суперсимметрией, включающие несколько пар эрмитово-сопряжённых суперзарядов (Q_j, Q_j^\dagger) . Эти модели описывают кэлеровы, гиперкэлеровы многообразия, многообразия НКТ и некоторые другие типы многообразий (квазикомплексные, спинорные,

биспинорные, бикэлеровы и би-НКТ многообразия), которые не привлекли пока внимания математиков.

В главе 11 мы устанавливаем общую связь между разными типами моделей (и, значит, между разными типами многообразий). В частности, мы показываем, что все суперсимметричные модели, описанные в главах 8–10, могут быть получены из тривиальных плоских невзаимодействующих моделей применением двух операций: (i) преобразования подобия для суперзарядов и (ii) гамильтоновой редукции.

Двенадцатая глава посвящена гиперкэлеровым многообразиям и многообразиям НКТ, описываемым на языке гармонического суперпространства. Мы показываем, что по аналогии с тем, что любая кэлорова метрика может быть получена из кэлорова потенциала, $h_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} \mathcal{K}(z^n, \bar{z}^n)$, произвольная гиперкэлорова метрика может быть выведена из гармонического препотенциала \mathcal{L}^{+4} . Аналогично, данные, включающие два гармонических препотенциала — \mathcal{L}^{+3} и \mathcal{L} , позволяют в конце концов получить² метрику НКТ общего вида.

В главе 13 мы обсуждаем суперсимметричные модели, описывающие калибровочные поля на многообразиях. В переводе на математический язык калибровочное поле — это связность главного расслоения. Такое расслоение характеризуется целым топологическим зарядом — классом Чженя. Модели с нецелым классом Чженя (в частности, плоскую модель с нецелым магнитным потоком) можно также рассматривать — их гамильтониан может быть хорошо определён, но такие модели не обладают суперсимметрией.

Последняя, четырнадцатая глава посвящена теореме Атьи—Зингера, которая связывает индекс некоторых эллиптических операторов с топологическими характеристиками многообразий, где эти операторы действуют. Мы показываем, что этот индекс можно интерпретировать как индекс Виттена соответствующих систем СКМ, и вычисляем его в некоторых нетривиальных случаях.

²Процедура здесь значительно сложнее, чем в кэлеровом случае, где метрика выводится из кэлорова потенциала простым дифференцированием.

Наши непоследовательные обозначения

- Чтобы отличить обыкновенные функции от операторов, мы будем, как правило, навешивать на операторы шляпки: H — классический гамильтониан и \hat{H} — квантовый гамильтониан. Но иногда шляпки будут оставаться на вешалках. Так, голова у операторов d и d^\dagger в уравнениях (0.3) осталась непокрытой.
- Обычное обозначение комплексного сопряжения обыкновенных или грасмановых функций — это черта, $A \rightarrow \bar{A}$. В некоторых случаях мы будем использовать для сопряжения обыкновенных функций также звёздочку: A^* .
- Эрмитово-сопряжённые операторы будут обозначаться \hat{A} , но иногда также \hat{A}^\dagger .
- Вещественные мировые индексы будут обозначаться заглавными буквами из середины латинского алфавита: M, N и т. д. Для индексов в касательном пространстве мы будем брать буквы из начала алфавита: A, B и т. д.
- В случае комплексных многообразий голоморфные мировые тензорные индексы будут обозначаться строчными буквами: m, n, \dots Для антиголоморфных индексов мы используем черту: \bar{m}, \bar{n}, \dots Соответствующие касательные индексы суть a, b, \dots и \bar{a}, \bar{b}, \dots
- В некоторых случаях (хотя и не всегда) одна из чёрточек в выражениях типа $\bar{V}^{\bar{n}}$ будет опускаться и мы будем писать $V^{\bar{n}}$ или \bar{V}^n .

Благодарности

Я глубоко признателен моим соавторам из Дубны — Евгению Иванову и Сергею Федоруку, без которых я не смог бы получить многие оригинальные результаты, изложенные в этой книге. Зохар Комаргодский, Джордж Пападопулос, Алексей Рослый и Сергей Федорук прочитали рукопись книги и сделали много ценных замечаний. Я благодарен Борису Смильге за помощь в

оформлении рисунков. Хочу поблагодарить также всех сотрудников МЦНМО, взявших на себя труд по изданию перевода моей книги, и в особенности корректора Марию Онуфриенко за очень тщательную и качественную работу.

Часть I
Геометрия

Глава 1

Вещественные многообразия

Эта и две следующие главы книги адресованы читателю-физику. Мы также рекомендуем ему два прекрасных обзора: обзор Эгучи, Джилки и Хансона [3] и обзор Канделаса [4].

§1.1. Риманова геометрия

Рассмотрим D -мерное гладкое многообразие M без границы. Малая окрестность¹ каждой точки такого многообразия гомеоморфна \mathbb{R}^D .

Любое такое многообразие можно представить как объединение

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \quad (1.1)$$

конечного числа открытых подмножеств $U_{\alpha} \subset M$, каждое из которых гомеоморфно \mathbb{R}^D . Например, поверхность Земли можно представить как объединение двух открытых дисков: один из них имеет центр на Северном полюсе и простирается вниз до тропика Козерога, а другой имеет центр на Южном полюсе и простирается вверх до тропика Рака.

Введём на \mathbb{R}^D естественные декартовы координаты. Тогда взаимно однозначное отображение $U_{\alpha} \leftrightarrow \mathbb{R}^D$ или $U_{\alpha} \leftrightarrow Q^D$, где Q^D есть подмножество \mathbb{R}^D с топологией открытого диска, даёт нам некоторую карту U_{α} — каждая точка множества U_{α} характеризуется набором координат $\{x^M\}$. Существует много разных подобных отображений и соответственно много разных карт $\{x^M\}$. Переход от одной карты к другой называется *репараметризацией*, или *общекординатным преобразованием*, или *диффеоморфизмом*.

¹Под «окрестностью» мы понимаем близкие точки, т. е. мы подразумеваем, что на многообразии определена метрика. Математики часто рассматривают более общие, не обязательно метрические многообразия, но в нашей книге мы этого делать не будем.

Множества U_α могут пересекаться. Точки в пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ принадлежат обеим картам (Ялту можно найти на карте России и на карте Европы) и описываются, таким образом, двумя различными наборами координат $\{x_{(\alpha)}^M\}$ и $\{x_{(\beta)}^M\}$. Один набор может быть выражен через другой:

$$x_{(\alpha)}^N = f_{\alpha\beta}^N(x_{(\beta)}^M). \quad (1.2)$$

Функции $f_{\alpha\beta}^N$ называются *отображениями склейки*. Совокупность всех карт называется *атласом* многообразия.

Определение 1.1. *Гладким* многообразием называется многообразие, где отображения склейки бесконечно дифференцируемы.

Определение 1.2. *Ориентируемое* многообразие есть многообразие, где можно выбрать карты таким образом, что все якобианы переходов между ними $|\partial_M f_{\alpha\beta}^N|$ положительны.

Хорошо известный пример неориентируемого многообразия — это так называемая бутылка Клейна. Но в этой книге нас будут интересовать только гладкие ориентируемые многообразия.

На многообразии M можно задать скалярные, векторные и тензорные поля. Скалярное поле зависит только от точки M и инвариантно относительно репараметризаций.

Существует два типа векторов.

Определение 1.3. Набор D функций координат, которые преобразуются при репараметризациях тем же образом, что и dx^M ,

$$V'^M = \frac{dx'^M}{dx^N} V^N, \quad (1.3)$$

называется *контравариантным вектором*.

Определение 1.4. Набор D функций координат, которые преобразуются при репараметризациях тем же образом, что и частные производные ∂_M ,

$$V'_M = \frac{dx^N}{dx'^M} V_N, \quad (1.4)$$

называется *ковариантным вектором*.

Используя обычные соглашения, мы пишем индекс у контравариантного вектора наверху, а у ковариантного внизу. По повторяющимся индексам производится суммирование. Если M —

плоское евклидово пространство \mathbb{R}^D и мы ограничиваемся рассмотрением жёстких вращений и трансляций, между двумя типами векторов нет различия.

Мы можем далее рассматривать тензоры с произвольным числом ковариантных и/или контравариантных индексов. Например, тензор T_N^M ранга (1, 1) определяется как набор D^2 функций от координат, которые преобразуются при репараметризациях как

$$(T_N^M)' = \frac{dx'^M}{dx^P} \frac{dx^Q}{dx'^N} T_Q^P. \quad (1.5)$$

Обобщение на тензор произвольного ранга очевидно.

Произведение двух тензоров есть также тензор. Это произведение может сохранить все индексы сомножителей, или некоторые пары индексов могут быть свёрнуты. Доказательство того факта, что если T_N^M и S_N^M — тензоры [т. е. преобразуются согласно (1.5)], то объект $R_N^M = T_P^M S_N^P$ есть также тензор, а $T_N^M S_M^N$ — скаляр, мы оставляем читателю.

Другое имя для метрических гладких многообразий, рассматриваемых в этой книге, — *римановы многообразия*.

Если расстояние между двумя точками X и Y достаточно мало, то эти точки лежат на одной карте U_α и их координаты близки друг к другу. Пусть ds есть расстояние между точками X и $X + dX$ с координатами x^M и $x^M + dx^M$. Тогда ds^2 — квадратичная форма,

$$ds^2 = g_{MN}(x^P) dx^M dx^N. \quad (1.6)$$

В нашей книге мы будем рассматривать только многообразия с положительным ds^2 для ненулевых dx^M . Но читатель понимает, что это условие не выполняется для плоского пространства Минковского или кривого пространства с сигнатурой Минковского — пространства, в котором мы живём.

Из скалярности ds^2 следует, что g_{MN} — симметричный ковариантный тензор второго ранга. Он называется *метрическим тензором*. Можно также определить обратный метрический тензор g^{MN} , удовлетворяющий свойству $g_{MN} g^{NP} = \delta_M^P$. Для любого контравариантного вектора V^M вектор $V_M = g_{MN} V^N$ ковариантен. Для любого ковариантного вектора V_M вектор $V^M = g^{MN} V_N$ контравариантен.

Теорема 1.1. *Выражение*

$$E_{M_1 \dots M_D} = \sqrt{g} \varepsilon_{M_1 \dots M_D}, \quad (1.7)$$

где $g = \det(g_{MN})$ и $\varepsilon_{M_1 \dots M_D}$ полностью антисимметрично по индексам с нормировкой $\varepsilon_{1 \dots D} = 1$, есть инвариантный тензор (т. е. оно сохраняет свой вид при репараметризациях).

Доказательство. Произвольный антисимметричный ковариантный тензор ранга D имеет вид $T_{M_1 \dots M_D} = f(x) \varepsilon_{M_1 \dots M_D}$. Тензорная природа $T_{M_1 \dots M_D}$ диктует закон преобразований

$$T'_{M_1 \dots M_D} = \frac{\partial x^{N_1}}{\partial x'^{M_1}} \dots \frac{\partial x^{N_D}}{\partial x'^{M_D}} T_{N_1 \dots N_D}, \quad (1.8)$$

что означает

$$f'(x') = J f(x), \quad (1.9)$$

где

$$J = \frac{\partial(x^1, \dots, x^D)}{\partial(x'^1, \dots, x'^D)}$$

есть якобиан преобразования. Нетрудно проверить, что (1.9) выполняется тогда и только тогда, когда $f(x) = \sqrt{g(x)}$ и $T_{M_1 \dots M_D}$ совпадает с (1.7). \square

Наша следующая задача — научиться дифференцировать тензорные поля. Градиент скаляра — это ковариантный вектор, но объект $\partial_N V^M$ не есть тензор, он не преобразуется согласно (1.5) при диффеоморфизмах.

Определение 1.5. *Ковариантная производная* контравариантного вектора $V^M(x)$ есть

$$\nabla_N V^M = \partial_N V^M + G_{NP}^M V^P \quad (1.10)$$

с условием, что $\nabla_N V^M$ преобразуется как тензор.

Объект G_{NP}^M мы будем называть *связностью*². Выражение $\nabla_N V^M$ есть тензор, но связность G_{NP}^M — не тензор. Она преобразуется как

$$(G_{NP}^M)' = \frac{dx'^M}{dx^S} \left(\frac{dx^R}{dx'^N} \frac{dx^Q}{dx'^P} G_{RQ}^S + \frac{\partial^2 x^S}{\partial x'^N \partial x'^P} \right). \quad (1.11)$$

²Нам эта терминология удобна. Математики обычно определяют связность немного по-другому — они называют аффинной связностью всю ковариантную производную (1.10).

Определение 1.6. Ковариантная производная ковариантного вектора $V_M(x)$ есть

$$\nabla_N V_M = \partial_N V_M - G_{NM}^P V_P \quad (1.12)$$

с тем же G_{NM}^P , что и в (1.10).

Она также является тензором (докажите это).

Обобщение этих определений на случай произвольного тензора весьма естественно. Например,

$$\nabla_P T_N^M = \partial_P T_N^M + G_{PQ}^M T_N^Q - G_{PN}^Q T_Q^M. \quad (1.13)$$

«Физический смысл» ковариантных производных (1.10) и (1.12) состоит в следующем. Обыкновенные частные производные связаны с разностью значений функции в близких точках: $f(x + dx) - f(x) \approx (\partial_M f) dx^M$. Присутствие второго члена в (1.10) означает, что перед тем, как вычитать вектор $V^M(x)$ из $V^M(x + dx)$, его следует немного модифицировать:

$$V^M(x) \rightarrow \tilde{V}_{\Rightarrow x+dx}^M(x) = V^M(x) - G_{NP}^M V^P dx^N + o(dx). \quad (1.14)$$

Эта модификация называется *параллельным переносом* вектора V^M из точки x в точку $x + dx$.

Аналогично, присутствие второго члена в (1.12) означает параллельный перенос ковариантного вектора V_M :

$$V_M(x) \rightarrow \tilde{V}_{M, \Rightarrow x+dx}(x) = V_M(x) + G_{NM}^P V_P dx^N + o(dx). \quad (1.15)$$

Смысл термина «связность» таким образом проясняется. Связность G_{NP}^M определяет конкретный способ, каким оператор параллельного переноса связывает различные точки многообразия.

G_{NP}^M можно выбрать многими разными способами. Выделенную роль играет *связность Леви-Чивиты*³ Γ_{NP}^M .

Она обладает двумя определяющими свойствами.

1. Ковариантная производная метрического тензора равна нулю.

2. Связность Леви-Чивиты симметрична, $\Gamma_{NP}^M = \Gamma_{PN}^M$.

³ Другое имя для Γ_{NP}^M — символы Кристоффеля.

Первое условие (*условие метричности*) фактически означает, что векторы \tilde{V}^M и \tilde{V}_M , перенесённые параллельно из x в $x + dx$, по-прежнему связаны метрическим тензором в новой точке:

$$\tilde{V}_{M, \Rightarrow x+dx}(x) = g_{MN}(x + dx) \tilde{V}_{\Rightarrow x+dx}^M(x).$$

Можно также сказать, что контравариантный вектор V^M может немного повернуться в результате параллельного переноса, но длина его при этом не меняется:

$$g_{MN}(x + dx) \tilde{V}_{\Rightarrow x+dx}^M(x) \tilde{V}_{\Rightarrow x+dx}^N(x) = g_{MN}(x) V^M(x) V^N(x). \quad (1.16)$$

Когда мы также накладываем второе условие, связность определяется однозначно и даётся выражением

$$\Gamma_{NP}^M = \frac{1}{2} g^{MQ} (\partial_N g_{QP} + \partial_P g_{NQ} - \partial_Q g_{NP}). \quad (1.17)$$

Говорят, что связность Леви-Чивиты — это связность без *кручения*.

Определение 1.7. *Кручением* называется антисимметричная часть связности общего вида G_{NP}^M ,

$$C_{NP}^M = G_{NP}^M - G_{PN}^M \quad (1.18)$$

Замечание. В отличие от G_{NP}^M , кручение — тензор. В самом деле, несимпатичный второй член в скобках в уравнении (1.11) симметричен по индексам N, P и исчезает при антисимметризации.

Важная локальная характеристика многообразия — это *кривизна*. Нас будет интересовать не внешняя, зависящая от вложения кривизна, а только инвариантная внутренняя кривизна (такая внутренняя, или риманова кривизна обращается в ноль для цилиндра, но не для сферы).

Риманова кривизна связана с поворотом вектора при параллельном переносе (со связностью $G_{NP}^M = \Gamma_{NP}^M$) вдоль маленького замкнутого контура. Чтобы убедиться, что такой поворот действительно возможен, читатель приглашается поразмыслить над рис. 1.1. Для двумерных поверхностей такой поворот не зависит от исходного направления вектора, но в многомерном случае такая зависимость возникает. Угол поворота зависит также от

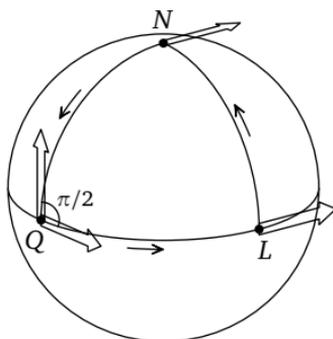


Рис. 1.1. Вращение касательного вектора в результате обхода по замкнутому пути на поверхности Земли. Здесь N — Северный полюс, а точки Q и L обозначают города Кито в Эквадоре и Либревиль в Габоне — эти города лежат почти на экваторе, и их долготы различаются на $\sim 90^\circ$

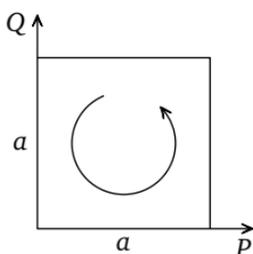


Рис. 1.2. Параллельный перенос вдоль маленького квадратика

ориентации малого замкнутого контура в многомерном многообразии.

Рассмотрим параллельный перенос V^M вдоль маленького квадратика, лежащего в плоскости (PQ) (см. рис. 1.2). Из определений (1.14) и (1.10) легко убедиться, что вектор получает добавку⁴

$$\Delta V^M = -a^2 [\nabla_P, \nabla_Q] V^M, \quad (1.19)$$

где a — размер квадратика. Так как $\nabla_P V^M$ — тензор, $[\nabla_P, \nabla_Q] V^M$ также тензор. Можно представить его как

$$[\nabla_P, \nabla_Q] V^M = R^M_{NPQ} V^N. \quad (1.20)$$

⁴При иной форме маленького плоского контура a^2 заменяется на его площадь.

Тензор R^M_{NQP} называется *римановым тензором кривизны*. Удобно опустить его первый индекс и рассмотреть ковариантный тензор четвёртого ранга R_{MNQP} . Он имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} R_{MNQP} &= -R_{NMQP} = -R_{MNPQ} = R_{QPMN}, \\ R_{MNQP} + R_{MQPN} + R_{MPNQ} &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для D -мерного многообразия тензор Римана имеет $D^2(D^2-1)/12$ независимых компонент.

Из определений (1.20) и (1.10) (с $G^M_{NP} = \Gamma^M_{NP}$) следует, что

$$R^M_{NPQ} = \partial_P \Gamma^M_{QN} - \partial_Q \Gamma^M_{PN} + \Gamma^M_{PR} \Gamma^R_{QN} - \Gamma^M_{QR} \Gamma^R_{PN}. \quad (1.22)$$

Помимо стандартного риманова тензора, можно определить тензор кривизны для любой связности G^M_{NP} . Он даётся той же формулой (1.22), где Γ^M_{NP} следует заменить на G^M_{NP} . Ситуация, когда стандартный тензор Римана (1.22) обращается в ноль (так что многообразии плоское в обыкновенном смысле этого слова), но какой-то иной тензор кривизны отличен от нуля или наоборот, вполне возможна и не необычна.

Свёртки тензора Римана дают *тензор Риччи* $R_{MQ} = R_{MNQ}{}^N$ и *скалярную риманову кривизну* $R = R^M_M$. Для двумерных поверхностей R совпадает с удвоенной *гауссовой кривизной* \mathbb{R} (определяемой как обратное произведение главных радиусов касательного эллипсоида).

§1.2. Дифференциальные формы

Рассмотрим специальный класс тензорных полей — полностью антисимметричные ковариантные тензоры $T_{[M_1 \dots M_p]}$. Они играют важную роль во многих математических и физических приложениях. Существует удобная компактная нотация для таких полей, не требующая явного выписывания индексов⁵. На-

⁵Наличие многочисленных индексов — характерная черта риманова формализма, описанного выше. Это делает явные вычисления (например, явные вычисления в общей теории относительности) не слишком простыми. Во многих случаях с этим жизненным фактом следует смириться, но для антисимметричных тензоров жизнь можно значительно упростить.

пример, вместо ковариантного вектора V_M можно рассмотреть линейную форму $V = V_M dx^M$, где dx^M — инфинитезимальный сдвиг⁶.

Для антисимметричного тензора второго ранга $T_{[MN]}$ и для тензоров высших рангов имеется некоторая проблема. Свёртка $T_{[MN]} dx^M dx^N$ есть просто ноль. Можно определить, однако, внешнее произведение $dx^M \wedge dx^N$, антисимметричное относительно перестановки дифференциалов, $dx^M \wedge dx^N = -dx^N \wedge dx^M$. Аналогично $dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}$ полностью антисимметрично по индексам M_1, \dots, M_p . При этом определении 2-форма $T = T_{[MN]} dx^M \wedge dx^N$ и ей подобные в ноль не обращаются. На D -мерном многообразии степень таких форм p может варьироваться от нуля (для скаляров) вплоть до D .

Формы степеней p и $D - p$ связаны между собой преобразованием дуальности Ходжа \star .

Определение 1.8. Если

$$\alpha = \alpha_{M_1 \dots M_p} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}, \quad (1.23)$$

то

$$\star \alpha = \frac{1}{(D-p)!} E^{M_1 \dots M_p}_{M_{p+1} \dots M_D} \alpha_{M_1 \dots M_p} dx^{M_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{M_D}, \quad (1.24)$$

где $E_{M_1 \dots M_D}$ — ковариантный полностью антисимметричный тензор, определённый в (1.7).

При этом определении выполняется свойство

$$\star \star \alpha_p = (-1)^{p(D-p)} \alpha_p. \quad (1.25)$$

Так, в обыкновенном трёхмерном плоском пространстве магнитное поле можно описывать либо вектором B_i , либо дуальным антисимметричным тензором⁷ $F_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_k$. Форма, дуальная

⁶Пусть F_M — поле сил, действующих на частицу, двигающуюся по многообразию. Тогда $F_M dx^M$ есть работа, произведённая силой F_M при перемещении частицы из точки x^M в точку $x^M + dx^M$.

⁷В этом физическом примере мы используем обычную физическую конвенцию для векторных индексов.

форме инвариантного объёма⁸,

$$\alpha_V = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D, \quad (1.26)$$

есть скаляр $\alpha_0 = 1$.

Множество всех форм образует векторное пространство. Но формы можно не только складывать, но и умножать, используя внешнее произведение. Очевидно, что $\alpha_p \wedge \beta_q$ есть форма степени $p + q$. Если $p + q > D$, произведение обращается в ноль.

В определённых условиях можно определить также скалярное и внутреннее произведение форм.

Скалярное произведение определено только для форм одной и той же степени p и даётся выражением⁹

$$(\alpha_p, \beta_p) = \int_{\mathcal{M}} \alpha_p \wedge \star \beta_p = p! \int_{\mathcal{M}} \alpha_{M_1 \dots M_p} \overline{\beta^{M_1 \dots M_p}} \sqrt{g} \prod_{N=1}^D dx^N. \quad (1.27)$$

Заметим, что $(\star \alpha_p, \star \alpha_p) = (\alpha_p, \alpha_p)$, т. е. нормы форм α_p и $\star \alpha_p$ равны.

Внутреннее произведение $\langle V, \alpha_p \rangle$ определяется только тогда, когда первый сомножитель есть 1-форма $V = V_M dx^M$ и $p \geq 1$. По смыслу это скорее не произведение, а некоторый оператор i_V , действующий в пространстве форм и понижающий степень формы на единицу.

Определение 1.9. Если

$$\alpha = \alpha_{M_1 \dots M_p} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p},$$

⁸Если многообразие компактно, то интеграл

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha_V = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} \prod_{N=1}^D dx^N$$

определяет его объём.

⁹В большинстве математических учебников коэффициенты $\alpha_{M_1 \dots M_p}$ дифференциальных форм на вещественных многообразиях предполагаются вещественными. Но можно также их считать комплексными, и мы будем так поступать, имея в виду интерпретацию форм как волновых функций соответствующей суперсимметричной квантово-механической модели, которую мы будем обсуждать в главе 8.

то

$$\begin{aligned}
 \langle V, \alpha \rangle &\equiv i_V \alpha = \\
 &= V^N (\alpha_{NM_2 \dots M_p} dx^{M_2} \wedge \dots \wedge dx^{M_p} - \alpha_{M_1 N \dots M_p} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p} + \\
 &\quad + \dots + (-1)^{p-1} \alpha_{M_1 \dots M_{p-1} N} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_{p-1}}) = \\
 &= p V^N \alpha_{NM_2 \dots M_p} dx^{M_2} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}. \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

Выполняется свойство

$$i_V (\alpha_p \wedge \beta) = (i_V \alpha_p) \wedge \beta + (-1)^p \alpha_p \wedge (i_V \beta). \tag{1.29}$$

Формы можно также дифференцировать.

Определение 1.10. Определим *внешний дифференциал* формы d следующим образом [он был определён ранее в (0.2), но мы повторяем это здесь]:

$$d\alpha = \partial_N \alpha_{M_1 \dots M_p} dx^N \wedge dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}. \tag{1.30}$$

Внешний дифференциал формы степени p есть форма степени $p+1$. Оператор (1.30) есть обобщение обыкновенного ротора. В плоском трёхмерном пространстве

$$A_i dx^i \xrightarrow{d} \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j \xrightarrow{*} (\varepsilon_{ijk} \partial_i A_j) dx^k. \tag{1.31}$$

Оператор d нильпотентен, $d^2 \alpha = 0$.

Заметим, что мы могли бы заменить в определении (1.30) обычную производную ∂_N ковариантной производной Леви-Чивиты ∇_N . Дополнительные члены в $\nabla_N \alpha_{M_1 \dots M_p}$ исчезают после антисимметризации. Это значит, что оператор d можно рассматривать как оператор, действующий на гильбертовом пространстве всех антисимметричных *тензорных* полей: действуя на тензор, он даёт тензор.

Определим теперь оператор, сопряжённый к d относительно нормы (1.27):

$$d^\dagger = (-1)^{Dp+D+1} \star d \star. \tag{1.32}$$

Для произвольного чётного D и для всех p имеем $d^\dagger = -\star d \star$. Для нечётных D имеем $d^\dagger = (-1)^p \star d \star$. Действуя на форму степени p ,

d^\dagger даёт форму степени $p - 1$ (так же как оператор i_V). Для любой пары форм α_p и β_{p-1} выполняется свойство

$$(\alpha_p, d\beta_{p-1}) = (d^\dagger \alpha_p, \beta_{p-1}). \quad (1.33)$$

d^\dagger есть обобщение оператора дивергенции, как можно легко увидеть, рассматривая действие d^\dagger на 1-форму в плоском пространстве: $d^\dagger(A_i dx^i) = -(\partial_i A^i)$. Оператор d^\dagger нильпотентен, как немедленно следует из определения (1.32), из свойства (1.25) и из нильпотентности d . Рассмотрим оператор

$$\Delta = -(dd^\dagger + d^\dagger d). \quad (1.34)$$

Это дифференциальный оператор второго порядка, не меняющий порядка формы. Он называется оператором Лапласа—де Рама. Действие оператора Δ на обыкновенные функции ($p = 0$) совпадает с действием оператора Лапласа—Бельтрами

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N f), \quad (1.35)$$

обобщения обычного лапласиана для кривых многообразий.

Оператор $-\Delta$ положительно определён:

$$\begin{aligned} (\alpha_p, -\Delta \alpha_p) &= (\alpha_p, d^\dagger d \alpha_p) + (\alpha_p, dd^\dagger \alpha_p) = \\ &= (d\alpha_p, d\alpha_p) + (d^\dagger \alpha_p, d^\dagger \alpha_p) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Выполняются равенства

$$[\Delta, d] = [\Delta, d^\dagger] = 0. \quad (1.37)$$

Гильбертово пространство дифференциальных форм, на которые действуют операторы d , d^\dagger и Δ , называется комплексом де Рама.

В заключение этого параграфа введём ещё несколько понятий.

Определение 1.11. Форма α_p называется *замкнутой*, если $d\alpha_p = 0$. Форма α_p называется *козамкнутой*, если $d^\dagger \alpha_p = 0$.

Определение 1.12. Форма α_p называется *точной*, если её можно представить в виде $\alpha_p = d\beta_{p-1}$. Форма α_p *коточная*, если её можно представить в виде $\alpha_p = d^\dagger \gamma_{p+1}$.

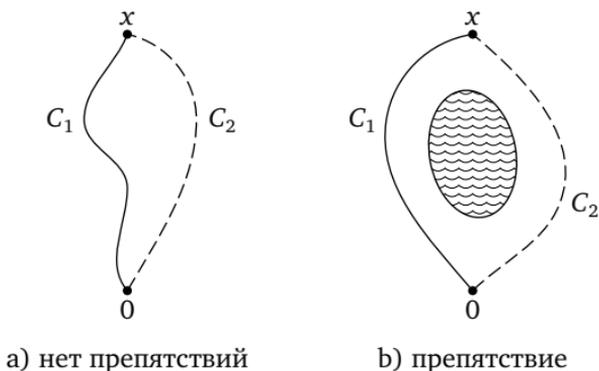


Рис. 1.3. Пути и препятствия

Определение 1.13. Форма α_p называется *гармонической*, если $\Delta\alpha_p = 0$.

Точная форма всегда замкнута (это следует из нильпотентности d), но замкнутая форма не всегда точна. Справедлива, однако, следующая теорема¹⁰.

Теорема 1.2. В топологически тривиальном пространстве \mathbb{R}^D замкнутая форма является также точной.

Доказательство. Оно особенно просто для 1-форм, для которых теорема может быть переформулирована следующим образом. В пространстве \mathbb{R}^D ковариантное векторное поле $A_M(x)$ с нулевым ротором, $\partial_{[M}A_{N]} = 0$, может быть представлено как *градиент скалярной функции*, $A_M = \partial_M \phi(x)$.

Пусть задано значение $\phi(0)$ в начале координат. Определим $\phi(x)$ в любой другой точке как

$$\phi(x) = \phi(0) + \int_0^x A_M(y) dy^M, \quad (1.38)$$

где интегрирование производится по любой линии, соединяющей 0 и x (см. рис. 1.3а). Из условия $\partial_{[M}A_{N]} = 0$ и теоремы Стокса следует, что интеграл (1.38) от пути не зависит и $\phi(x)$ — однозначная функция. Очевидно, что $A_M = \partial_M \phi$.

Аналогичное доказательство можно построить для высших p . □

¹⁰Мы будем использовать её в дальнейшем для доказательства существования решения некоторых систем уравнений.

Замечание. Требование, что пространство топологически тривиально, вполне существенно. Если в пространстве есть «дырка» (фундаментальная группа нетривиальна), то не все пути можно непрерывно продеформировать один в другой, так что, скажем, поле скоростей двумерной жидкости, обтекающей дырку, не может быть представлено как градиент некоторого потенциала (см. рис. 1.3b). Для нетривиального многообразия M и данного p факторпространство $\{\text{замкнутые формы}\}/\{\text{точные формы}\}$ является группой, которая известна как группа когомологий де Рама $H_{dR}^p(M)$. Мы обсудим подробно эти когомологии в главе 8.

§1.3. Главные расслоения и калибровочные поля

Расслоением над базой M со слоем \mathcal{F} называется многообразие \mathcal{E} , которое выглядит локально как прямое произведение M и \mathcal{F} . Более точно: если мы представим M в виде объединения (1.1) открытых подмножеств U_j , то расслоение представляется в виде объединения прямых произведений $U_j \times \mathcal{F}$.

Важно, что расслоение может быть склеено из кусочков $U_j \times \mathcal{F}$ нетривиальным «скрученным» образом, так что \mathcal{E} не обязательно совпадает с прямым произведением $M \times \mathcal{F}$. Простейшее нетривиальное расслоение — это лист Мёбиуса. В этом случае базой является окружность S^1 , а слой есть интервал I . Но лист Мёбиуса перекручен и не совпадает глобально с $S^1 \times I$.

Определение 1.14. *Главное расслоение* — это расслоение, в котором слой представляет собой некоторую группу Ли \mathcal{G} .

Мы будем в дальнейшем предполагать, что эта группа компактна.

Определение 1.15. *Векторное расслоение* — это расслоение, в котором слоем служит векторное пространство. Векторное расслоение, связанное с данным главным расслоением, — это расслоение над той же базой со слоем, представляющим пространство некоторого представления Φ группы \mathcal{G} .

Заметим, что то, что математики называют «пространством представления», физики называют просто «представлением». В дальнейшем мы будем придерживаться физической терминологии.

Определение 1.16. Возьмём в каждом слое, растущем над точкой $x \in M$, некоторый элемент $\phi(x) \in \Phi$. Множество всех таких элементов называется *сечением* нашего векторного расслоения. Множество элементов $g(x) \in \mathcal{G}$ есть сечение главного расслоения.

Из данного сечения $\phi(x)$ можно построить другое сечение $\phi'(x)$, действуя на $\phi(x)$ групповыми элементами $g(x)$:

$$\phi'(x) = g(x)\phi(x). \quad (1.39)$$

Переход (1.39) называется *калибровочным преобразованием*. Слово «калибровочный» означает, что групповое преобразование (1.39) *локально*: его параметры зависят от $x \in M$, так что мы фактически имеем дело не просто с группой \mathcal{G} , но с бесконечномерной группой $\prod_x \mathcal{G}(x)$.

Нас будут интересовать только гладкие функции $\phi(x)$, $g(x)$, которые можно дифференцировать. Однако обыкновенная производная $\partial_M \phi(x)$ неудобна тем, что она не преобразуется при калибровочном преобразовании (1.39) так же, как $\phi(x)$: $\partial_M \phi'(x)$ включает дополнительный член $\sim \partial_M g(x)$. Поступая по аналогии с (1.10) и (1.12), мы определим *ковариантную производную*,

$$\nabla_M \phi(x) = [\partial_M + iA_M(x)] \phi(x), \quad (1.40)$$

где компоненты $A_M(x)$ лежат в алгебре Ли¹¹ \mathfrak{g} .

$A_M(x)$ зависит от выбранного сечения. Потребуем, чтобы оно преобразовывалось при переходе от $\phi(x)$ к $\phi'(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\nabla'_M \phi'(x) = g(x)\nabla_M \phi(x). \quad (1.41)$$

Отсюда выводим закон преобразования:

$$A'_M(x) = gA_M(x)g^{-1} + i(\partial_M g)g^{-1}. \quad (1.42)$$

Очевидно родство $A_M(x)$ с аффинной связностью G_{NP}^M , обсуждавшейся выше. Математики называют $A_M(x)$ *связностью в главном расслоении*, но физики называют этот объект *калибровочным полем*, живущим на многообразии. В нашей книге мы будем в основном использовать этот последний термин.

¹¹Мы придерживаемся физической нотации, где элементы алгебры \mathfrak{g} представляются эрмитовыми матрицами и не делается различия между собственно алгеброй Ли и её обёртывающей алгеброй.

Как мы знаем, многообразие представляет собой, вообще говоря, объединение нескольких различных карт, и мы до сих пор определяли $A_M(x)$ на какой-то конкретной карте. Поля $A_M^{(\alpha)}(x_{(\alpha)})$ и $A_M^{(\beta)}(x_{(\beta)})$ на двух различных картах могут просто совпасть после того, как $x_{(\beta)}$ выразится через $x_{(\alpha)}$, но это не необходимое условие. Во многих интересных случаях¹² $A_M^{(\alpha)}$ и $A_M^{(\beta)}$ не совпадают, но связаны калибровочным преобразованием

$$A_M^{(\beta)} = g_{\alpha\beta} A_M(x) g_{\alpha\beta}^{-1} + i(\partial_M g_{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (1.43)$$

Мы должны только озаботиться тем, что в случае, когда три карты U_α , U_β и U_γ имеют нетривиальное пересечение, функции $g_{\alpha\beta}$, $g_{\beta\gamma}$ и $g_{\alpha\gamma}$ удовлетворяют условию согласованности $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

Калибровочные поля играют чрезвычайно важную роль в физике. Наиболее известный пример — электромагнитное максвелловское поле. В этом случае $\mathcal{G} = U(1)$, $g(x) = \exp\{i\chi(x)\}$ и закон преобразования (1.42) сводится к $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x)$, где $\mu = 0, 1, 2, 3$ — минковский пространственный индекс. Неабелевы калибровочные поля, связанные с группами $SU(3)$ и $SU(2)$, играют фундаментальную роль в физике сильных и слабых взаимодействий.

В параграфе, посвящённом римановой геометрии, мы обсуждали аффинную связность, соответствующую инфинитезимальному параллельному переносу векторов и тензоров, а также тензор кривизны, описывающий, как векторы и тензоры преобразуются при обходе по маленькому замкнутому контуру. Понятие кривизны можно также ввести для главных расслоений. Рассмотрим для этого, как и в (1.19), (1.20), коммутатор двух ковариантных производных (1.40):

$$-i[\nabla_M, \nabla_N] = \partial_M A_N - \partial_N A_M + i[A_M, A_N] \stackrel{\text{def}}{=} F_{MN}. \quad (1.44)$$

Очевидно, что $F_{MN} \in \mathfrak{g}$. Это антисимметричный тензор¹³. Матема-

¹²Мы будем подробно их обсуждать в главе 13.

¹³Тензорная природа F_{MN} следует из тождества

$$\partial_M A_N - \partial_N A_M = \nabla_M A_N - \nabla_N A_M + C_{MN}^P A_P, \quad (1.45)$$

где ∇_M — ковариантная производная Леви-Чивиты и C_{MN}^P — тензор кручения, определённый в (1.18).

тики называют форму $F = (1/2) F_{MN} dx^M \wedge dx^N$ формой кривизны в главном расслоении. Мы будем использовать физический язык и будем называть тензор F_{MN} тензором *напряжённости поля* (а A_M будет называться *калибровочным потенциалом* или просто *калибровочным полем*). В максвелловском случае компоненты тензора $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — электрическое и магнитное поля.

Абелева напряжённость поля инвариантна относительно калибровочных преобразований (1.42). В неабелевом случае F_{MN} преобразуется как

$$F'_{MN} = g F_{MN} g^{-1}. \quad (1.46)$$

Формализм дифференциальных форм позволяет представить (1.44) в несколько более компактном виде. Рассмотрим форму $A = A_M dx^M$. Тогда (1.44) может быть записано как

$$F = dA + iA \wedge A. \quad (1.47)$$

§1.4. Касательное пространство и фильбайны

Определим в каждой точке x многообразия M набор D ортонормированных векторов e_A : $e_A \cdot e_B = \delta_{AB}$. В координатной записи

$$g_{MN} e_A^M e_B^N = \delta_{AB}. \quad (1.48)$$

Определение 1.17. Набор e_A^M называется *фильбайном*¹⁴.

Можно представить (хотя это не обязательно), что M вложено в евклидово пространство высшей размерности и через каждую точку P многообразия «проведено», как на рис. 1.4, *касательное пространство*¹⁵, обозначаемое $T_P M$.

Декартовы координаты в окрестности точки P на $T_P M$ получаются из координат в окрестности P на M ортогональной проекцией. Набор $\{e_A\}$ является тогда ортонормированным базисом в $T_P M$.

¹⁴От немецкого *vielbein* — многоножка.

¹⁵Математики различают понятия касательного и кокасательного пространства. В нашем случае речь идёт скорее о пространстве кокасательном. Но эта тонкость для нас не будет играть роли, и приставку «ко» мы будем опускать.

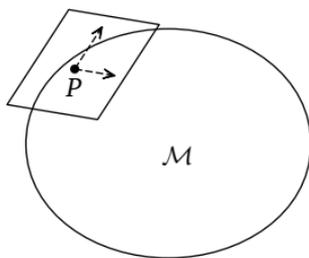


Рис. 1.4. Цвайбайн

Рассмотрим тензор

$$Q^{MN} = e_A^M e_A^N.$$

Умножив его на $e_{MB} = g_{MK} e_B^K$ и используя (1.48), мы получаем $Q^{MN} e_{BM} = e_B^N$ для всех B . Из этого соотношения и из полноты базиса $\{e_A\}$ в $T_P M$ следует, что $Q^{MN} = g^{MN}$.

Таким образом, фильбайн e_A^M есть в некотором смысле «квадратный корень» из метрики. Индексы M, N и т. д. мы будем называть *мировыми индексами*, а A, B и т. д. — *касательными индексами*. Каждый тензор можно спроектировать на касательное пространство, сворачивая его с фильбайнами e_A^M и e_{AM} . В частности, тензор (1.7) может быть альтернативно представлен как

$$E_{M_1 \dots M_D} = e_{A_1 M_1} \dots e_{A_D M_D} \varepsilon_{A_1 \dots A_D}. \quad (1.49)$$

Ясно, что при заданной метрике фильбайны можно выбирать многими различными способами. Мы можем умножить в каждой точке e_A^M на ортогональную матрицу $O_{AB}(x)$, не меняя метрики. Это не что иное, как калибровочная свобода, обсуждавшаяся в предыдущем параграфе.

Для математика многообразие M вместе с касательными пространствами, прикреплёнными к каждой его точке, определяет *касательное расслоение* над M . Можно также рассмотреть расслоение со слоем, представляющим множество всех ортонормированных базисов в $T_P M$. Это множество гомеоморфно $O(D)$, и мы имеем дело, таким образом, с конкретным типом главного расслоения.

Определим теперь ковариантную производную фильбайна. Мы хотим, чтобы она преобразовывалась как тензор второго

ранга при общекоординатных преобразованиях и как вектор в касательном пространстве. Последнее требование означает, что поворот $e'_A{}^M = O_{AB}e_B^M$ влечёт за собой

$$(\nabla_N e_A^M)' = O_{AB} \nabla_N e_B^M. \quad (1.50)$$

Этого можно добиться, добавив к ковариантной производной, определённой в (1.10), дополнительный член и записав

$$\nabla_N e_A^M = \partial_N e_A^M + G_{NP}^M e_A^P + \omega_{AB,N} e_B^M. \quad (1.51)$$

Объект $\omega_{AB,M}$ называется *спиновой связностью*¹⁶. Это не что иное, как калибровочное поле в группе $SO(D)$. $\omega_{AB,M}$ антиэрмитово и лежит в алгебре $so(D)$. Оно преобразуется при локальных вращениях как в (1.42):

$$\omega'_{AB,M} = O_{AC}(x) \omega_{CD,M} O_{BD}(x) - [\partial_M O_{AC}(x)] O_{BC}(x). \quad (1.52)$$

$\omega_{AB,M}$ может быть выбрано разными способами. Но самый удобный и обычно используемый способ состоит в наложении требования

$$\nabla_N e_A^M = 0. \quad (1.53)$$

Его смысл состоит в следующем. Определим фильбайны во всех точках многообразия. Возьмём фильбайн в точке x и перенесём его параллельно в точку $x + dx$. Он повернётся согласно уравнению (1.14), куда входит аффинная связность G_{NP}^M . Но потом мы можем использовать калибровочную свободу, связанную с поворотами в касательном пространстве и с ненулевой спиновой

¹⁶Такая терминология связана с тем, что $\omega_{AB,M}$ необходима для описания спиновых полей на многообразиях. Спиновая связность используется в общей теории относительности, где M — физическое четырёхмерное искривлённое пространство, а спиновые поля — физические фермионные поля. В нашей книге M — это не физическое пространство, а некоторое внешнее кривое пространство (*target manifold* по-английски), координаты которого представляют собой (будут представлять в части 3) динамические переменные, зависящие от времени (тоже не очень физического). Но спиновые структуры можно изучать и на таких нефизических пространствах. Мы вплотную займёмся этим в главах 13, 14, где мы будем обсуждать оператор Дирака на многообразиях и теорему об индексе.

связностью $\omega_{AB,M}$, чтобы «нейтрализовать» эффект от ненулевой G_{NP}^M . Условие (1.53) говорит, что после параллельного переноса из x в $x + dx$ и последующего поворота базиса $\{e_A^M\}$ фильбайн совпадёт с $e_A^M(x + dx)$!

В этом случае спиновая связность $\omega_{AB,M}$ выражается через фильбайны и аффинную связность:

$$\omega_{AB,M} = -e_{BN}(\partial_M e_A^N + G_{MP}^N e_A^P). \quad (1.54)$$

Можно доказать (мы оставляем это читателю), что если G_{MP}^N выбрано так, что ковариантная производная метрического тензора обращается в ноль, то выражение (1.54) антисимметрично относительно перестановки $A \leftrightarrow B$ и принадлежит, таким образом, $so(D)$! Мы приходим к стандартному выражению для спиновой связности, которое можно найти во многих учебниках:

$$\omega_{AB,M} = e_{AN}(\partial_M e_B^N + G_{MP}^N e_B^P). \quad (1.55)$$

Этот результат весьма естественен. Как отмечалось, условие метричности $\nabla_P g_{MN} = 0$ означает, что длины векторов не меняются при параллельном переносе. Тогда параллельно перенесённый фильбайн остаётся фильбайном — ортонормированным базисом в касательном пространстве. И тогда поворотом в касательном пространстве его действительно можно привести к виду $e_A^M(x + dx)$.

Известны аффинные связности, не соблюдающие условия метричности (одна из них, так называемая *связность Обаты*, будет обсуждаться в главах 3 и 12). Тогда $\omega_{AB,M}$, определённая в (1.54), не антисимметрична и не лежит в $so(D)$. Но в этом случае сами понятия фильбайна и спиновой связности, возможно, не столь полезны.

Соотношение (1.55) можно переписать в симпатичном компактном виде, используя язык дифференциальных форм. Определим линейные формы

$$e_A = e_{AM} dx^M, \quad \omega_{AB} = \omega_{AB,M} dx^M. \quad (1.56)$$

Уравнение (1.55) эквивалентно *структурному уравнению Картана*

$$de_A + \omega_{AB} \wedge e_B = T_A, \quad (1.57)$$

где

$$T_A = \frac{1}{2} e_{AM} C_{NP}^M dx^N \wedge dx^P = \frac{1}{2} C_{A,BC} e_B \wedge e_C \quad (1.58)$$

есть 2-форма кручения. Если кручение отсутствует, условие приобретает совсем простой вид: $de_A + \omega_{AB} \wedge e_B = 0$.

Ещё красивее второе структурное уравнение Картана¹⁷,

$$d\omega_{AB} + \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} = \frac{1}{2} R_{ABCD} e_C \wedge e_D \stackrel{\text{def}}{=} R_{AB}, \quad (1.59)$$

с помощью которого можно выразить тензор Римана через спиновую связность:

$$R_{MN,AB} = \partial_M \omega_{AB,N} - \partial_N \omega_{AB,M} + \omega_{AC,M} \omega_{CB,N} - \omega_{AC,N} \omega_{CB,M}. \quad (1.60)$$

Уравнение (1.59) имеет тот же смысл, что (1.47). Замечательно, что тензор Римана можно на выбор выражать через аффинную связность, как в (1.22), или через спиновую связность, как в (1.59). Впрочем, это естественное следствие условия (1.53), которое связывает параллельный перенос с локальными вращениями базиса.

Вычислив внешний дифференциал от формы (1.57) и используя (1.59), мы выводим так называемое *условие самосогласованности*:

$$dT_A + \omega_{AB} \wedge T_B = R_{AB} \wedge e_B. \quad (1.61)$$

При отсутствии кручения мы выводим связь

$$R_{AB} \wedge e_B = 0 \quad (1.62)$$

для обычной римановой кривизны. Это не что иное, как вторая строчка в (1.21).

¹⁷Мы надеемся, что схожие обозначения для формы кривизны R_{AB} , фигурирующей в (1.59), и для тензора Риччи не приведут к путанице.

Глава 2

Комплексные многообразия

§ 2.1. Комплексное описание

Определение 2.1. Чётномерное многообразие, являющееся объединением (1.1) открытых подмножеств U_α , гомеоморфных $\mathbb{R}^{D=2d}$, называется *комплексным многообразием*, если каждое такое подмножество можно параметризовать комплексными координатами $\{z_{(\alpha)}^{n=1, \dots, d}\}$ так, что отображения склейки между различными картами аналитичны,

$$z_{(\alpha)}^n = f_{\alpha\beta}^n(z_{(\beta)}^m). \quad (2.1)$$

Мы будем интересоваться только метрическими многообразиями.

Теорема 2.1. На комплексном метрическом многообразии метрику всегда можно выбрать в эрмитовом виде,

$$ds^2 = 2h_{n\bar{m}} dz^n d\bar{z}^{\bar{m}}, \quad (2.2)$$

так что $\overline{h_{m\bar{n}}} = h_{n\bar{m}}$.

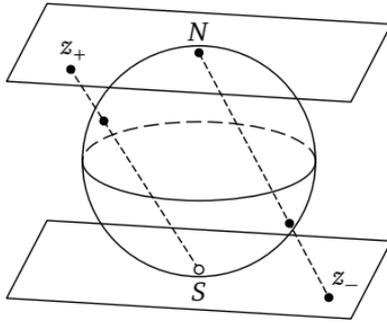
Множитель 2 введён для упрощения некоторых дальнейших формул.

Доказательство. Для отдельной карты U_α это очевидно. Свойство $\overline{h_{m\bar{n}}} = h_{n\bar{m}}$ следует из вещественности ds^2 . При голоморфном переходе на другую карту U_β эрмитова метрика в U_α остаётся эрмитовой в U_β . \square

Простейший нетривиальный пример комплексного многообразия — S^2 (рис. 2.1). Сферу можно представить как объединение двух карт. Одна из них включает все точки сферы, кроме северного полюса. Они параметризуются комплексной координатой

$$z_- = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, \quad (2.3)$$

заданной стереографической проекцией на комплексную плоскость, касательную к южному полюсу сферы. Другая карта пара-

Рис. 2.1. Комплексные координаты на S^2

метризуется комплексной координатой

$$z_+ = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad (2.4)$$

отвечающей стереографической проекции на плоскость, касательную к северному полюсу. В области перекрытия, которая включает почти все точки сферы, кроме полюсов, функция перехода $z_+ = 1/z_-$ аналитична.

В этих координатах метрика выражается в виде

$$ds^2 = 2h dz d\bar{z} = \frac{2 dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (2.5)$$

на обоих картах. Выполняется требуемое свойство $ds_+^2 = ds_-^2$. Введём также вещественные координаты согласно $z = (x + iy)/\sqrt{2}$. Тогда площадь сферы равна

$$A = \int h dz d\bar{z} = \int dx dy \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2} = 2\pi, \quad (2.6)$$

и её радиус есть $1/\sqrt{2}$.

Теорема 2.2. Каждое ориентируемое двумерное многообразие комплексно.

Доказательство. Рассмотрим две пересекающиеся карты на M . В области пересечения многообразие может быть описано координатами $\{x, y\}$ или $\{u, v\}$. Удобно выбрать координаты так, чтобы метрика имела конформно-плоский вид:

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2) = \mu(u, v)(du^2 + dv^2). \quad (2.7)$$

Определим комплексные координаты на каждой карте согласно формулам

$$z = \frac{x + iy}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{u + iv}{\sqrt{2}}. \quad (2.8)$$

Тогда

$$\lambda dz d\bar{z} = \mu dw d\bar{w}. \quad (2.9)$$

В общем случае

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (2.10)$$

Подставляя это выражение в (2.9), мы получаем

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0,$$

что означает, что w — либо голоморфная, либо антиголоморфная функция z . Для антиголоморфной функции уравнения Коши—Римана имели бы вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

и якобиан

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \quad (2.11)$$

был бы отрицательным. Но это противоречит условию, что многообразие ориентируемо. \square

Начиная с размерности 4, не все чётномерные многообразия комплексны. Так, сфера S^4 не комплексна. Это можно понять, пытаясь повторить приведённую выше конструкцию для S^4 . Легко найти пару комплексных координат $z_-^{n=1,2}$, параметризующих «южное полушарие» S^4 . Легко также найти пару комплексных координат $z_+^{n=1,2}$, параметризующих «северное полушарие». Но невозможно обеспечить при этом аналитичность отображений склейки. Если z_-^n и z_+^n задаются стереографическими проекциями, как на рис. 2.1, то они связаны отображениями

$$z_+^n = \frac{\bar{z}_-^n}{\bar{z}_-^m z_-^m} \quad \text{или} \quad z_+^n = \frac{z_-^n}{\bar{z}_-^m z_-^m}, \quad (2.12)$$

которые не аналитичны.

Разумеется, тот факт, что простейшая попытка построить комплексное описание S^4 не удаётся, не есть ещё доказательство,

что такое описание невозможно. В случае S^4 это, однако, можно доказать. Удивительно, но такого доказательства не существует для S^6 . Попытки построить на S^6 комплексные карты с аналитическими отображениями склейки успехом не увенчались, но полной уверенности, что это невозможно, у нас нет.

Простейший пример комплексного четырёхмерного многообразия есть¹ $\mathbb{C}P^2$. Мы напомним его метрику в конце главы.

Двумерная метрика $ds^2 = \lambda(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$ с вещественным $\lambda(z, \bar{z})$ эрмитова: компоненты g_{zz} и $g_{\bar{z}\bar{z}}$ отсутствуют. При $D = 2$ любая метрика может быть приведена к такому виду соответствующим выбором комплексной координаты. В общем многомерном случае это не так, но, как мы отметили выше, эрмитову метрику на комплексном многообразии всегда можно *выбрать* и эрмитовость будет всегда предполагаться.

Обратный метрический тензор будет обозначаться $h^{\bar{n}m}$. Он удовлетворяет условиям $h_{n\bar{m}} h^{\bar{m}p} = \delta_n^p$ и $h^{\bar{p}n} h_{n\bar{m}} = \delta_{\bar{m}}^{\bar{p}}$.

Многообразию комплексной размерности d можно, конечно, также трактовать как вещественное многообразие размерности $D = 2d$. Перевод с вещественного языка на комплексный можно осуществить, переходя от набора координат x^M к набору $\{z^m, \bar{z}^{\bar{m}}\}$. При этом

$$\partial_M = (\partial_m, \partial_{\bar{m}}), \quad g_{m\bar{n}} = g_{\bar{n}m} = h_{m\bar{n}}, \quad g_{mn} = g_{\bar{m}\bar{n}} = 0. \quad (2.13)$$

Нормировка эрмитовой метрики в (2.2) точно соответствует при таком соглашении определению (1.6).

Для $d = 1$ эти конвенции означают, что z выражается через x, y , как в (2.8). Также

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.14)$$

Комплексные тензорные поля, живущие на комплексном многообразии, могут иметь индексы четырёх типов: бывают индексы ковариантные и контравариантные, голоморфные и антиголо-

¹Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество комплексных прямых в \mathbb{C}^n , т. е. множество наборов $n + 1$ комплексных чисел $\{w^0, w^1, \dots, w^n\}$, по крайней мере одно из которых отлично от нуля, отождествлённых по умножению на произвольное ненулевое комплексное λ , $\{w^0, \dots, w^n\} \equiv \{\lambda w^0, \dots, \lambda w^n\}$.

морфные. При поднятии или опускании индекса он меняет голоморфность: $V^{\bar{n}} = h^{\bar{n}m}V_m$ и т. п. Голоморфность также меняется, конечно, при комплексном сопряжении: $\overline{V_n} = \bar{V}_{\bar{n}}$.

Единственные ненулевые компоненты связности Леви-Чивиты (1.17), выраженные в этих терминах, суть

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{m},np} &= \frac{1}{2}(\partial_n h_{p\bar{m}} + \partial_p h_{n\bar{m}}), & \Gamma_{m,\bar{n}\bar{p}} &= \frac{1}{2}(\partial_{\bar{n}} h_{m\bar{p}} + \partial_{\bar{p}} h_{m\bar{n}}), \\ \Gamma_{m,n\bar{p}} &= \Gamma_{m,\bar{p}n} = \frac{1}{2}C_{mn\bar{p}}, & \Gamma_{\bar{m},p\bar{n}} &= \Gamma_{\bar{m},\bar{n}p} = \frac{1}{2}C_{\bar{m}\bar{n}p}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$C_{mn\bar{p}} = \partial_n h_{m\bar{p}} - \partial_m h_{n\bar{p}}, \quad C_{\bar{m}\bar{n}p} = \overline{C_{mn\bar{p}}} = \partial_{\bar{n}} h_{p\bar{m}} - \partial_{\bar{m}} h_{p\bar{n}}. \quad (2.16)$$

Введём теперь важное понятие *связности Бисмута* [5], [6].

Определение 2.2. *Связность Бисмута* — это связность с ненулевым кручением:

$$G_{M,NP}^{(B)} = \Gamma_{M,NP} + \frac{1}{2}C_{MNP}, \quad (2.17)$$

где тензор кручения $C_{MNP} \equiv C_{M,NP}$ полностью антисимметричен относительно перестановки любой пары индексов и его ненулевые компоненты даются выражениями (2.16) и вытекающими из них из требования антисимметрии.

Ненулевые компоненты $G_{m,n\bar{p}}^{(B)}$ суть

$$G_{\bar{m},np}^{(B)} = \partial_p h_{n\bar{m}}, \quad G_{m,\bar{n}\bar{p}}^{(B)} = \partial_{\bar{p}} h_{m\bar{n}}, \quad G_{m,n\bar{p}}^{(B)} = C_{mn\bar{p}}, \quad G_{\bar{m},\bar{n}p}^{(B)} = C_{\bar{m}\bar{n}p}, \quad (2.18)$$

в то время как

$$G_{m,\bar{n}\bar{p}}^{(B)} = G_{\bar{m},np}^{(B)} = G_{m,np}^{(B)} = G_{\bar{m},\bar{n}p}^{(B)} = 0. \quad (2.19)$$

Определим теперь комплексные фильбайны e_m^a и $e_{\bar{m}}^{\bar{a}}$ со свойствами²

$$\begin{aligned} e_m^a e_{\bar{n}}^{\bar{a}} &= h_{m\bar{n}}, & e_{\bar{a}}^{\bar{n}} e_a^m &= h^{\bar{n}m}, \\ e_m^a e_a^n &= \delta_m^n, & e_{\bar{m}}^{\bar{a}} e_{\bar{a}}^{\bar{n}} &= \delta_{\bar{m}}^{\bar{n}}, & e_a^m e_m^b &= \delta_a^b, & e_{\bar{a}}^{\bar{m}} e_{\bar{m}}^{\bar{b}} &= \delta_{\bar{a}}^{\bar{b}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

²В отличие от вещественного случая, мы пишем здесь индексы касательного пространства на двух уровнях, имея в виду их комплексное сопряжение при поднятии или опускании: $X_a \equiv X^{\bar{a}}$, $X^a \equiv X_{\bar{a}}$. Скалярное произведение $X_A Y_A$ двух векторов комплексного касательного пространства имеет вид

$$X_A Y_A = X_a Y^a + X_{\bar{a}} Y^{\bar{a}} = X_a Y_{\bar{a}} + X_{\bar{a}} Y_a. \quad (2.20)$$

Метрика инвариантна относительно унитарных вращений в касательном пространстве:

$$e_m^a \rightarrow U^a_b e_m^b, \quad e_{\bar{m}}^{\bar{a}} \rightarrow e_{\bar{m}}^{\bar{b}} (U^\dagger)_{\bar{b}}^{\bar{a}}. \quad (2.22)$$

Спиновые связности (1.55) могут также быть выражены в комплексной форме. Спиновая связность Леви-Чивиты имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{b}a,m} &= -\omega_{a\bar{b},m} = e_p^b (\partial_m e_a^p + \Gamma_{mk}^p e_a^k), \\ \omega_{ab,m} &= 0, \quad \omega_{\bar{a}\bar{b},m} = \frac{1}{2} e_{\bar{a}}^{\bar{p}} e_{\bar{b}}^{\bar{k}} C_{\bar{p}\bar{k}m}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

а другие компоненты связаны с (2.23) комплексным сопряжением:

$$\omega_{\bar{b}a,\bar{m}} = \overline{\omega_{b\bar{a},m}}, \quad \omega_{ab,\bar{m}} = \overline{\omega_{\bar{a}\bar{b},m}}. \quad (2.24)$$

У бисмутовых спиновых связностей компоненты $\omega_{ab,M}^{(B)}$ и $\omega_{\bar{a}\bar{b},M}^{(B)}$ обращаются в ноль и остаются только компоненты смешанной голоморфности по касательным индексам: $\omega_{a\bar{b},M}^{(B)}$ и $\omega_{\bar{a}b,M}^{(B)}$. Тогда форма

$$\omega_{AB,M}^{(B)} dx^M = \omega_{a\bar{b},m}^{(B)} dz^m + \omega_{\bar{a}b,\bar{m}}^{(B)} d\bar{z}^{\bar{m}} \quad (2.25)$$

есть антиэрмитова матрица $d \times d$. Она является элементом алгебры $u(d)$. Ввиду (1.59) то же относится к форме кривизны $R_{a\bar{b}}^{(B)}$, в то время как компоненты $R_{ab}^{(B)}$ и $R_{\bar{a}\bar{b}}^{(B)}$ обращаются в ноль. Это значит, что у тензора кривизны, отвечающего связности Бисмута, имеются только ненулевые компоненты $R_{m\bar{n},p\bar{q}}^{(B)}$ и те, что получаются из них перестановками $m \leftrightarrow \bar{n}$, $p \leftrightarrow \bar{q}$. Для стандартного тензора Римана это не так.

Рассмотрим теперь ковариантную производную (1.51). Как обсуждалось, третий член отвечает инфинитезимальному вращению базиса. Для вещественных многообразий это вращение есть элемент $SO(D)$, но, как следует из (2.25), в данном случае оно лежит в меньшей группе $U(d) \subset SO(2d)$ — голоморфный фильбайн остаётся при таком вращении голоморфным, а антиголоморфный — антиголоморфным.

Как мы отмечали в предыдущей главе, спиновая связность и аффинная связность связаны условием обращения в ноль полной ковариантной производной (1.51), а это означает, что локальное вращение базиса и параллельный перенос компенсируют друг

друга. Эта компенсация неполная при параллельном переносе вдоль контура, соединяющего разные точки M и M' : фильбайн $e(M)$ переходит в $e(M')$. Но если контур замкнут, то фильбайны вообще не преобразуются. Таким образом, повороты комплексных касательных векторов, обусловленные параллельными переносами вдоль замкнутого контура, полностью компенсируются вращением базиса и, следовательно, также лежат в группе $U(d) \subset SO(2d)$. Группа преобразований касательных векторов при параллельных переносах вдоль замкнутых контуров называется *группой голономии*. (Для малых контуров такие преобразования определяются формой кривизны.)

Отметим, что всё вышесказанное относится к вращениям базиса и параллельным переносам, индуцированным *бисмутовыми* спиновыми и аффинными связностями. Для комплексного многообразия общего вида группа голономии, соответствующая обычной связности Леви-Чивиты, есть по-прежнему $SO(D)$, как и для вещественных D -мерных многообразий.

Очень важный класс комплексных многообразий — *кэлеровы* многообразия.

Определение 2.3. Комплексное многообразие, снабжённое эрмитовой метрикой (2.2), называется *кэлеровым*, если

$$C_{mn\bar{p}} = \partial_n h_{m\bar{p}} - \partial_m h_{n\bar{p}} = 0. \quad (2.26)$$

Можно сделать следующие замечания.

1. Как мы видели, все двумерные ориентируемые многообразия комплексны. Их комплексная размерность равна единице, и из (2.26) ясно, что все они кэлеровы.

2. Метрика, удовлетворяющая условию (2.26), может быть представлена в виде

$$h_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} K(z, \bar{z}). \quad (2.27)$$

Функция $K(z, \bar{z})$ называется *кэлеровым потенциалом*.

3. Коль скоро $C_{mn\bar{p}} = 0$, связность Бисмута совпадает со связностью Леви-Чивиты, не имеющей кручения. Таким образом, стандартная группа голономии кэлера многообразия есть $U(d)$.

4. Для кэлера многообразия отличны от нуля только полностью голоморфные и полностью антиголоморфные компоненты

символов Кристоффеля (1.17):

$$\Gamma_{mn}^p = h^{\bar{q}p} \partial_m h_{n\bar{q}}, \quad \Gamma_{\bar{m}\bar{n}}^{\bar{p}} = h^{\bar{p}q} \partial_{\bar{m}} h_{q\bar{n}}. \quad (2.28)$$

Верно и обратное: если группа голономии есть $U(d)$ и символы Кристоффеля смешанной голоморфности типа $\Gamma_{m\bar{n}}^p$ равны нулю, то многообразие кэлерово.

5. Ненулевые компоненты кэлеровых спиновых связностей суть

$$\omega_{\bar{b}a,m} = -\omega_{a\bar{b},m} = e_{\bar{b}}^{\bar{n}} \partial_m e_{\bar{n}}^{\bar{a}}, \quad \omega_{b\bar{a},\bar{m}} = -\omega_{\bar{a}b,\bar{m}} = e_b^n \partial_{\bar{m}} e_n^a. \quad (2.29)$$

Ненулевые компоненты кэлера тензора кривизны суть

$$\begin{aligned} R_{m\bar{p}n\bar{q}} &= -R_{\bar{p}mn\bar{q}} = -R_{m\bar{p}\bar{q}n} = R_{\bar{p}m\bar{q}n} = \\ &= \partial_m \partial_{\bar{p}} h_{n\bar{q}} - h^{\bar{s}t} (\partial_m h_{n\bar{s}}) (\partial_{\bar{p}} h_{t\bar{q}}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Выполняется также соотношение

$$R_{m\bar{p}n\bar{q}} = e_n^a e_{\bar{q}}^{\bar{b}} (\partial_m \omega_{a\bar{b},\bar{p}} - \partial_{\bar{p}} \omega_{a\bar{b},m} + \omega_{a\bar{c},m} \omega_{c\bar{b},\bar{p}} - \omega_{a\bar{c},\bar{p}} \omega_{c\bar{b},m}). \quad (2.31)$$

Оно следует из (1.59).

2.1.1. Комплексные дифференциальные формы

Определим по аналогии с (1.23) комплексную (p, q) -форму:

$$\alpha_{p,q} = \alpha_{m_1 \dots m_p \bar{n}_1 \dots \bar{n}_q} dz^{m_1} \wedge \dots \wedge dz^{m_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{n}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{n}_q}. \quad (2.32)$$

Степени формы p и q не могут превышать комплексную размерность d — иначе внешнее произведение в правой части окажется равным нулю.

Мы можем теперь обобщить все конструкции § 2.2 на комплексный случай. Оператор дуальности Ходжа удобно определить как

$$\begin{aligned} * \alpha_{p,q} &= \frac{1}{(d-p)!(d-q)!} E^{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_p} \varepsilon_{m_{p+1} \dots m_d}^{n_1 \dots n_q} \bar{\varepsilon}_{\bar{n}_{q+1} \dots \bar{n}_d} \\ &\overline{\alpha_{m_1 \dots m_p \bar{n}_1 \dots \bar{n}_q}} dz^{m_{p+1}} \wedge \dots \wedge dz^{m_d} \wedge d\bar{z}^{\bar{n}_{q+1}} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{n}_d}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где

$$E_{m_1 \dots m_d \bar{n}_1 \dots \bar{n}_d} = \det(h_{m\bar{n}}) \varepsilon_{m_1 \dots m_d} \varepsilon_{\bar{n}_1 \dots \bar{n}_d} \quad (2.34)$$

есть инвариантный тензор (1.7) в комплексных обозначениях и индексы поднимаются с помощью $h^{\bar{m}n}$. Оператор (2.33) переводит (p, q) -форму в $(d-p, d-q)$ -форму. Выполняется свойство

$$**\alpha_{p,q} = (-1)^{p(d-p)+q(d-q)}\alpha_{p,q}. \quad (2.35)$$

Скалярное произведение определяется для форм совпадающих степеней p, q по аналогии с (1.27)³:

$$(\alpha_{p,q}, \beta_{p,q}) = \int_{\mathcal{M}} \alpha_{p,q} \wedge * \beta_{p,q} = p! q! \int_{\mathcal{M}} \alpha_{r_1 \dots r_p \bar{s}_1 \dots \bar{s}_q} \overline{\beta_{m_1 \dots m_p \bar{n}_1 \dots \bar{n}_q}} \times \\ \times h^{\bar{m}_1 r_1} \dots h^{\bar{m}_p r_p} h^{\bar{s}_1 n_1} \dots h^{\bar{s}_q n_q} \det(h_{n\bar{m}}) \prod_t dz^t d\bar{z}^t. \quad (2.37)$$

Дуальная форма $*\alpha_{p,q}$ имеет ту же норму, что и $\alpha_{p,q}$.

Рассмотрим теперь подмножество (2.32), включающее только $(p, 0)$ -формы (или иначе голоморфные p -формы):

$$\alpha_{p,0} = \alpha_{m_1 \dots m_p} dz^{m_1} \wedge \dots \wedge dz^{m_p}. \quad (2.38)$$

Определим оператор голоморфной внешней производной ∂ по аналогии с (1.30):

$$\partial\alpha = \partial_n \alpha_{m_1 \dots m_p} dz^n \wedge dz^{m_1} \wedge \dots \wedge dz^{m_p}. \quad (2.39)$$

Введём также сопряжённый относительно скалярного произведения (2.37) оператор ∂^\dagger . В полной аналогии с (1.32) он выражается в виде

$$\partial^\dagger = (-1)^{dp+d+1} * \partial *. \quad (2.40)$$

Операторы ∂ и ∂^\dagger нильпотентны. Антиккоммутатор $-\{\partial, \partial^\dagger\}$ есть эрмитов оператор, который называется *лапласианом Дольбо*.

Определение 2.4. Множество всех голоморфных форм (2.38) вместе с действующими на нём операторами ∂ и ∂^\dagger называется *комплексом Дольбо*.

³Во всей книге мы используем соглашение

$$\prod_t dz^t d\bar{z}^t = \prod_M dx^M \quad (2.36)$$

без множителей i , которые иногда вставляются.

Можно определить также комплекс анти-Дольбо, включающий антиголоморфные формы

$$\bar{\alpha} = \alpha_{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_p} d\bar{z}^{\bar{m}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{m}_p} \quad (2.41)$$

и нильпотентные операторы $\bar{\partial}$ и $\bar{\partial}^\dagger$. В общем случае лапласиан анти-Дольбо, $-\{\bar{\partial}, \bar{\partial}^\dagger\}$, не совпадает с лапласианом Дольбо.

Перед тем как это обсуждать, заметим, что действие операторов ∂ , ∂^\dagger , $\bar{\partial}$ и $\bar{\partial}^\dagger$ можно также определить на пространстве всех (p, q) -форм. Для операторов ∂ и $\bar{\partial}$ это действие представляет очевидное обобщение (2.39), а ∂^\dagger и $\bar{\partial}^\dagger$ — эрмитово-сопряженные операторы. Довольно очевидно, что

$$\begin{aligned} \partial \alpha_{p,q} &= \alpha_{p+1,q}, & \bar{\partial} \alpha_{p,q} &= \alpha_{p,q+1}, \\ \partial^\dagger \alpha_{p,q} &= \alpha_{p-1,q}, & \bar{\partial}^\dagger \alpha_{p,q} &= \alpha_{p,q-1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Суммы $\partial + \bar{\partial}$ и $\partial^\dagger + \bar{\partial}^\dagger$ — это наши старые друзья, операторы d и d^\dagger комплекса де Рама.

Определение 2.5. Множество всех форм на кэлеровых многообразиях (2.32) вместе с операторами ∂ , ∂^\dagger , $\bar{\partial}$ и $\bar{\partial}^\dagger$ называется комплексом Кэлера—де Рама.

Читатель может спросить: почему мы ограничиваемся в этом определении рассмотрением только кэлеровых многообразий. Разве мы не выяснили только что, что действие (анти)голоморфных внешних производных и сопряжённых к ним операторов можно определить для всех форм (2.32) на произвольном эрмитовом многообразии?

Дело в том, что кэлеровы многообразия обладают специальными свойствами.

Теорема 2.3. (i) На кэлеровом многообразии лапласианы Дольбо и анти-Дольбо совпадают: $\{\partial, \partial^\dagger\} = \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^\dagger\}$.

(ii) Антиккоммутаторы $\{\partial, \bar{\partial}^\dagger\}$ и $\{\partial^\dagger, \bar{\partial}\}$ равны нулю.

Доказательство. Мы не будем доказывать эту теорему здесь, но сделаем это в главе 10, используя суперсимметричные методы. \square

Из этой теоремы и из равенства $\partial + \bar{\partial} = d$ следует, что лапласиан Дольбо совпадает в кэлеровом случае с точностью до множителя $1/2$ с оператором Лапласа—Бельтрами $\Delta = -\{d, d^\dagger\}$, а последний коммутирует с обеими внешними производными и

с их сопряжёнными. Это означает, что операторы ∂ , $\bar{\partial}$, ∂^\dagger , $\bar{\partial}^\dagger$ и Δ образуют замкнутую супералгебру (в то время как для комплексного многообразия общего вида это не так).

Это первый раз, когда слово «супералгебра» появилось в основном тексте книги. Супералгебра есть обобщение алгебры Ли, включающее не только коммутаторы, но также антикоммутаторы. Простейшая супералгебра (0.3) описывает комплекс де Рама. В случае комплекса Кэлера—де Рама мы имеем дело с расширенной супералгеброй. Богатая математика, связанная с понятием супералгебр, будет обсуждаться в нашей книге позже. А сейчас мы просто проиллюстрируем описанную выше конструкцию схемой на рис. 2.2, представляющем немного упрощённую версию ромба Ходжа.

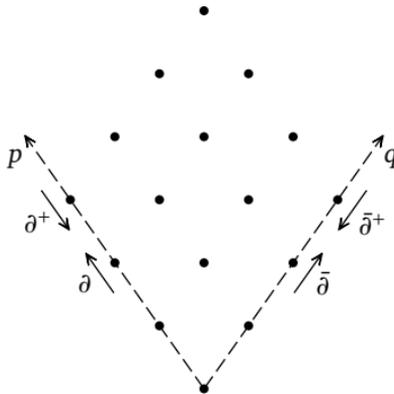


Рис. 2.2. Комплекс Кэлера—де Рама. Каждая точка отвечает множеству форм определённых степеней p, q

Для каждого комплексного многообразия можно определить вещественную $(1, 1)$ -форму $\mathcal{K} = ih_{n\bar{m}} d\omega^n \wedge d\bar{\omega}^{\bar{m}}$. Из определения (2.26) следует, что эта форма замкнута,

$$d\mathcal{K} = (\partial + \bar{\partial})\mathcal{K} = 0, \quad (2.43)$$

если многообразие кэлерово. В этом случае \mathcal{K} называется кэлеровой формой. Замкнутость \mathcal{K} является также достаточным условием кэлеровости многообразия.

§ 2.2. Вещественное описание

Интересный и важный факт состоит в том, что комплексные многообразия можно описать, не вводя комплексных координат, а работая исключительно в вещественных терминах.

Определение 2.6. Почти комплексное многообразие — это многообразие, на котором можно определить тензорное поле I_{MN} , удовлетворяющее условиям (i) $I_{MN} = -I_{NM}$ и (ii) $I_M^N I_N^P = -\delta_M^P$. Тензор I_M^N называется *почти комплексной структурой*.

Ясно, что проекция этого тензора I_{AB} на касательное пространство лежит в $SO(D)$.

Опуская индекс P в условии (ii) и используя антисимметрию (i), мы выводим

$$g_{MP} = I_M^N I_P^Q g_{NQ}. \quad (2.44)$$

Легко доказать, что почти комплексное многообразие с необходимостью чётномерно. Действительно, детерминант нечётномерной кососимметрической матрицы I_{AB} равен нулю, что противоречит условию $I^2 = -\mathbb{1}$. Но не каждое чётномерное многообразие почти комплексно. Можно доказать, что S^4 таковым не является. С другой стороны, S^6 почти комплексно, как мы скоро увидим.

Читатель, впервые встретивший это определение, может быть несколько сбит с толку. Ему непонятно, почему антисимметричный *вещественный* тензор называется *комплексной* структурой; энигматично выглядит слово «почти» в определении.

Чтобы понять это, рассмотрим простейший пример — плоское двумерное евклидово пространство. Его можно параметризовать двумя вещественными координатами x^1, x^2 или комплексной координатой $z = (x^1 + ix^2)/\sqrt{2}$. Выполняется очевидное равенство $\partial z/\partial x^2 = i \partial z/\partial x^1$, которое можно переписать как⁴

$$\frac{\partial z}{\partial x^M} + i \varepsilon_{MN} \frac{\partial z}{\partial x^N} = 0 \quad (2.45)$$

с конвенцией $\varepsilon_{12} = 1$. Тензор ε_{MN} удовлетворяет обоим условиям

⁴Условию (2.45) удовлетворяет не только z , но и любая голоморфная функция $f(z)$. В этом случае вещественная и мнимая части (2.45) — не что иное, как условия Коши—Римана.

нашего определения и является поэтому комплексной структурой на \mathbb{R}^2 (для гармонизации дальнейших конвенций нам удобно здесь сменить знак и выбрать комплексную структуру в виде $I_{MN} = -\varepsilon_{MN}$)

На искривлённой двумерной поверхности комплексная структура выглядит немного более сложно. Например, на сфере с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ её можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} I_{\theta\theta} = I_{\phi\phi} = 0, \quad I_{\theta\phi} = -I_{\phi\theta} = \sin \theta &\Rightarrow \\ \Rightarrow I_{\theta}^{\theta} = I_{\phi}^{\phi} = 0, \quad I_{\phi}^{\theta} = -\sin \theta, \quad I_{\theta}^{\phi} = \frac{1}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Однако при проецировании на касательную плоскость мы воспроизводим

$$I_{AB} = I_{MN} e_A^M e_B^N = \pm \varepsilon_{AB}, \quad (2.47)$$

где знак зависит от выбора цвайбайнов. I_{AB} можно проинтерпретировать как ортогональную матрицу, вращающую цвайбайн на $\pm\pi/2$.

Заметим, что I_{AB} можно также интерпретировать как тензор в \mathbb{R}^3 ,

$$I_{ij} = \varepsilon_{ijk} n^k \quad (2.48)$$

(где n^k — единичный вектор, ортогональный поверхности S^2), спроецированный на касательную плоскость.

Рассмотрим теперь общий многомерный случай.

Теорема 2.4. Пусть на чётномерном многообразии существует тензор I_M^N , удовлетворяющий двум приведённым выше условиям. Выбирая соответствующим образом фильбайны, можно в каждой точке многообразия привести его касательную проекцию I_{AB} к каноническому виду⁵

$$I_{AB} = \text{diag}(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon), \quad \text{где } \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Доказательство. Чтобы построить в касательном пространстве E ортонормированный базис, в котором комплексная структура приобретает вид (2.49), мы выбираем вначале в E произвольный единичный вектор e_0 . Из $I = -I^T$ и $I^2 = -\mathbb{1}$ следует, что

⁵Можно интерпретировать I_{AB} как ортогональную матрицу, вращающую фильбайны и удовлетворяющую условию $I^2 = -\mathbb{1}$.

вектор $e_1 = Ie_0$ также имеет единичную длину и ортогонален e_0 . Очевидно, что $Ie_1 = I^2e_0 = -e_0$. Рассмотрим теперь подпространство $E^* \subset E$, ортогональное к e_0 и e_1 . Если оно непусто, выберем там произвольный единичный вектор f_0 и рассмотрим $f_1 = If_0$. Легко увидеть, что f_1 также лежит в E^* , ортогонален f_0 и имеет единичную длину. Рассмотрим далее подпространство $E^{**} \subset E^* \subset E$, ортогональное к e_0, e_1, f_0, f_1 , и если E^{**} непусто, то повторим процедуру. Мы получаем матрицу (2.49). \square

По комплексной структуре можно построить комплексные координаты. Предположим, что многомерный аналог (2.45), система уравнений

$$\frac{\partial z^n}{\partial x^M} - iI_M^N \frac{\partial z^n}{\partial x^N} = 0, \quad (2.50)$$

имеет d независимых решений (условия, при которых это выполняется, будут найдены ниже). Перейдём от x^M к комплексным координатам $\{z^n, \bar{z}^{\bar{n}}\}$ и выразим в этом базисе I_M^N . С использованием (2.50) получаем очень простой результат:

$$\begin{aligned} I_m^n &= \frac{\partial x^M}{\partial z^m} I_M^N \frac{\partial z^n}{\partial x^N} = \frac{\partial x^M}{\partial z^m} I_M^N \left(iI_N^P \frac{\partial z^n}{\partial x^P} \right) = -i \frac{\partial z^n}{\partial x^M} \frac{\partial x^M}{\partial z^m} = -i\delta_m^n, \\ I_{\bar{m}}^{\bar{n}} &= i\delta_{\bar{m}}^{\bar{n}}, \quad I_m^{\bar{n}} = I_{\bar{m}}^n = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Мы можем теперь сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 2.5. *Если система (2.50) имеет d независимых решений, то многообразие комплексно (без «почти»!) и его метрика эрмитова.*

Доказательство. Рассмотрим вначале одну из карт и рассмотрим там метрический тензор в комплексном базисе. С использованием (2.50) и (2.44) мы выводим

$$\begin{aligned} h^{mn} &= \frac{\partial z^m}{\partial X^M} \frac{\partial z^n}{\partial X^N} g^{MN} = -I_M^P I_N^Q \frac{\partial z^m}{\partial X^P} \frac{\partial z^n}{\partial X^Q} g^{MN} = \\ &= -\frac{\partial z^m}{\partial X^P} \frac{\partial z^n}{\partial X^Q} g^{PQ} = -h^{mn} = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Аналогично получаем, что $h^{\bar{m}\bar{n}} = 0$. Отсюда следует, что также $h_{m\bar{n}} = h_{\bar{m}n} = 0$ и метрика имеет эрмитов вид (2.2).

Для доказательства глобальной комплексности мы должны показать, что отображения склейки в области перекрытия двух

карт, параметризуемых координатами $\{z^n, \bar{z}^{\bar{n}}\}$ и $\{w^p, \bar{w}^{\bar{p}}\}$, аналитичны: $z^n = f^n(w^p)$, так что $\partial z^n / \partial \bar{w}^{\bar{p}} = 0$.

Как мы только что показали, если (2.50) выполняется, то тензор I_M^N имеет вид (2.51) и это верно на обеих картах. Предположив зависимость общего вида $z^n = f^n(w^p, \bar{w}^{\bar{p}})$ и рассмотрев преобразование компонент I_M^N при переходе от z к w , мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^q}{\partial z^n} \frac{\partial z^n}{\partial w^p} - \frac{\partial w^q}{\partial \bar{z}^{\bar{n}}} \frac{\partial \bar{z}^{\bar{n}}}{\partial w^p} &= \delta_p^q, \\ \frac{\partial w^q}{\partial z^n} \frac{\partial z^n}{\partial \bar{w}^{\bar{p}}} - \frac{\partial w^q}{\partial \bar{z}^{\bar{n}}} \frac{\partial \bar{z}^{\bar{n}}}{\partial \bar{w}^{\bar{p}}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

С другой стороны, верны очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^q}{\partial z^n} \frac{\partial z^n}{\partial w^p} + \frac{\partial w^q}{\partial \bar{z}^{\bar{n}}} \frac{\partial \bar{z}^{\bar{n}}}{\partial w^p} &= \delta_p^q, \\ \frac{\partial w^q}{\partial z^n} \frac{\partial z^n}{\partial \bar{w}^{\bar{p}}} + \frac{\partial w^q}{\partial \bar{z}^{\bar{n}}} \frac{\partial \bar{z}^{\bar{n}}}{\partial \bar{w}^{\bar{p}}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Сравнивая (2.53) и (2.54), получаем

$$\frac{\partial w^q}{\partial z^n} \frac{\partial z^n}{\partial w^p} = \delta_p^q \quad \text{и} \quad \frac{\partial w^q}{\partial z^n} \frac{\partial z^n}{\partial \bar{w}^{\bar{p}}} = 0. \quad (2.55)$$

Первое тождество означает, что матрица $\partial w^q / \partial z^n$ невырождена. Но тогда второе тождество говорит, что $\partial z^n / \partial \bar{w}^{\bar{p}} = 0$. \square

Для некоторых приложений полезно ввести тензоры

$$Q_M^N = \frac{\partial x^N}{\partial z^m} \frac{\partial z^m}{\partial x^M}, \quad P_M^N = \frac{\partial x^N}{\partial \bar{z}^m} \frac{\partial \bar{z}^m}{\partial x^M}. \quad (2.56)$$

Используя уравнения (2.50) и их следствие (2.51), получаем

$$Q_M^N = \frac{1}{2}(\delta_M^N + iI_M^N), \quad P_M^N = \frac{1}{2}(\delta_M^N - iI_M^N). \quad (2.57)$$

Тензор P_M^N входит в сами уравнения (2.50). Фактически он представляет собой проектор из пространства всех векторов на пространство антиголоморфных векторов. Аналогично Q_M^N есть проектор на пространство голоморфных векторов.

Выполняются равенства

$$Q_M^N Q_N^S = Q_M^S, \quad P_M^N P_N^S = P_M^S, \quad Q_M^N P_N^S = 0. \quad (2.58)$$

Естественно спросить теперь: в каких случаях система (2.50) имеет решение, а в каких случаях не имеет? Ответ на этот вопрос составляет содержание *теоремы Ньюландера—Ниренберга* [7].

Теорема 2.6. *Необходимое и достаточное условие для существования комплексных решений z^n у системы (2.50), т. е. для того, чтобы многообразие было комплексным, а не почти комплексным, имеет вид⁶*

$$\mathcal{N}_{MN}^K = \partial_{[M} I_N]^K - I_M^P I_N^Q \partial_{[P} I_Q]^K = 0. \quad (2.60)$$

Доказательство. Необходимость. Представим систему (2.50) в виде $\mathcal{D}_M z^n = 0$, где

$$\mathcal{D}_M = \partial_M - i I_M^N \partial_N. \quad (2.61)$$

Для самосогласованности должны также выполняться условия $[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] z^n = 0$. Вычисление даёт

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] z^n &= [-i \partial_{[M} I_N]^Q - I_{[M}^P (\partial_P I_N]^Q)] \partial_Q z^n = \\ &= [-i \partial_{[M} I_N]^K - i I_{[M}^P (\partial_P I_N]^Q) I_Q^K] \partial_K z^n - I_{[M}^P (\partial_P I_N]^Q) \mathcal{D}_Q z^n = \\ &= -i \mathcal{N}_{MN}^K \partial_K z^n \quad (2.62) \end{aligned}$$

(при выводе использовалось $\mathcal{D}_Q z^n = 0$ и тождество $I_Q^K \partial_P I_N^Q = -I_N^Q \partial_P I_Q^K$, которое следует из $I^2 = -\mathbb{1}$). Обращение в ноль выражения (2.62) означает обращение в ноль тензора \mathcal{N}_{MN}^K (это можно увидеть, выбрав вещественные координаты x^M , равные вещественным и мнимым частям z^n).

Достаточность. Эта часть теоремы [доказательство существования решений системы (2.50) при выполнении условия (2.60)] сложнее. Быть может, она не столь сложна для математиков в случае, если комплексные структуры I_M^N представляют аналитические функции координат (сложности возникают, когда существует только конечное число производных I_M^N по координатам, но нас такие математические тонкости интересовать не будут). Тогда достаточность условия $[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] = \mathcal{S}_{MN}^Q \mathcal{D}_Q$ с

⁶Это выражение есть тензор: оно не меняется, если заменить обычные производные ковариантными, так как вклады, включающие символы Кристоффеля, сокращаются. Мы будем называть этот тензор *тензором Нейенхейса*, хотя это и отличается от стандартного определения:

$$\mathcal{N}_{MN}^K \text{ (стандартный)} = I_M^P \mathcal{N}_{PN}^K \text{ (наш)} = I_M^P \partial_{[P} I_N]^K + I_N^P \partial_{[M} I_P]^K. \quad (2.59)$$

Мы предпочитаем определение (2.60), поскольку оно имеет более прозрачную структуру, и именно эта комбинация появится ниже в уравнении (2.62).

некоторым \mathcal{S}_{MN}^Q (которое следует из (2.62) при $\mathcal{N}_{MN}^K = 0$) для существования решения системы уравнений $\mathcal{D}_M z^n = 0$ есть следствие классической теоремы Фробениуса [8]. Мы дадим здесь другое, «физическое» доказательство этого факта [9], которое прояснит смысл условия (2.60). Его линейризованная версия напоминает многомерное обобщение условий Коши—Римана.

• Рассмотрим вначале случай, когда I_M^N имеет канонический вид (2.49)⁷. Тогда решения (2.50) с очевидностью существуют. Одно из этих решений есть

$$z_{(0)}^1 = \frac{x^1 + ix^2}{\sqrt{2}}, \quad z_{(0)}^2 = \frac{x^3 + ix^4}{\sqrt{2}}, \quad \dots, \quad (2.63)$$

но годятся также любые аналитические функции $f^n(z_{(0)}^m)$.

Пусть теперь комплексная структура не совпадает с плоской структурой $(I_0)_M^N = \text{diag}(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon)$, но близка к ней: $I = I_0 + \Delta$, $\Delta \ll 1$. На первом шаге доказательства мы покажем, что решения (2.50) при такой инфинитезимальной деформации по-прежнему существуют.

• Сделаем это вначале в простейшем случае $D = 2$. Тогда условие (2.60) удовлетворяется тождественно. Условие $I^2 = -1$ означает в первом порядке по Δ , что $\{\Delta, I_0\} = 0$. Тогда Δ представимо в виде $\Delta = \alpha\sigma^1 + \beta\sigma^3$, т. е.

$$\Delta_1^1 = -\Delta_2^2, \quad \Delta_1^2 = \Delta_2^1. \quad (2.64)$$

Посмотрим на систему (2.50). Положим $z = z_{(0)} + \delta z$. Уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1}(\delta z) + i \frac{\partial}{\partial x^2}(\delta z) &= \frac{i\Delta_1^1 - \Delta_1^2}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^2}(\delta z) - i \frac{\partial}{\partial x^1}(\delta z) &= \frac{i\Delta_2^1 - \Delta_2^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ввиду условия (2.64) эти два уравнения совпадают. Можно их представить как⁸

$$\frac{\partial(\delta z)}{\partial \bar{z}_{(0)}} = \frac{i}{2} \Delta_1^{1+i2}, \quad (2.66)$$

что легко можно проинтегрировать на комплексном диске.

⁷Как мы доказали выше, касательная проекция I_{AB} всегда может быть выбрана в таком виде. Но для $I_M^N(x)$ это условие нетривиально.

⁸Введено обозначение $\Delta_M^{1+i2} \equiv \Delta_M^1 + i\Delta_M^2$.

• Простейший нетривиальный случай — это $D = 4$. Условия $\{\Delta, I_0\} = 0$ приводят к связям

$$\begin{aligned}\Delta_1^1 &= -\Delta_2^2, & \Delta_1^2 &= \Delta_2^1, \\ \Delta_1^3 &= -\Delta_2^4, & \Delta_1^4 &= \Delta_2^3, \\ \Delta_3^1 &= -\Delta_4^2, & \Delta_3^2 &= \Delta_4^1, \\ \Delta_3^3 &= -\Delta_4^4, & \Delta_3^4 &= \Delta_4^3.\end{aligned}\tag{2.67}$$

Положим $z^1 \rightarrow z$, $z^2 \rightarrow w$. Короткое вычисление показывает, что с учётом условий (2.67) уравнения (2.50) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\delta z)}{\partial \bar{z}_{(0)}} &= \frac{i}{2} \Delta_1^{1+i2}, & \frac{\partial(\delta w)}{\partial \bar{z}_{(0)}} &= \frac{i}{2} \Delta_1^{3+i4}, \\ \frac{\partial(\delta z)}{\partial \bar{w}_{(0)}} &= \frac{i}{2} \Delta_3^{1+i2}, & \frac{\partial(\delta w)}{\partial \bar{w}_{(0)}} &= \frac{i}{2} \Delta_3^{3+i4}.\end{aligned}\tag{2.68}$$

При $D > 2$ условия (2.60) накладывают дополнительные связи. Их линеаризованный вид есть

$$\partial_P \Delta_N^M - \partial_N \Delta_P^M = (I_0)_P^Q (I_0)_N^S [\partial_Q \Delta_S^M - \partial_S \Delta_Q^M].\tag{2.69}$$

Вновь принимая во внимание (2.67), можно показать, что в случае $D = 4$ из 24 вещественных условий в (2.69) выживают только 4 независимых вещественных или 2 независимых комплексных условия. Последние имеют простой вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{(0)}} \Delta_3^{1+i2} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}_{(0)}} \Delta_1^{1+i2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{(0)}} \Delta_3^{3+i4} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}_{(0)}} \Delta_1^{3+i4} &= 0.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Первое уравнение в (2.70) есть условие интегрируемости левой пары уравнений в (2.68). Оно достаточно для существования решения. В самом деле, это условие означает, что $(0, 1)$ -форма

$$\omega = \Delta_1^{1+i2} d\bar{z}_{(0)} + \Delta_3^{1+i2} d\bar{w}_{(0)}$$

замкнута: $\bar{\partial}_0 \omega = 0$. Ввиду того что карта комплексного многообразия, которую мы рассматриваем, имеет тривиальную топологию, форма ω также точна (см. теорему 1.2), что означает существование решения. Второе уравнение в (2.70) есть необходимое и достаточное условие интегрируемости правой пары в (2.68).

• Это рассуждение можно обобщить на случай высших измерений. Для произвольного $D = 2d$ уравнения (2.50) сводятся с учётом равенства $I^2 = -1$ к d^2 условиям, аналогичным (2.68) и включающим производные по всем антиголоморфным переменным $\bar{z}_{(0)}^{\bar{n}}$ для всех δz^n . Условия (2.60) приводят к $d^2(d-1)/2$ комплексным связям, которые представляют условия интегрируемости типа (2.70). Они означают, что формы

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \Delta_1^{1+i2} d\bar{z}_{(0)}^1 + \Delta_3^{1+i2} d\bar{z}_{(0)}^2 + \dots, \\ \omega_2 &= \Delta_1^{3+i4} d\bar{z}_{(0)}^1 + \Delta_3^{3+i4} d\bar{z}_{(0)}^2 + \dots\end{aligned}\quad (2.71)$$

и т. д. замкнуты. Ввиду тривиальной топологии рассматриваемой карты они также точны.

• После того как мы нашли решения $z^n = z_{(0)}^n + \delta z^n$, комплексная структура приобретает в этих новых координатах и в пренебрежении членами $\sim o(\delta z)$ канонический вид (2.51) и (2.49). Таким образом, мы по сути дела доказали, что после малой деформации I_M^N приводится к виду (2.49) инфинитезимальным диффеоморфизмом, если выполняется условие (2.60).

• Рассмотрим теперь произвольную комплексную структуру, не обязательно близкую к (2.49). Если тензор $I_M^N(x)$ на данной карте аналитичен (что мы предполагаем), мы можем разложить его в ряд по малому параметру α :

$$I(x) = I_0 + \alpha I_1(x) + \alpha^2 I_2(x) + \dots \quad (2.72)$$

Сделаем то же для решений $z^n(x)$, которые мы ищем:

$$z^n(x) = z_{(0)}^n + \alpha z_{(1)}^n(x) + \alpha^2 z_{(2)}^n(x) + \dots \quad (2.73)$$

Поправка $\alpha z_{(1)}^n(x)$ была определена выше. Пусть $\tilde{z}^n(x) = z_{(0)}^n + \alpha z_{(1)}^n(x)$. Как было замечено, комплексная структура в этих новых координатах имеет канонический вид (2.51) с точностью до членов порядка $\propto \alpha^2$. Вводя новые вещественные координаты \tilde{x}^M — вещественные и мнимые части $\tilde{z}^n(x)$, мы можем привести комплексную структуру к виду (2.49).

• Введя в рассмотрение второй член $\alpha^2 I_2(x)$ в разложении (2.72), мы можем представить комплексную структуру в новых координатах \tilde{x} как

$$I(\tilde{x}) = I_0 + \alpha^2 \tilde{I}_2(\tilde{x}) + \text{члены высшего порядка.} \quad (2.74)$$

Повторив процедуру, которую мы использовали для нахождения $z_{(1)}^n(x)$, мы можем теперь определить $\tilde{z}_{(2)}^n(\tilde{x})$, а следовательно, и $z_{(2)}^n(x)$, и аналогично все члены ряда (2.73).

• С единственной оговоркой, что мы не исследовали сложный вопрос сходимости ряда (2.73), теорема доказана. \square

В главе 9 мы дадим суперсимметричную интерпретацию этой теоремы.

Сделаем следующее важное замечание.

Теорема 2.7. *Комплексное многообразие является кэлеровым тогда и только тогда, когда его комплексная структура ковариантно постоянна относительно связности Леви-Чивиты.*

Доказательство. Выберем базис, где комплексная структура имеет вид (2.51). Тогда получим $\nabla_P I_m^n = \Gamma_{Pq}^n I_m^q - \Gamma_{Pm}^q I_q^n = 0$ как при $P = p$, так и при $P = \bar{p}$. Ковариантная производная $\nabla_P I_{\bar{m}}^{\bar{n}}$ также равна нулю. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\nabla_P I_m^{\bar{n}} &= \Gamma_{Pq}^{\bar{n}} I_m^q - \Gamma_{Pm}^{\bar{q}} I_{\bar{q}}^{\bar{n}} = -2i \Gamma_{Pm}^{\bar{n}}, \\ \nabla_P I_{\bar{m}}^n &= \Gamma_{P\bar{q}}^n I_{\bar{m}}^{\bar{q}} - \Gamma_{P\bar{m}}^q I_q^n = 2i \Gamma_{P\bar{m}}^n.\end{aligned}\tag{2.75}$$

Для обращения в ноль этих производных необходимо и достаточно обращения в ноль символов Кристоффеля смешанной голоморфности, т. е. кэлеровость. \square

Условие $\nabla_P I_{MN} = 0$, также как и условие $d\mathcal{K} = 0$ обращения в ноль внешнего дифференциала кэлеровой формы $\mathcal{K} = I_{MN} dx^M \wedge dx^N$ могут служить альтернативными определениями кэлерова многообразия.

Для комплексного многообразия общего вида ковариантные производные Леви-Чивиты (2.75) в ноль не обращаются. С другой стороны, комплексная структура ковариантно постоянна относительно аффинной связности с нулевыми компонентами $G_{Pm}^{\bar{n}}$ и $G_{P\bar{m}}^n$. Как видно из равенств (2.18), бисмутова связность принадлежит этому классу. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.8. *Комплексная структура произвольного комплексного многообразия ковариантно постоянна относительно бисмутовой связности.*

Напишем красивую формулу для тензора кручения бисмутовой связности [10], [11]:

$$C_{MNP} = I_M^Q I_N^S I_P^R (\nabla_Q I_{SR} + \nabla_S I_{RQ} + \nabla_R I_{QS}),\tag{2.76}$$

где ∇_M — ковариантные производные Леви-Чивиты⁹. В её справедливости легко убедиться, перейдя к координатам $M \equiv \{m, \bar{m}\}$, используя (2.51) и сравнив (2.76) с (2.16).

§ 2.3. Примеры

Посмотрим теперь, как эти общие конструкции работают в некоторых частных случаях.

1. S^2 . Это простейшее комплексное многообразие мы уже обсуждали раньше. В стандартной широтно-долготной параметризации его метрика есть $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Комплексная структура была выписана в уравнении (2.46). Читатель легко проверит, что тензор Нейенхейса равен нулю, как ему и положено.

Комплексные координаты в южном и северном полушариях можно выбрать, как в (2.3) и (2.4). Метрика имеет вид (2.2). Эта метрика выводится из кэлерова потенциала

$$h = \frac{1}{(1 + z\bar{z})^2} = \partial\bar{\partial} \ln(1 + z\bar{z}). \quad (2.77)$$

Кэлерова форма $\mathcal{K} = ih dz \wedge d\bar{z}$ замкнута.

2. Не все четырёхмерные многообразия комплексны (S^4 не комплексно), и не все комплексные четырёхмерные многообразия кэлеровы. Простейший пример комплексного, но не кэлерова многообразия — это *многообразие Хопфа* \mathcal{H}^2 [12]. Топологически это $S^3 \times S^1$. Его можно описать парой комплексных координат $z^{m=1,2}$ с отождествлением точек z^m и $2z^m$ (можно посадить z^m в сферический слой $1 \leq |z| < 2$). Метрика выбирается в конформноинвариантном виде

$$ds^2 = \frac{dz^m d\bar{z}^m}{z^k \bar{z}^k}, \quad (2.78)$$

совместимом с идентификацией $z^m \equiv 2z^m$. Очевидно, что метрика (2.78) не удовлетворяет условию (2.26) и не кэлерова.

3. Как пример кэлерова многообразия комплексной размерности 2, возьмём комплексное проективное пространство $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

⁹Фактически можно заменить здесь ковариантные производные обычными: вклад от симметричных по нижним индексам символов Кристоффеля в сумме сокращается. Но мы оставили ∇I , чтобы подчеркнуть тензорную природу C_{MNP} .

Это набор комплексных троек (w^0, w^1, w^2) , идентифицированных по умножению на произвольное ненулевое комплексное число λ :

$$(w^0, w^1, w^2) \equiv (\lambda w^0, \lambda w^1, \lambda w^2).$$

Естественная симметричная «круглая» метрика на этом пространстве имеет вид

$$ds^2 = 2 \frac{\bar{w}^\alpha w^\alpha d\bar{w}^\beta dw^\beta - \bar{w}^\alpha w^\beta d\bar{w}^\beta dw^\alpha}{(\bar{w}^\alpha w^\alpha)^2} \quad (2.79)$$

($\alpha=0, 1, 2$). $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ топологически нетривиально, но может быть покрыто тремя дисками с тривиальной топологией \mathbb{C} . Одна из таких карт содержит все точки многообразия, кроме точек с $w^0=0$ (множество всех таких точек имеет топологию $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \equiv S^2$). Комплексные координаты, однозначно описывающие точки на этой карте, могут быть выбраны в виде $z^{1,2} = w^{1,2}/w^0$. Тогда метрика (2.79) сводится к виду

$$h_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} \ln(1 + z\bar{z}) = \frac{1}{1 + z\bar{z}} \left(\delta_{m\bar{n}} - \frac{z^n \bar{z}^{\bar{n}}}{1 + z\bar{z}} \right), \quad (2.80)$$

$z\bar{z} \equiv z^k \bar{z}^{\bar{k}}$, $k = 1, 2$ (метрика Фубини—Штуди). Эта метрика с очевидностью кэлерава.

Вторая карта исключает точки с $w^1 = 0$ и может быть однозначно описана координатами $u^1 = w^0/w^1$, $u^2 = w^2/w^1$. Третья карта исключает точки с $w^2 = 0$ и может быть однозначно описана координатами $v^1 = w^1/w^2$, $v^2 = w^0/w^2$. Метрики на второй и третьей картах, выраженные в этих координатах, имеют тот же функциональный вид, что и метрика (2.80).

Обобщение на $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n>2}$ довольно очевидно. Это многообразие представляет собой множество наборов $n+1$ комплексных чисел, отождествлённых по умножению на $\lambda \neq 0$. Комплексная размерность многообразия есть n . Минимальное число дисков, которыми можно покрыть $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, есть $n+1$. На каждой карте метрику можно выбрать в виде (2.80).

4. S^6 . Как говорилось выше, мы не знаем на сегодняшний день, допускает ли это многообразие комплексную структуру. Но почти комплексная структура существует. Она строится так же,

как комплексная структура (2.46) на S^2 , которую можно представить как трёхмерный тензор

$$I_{MN}(S^2) = \frac{\varepsilon_{MNP}x^P}{|\mathbf{x}|}, \quad (2.81)$$

спроецированный на поверхность $|\mathbf{x}| = 1$.

По аналогии с этим мы пишем почти комплексную структуру на S^6 как спроектированный на гиперповерхность $|\mathbf{x}| = 1$ семимерный тензор

$$I_{MN}(S^6) = \frac{f_{MNP}x^P}{|\mathbf{x}|}, \quad (2.82)$$

где $M, N, P = 1, \dots, 7$, а f_{MNP} — полностью антисимметричный тензор, описывающий алгебру октонионов. Один из возможных способов выбора f_{MNP} — это

$$f_{123} = f_{176} = f_{257} = f_{365} = f_{246} = f_{145} = f_{347} = 1, \quad (2.83)$$

а все остальные компоненты восстанавливаются по антисимметрии. Очевидно, что $I_{NM} = -I_{MN}$. Выполнение условия $I_M^P I_P^N = -\delta_M^N$ лучше всего увидеть, спроецировав тензор (2.82) на касательную шестимерную гиперплоскость. Например, на «северном полюсе», $x^P = \delta^{P7}$, мы получаем

$$I_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

и свойство $I^2 = -1$ очевидно. Так что это действительно почти комплексная структура. Но это не комплексная структура, поскольку тензор Нейенхейса (2.60) вычисленный по (2.82), оказывается отличным от нуля.

Глава 3

Гиперкэлэровы многообразия и многообразия НКТ

§ 3.1. Гиперкэлэровы многообразия

Это понятие было введено в математику сравнительно поздно [13]. Начнём со следующего определения.

Определение 3.1. *Гиперкомплексное многообразие* есть многообразие, на котором определены три различные комплексные структуры I^p , удовлетворяющие кватернионной алгебре:

$$(I^p)_M{}^R (I^q)_R{}^N = -\delta^{pq} \delta_M^N + \varepsilon^{pqr} (I^r)_M{}^N. \quad (3.1)$$

Комплексные структуры $(I^p)_{MN}$ и $(I^p)_{AB} = e_A^M e_B^N (I^p)_{MN}$ — косимметричные матрицы. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Размерность гиперкомплексного многообразия кратна четырём. Любая тройка косимметричных матриц $(I^p)_{AB}$, удовлетворяющих алгебре (3.1), может быть приведена выбором базиса к следующему каноническому виду:*

$$\begin{aligned} I^1 \equiv I &= \text{diag}(\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}), & I^2 \equiv J &= \text{diag}(\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}), \\ I^3 \equiv K &= \text{diag}(\mathcal{K}, \dots, \mathcal{K}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{J} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Доказательство. Доказательство строится так же, как доказательство теоремы 2.4 о возможности приведения одной комплексной структуры к каноническому виду (2.49). Выберем в касательном пространстве E единичный вектор e_0 . Из алгебры (3.1)

и антисимметрии I_{AB}^P следует, что векторы $e_p = I^P e_0$ также имеют единичную длину и что четвёрка векторов e_0, e_p взаимно ортогональна. Таким образом, размерность касательного пространства равна по крайней мере 4. В подпространстве, натянутом на векторы e_0, e_p , матрицы I^P имеют вид (3.3). (Например, $I^1 e_2 = I^1 I^2 e_0 = I^3 e_0 = e_3$.)

Рассмотрим теперь подпространство $E^* \subset E$, ортогональное к e_0 и e_p . Если оно непусто, выберем там единичный вектор f_0 и присоединим его к базису вместе с векторами $f_p = I^P f_0 \in E^*$. По аналогии с предыдущим четвёрка f_0, f_p ортонормирована. Таким образом, размерность E^* равна либо 0, либо по крайней мере 4. Рассмотрим теперь подпространство $E^{**} \subset E^* \subset E$, ортогональное к (e_0, e_p, f_0, f_p) . Если оно непусто, повторим процедуру. Мы приходим к (3.2). \square

Разумеется, вектор e_0 ничем не выделен. Мы могли бы начать, например, с e_1 и восстановить векторы $e_{0,2,3}$ как $e_0 = -I^1 e_1$, $e_2 = I^3 e_1$, $e_3 = -I^2 e_1$. В дальнейшем мы восстановим «демократию» между базисными векторами и будем использовать обозначения $(e_0, e_p) \rightarrow (e_1, e_2, e_3, e_4)$, $(f_0, f_p) \rightarrow (e_5, e_6, e_7, e_8)$ и т. д. Тогда $(J)_{12} = -(J)_{21} = -1$, $(J)_{34} = -(J)_{43} = -1$ и т. д.

Замечание. Для комплексных многообразий всего с одной комплексной структурой всегда можно выбрать вещественные координаты, вещественные и мнимые части комплексных координат z^n , так что тензор I_M^N приобретёт тот же кососимметричный вид, что и I_{AB} [ср. уравнение (2.51)]. Для гиперкомплексного многообразия это всегда можно сделать для одной из комплексных структур, но не для всех трёх. В общем случае, если I_M^N приведено к каноническому виду, J_M^N и K_M^N будут иметь нетривиальную форму¹.

Матрицы (3.3) кососимметричны и лежат в алгебре $so(4)$. Важное наблюдение состоит в том, что они также *самодуальны*:

$$(J, J, K)_{AB} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ABCD} (J, J, K)_{CD}. \quad (3.4)$$

Это означает, что J, J, K принадлежат одной из подалгебр $su(2)$ алгебры $so(4) = su(2) \oplus su(2)$.

¹Они удовлетворяют, однако, некоторым ограничениям, приведённым далее в теоремах 3.4 и 3.7.

Читатель-физик может узнать в этих матрицах так называемые символы 'т Хофта η_{AB}^p [14]. Они определяются следующим образом²:

$$\begin{aligned}\eta_{ab}^p &= \varepsilon_{abp} \quad (a, b = 1, 2, 3), \\ \eta_{a4}^p &= -\eta_{4a}^p = \delta_{ap}, \quad \eta_{44}^p = 0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

В этих терминах

$$\mathcal{J}_{AB} = -\eta_{AB}^3, \quad \mathcal{J}_{AB} = \eta_{AB}^2, \quad \mathcal{K}_{AB} = -\eta_{AB}^1. \quad (3.7)$$

Введём теперь удобные симплектические обозначения, которые играют ту же роль для гиперкомплексных многообразий, что комплексные обозначения для комплексных многообразий. Заменим касательный индекс A парой индексов (ia) , где $i = 1, 2$ и $a = 1, \dots, 2n$. Мы будем поднимать и опускать индексы согласно $X^i = \varepsilon^{ij} X_j$, $Y^a = \Omega^{ab} Y_b$ и соответственно $X_i = \varepsilon_{ij} X^j$, $Y_a = \Omega_{ab} Y^b$. Здесь $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon^{jk} = -\varepsilon_{jk}$, Ω^{ab} — симплектическая матрица, которую мы выберем в виде $\Omega^{ab} = \text{diag}(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon)$ [как и в формуле (2.49), хотя та формула имела, конечно, совершенно другой смысл], и $\Omega_{ab} = -\Omega^{ab} = \text{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon)$. В этих обозначениях явно выделена подгруппа $SU(2) \times Sp(n)$ группы вращений касательного пространства. Матрица $\varepsilon_{jk} \Omega_{ab}$ инвариантна относительно таких вращений.

Чтобы связать симплектические обозначения с векторными, введём $4n$ прямоугольных матриц Σ_A :

$$(\Sigma_{1,2,3,4})^{ja} = (\sigma_\mu^\dagger, 0, \dots, 0)^{ja}, \quad (\Sigma_{5,6,7,8})^{ja} = (0, \sigma_\mu^\dagger, 0, \dots, 0)^{ja} \quad \text{и т. д.} \quad (3.8)$$

Здесь

$$(\sigma_\mu^\dagger)^{ja} = (\boldsymbol{\sigma}, -i\mathbb{1})^{ja} \quad \text{и также} \quad (\sigma_\mu)_{aj} = (\boldsymbol{\sigma}, i\mathbb{1})_{aj}, \quad (3.9)$$

²В дальнейшем нам понадобятся также дуальные символы 'т Хофта $\bar{\eta}_{AB}^p$, которые отличаются от η_{AB}^p знаками во второй строчке:

$$\bar{\eta}_{a4}^p = -\bar{\eta}_{4a}^p = -\delta_{ap}, \quad \bar{\eta}_{ab}^p = \varepsilon_{abp}. \quad (3.5)$$

Символы $\bar{\eta}_{AB}^p$ антисамодуальны.

где σ — эрмитовы матрицы Паули³,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Тогда для любого тензора в касательном пространстве имеется следующая связь компонент:

$$T^{\dots ja \dots} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\Sigma_A)^{ja} T^{\dots A \dots}, \quad T^{\dots A \dots} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\Sigma_A)_{ja} T^{\dots ja \dots}, \quad (3.12)$$

где $(\Sigma_A)_{ja} = \varepsilon_{jk} \Omega_{ab} (\Sigma_A)^{kb}$. Многоточия здесь заменяют все остальные индексы.

Заметим, что для вещественного вектора V^A компоненты V^{ja} удовлетворяют условию

$$\overline{V^{ja}} = \varepsilon_{jk} \Omega_{ab} V^{kb} \equiv V_{ja}. \quad (3.13)$$

В симплектической нотации плоский метрический тензор имеет вид

$$g^{ja, kb} = -\frac{1}{2} (\Sigma_A)^{ja} (\Sigma_A)^{kb} = \varepsilon^{jk} \Omega^{ab}, \quad g_{ja, kb} = \varepsilon_{jk} \Omega_{ab} = g^{ja, kb}. \quad (3.14)$$

А канонические плоские комплексные структуры (3.2), (3.3) выражаются так:

$$(I^P)^{ja, kb} = -\frac{1}{2} (\Sigma_A)^{ja} (\Sigma_B)^{kb} (I^P)_{AB} = i(-\sigma^3, \sigma^2, -\sigma^1)^{jk} \Omega^{ab}, \quad (3.15)$$

где

$$(\sigma^P)_{jk} = (\sigma^P)_{kj} = \varepsilon_{kl} (\sigma^P)_j^l, \quad (\sigma^P)^{jk} = \varepsilon^{jl} (\sigma^P)_l^k \quad (3.16)$$

и $(\sigma^P)_l^k$ — матрицы Паули (3.11). Матрицы (3.16) симметричны⁴. В дальнейшем, выражая комплексные структуры в симплектических обозначениях, мы будем использовать другое, более удобное представление:

$$(I^P)^{ja, kb} = -i(\sigma^P)^{jk} \Omega^{ab} \Rightarrow (I^P)_{ja, kb} = -i(\sigma^P)_{jk} \Omega_{ab}. \quad (3.17)$$

³Отметим соотношения

$$\sigma_\mu \sigma_\nu^\dagger + \sigma_\nu \sigma_\mu^\dagger = \sigma_\mu^\dagger \sigma_\nu + \sigma_\nu^\dagger \sigma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

⁴Заметим, что определённые нами матрицы σ в уравнении (3.9) (с обоими верхними или обоими нижними индексами) и $(\sigma^P)_l^k$ в уравнении (3.16) (с индексами на разных уровнях) совпадают. Различие конвенций связано с тем фактом, что индексы в (3.16) относятся к одной и той же подгруппе $SU(2) \subset SO(4n)$, в то время как индексы j и a в (3.9) имеют разную природу.

Оно отвечает другому выбору комплексных структур: $(I, J, K) \rightarrow (K, -J, I)$. Тройка $(K, -J, I)$ также кватернионна.

Определение 3.2. *Гиперкэлерово* многообразие есть гиперкомплексное многообразие, в котором все три комплексные структуры ковариантно постоянны относительно связности Леви-Чивиты.

Замечание. Фактически в этом определении не обязательно требовать гиперкомплексности многообразия. Достаточно было бы потребовать наличия двух различных *антикоммутирующих* ковариантно постоянных комплексных структур I, J . Действительно, несложно доказать, что в этом случае структура $K = IJ$ также ковариантно постоянна.

Гиперкэлерово многообразие является кэлеровым относительно каждой из структур (см. теорему 2.7). Как отмечалось в прошлой главе, группа голономии кэлерова многообразия общего вида комплексной размерности $2n$ есть $U(2n) \subset SO(4n)$. Но наличие двух дополнительных комплексных структур приводит к дополнительным ограничениям на группу голономии. Докажем важную теорему.

Теорема 3.2. *Многообразие вещественной размерности $4n$ гиперкэлерово тогда и только тогда, когда его группа голономии есть $Sp(n) \subset U(2n) \subset SO(4n)$.*

Доказательство. Это утверждение хорошо известно математикам. Мы дадим здесь подробное доказательство в явных «физических» терминах.

Прямая теорема. Докажем, что группа голономии гиперкэлерова многообразия есть $Sp(n)$. Перейдём в касательное пространство, где условие ковариантного постоянства $\nabla_M I_{NS}^P = 0$ для триплета комплексных структур I_{NS}^P принимает вид

$$\partial_M I_{AB}^P + (\omega_{AC,M} I_{CB}^P - I_{AC}^P \omega_{CB,M}) = 0, \quad (3.18)$$

где $\omega_{AB,P}$ есть спиновая связность (1.55) с $G_{MP}^N = \Gamma_{MP}^N$. Подставляя постоянные выражения (3.15) для I_{AB}^P в (3.18), мы замечаем, что это условие переписывается как

$$\omega_{AC,M} I_{CB}^P - I_{AC}^P \omega_{CB,M} = 0. \quad (3.19)$$

Это означает, что спиновая связность, понимаемая как матрица ω_{AB} в касательном пространстве, элементы которой представ-

ляют линейные формы, коммутирует со всеми комплексными структурами.

Четырёхмерный случай ($n = 1$) особенно прост. Как отмечалось, комплексные структуры (3.3) суть элементы алгебры $so(4)$, образующие базис в одной из её компонент $su(2)$. Кососимметричная матрица ω_{AB} , которая коммутирует с ними, лежит в другой $su(2)$ -компоненте. То же относится к форме кривизны $R_{AB} = d\omega_{AB} + \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}$, и, значит, группа голономии есть⁵ $SU(2) \equiv Sp(1)$.

В случае $n > 1$ мы используем введённые выше симплектические обозначения. Принимая во внимание (3.17) и используя свойства символов Ω_{ab} и ε_{ij} , мы можем переписать условие (3.19) в простом виде:

$$\omega_{ia\,jb} (\sigma^p)^j_k + (\sigma^p)_i^j \omega_{ja\,kb} = 0. \quad (3.20)$$

Антисимметричную связность $\omega_{ia\,jb} = -\omega_{jb\,ia}$ общего вида можно представить как

$$\omega_{ia\,jb} = \varepsilon_{ij} T_{(ab)} + B_{[ab]}(ij) = \varepsilon_{ij} T_{(ab)} + B_{[ab]}^q (\sigma^q)_{ij} \quad (3.21)$$

с произвольными $T_{(ab)}$ и $B_{[ab]}^q$. Если подставить это в (3.20), первый член $\propto \varepsilon_{ij}$ не вносит вклада и мы получаем

$$B_{[ab]}^q [\sigma^q, \sigma^p]_{ik} = 0. \quad (3.22)$$

Это справедливо для любого p , что приводит к равенству

$$B_{[ab]}^q = 0. \quad (3.23)$$

Таким образом,

$$\omega_{AB} = \omega_{ia\,jb} = \varepsilon_{ij} T_{(ab)}. \quad (3.24)$$

Однако любую симметричную матрицу размерности $2n$ можно представить как⁶

$$T_{(ab)} = T_a^c \Omega_{bc}, \quad (3.25)$$

⁵Интересно обсудить снова с этой точки зрения группу голономии кэлерова четырёхмерного многообразия с только одной комплексной структурой \mathbb{J} . Спиновая связность, которая коммутирует с \mathbb{J} , принадлежит подалгебре $su(2) \times u(1) = u(2)$, и соответствующая группа голономии есть $U(2)$.

⁶Действительно, элемент $h \in sp(n)$ есть эрмитова $2n$ -мерная матрица, удовлетворяющая условию $h^T \Omega + \Omega h = 0$.

где $T_a^c \in sp(n)$. Значит, ω_{AB} лежит в $sp(n)$. Тогда $R_{AB} = d\omega_{AB} + \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}$ также лежит в $sp(n)$, и теорема доказана.

Обратная теорема. Доказательство обратной теоремы — что если группа голономии есть $Sp(n)$, то существуют три кватернионные ковариантно постоянные комплексные структуры — основано на следующей лемме.

Лемма. Пусть \mathfrak{g} — некоторая алгебра Ли и \mathfrak{h} — её подалгебра. Пусть A_M и F_{MN} — калибровочный потенциал и напряжённость поля для алгебры \mathfrak{g} . Пусть $F_{MN} \in \mathfrak{h}$. Тогда можно всегда найти представителя A_M во множестве калибровочных потенциалов, связанных преобразованиями (1.42) (выбрать калибровку на физическом языке), так что также $A_M \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. Такая калибровка хорошо известна, это калибровка Фока—Швингера $x^M A_M = 0$ [15]. В этой калибровке (при этом условии) потенциал выражается через напряжённость поля следующим образом:

$$A_M(x) = \int_0^1 d\alpha \alpha x^N F_{NM}(\alpha x). \quad (3.26)$$

Действительно, в калибровке $x^M A_M = 0$, мы можем записать

$$\begin{aligned} A_M(y) &= \frac{\partial}{\partial y^M} [y^P A_P(y)] - y^P \frac{\partial A_P(y)}{\partial y^M} = \\ &= -y^P \frac{\partial A_P(y)}{\partial y^M} = y^P \left[F_{PM}(y) - \frac{\partial A_M(y)}{\partial y^P} \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Подставим αx на место y и перепишем это уравнение в виде

$$\alpha x^P F_{PM}(\alpha x) = A_M(\alpha x) + x^P \frac{\partial}{\partial x^P} A_M(\alpha x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha A_M(\alpha x)]. \quad (3.28)$$

Интегрируя это выражение по α от нуля до единицы, мы приходим к (3.26). \square

В интересующем нас случае $\mathfrak{g} = so(4n)$, $\mathfrak{h} = sp(n)$, $A \equiv \omega$ и $F \equiv R$. Если $R \in sp(n)$, то можно выбрать координаты и фильбайны так, что также $\omega \in sp(n)$. И если связность лежит в $\omega \in sp(n)$, то она коммутирует с кватернионными комплексными структурами (3.15). Тогда из (3.18) следует, что свёртки этих плоских структур с фильбайнами ковариантно постоянны. \square

Доказанная теорема означает, что можно *определить* гиперкэлерово многообразие как многообразие, в котором форма римановой кривизны R_{AB} лежит в алгебре $sp(n)$. Это определение и определение 3.2 эквивалентны.

3.1.1. Примеры

Очевидно, что плоское пространство \mathbb{R}^{4n} — гиперкэлерово многообразие. Плоские комплексные структуры даются постоянными матрицами (3.2). \mathbb{R}^{4n} некомпактно, но можно легко наложить периодические граничные условия по всем декартовым координатам и получить компактный плоский тор.

Существует много нетривиальных компактных гиперкэлеровых многообразий, но в четырёх измерениях есть всего один пример — так называемое многообразие КЗ. Его конструкция, однако, весьма сложна, и мы его обсуждать здесь не будем. Мы опишем вместо этого два наиболее популярных и широко обсуждаемых в литературе примера *некомпактных* гиперкэлеровых четырёхмерных многообразий: многообразие Taub-NUT [16] и многообразие Эгучи—Хансона [23]. В согласии с только что доказанной теоремой форма кривизны R_{AB} четырёхмерного гиперкэлерова многообразия лежит в алгебре $sp(1) \equiv su(2)$ — одной из компонент алгебры $so(4)$ — и либо самодуальна, либо антисамодуальна. Если комплексные структуры выбраны самодуальными, как в (3.3), то коммутирующая с ними R_{AB} антисамодуальна, и наоборот.

Другое (физическое) имя для четырёхмерных гиперкэлеровых многообразий — *гравитационные инстантоны*. Они так называются, потому что на этих многообразиях тензор $(Риччи)_{MN}$ равен нулю и они являются решениями уравнений Эйнштейна в пустом евклидовом пространстве. Действительно, (анти)самодуальность формы R_{AB} означает, что тензор Римана удовлетворяет условию

$$R_{ABCD} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{ABEF} R_{EFCD}. \quad (3.29)$$

Умножая это равенство на δ_{AC} , мы получаем

$$(Риччи)_{BD} = R_{ABAD} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{ABEF} R_{EFAD} = 0 \quad (3.30)$$

[последнее равенство есть следствие второго условия в (1.21)].

Мы объяснили происхождение термина «гравитационные». Что касается «инстантонов» — это стандартный физический термин для евклидовых решений классических уравнений движения. В конце параграфа мы скажем ещё несколько слов на эту тему.

1. Многообразиие Тауб-*NUT* и его многомерные обобщения. Рассмотрим \mathbb{R}^4 , параметризованное обычными декартовыми координатами x^M , и наложим на них условие $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 > a^2$ (топология получившегося многообразия есть, таким образом, $S^3 \times \mathbb{R}$). Введём метрику

$$ds^2 = \frac{1}{4} \frac{r+a}{r-a} dr^2 + (r^2 - a^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 4a^2 \frac{r-a}{r+a} \sigma_3^2, \quad (3.31)$$

где $\sigma_{1,2,3}$ — формы Маурера—Картана⁷,

$$\sigma_p = \frac{\eta_{MN}^p x^M dx^N}{r^2}, \quad (3.32)$$

η_{MN}^p — символы 'т Хофта (3.6). Выполняется равенство

$$d\sigma_p = 2\varepsilon_{pqr} \sigma_q \wedge \sigma_r. \quad (3.33)$$

Естественно выбрать фильбайны (для соответствующих линейных форм) следующим образом:

$$e_{1,2} = \sqrt{r^2 - a^2} \sigma_{1,2}, \quad e_3 = 2a \sqrt{\frac{r-a}{r+a}} \sigma_3, \quad e_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r+a}{r-a}} dr. \quad (3.34)$$

Связности ω_{AB} можно найти как решение уравнения Картана $de_A + \omega_{AB} \wedge e_B = 0$. Они имеют вид⁸

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \left[2 - \frac{4a^2}{(r+a)^2} \right] \sigma_3, & \omega_{23} &= \frac{2a}{r+a} \sigma_1, & \omega_{31} &= \frac{2a}{r+a} \sigma_2, \\ \omega_{14} &= \frac{2r}{r+a} \sigma_1, & \omega_{24} &= \frac{2r}{r+a} \sigma_2, & \omega_{34} &= \frac{4a^2}{(r+a)^2} \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.35)$$

⁷Не путать с матрицами Паули.

⁸Предостережём читателя. В обзоре [3] эта и следующая формула даны с неправильными коэффициентами!

Эти связности не самодуальны и не антисамодуальны, но кривизны (1.59) антисамодуальны:

$$\begin{aligned} R_{14} &= -R_{23} = \frac{4a}{(r+a)^3} (e_4 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3), \\ R_{24} &= R_{13} = \frac{4a}{(r+a)^3} (e_4 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3), \\ R_{34} &= -R_{12} = -\frac{8a}{(r+a)^3} (e_4 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2), \end{aligned} \quad (3.36)$$

т. е. R_{AB} лежит в $su(2)$ и соответствующая группа голономии есть $SU(2)$, как и полагается для четырёхмерного гиперкэлерова многообразия. А то обстоятельство, что связности (3.35) не имеют определённой дуальности, вызвано нашим выбором фильбайнов в (3.34). Как было отмечено выше, всегда можно привести ω_{AB} в подалгебру, где лежат R_{AB} , используя калибровочную свободу вращений фильбайнов по группе $O(4n)$.

Метрика (3.31) удобна для демонстрации гиперкэлеровости, но для теоретико-полевых приложений более удобна другая форма метрики, связанная с метрикой (3.31) преобразованием координат и, возможно, более известная читателю-физику. Она имеет следующий вид:

$$ds^2 = V^{-1}(r)(d\Psi + A dx)^2 + V(r) dx dx, \quad (3.37)$$

где x есть трехмерный вектор, $\Psi \in (0, 2\pi)$,

$$V(r) = \frac{1}{r} + \lambda \quad (3.38)$$

($r = |x|$) — своеобразный «кулоновский потенциал» и

$$A_x = \frac{y}{r(r+z)}, \quad A_y = -\frac{x}{r(r+z)}, \quad A_z = 0 \quad (3.39)$$

— векторный потенциал магнитного монополя.

Метрика (3.37) имеет аксиальную изометрию $U(1)$, связанную с поворотами вокруг оси Oz . Однако эту выделенную ось, где потенциал сингулярен⁹, можно направить произвольно — имеется бесконечное семейство таких метрик, параметризуемое точкой на косете $SU(2)/U(1) = S^2$. Можно сказать, что многообразии Taub-NUT «знает» не только о $U(1)$, но и о $SU(2)$.

⁹«Нить Дирака» в физической терминологии. Физическое требование ненаблюдаемости дираковской нити даёт условие квантования магнитного заряда — мы будем подробно это обсуждать в главе 13.

Сингулярность метрики (3.37) на нити Дирака не приводит к сингулярностям кривизн. Если мы хотим избежать «некошерной» сингулярности при $r = -1/\lambda$, то параметр λ в (3.38) должен быть положителен. Он зависит от выбранного масштаба и может быть принят равным единице.

Но можно также рассмотреть метрику (3.37) с положительным λ и

$$V(r) = \lambda - \frac{1}{r}. \quad (3.40)$$

Такая метрика имеет интересную физическую интерпретацию: лагранжиан, описывающий движение частицы вдоль такого многообразия, описывает также динамику двух взаимодействующих магнитных монополей специального типа, так называемых *монополей BPS*, на больших расстояниях $r \gg 1/\lambda$ [17]¹⁰.

Динамика системы, включающей произвольное число монополей N , описывается гиперкэлеровым многообразием размерности $D = 4(N - 1)$. Его метрика представляет многомерное обобщение (3.37). Удобно представить её в виде [19], [20]

$$ds^2 = V_{ml} dr_m dr_l + V_{ml}^{-1} \Lambda_m \Lambda_l, \quad (3.41)$$

где V — матрица $N \times N$ с компонентами

$$V_{mm} = \lambda - \sum_{l \neq m} \frac{1}{|r_m - r_l|}, \quad V_{m \neq l} = \frac{1}{|r_m - r_l|} \quad (3.42)$$

и

$$\Lambda_m = d\Psi_m + dr_m \sum_{l \neq m} A(r_m - r_l)$$

с тем же $A(X)$, что и в (3.39).

В этих выражениях фигурируют $4N$ координат: положения монополей r_m и их фазы¹¹ Ψ_m . Однако метрика зависит только

¹⁰Динамика монополей на произвольных расстояниях также описывается гиперкэлеровой метрикой несколько более сложного вида, совпадающей с модифицированной метрикой Taub-NUT с потенциалом (3.40) при $r \gg 1/\lambda$, но не имеющей сингулярности при $r = 1/\lambda$, — метрикой Атьи—Хитчина [18].

¹¹У монополя 'т Хофта—Полякова, в том числе у монополя BPS, есть такой параметр, связанный с глобальной симметрией $U(1)$ классического решения. Но мы не будем отвлекаться более на эти физические детали, отсылая читателя к работе [17].

от разностей $\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l$, $\Psi_m - \Psi_l$. Движение центра масс и центра фаз отщепляется, и многообразие, описываемое метрикой (3.41), есть прямое произведение \mathbb{R}^4 и тривиального интересующего нас гиперкэлерова многообразия¹².

Это многообразие «знает» об $SU(N)$ в том же самом смысле, в каком обыкновенное Taub-NUT знает об $SU(2)$. Действительно, разности координат монополей, от которых зависит метрика, имеют ту же структуру, что корни $SU(N)$. С помощью *гамильтоновой редукции* (мы подробно расскажем об этом методе в одиннадцатой главе) можно получить из выписанных выше обобщённых метрик Taub-NUT метрики, ассоциированные со всеми другими простыми компактными группами Ли [20], [21], [22].

Остановимся на восьмимерном многообразии, связанном с группой $SO(5)$. Его метрика получается из метрики (3.41) для четырёх монополей при накладывании связей¹³

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 = \Psi_1 + \Psi_3 = \Psi_2 + \Psi_4 = 0. \quad (3.43)$$

Мы получаем [22]

$$\frac{1}{2} ds_{SO(5)}^2 = \lambda(dr_1^2 + dr_2^2) - \frac{dr_1^2}{|r_1|} - \frac{dr_2^2}{|r_2|} - \sum_{\pm} \frac{(dr_1 \pm dr_2)^2}{|r_1 \pm r_2|} + \text{фазовая часть}. \quad (3.44)$$

Видны два коротких (1 и 2) и два длинных (1 ± 2) корня $SO(5)$.

А, скажем, обобщение Taub-NUT на группу G_2 получается из метрики (3.41) для семи монополей при наложении связей

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 = \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_6 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_7 = 0, \\ \Psi_1 + \Psi_4 = \Psi_2 + \Psi_5 = \Psi_3 + \Psi_6 = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \Psi_7 = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ранг G_2 равен 2, и эта метрика тоже восьмимерна. Размерность других гиперкэлеровых многообразий из изученного в [22] семейства есть $4r$, где r — ранг соответствующей группы.

¹²Метрика (3.41) сингулярна при малых междумонопольных расстояниях. Но можно обратить знак у λ , общий знак у ds^2 и получить несингулярную многомерную гиперкэлерову метрику [21].

¹³В конфигурационное пространство помещается зеркало, и требуется, чтобы монополи 3 и 4 являлись зеркальными образами монополей 1 и 2. Специалисты по теории струн называют получаемые таким образом многообразия «ориентифолдами».

В двенадцатой главе (см. с. 330) мы найдём выражение для некоторой восьмимерной гиперкэлеровой метрики с той же симметрией, что и (3.44), в рамках формализма гармонического суперпространства. Предположительно эта метрика сводится к регулярному варианту метрики (3.44) с отрицательным λ подходящей заменой координат.

2. *Многообразие Эгучи—Хансона.* Это многообразие представляет собой касательное расслоение (т. е. расслоение, слоями которого являются касательные пространства¹⁴ во всех точках многообразия) над S^2 . Его метрика может быть выбрана в виде

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - (a/r)^4} + r^2 \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \sigma_3^2 \right\}, \quad (3.46)$$

$r \geq a$. (Мы включили значение a в допустимый интервал r , потому что кажущаяся сингулярность метрики при $r = a$ может быть убрана заменой координат.)

Фирбайны¹⁵ мы выбираем в виде

$$e_{1,2} = r \sigma_{1,2}, \quad e_3 = r \sqrt{1 - (a/r)^4} \sigma_3, \quad e_4 = \frac{dr}{\sqrt{1 - (a/r)^4}}. \quad (3.47)$$

В этом случае связности самодуальны:

$$\begin{aligned} \omega_{14} &= \omega_{23} = \sqrt{1 - (a/r)^4} \sigma_1, \\ \omega_{24} &= \omega_{31} = \sqrt{1 - (a/r)^4} \sigma_2, \\ \omega_{34} &= \omega_{12} = [1 + (a/r)^4] \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Формы кривизны, разумеется, тоже самодуальны:

$$\begin{aligned} R_{14} &= R_{23} = \frac{2a^4}{r^6} (e^4 \wedge e^1 + e^3 \wedge e^2), \\ R_{24} &= R_{31} = \frac{2a^4}{r^6} (e^4 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3), \\ R_{34} &= R_{12} = -\frac{4a^4}{r^6} (e^4 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^1). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Важное свойство метрики Эгучи—Хансона — её *асимптотическая плоскостность*. Метрика (3.46) становится плоской в пре-

¹⁴На самом деле мы имеем здесь дело с «касательным расслоением» и «касательными пространствами», но мы отмечали, что не собираемся вдаваться в такие математические тонкости.

¹⁵Мы в 4-мерии. Поэтому не viel, а vier.

деле $r \rightarrow \infty$. Однако граница многообразия Эгучи—Хансона на бесконечности — не S^3 (как для обычного четырёхмерного пространства), а $\mathbb{R}P^3 = S^3/Z_2$.

Асимптотическая плоскостность позволяет дать многообразию Эгучи—Хансона симпатичную физическую интерпретацию [24]. Как отмечалось, оно представляет «гравитационный инстантон» — евклидово решение уравнений Эйнштейна. В физике инстантоны (евклидовы решения) обычно интерпретируются как квазиклассические траектории *туннельных переходов* между вакуумами. И это относится также к инстантону Эгучи—Хансона. Его можно интерпретировать как туннельную траекторию между двумя плоскими *противоположно ориентированными* трехмерными пространствами \mathbb{R}^3 . В ходе туннельного перехода \mathbb{R}^3 выворачивается наизнанку!

§ 3.2. Многообразия НКТ

До сих пор мы обсуждали только геометрические конструкции, найденные вначале математиками и описанные потом физиками на языке суперсимметрии (о чём будет говориться дальше в этой книге). Но многообразия НКТ — это другой случай. Они были впервые открыты физиками с использованием суперсимметричных методов [25], [26], и только *потом* эти геометрии привлекли внимание чистых математиков [27], [28]. В этой геометрической главе мы не будем обращаться к суперсимметричному описанию и опишем геометрию НКТ на том же языке, на котором были написаны первые две главы.

Определение 3.3. *Многообразие НКТ* есть гиперкомплексное многообразие, где комплексные структуры ковариантно постоянны по отношению к одной и той же бисмутовой связности.

Следует сделать здесь следующие замечания.

1. Так же, как это было в случае гиперкэлеровых многообразий, не обязательно требовать гиперкомплексности в условии этого определения. Достаточно потребовать наличия двух антикоммутирующих комплексных структур I, J с совпадающими бисмутовыми связностями, относительно которых I и J ковариантно постоянны. Отсюда можно вывести, что $K = IJ$ есть также

комплексная структура, ковариантно постоянная относительно той же связности, и эта связность бисмутова для K .

2. «НКТ» есть сокращение от английского «hyper-Kähler with torsion» — гиперкэлерово с кручением. Этот термин немного обманчив, поскольку многообразия НКТ не являются на самом деле гиперкэлеровыми, они даже не являются кэлеровыми. Но этот термин твёрдо укоренился в литературе, ничего лучшего предложено не было, и мы будем им пользоваться.

3. Слова «одной и той же» в определении ключевые. Действительно, согласно теореме 2.8 каждая комплексная структура гиперкомплексного многообразия ковариантно постоянна относительно *своей* бисмутовой связности. В общем случае эти три бисмутовы связности различны. А для многообразия НКТ они совпадают, и это нетривиальное условие!

4. Не всякое гиперкомплексное многообразие есть многообразие НКТ. Но это верно для четырёхмерных многообразий, как это будет доказано ниже в теореме 3.6. Примеры гиперкомплексных многообразий, которые не являются НКТ, были даны в работе [29]. В п. 10.3.1 мы опишем суперсимметричные модели, которые мы назвали моделями *би-НКТ* и которые живут на гиперкомплексных многообразиях, не являющихся НКТ.

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 3.3. *Группа голономии многообразия НКТ по отношению к универсальной бисмутовой связности есть $Sp(n)$. Верно также обратное: если существует такая связность с кручением, что форма кривизны лежит в $sp(n)$, то существует также кватернионная тройка комплексных структур, для которых эта связность является бисмутовой и которые ковариантно постоянны относительно неё.*

Доказательство. Оно строится буквально так же, как доказательство теоремы 3.2. Рассуждения не зависят от наличия или отсутствия кручения в связности, относительно которой три кватернионные структуры ковариантно постоянны. \square

С каждой комплексной структурой связана 2-форма:

$$\begin{aligned}\omega_I &= I_{MN} dx^M \wedge dx^N, \\ \omega_J &= J_{MN} dx^M \wedge dx^N, \\ \omega_K &= K_{MN} dx^M \wedge dx^N.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Для гиперкэлерова многообразия все эти формы замкнуты [см. уравнение (2.43)], но для общего гиперкомплексного многообразия или многообразия НКТ это не так. Формы (3.50) обладают, однако, некоторыми специальными свойствами. Мы докажем две теоремы. Одна из весьма проста. Другая посложнее.

Теорема 3.4. *Рассмотрим гиперкомплексное многообразие с кватернионными комплексными структурами $I, J, K = IJ$ и соответствующими формами (3.50). Тогда форма $\omega_J + i\omega_K$ чисто голоморфна, а форма $\omega_J - i\omega_K$ чисто антиголоморфна относительно комплексной структуры I .*

Доказательство. Рассмотрим тензор $\mathcal{I}^+ = (J + iK)/2$. Из кватернионной алгебры для I, J, K следуют тождества $I\mathcal{I}^+ = -i\mathcal{I}^+$ и $\mathcal{I}^+I = i\mathcal{I}^+$. В системе координат, где I имеет вид (2.51), мы заключаем, что единственные неисчезающие компоненты $(\mathcal{I}^+)_M^N$ суть $(\mathcal{I}^+)_m^{\bar{n}}$. А это означает, что $(\mathcal{I}^+)_{MN}$ имеет только голоморфные компоненты и форма $\omega_J + i\omega_K$ чисто голоморфна. Антиголоморфность формы $\omega_J - i\omega_K$ доказывается так же. \square

Следствие. Единственные ненулевые компоненты тензора J_M^N суть $J_m^{\bar{n}}$ и $J_{\bar{m}}^n$, и то же верно для K_M^N . Имеется связь

$$K_m^{\bar{n}} = -iJ_m^{\bar{n}}, \quad K_{\bar{m}}^n = iJ_{\bar{m}}^n. \quad (3.51)$$

Замечание. Тензор $(\mathcal{I}^+)_{mn}$ играет для гиперкомплексного многообразия примерно ту же роль, что комплексная структура I_{MN} для комплексного многообразия. Естественно поэтому называть $(\mathcal{I}^+)_{mn}$ гиперкомплексной структурой¹⁶. В плоском случае

$$(\mathcal{I}^+)_m^{\bar{n}} = \text{diag}(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon), \quad (3.52)$$

что выглядит так же, как каноническая комплексная структура (2.49), но, конечно, последняя имеет в два раза большую размерность.

Можно также определить тензор $\mathcal{I}^- = (J - iK)/2$. Его единственные ненулевые компоненты суть $(\mathcal{I}^-)_{\bar{m}}^n$. В плоском случае он имеет такой же вид (3.52), как \mathcal{I}^+ , с точностью до замены

¹⁶Под гиперкомплексной структурой в литературе обычно понимается просто наличие кватернионной тройки комплексных структур. Но в нашей книге этот термин будет использоваться для тензоров \mathcal{I}^\pm .

$n \leftrightarrow \bar{n}$, $t \leftrightarrow \bar{t}$. Произведения $-\mathcal{I}^+\mathcal{I}^-$ и $-\mathcal{I}^-\mathcal{I}^+$ дают голоморфный и антиголоморфный проекторы (2.57).

Теорема 3.5. *Гиперкомплексное многообразие есть НКТ тогда и только тогда, когда форма $\omega_J + i\omega_K$ является замкнутой относительно действия голоморфной внешней производной ∂_I , связанной с комплексной структурой I : $\partial_I(\omega_J + i\omega_K) = 0$.*

Доказательство. Мы следуем статье [27].

Прямая теорема. Докажем, что $\partial_I(\omega_J + i\omega_K) = 0$ для многообразия НКТ.

Пусть d — оператор обыкновенной внешней производной. Его можно представить как сумму $d = \partial_I + \bar{\partial}_I$. Рассмотрим оператор

$$d_I = i(\bar{\partial}_I - \partial_I) \quad (3.53)$$

— «мнимую часть» оператора ∂_I . В системе координат, где I имеет вид (2.51), действие d_I на произвольную форму α записывается в виде

$$d_I \alpha = I_M^S \partial_S \alpha_{N_1 \dots N_p} dx^M \wedge dx^{N_1} \wedge \dots \wedge dx^{N_p}. \quad (3.54)$$

Определим теперь другой оператор $\alpha \rightarrow \hat{I}\alpha$ согласно

$$\hat{I}\alpha = I_{M_1}^{N_1} \dots I_{M_p}^{N_p} \alpha_{N_1 \dots N_p} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}. \quad (3.55)$$

При действии на форму степени (p, q) \hat{I} умножает её на фактор $(-i)^{p-q}$.

Аналогичным образом можно определить операторы \hat{J} и \hat{K} . Тогда $\hat{I}\hat{J} = \hat{K}$, $\hat{J}\hat{K} = \hat{I}$, $\hat{K}\hat{I} = \hat{J}$.

Докажем теперь несколько простых лемм.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$d_I \alpha = (-1)^P \hat{I} d(\hat{I}\alpha), \quad (3.56)$$

где $P = p + q$ — вещественная степень формы.

Доказательство. Введём комплексные координаты. Рассмотрим правую часть (3.56) и используем представление (2.51) для I . Тогда компоненты I_M^N являются константами и частные производные на них не действуют. Форма $d(\hat{I}\alpha)$ имеет степень $P + 1$, и согласно (3.55) выражение $\hat{I} d(\hat{I}\alpha)$ содержит всего $(P + 1) + P = 2P + 1$ факторов I . Они образуют P пар, каждая из которых даёт

$I^2 = -1$ [это компенсирует фактор $(-1)^P$], и остаётся всего один неспаренный фактор. Мы приходим к выражению (3.54).

В отличие от равенства (3.54), соотношение (3.56) может быть переписано в ковариантном тензорном виде и справедливо при любом выборе координат. \square

Лемма 2. Для любого комплексного многообразия выполняется равенство

$$d_I \omega_I = \frac{1}{3} C_{MRS} dx^M \wedge dx^R \wedge dx^S. \quad (3.57)$$

Доказательство. Выбирая комплексные координаты, так что $\omega_I = -2ih_{m\bar{n}} dz^m \wedge d\bar{z}^{\bar{n}}$, и принимая во внимание соотношения (2.51), (3.54) и (2.16), мы выводим

$$d_I \omega_I = C_{mr\bar{s}} dz^m \wedge dz^r \wedge d\bar{z}^{\bar{s}} + C_{\bar{m}r\bar{s}} d\bar{z}^{\bar{m}} \wedge d\bar{z}^{\bar{r}} \wedge dz^s, \quad (3.58)$$

что совпадает с (3.57). \square

Следствие. Для многообразий НКТ, где бисмутовы кручения для I, J, K совпадают, выполняются равенства

$$d_I \omega_I = d_J \omega_J = d_K \omega_K. \quad (3.59)$$

Лемма 3. Пусть I, J, K — кватернионные комплексные структуры. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{I} \omega_I &= \omega_I, & \hat{J} \omega_J &= \omega_J, & \hat{K} \omega_K &= \omega_K, \\ \hat{J} \omega_I &= \hat{K} \omega_I = -\omega_I, & \hat{I} \omega_J &= \hat{K} \omega_J = -\omega_J, \\ \hat{I} \omega_K &= \hat{J} \omega_K = -\omega_K. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Доказательство. Докажем, что $\hat{J} \omega_I = -\omega_I$. По определению,

$$\hat{J} \omega_I = J_M^R J_N^S I_{RS} dx^M \wedge dx^N.$$

С другой стороны,

$$J_M^R J_N^S I_{RS} = -K_{MS} J_N^S = -I_{MN}.$$

Все другие соотношения в (3.60) доказываются аналогично. \square

Замечание. Условие (3.59) можно переписать, принимая во внимание (3.56) и первую строчку (3.60), как

$$\hat{I} d\omega_I = \hat{J} d\omega_J = \hat{K} d\omega_K. \quad (3.61)$$

Мы можем теперь доказать нашу теорему и показать, что

$$\partial_I(\omega_J + i\omega_K) = 0. \quad (3.62)$$

Действительная и мнимая части (3.62) дают условия, похожие на условия Коши—Римана:

$$d\omega_J - d_I\omega_K = 0, \quad d\omega_K + d_I\omega_J = 0. \quad (3.63)$$

Докажем первое соотношение. Имеем

$$d_I\omega_K \stackrel{1}{=} \hat{I}d(\hat{I}\omega_K) \stackrel{3}{=} -\hat{I}d\omega_K = -\hat{J}\hat{K}d\omega_K \stackrel{\text{замеч.}}{=} -\hat{J}^2d\omega_J = d\omega_J. \quad (3.64)$$

Отметка «1» сверху от знака равенства означает «ввиду леммы 1» и т. д.

Аналогично доказывается, что $d\omega_K + d_I\omega_J = 0$.

Обратная теорема. Все шаги приведённого рассуждения можно обратить. Действительно, из равенства (3.62) вытекает (3.63). Возьмём, например, условие $d\omega_J = d_I\omega_K$ и подействуем на него оператором \hat{J} . Мы получим

$$\hat{J}d\omega_J = \hat{J}d_I\omega_K \stackrel{1}{=} \hat{J}\hat{I}d(\hat{I}\omega_K) \stackrel{3}{=} \hat{K}d\omega_K. \quad (3.65)$$

Из этого и из леммы 1 мы выводим, что $d_J\omega_J = d_K\omega_K$. Ввиду (3.57) это означает, что бисмутовы связности у комплексных структур J и K совпадают. Но тогда структура $I = JK$ также ковариантно постоянна по отношению к той же связности и многообразии есть НКТ. \square

Из доказанной теоремы следует, что условие (3.62) вкупе с кватернионной алгеброй трёх комплексных структур может быть принято как альтернативное определение многообразий НКТ. Тогда условия $\partial_J(\omega_K + i\omega_I) = 0$ и $\partial_K(\omega_I + i\omega_J) = 0$ получаются как следствие только что доказанной прямой теоремы.

Используя это определение, докажем следующую теорему.

Теорема 3.6. *Произвольное четырёхмерное гиперкомплексное многообразие есть НКТ.*

Доказательство. Форма $\omega_J + i\omega_K$ имеет степень $(2, 0)$ относительно комплексной структуры I . Но тогда для многообразия комплексной размерности $d = 2$ форма $\partial_I(\omega_J + i\omega_K)$ обращается в ноль тождественно. \square

Можно заметить, что многообразия НКТ соотносятся с общими гиперкомплексными многообразиями примерно так же, как кэлеровы многообразия соотносятся с общими комплексными многообразиями.

В самом деле, (i) кэлеровы многообразия суть комплексные многообразия с замкнутой кэлеровой формой, и (ii) любое двумерное комплексное многообразие кэлерово. С другой стороны, (i) многообразия НКТ суть гиперкомплексные многообразия, для которых форма $\omega_J + i\omega_K$ замкнута относительно ∂_I , и (ii) любое четырёхмерное гиперкомплексное многообразие есть НКТ.

До сих пор мы обсуждали обыкновенную связность Леви-Чивиты и связность Бисмута, имеющую кручение. Другой весьма полезный для изучения гиперкомплексных многообразий и многообразий НКТ инструмент — это *связность Обаты* [30].

Определение 3.4. *Связность Обаты* — это не имеющая кручения связность, относительно которой все три кватернионные комплексные структуры ковариантно постоянны.

Для гиперкэлеровых многообразий связность Обаты совпадает со связностью Леви-Чивиты и связностью Бисмута, но это не так в общем гиперкомплексном случае. Существенное отличие в том, что ковариантная производная Обаты метрического тензора не обязательно равна нулю! Это, в частности, означает, что векторы не только поворачиваются при параллельном переносе, но также меняют свою длину; группа голономии некомпактна и сложна (см., например, [31]).

Теорема 3.7 [32]. Пусть I, J, K — три интегрируемые комплексные структуры. Выберем комплексные координаты, связанные с I . Тогда ненулевые компоненты связности Обаты определяются формулой

$$(G^O)_{mn}^k = J_n^{\bar{i}} \partial_m J_l^k = K_n^{\bar{i}} \partial_m K_l^k, \quad (G^O)_{\bar{m}\bar{n}}^{\bar{k}} = [(G^O)_{mn}^k]^*. \quad (3.66)$$

Доказательство. Оно состоит из трёх шагов.

Лемма 1. Выражение (3.66) симметрично относительно перестановки $m \leftrightarrow n$.

Доказательство. Это следует из интегрируемости. Действительно, условие (2.60) для структуры J означает, что

$$J_S^M (\partial_M J_N^K - \partial_N J_M^K) = J_N^Q (\partial_Q J_S^K - \partial_S J_Q^K).$$

Выберем $S=s$, $N=n$, $K=k$. Тогда из теоремы 3.4 и из её следствия мы получаем

$$J_s^{\bar{m}} \partial_n J_{\bar{m}}^k = J_n^{\bar{m}} \partial_s J_{\bar{m}}^k. \quad \square$$

Лемма 2. Ковариантные производные Обаты всех комплексных структур равны нулю.

Доказательство. Это свойство проверяется непосредственно с использованием уравнений (3.66), (2.51) и теоремы 3.4. Мы оставляем это читателю. \square

Лемма 3. Связность Обаты единственна.

Доказательство. Предположим, что есть две разные связности Обаты. Пусть их разность есть Δ_{PM}^N . Тогда должны выполняться тождества

$$\Delta_{PM}^Q I_Q^N - \Delta_{PQ}^N I_M^Q = 0, \quad (3.67)$$

$$\Delta_{PM}^Q (J \pm iK)_Q^N - \Delta_{PQ}^N (J \pm iK)_M^Q = 0. \quad (3.68)$$

Из (3.67), (2.51) и из симметричности $\Delta_{PM}^N = \Delta_{MP}^N$ следует, что все компоненты, кроме Δ_{pm}^n и $\Delta_{\bar{p}\bar{m}}^{\bar{n}}$, равны нулю.

Рассмотрим (3.68) для структуры $J + iK$. Согласно теореме 3.4 только её компоненты $(J + iK)_q^{\bar{n}}$ отличны от нуля. Выберем $N = \bar{n}$, $P = p$, $M = m$. Принимая во внимание, что, как мы только что доказали, $\Delta_{pm}^{\bar{n}} = 0$, мы получаем

$$\Delta_{pm}^q (J + iK)_q^{\bar{n}} = 0.$$

Умножив это на $(J - iK)_{\bar{n}}^s$ и использовав $JK = I$ и $I_q^s = -i\delta_q^s$, мы заключаем, что $\Delta_{pm}^q = 0$.

Рассмотрев (3.68) для $J - iK$ и выбрав там $N = n$, $P = \bar{p}$, $M = \bar{m}$, мы получаем, что также $\Delta_{\bar{p}\bar{m}}^{\bar{q}} = 0$. \square

3.2.1. Примеры

1. Четырёхмерные многообразия

Теорема 3.8. Пусть \mathcal{M} — четырёхмерное многообразие с гиперкэлеровой метрикой $g_{MN}(x)$. Тогда многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ с метрикой $\tilde{g}_{MN}(x) = \lambda(x) g_{MN}(x)$ есть НКТ.

Доказательство. Многообразие \mathcal{M} кэлерово относительно всех комплексных структур I, J, K , которые мы выбираем в форме (3.3). В частности, оно кэлерово относительно I . Введём

соответствующие комплексные координаты и запишем метрику \mathcal{M} в виде $ds^2 = 2h_{m\bar{n}} dz^m d\bar{z}^{\bar{n}}$. Тогда метрика на $\tilde{\mathcal{M}}$ есть

$$d\tilde{s}^2 = 2\lambda h_{m\bar{n}} dz^m d\bar{z}^{\bar{n}}. \quad (3.69)$$

Соответствующая бисмутова связность, относительно которой комплексная структура I ковариантно постоянна, имеет кручение (2.16). Из кэлеровости метрики $h_{m\bar{n}}$ следует, что

$$C_{mn\bar{p}} = (\partial_n \lambda) h_{m\bar{p}} - (\partial_m \lambda) h_{n\bar{p}}. \quad (3.70)$$

Рассмотрим теперь тензор кручения C_{MNP} в $\tilde{\mathcal{M}}$ в произвольной координатной системе. Он полностью антисимметричен и линеен по производным конформного фактора $\partial_Q \lambda(x)$.

Единственный тензор, который удовлетворяет этим условиям, — это

$$C_{MNP} = A \tilde{E}_{MNPQ} \tilde{g}^{QR} \partial_R (\ln \lambda) = A \sqrt{\det(g)} \varepsilon_{MNPQ} g^{QR} \partial_R \lambda, \quad (3.71)$$

где A — константа и \tilde{E}_{MNPQ} — инвариантный тензор (1.7) на $\tilde{\mathcal{M}}$. Сравнивая (3.71) с (3.70) для плоского многообразия \mathcal{M} с $g_{MN} = \delta_{MN}$, находим $A = 1$.

Повторив это рассуждение для комплексных структур J и K , мы приходим к такому же результату (3.71) для соответствующих бисмутовых кручений. Таким образом, бисмутовы связности для всех трёх комплексных структур совпадают и многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ есть НКТ. \square

В качестве простейшего примера возьмём конформно-плоскую четырёхмерную метрику

$$ds^2 = \lambda(x) dx^M dx^M. \quad (3.72)$$

Это многообразие может являться деформацией \mathbb{R}^4 , но может также быть топологически нетривиальным. Выбирая $\lambda(x) = 1/(x^M x^M)$ и отождествляя $x^M \equiv 2x^M$, мы получаем многообразие Хопфа \mathcal{H}^2 с топологией $S^3 \times S^1$ [см. уравнение (2.78)].

Можно заметить, что комплексные структуры $(I^p)_M^N$ для всех многообразий (3.72) совпадают с постоянными плоскими выражениями (3.3). Это означает, что связность Обаты (3.66) обращается в этом случае в ноль.

Читатель, который доберётся до двенадцатой главы, увидит, что только что доказанная теорема является частным случаем значительно более общей теоремы. Используя мощный гармонический суперполево́й формализм, мы покажем, что все многообразия НКТ группируются в определённые семейства. Такое семейство может содержать в виде члена гиперкэлерово многообразие, и тогда остальные члены семейства являются его деформацией — мы будем называть такие многообразия НКТ *приводимыми* — или не содержать его — такие многообразия НКТ мы будем называть *неприводимыми*. Для всех многообразий из одного семейства связности Обаты (или, правильнее сказать, тензоры кривизны Обаты — связность не является инвариантным объектом) совпадают.

Многообразию Хопфа в некотором смысле неприводимо, поскольку его топология не совпадает с топологией пространства \mathbb{R}^4 . Однако, как мы видели, его метрика может быть локально сведена к плоской гиперкэлеровой метрике конформным преобразованием. Пример истинно неприводимой четырёхмерной метрики, которая не сводится конформным преобразованием к гиперкэлеровой метрике даже локально, был построен Дельдуком и Валентом в работе [33]. Мы будем обсуждать эту метрику в главе 12.

2. *Высшие измерения: групповые многообразия.* Многообразие Хопфа \mathcal{H}^2 есть групповое многообразие, $\mathcal{H}^2 = S^3 \times S^1 \equiv SU(2) \times U(1)$. Его метрику можно альтернативно записать в виде

$$ds^2 = 2 d\phi^M d\phi^N \text{Tr}\{\partial_M \omega \partial_N \omega^{-1}\} + d\chi^2, \quad (3.73)$$

где ϕ^M параметризуют $SU(2)$, $\omega \in SU(2) = \exp\{i\sigma_M \phi^M / 2\}$, а χ — угол на $U(1)$.

Следующий по сложности пример — это $SU(3)$. Это восьмерное многообразие. В работах [34], [35] было показано, что это многообразие (так же, как многие другие групповые многообразия с размерностью, кратной четырём) является НКТ.

Мы начнём с доказательства *теоремы Самельсона* [36].

Теорема 3.9. *Любое чётномерное компактное групповое многообразие \mathcal{G} комплексно.*

Доказательство. Запишем метрику на \mathcal{G} в виде

$$g_{MN} = 2 \operatorname{Tr}\{\partial_M \omega \partial_N \omega^{-1}\}, \quad (3.74)$$

где $\omega = \exp\{it_M x^M\}$ — матрица, описывающая элемент простой или полупростой компактной группы Ли \mathcal{G} с эрмитовыми генераторами t_M , нормированными согласно $\operatorname{Tr}\{t_M t_N\} = \frac{1}{2} \delta_{MN}$. Очевидно, что эта метрика инвариантна относительно левых и правых групповых вращений, $\omega \rightarrow U \omega V$ ($U, V \in \mathcal{G}$).

Рассмотрим малую окрестность любой точки ω на многообразии \mathcal{G} . Используя отмеченную инвариантность, эту точку можно привести групповым преобразованием в точку $\omega = \mathbb{1}$. В окрестности этой точки $x^M \ll 1$. Мы можем написать

$$g_{MN}(x) = e_{MA}(x) e_{NA}(x), \quad (3.75)$$

где фильбайны удобно выбрать согласно $-i\omega^{-1} \partial_M \omega = e_{MA} t_A$, и тогда

$$e_{MA} = \delta_{MA} + \frac{1}{2} f_{MAP} x^P + o(x) \quad (3.76)$$

(f_{AMR} — структурные константы \mathcal{G}).

Чтобы доказать теорему, мы должны определить почти комплексную структуру $I_{MN}(x)$ и показать, что тензор Нейенхайса для этой структуры равен нулю. Комплексная структура выражается через фильбайны:

$$I_{MN}(x) = e_{MA}(x) e_{NB}(x) I_{AB}, \quad (3.77)$$

где $I_{AB} \equiv I_{MN}(0)$ — касательная проекция комплексной структуры, одна и та же во всех точках. Мы получаем, что

$$I_{MN}(x) = I_{MN}(0) + \frac{1}{2} I_M^Q(0) f_{NQP} x^P - \frac{1}{2} I_N^Q(0) f_{MQP} x^P + o(x). \quad (3.78)$$

Структура (3.78) ковариантно постоянна относительно бисмутовой связности с тензором кручения

$$C_{MNP} = f_{MNP}. \quad (3.79)$$

В самом деле, легко увидеть, что в окрестности нуля

$$\nabla_P^{(B)} I_{MN} = \partial_P I_{MN} - \frac{1}{2} f_{QPM} I_N^Q - \frac{1}{2} f_{QPN} I_M^Q = 0, \quad (3.80)$$

где мы пренебрегли вкладом обычного символа Кристоффеля $\Gamma_{PM}^Q = O(x)$ (разложение метрики (3.75) начинается с квадратичного члена). Отметим, что тензор кручения (3.79) инвариантен, как и метрика, относительно групповых вращений и не зависит от x .

Матрица I_{AB} имеет ту же размерность, что алгебра Ли \mathfrak{g} , и с ней связан оператор \hat{I} , действующий на алгебре. Выберем базис в множестве всех генераторов t_A , включающий набор положительных корневых векторов E_{α_j} , набор отрицательных корневых векторов $E_{-\alpha_j}$ и элементы подалгебры Картана H . При написании явных формул мы будем предполагать, что корневые векторы нормированы условием $[E_{\alpha_j}, E_{-\alpha_j}] = \alpha_j^\vee$, где α_j^\vee есть кокорень, отвечающий корню¹⁷ α_j . Определим действие \hat{I} на корневые векторы согласно

$$\hat{I}E_{\alpha_j} = -iE_{\alpha_j}, \quad \hat{I}E_{-\alpha_j} = iE_{-\alpha_j}, \quad (3.81)$$

и пусть $\hat{I}H = H$.

Например, для $SU(3)$ со стандартной номенклатурой генераторов

$$\begin{aligned} t_{1+i2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_\alpha, & t_{4+i5} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{\alpha+\beta}, \\ t_{6+i7} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_\beta, & & \\ t_3 &= \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 0), & t_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{diag}(1, 1, -2) \end{aligned} \quad (3.82)$$

[α и β — простые корни группы $SU(3)$] это означает, что

$$\begin{aligned} I_{21} = I_{54} = I_{76} = -I_{12} = -I_{45} = -I_{67} = 1, \\ I_{83} = -I_{38} = 1, \end{aligned} \quad (3.83)$$

где первая строчка эквивалентна равенствам (3.81), а вторая строчка определяет (одним из двух возможных способов) действие \hat{I} на H , согласованное с требованиями $I_{AB} = -I_{BA}$ и $I^2 = -1$. Для произвольной группы мы можем поступить аналогично, раз-

¹⁷Это условие определяет базис Шевалле.

бив генераторы картановой подалгебры на пары произвольным образом. Разумеется, размерность картановой алгебры и, значит, всего многообразия должна быть для этого чётной.

Подставим теперь комплексную структуру (3.78) в тензор Нейенхейса (2.60) [в данном случае удобнее (2.59)] и потребуем, чтобы он был равен нулю. Мы приходим к чисто алгебраическому условию

$$f_{ABC} - I_{AD}I_{BE}f_{DEC} - I_{BD}I_{CE}f_{ADE} - I_{CD}I_{AE}f_{EBD} = 0. \quad (3.84)$$

Для $SU(3)$ выполнение этого условия можно проверить явно, но докажем, что оно выполняется для любой четномерной группы с комплексной структурой, определённой согласно (3.81). Представим каждый положительный корневой вектор как $E_{\alpha_j} = t_{A_j} + it_{A_j^*}$ с эрмитовыми t_{A_j} и $t_{A_j^*}$ [для $SU(3)$ имеем $A_j = 1, 4, 6$ и $A_j^* = 2, 5, 7$]. Заметим, что при таком разбиении коммутатор двух «незвёздных» генераторов $[t_A, t_B]$ даёт «звёздный» генератор t_{C^*} и то же относится к коммутатору двух «звёздных» генераторов. А коммутаторы типа $[t_A, t_{B^*}]$ дают «незвёздные» генераторы. Другими словами,

$$f_{ABC} = f_{AB^*C^*} = 0 \quad (3.85)$$

и отличны от нуля могут быть только структурные константы типа f_{ABC^*} или $f_{A^*B^*C^*}$.

Рассмотрим теперь несколько случаев.

1. Рассмотрим левую часть (3.84) с A, B , относящимися к одному и тому же корневому вектору E_α , так что $B = A^*$. Ввиду соотношения

$$I_{AA^*}I_{A^*A} = -1 \quad (3.86)$$

первый член в (3.84) сократит второй. Легко также увидеть, что третий и четвёртый члены равны в этом случае нулю.

2. Пусть теперь A и B относятся к разным корневым векторам E_α и E_β , а $t_C \equiv h$ лежит в картановой подалгебре. Коммутатор $[h, E_\alpha]$ пропорционален E_α , и, значит, $f_{ABC} = 0$. В этом случае обращаются в ноль все четыре члена в (3.84).

3. Несколько менее тривиальная ситуация возникает, когда A, B, C относятся к трём различным корневым векторам. Заметим, что в любой тройке α, β, γ можно всегда выбрать такую пару (α, β) , что коммутатор $[E_\alpha, E_\beta]$ не имеет проекции на E_γ .

Действительно, если случилось так, что $[E_\alpha, E_\beta]$ пропорционален E_γ , то $\gamma = \alpha + \beta$. Но тогда для пары (α, γ) коммутатор $[E_\alpha, E_\gamma]$ может дать только $E_{2\alpha+\beta}$ (если такой корень существует), но не E_β .

Выберем, таким образом, пару α, β , для которой коммутатор $[t_A + it_{A^*}, t_B + it_{B^*}]$ не содержит членов t_C или t_{C^*} .

Отсюда следует, что

$$f_{ABC^*} - f_{A^*B^*C^*} = f_{A^*BC} + f_{AB^*C} = 0. \quad (3.87)$$

Легко теперь увидеть, принимая во внимание равенство (3.85), что тождество (3.84) выполняется в любых звёздных вариантах. Например, если A и B не несут звёздочки, а $C \rightarrow C^*$ несёт, то, используя (3.86), в левой части мы получим выражение

$$f_{ABC^*} - f_{A^*B^*C^*} - f_{CB^*A} - f_{A^*CB},$$

которое обращается в ноль ввиду (3.87). □

Вернемся к $SU(3)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.10. *Многообразиие $SU(3)$ есть НКТ.*

Доказательство. Докажем вначале общую лемму.

Лемма. *Пусть Ω — автоморфизм алгебры \mathfrak{g} , т. е. Ω — ортогональная матрица, удовлетворяющая условию*

$$\Omega_{AD}\Omega_{BE}\Omega_{CF}f_{DEF} = f_{ABC}. \quad (3.88)$$

Пусть I — интегрируемая комплексная структура на группе \mathcal{G} . Тогда

$$J_{AB} = (\Omega I \Omega^T)_{AB} \quad (3.89)$$

также даёт после умножения на $e_{MA}e_{NB}$ интегрируемую комплексную структуру, которая ковариантно постоянна с той же бисмутовой связностью, что и I .

Доказательство. Легко проверить, что матрица J антисимметрична и что $J^2 = -1$. Из инвариантности (3.88) тензора f_{ABC} следует, что матрица J_{AB} удовлетворяет тому же условию (3.84), что I_{AB} , и, следовательно, структура J_{MN} интегрируема. Равна нулю также ковариантная производная (3.80) с тензором кручения (3.79) — при доказательстве этого факта для матрицы I мы использовали только выражение (3.76) для фильбайнов, но не конкретный вид I_{AB} . □

Для доказательства теоремы нам надо предъявить кватернионную тройку комплексных структур с совпадающими связностями Бисмута. Возьмём I из уравнения (3.83) и поищем такую матрицу J вида (3.89), что $IJ + JI = 0$. Это даст две искомые структуры. Третья структура есть $K = IJ$.

Автоморфизм Ω можно найти, рассмотрев вначале его действие на подалгебре $su(2) \oplus u(1) \subset su(3)$. Эта подалгебра может быть выбрана многими разными способами, и теорему можно доказать при любом таком выборе [в общем случае необходимо подправить выбор I в (3.83)], но наиболее удобный и универсальный способ, который работает также для всех других групп, использует подалгебру $su(2)$, связанную со старшим корнем $\alpha + \beta$. Она включает три эрмитовых генератора: t_4, t_5 и

$$t_{\tilde{3}} = \frac{1}{2} \text{diag}(1, 0, -1) = \frac{t_3 + \sqrt{3}t_8}{2}$$

(половина кокорня $\alpha^\vee + \beta^\vee$). Генератор $u(1)$ выбирается тогда ортогональным $t_{\tilde{3}}$:

$$t_{\tilde{8}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{diag}(-1, 2, -1) = \frac{-\sqrt{3}t_3 + t_8}{2}. \quad (3.90)$$

Мы выбираем I так, чтобы элементы матрицы I в повернутом базисе $(1, 2, \tilde{3}, 4, 5, 6, 7, \tilde{8})$ имели вид (3.83). Мы видим, что матрица I расщепляется на два блока:

- 1) блок в подпространстве $(4, 5, \tilde{3}, \tilde{8})$, соответствующий описанной выше подалгебре $su(2) \oplus u(1)$ алгебры $su(3)$;
- 2) блок в подпространстве $(1, 2, 6, 7)$, действующий на корневые векторы $E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}$.

Заметим, что каждый такой блок имеет вид J , определённый в (3.3).

Вторую комплексную структуру мы выбираем в виде $J = \Omega I \Omega^T$ с автоморфизмом $\Omega: t_a \rightarrow U^\dagger t_a U$, где

$$U = \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} (E_{\alpha+\beta} + E_{-\alpha-\beta}) \right\} = \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} t_4 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Преобразования генераторов $t_{4,5,\tilde{3},\tilde{8}}$ (базис первого блока) и генераторов $t_{1,2,6,7}$ (базис второго блока) можно найти либо явным перемножением матриц, либо с использованием формулы

Адамара:

$$e^R X e^{-R} = X + [R, X] + \frac{1}{2}[R, [R, X]] + \frac{1}{6}[R, [R, [R, X]]] + \dots, \quad (3.92)$$

где в нашем случае $R = -i\frac{\pi}{4}(E_{\alpha+\beta} + E_{-\alpha-\beta})$.

Мы видим, что секторы (45 $\bar{3}\bar{8}$) и (1267) не смешиваются. Генераторы в первом секторе преобразуются согласно

$$t_{4,\bar{8}} \xrightarrow{\Omega} t_{4,\bar{8}}, \quad t_5 \xrightarrow{\Omega} t_{\bar{3}} \xrightarrow{\Omega} -t_5.$$

В первом секторе матрица $J = \Omega I \Omega^T$ имеет следующие ненулевые элементы: $J_{5\bar{8}} = -J_{\bar{8}5} = J_{\bar{3}4} = -J_{4\bar{3}} = 1$, что даёт матрицу \mathcal{J} из (3.3). В секторе (1267) автоморфизм действует немного более сложным образом:

$$t_1 \xrightarrow{\Omega} \frac{t_1 - t_7}{\sqrt{2}}, \quad t_2 \xrightarrow{\Omega} \frac{t_2 - t_6}{\sqrt{2}}, \quad t_6 \xrightarrow{\Omega} \frac{t_2 + t_6}{\sqrt{2}}, \quad t_7 \xrightarrow{\Omega} \frac{t_1 + t_7}{\sqrt{2}}. \quad (3.93)$$

Что касается матрицы $J = \Omega I \Omega^T$, она имеет в этом секторе вид $-\mathcal{J}$, тот же с точностью до знака, что и в первом секторе!

Две матрицы $I = \text{diag}(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ и $J = \text{diag}(\mathcal{J}, -\mathcal{J})$ антикоммутируют. Матрица $K = IJ$ дополняет искомую тройку. Матрицу K можно также получить непосредственно из I , действуя на неё автоморфизмом $t_\alpha \rightarrow \tilde{U}^\dagger t_\alpha \tilde{U}$ с матрицей

$$\tilde{U} = \exp \left\{ \frac{\pi}{4} (E_{\alpha+\beta} - E_{-\alpha-\beta}) \right\}. \quad (3.94)$$

□

Как было сказано, существует много других групповых многообразий, на которых можно определить структуру НКТ. Многообразия, включающие только один неабелев фактор, даются следующим списком [34]:

$$\begin{aligned} & SU(2l+1), \quad SU(2l) \times U(1), \quad Sp(l) \times [U(1)]^l, \\ & SO(2l+1) \times [U(1)]^l, \quad SO(4l) \times [U(1)]^{2l}, \\ & SO(4l+2) \times [U(1)]^{2l-1}, \quad G_2 \times [U(1)]^2, \quad F_4 \times [U(1)]^4, \\ & E_6 \times [U(1)]^2, \quad E_7 \times [U(1)]^7, \quad E_8 \times [U(1)]^8. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Мы скажем здесь только несколько слов об общем доказательстве, верном для всех многообразий из вышеприведённого списка, отсылая читателя за деталями к статьям [34], [35], [37].

Рассмотрим, например, многообразие $SU(4) \times U(1)$. У $su(4)$ имеется три простых корня. Все положительные корни показаны схематически здесь:

$$\begin{pmatrix} * & \alpha & \alpha + \beta & \alpha + \beta + \gamma \\ * & * & \beta & \beta + \gamma \\ * & * & * & \gamma \\ * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Возьмём старший корень $\theta = \alpha + \beta + \gamma$ и определим действие матрицы I на элементы картановой подалгебры так, что кокорень $\alpha^\vee + \beta^\vee + \gamma^\vee$ смешивается с генератором $u(1)$, а два оставшихся элемента базиса картановой подалгебры перемешиваются между собой. Действие \hat{I} на корневые векторы по-прежнему определяется уравнением (3.81). Матрица I , определённая таким образом, имеет блочно-диагональную структуру. Имеется 4 блока:

- 1) внешний блок, включающий генераторы $E_{\pm\theta}$, θ^\vee и t_0 ;
- 2) внутренний блок, включающий генераторы $E_{\pm\beta}$ и два оставшихся генератора картановой подалгебры;
- 3) блок, включающий $E_{\pm\alpha}$ и $E_{\pm(\beta+\gamma)}$;
- 4) блок, включающий $E_{\pm(\alpha+\beta)}$ и $E_{\pm\gamma}$.

Каждый из четырёх блоков имеет вид \mathcal{J} .

На следующем шаге мы применяем к I автоморфизм с матрицей

$$U_0 = \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} (E_\theta + E_{-\theta}) \right\}. \quad (3.97)$$

Этот автоморфизм даёт некоторую матрицу $\tilde{\mathcal{J}}$, но, в отличие от того, что было в случае $su(3)$, это ещё не то, что нам требуется: он переводит \mathcal{J} в $\pm\mathcal{J}$ только в трёх блоках. Четвёртый блок, связанный с нетривиальным *централизатором* корневых векторов $E_{\pm\theta}$ в $su(4)$ [он равен $\mathfrak{g}^{(1)} = su(2) \oplus u(1)$], остаётся неповёрнутым, и $\tilde{\mathcal{J}}$ не антикоммутирует с I . Чтобы преобразовать четвёртый блок, мы должны взять старший корень θ_1 в централизаторе $\mathfrak{g}^{(1)}$ (в рассматриваемом случае $\mathfrak{g}^{(1)}$ имеет только один корень) и подействовать на $\tilde{\mathcal{J}}$ *дополнительным* автоморфизмом

$$U_1 = \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} (E_{\theta_1} + E_{-\theta_1}) \right\}. \quad (3.98)$$

Последовательное действие двух автоморфизмов даёт матрицу \mathcal{J} со структурой \mathcal{J} или $-\mathcal{J}$ во всех блоках.

Эту процедуру можно обобщить для любой группы. Берём старший корень в \mathfrak{g} , преобразуем «внешний слой» в I автоморфизмом (3.97), находим централизатор $\mathfrak{g}^{(1)}$ старшего корня, находим старший корень (или старшие корни, если $\mathfrak{g}^{(1)}$ не является простой алгеброй, что происходит довольно часто) в этом централизаторе, вращаем соответствующим автоморфизмом «внутренний слой» в I и затем, если это необходимо и в I остались неповёрнутые блоки, повторяем процедуру.

Заметим, что не все групповые многообразия размерности $4n$ являются НКТ. Например, $SO(8)$ не есть НКТ. Причина состоит в том, что картанова подалгебра $\mathfrak{so}(8)$ слишком мала, чтобы «обслужить» четыре входящих в игру корня — старший корень в $\mathfrak{so}(8)$ и три старших корня в централизаторе $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Необходимо добавить 4 абелевых фактора $U(1)$, чтобы сделать возможной всю конструкцию. Многообразие $SO(8) \times [U(1)]^4$ есть НКТ.

Тот факт, что $SU(3)$ и другие групповые многообразия в списке (3.95) являются НКТ, был доказан здесь традиционными математическими методами. Для $SU(3)$ существует также альтернативное «физическое» доказательство [38], основанное на формализме гармонического суперпространства, изложенном в главах 7 и 12.

Существует также множество многообразий НКТ, которые не являются групповыми многообразиями, но представляют собой однородные пространства G/H . Имеется большой список таких многообразий [35, 10].

Лучший способ увидеть это — использовать метод, основанный на автоморфизмах, изложенный выше и разработанный в статье [37]. Простейший пример — многообразие $SU(4)/SU(2)$. Его касательное пространство не включает генераторы «внутренней» группы $SU(2)$, и комплексные структуры суть матрицы 12×12 , включающие только три блока во «внешнем слое» комплексных структур $SU(4) \times U(1)$. Структура J получается из структуры I действием внешнего автоморфизма (3.97). Дополнительный автоморфизм (3.98) при этом не требуется.

Часть II
Физика

Глава 4

Динамические системы с обыкновенными и с грассмановыми переменными

Основная мысль этой книги состоит в том, что для изучения геометрических свойств многообразий чрезвычайно полезно рассмотреть связанную с ними *динамику*. Нас будет в особенности интересовать динамика частиц, движущихся вдоль геодезических траекторий на многообразии. Геодезическая траектория — это линия минимальной длины, соединяющая две данные точки. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 x^M}{ds^2} = -\Gamma_{NP}^M \frac{dx^N}{ds} \frac{dx^P}{ds}. \quad (4.1)$$

Геометрически, s — это просто параметр, различающий точки на линии. Но можно его также интерпретировать как *время*. Тогда уравнение (4.1) приобретает смысл динамического уравнения, описывающего движение частицы по геодезической.

Различные динамические системы обстоятельно изучались физиками со времён Галилея и Ньютона, и был накоплен огромный опыт, которым мы сможем воспользоваться.

Движение по геодезическим — это, однако, не всё. Чтобы получить действительно сильные и интересные результаты, надо рассмотреть не просто движение по многообразию, но движение по *супермногообразию*, связанному с данным многообразием. Такое супермногообразие параметризуется, помимо обычных координат, также *грассмановыми* антикоммутирующими координатами. Эта глава содержит общие замечания, касающиеся классической и квантовой динамики обыкновенных систем и систем, включающих грассмановы динамические переменные.

§ 4.1. Классическая механика

В этом и следующем параграфе мы кратко напомним некоторые факты, хорошо известные из университетского курса классической и квантовой механики. Мы делаем это для тех читателей, которые, будучи чистыми математиками, возможно знают гео-

метрию многообразий, о которой мы говорили в первой части, намного лучше автора, но могут нуждаться в том, чтобы освежить свои знания физики.

Под *динамической системой* мы понимаем систему, описываемую набором обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_j). \quad (4.2)$$

Независимая переменная t — это время¹. Функции $x_i(t)$ называются *динамическими переменными*. Для системы уравнений (4.2) можно определить задачу Коши: зная начальные условия при $t = 0$, мы можем определить значения $x_i(t)$ в более поздние моменты времени.

Нас будет интересовать только ограниченный класс динамических систем — *гамильтоновы системы*.

Определение 4.1. *Гамильтонова система* есть динамическая система, включающая чётное число $2n$ динамических переменных, которые можно разбить на два класса — *канонические координаты* $q_{i=1,\dots,n}$ и *канонические импульсы* $p_{i=1,\dots,n}$ — таким образом, что динамические уравнения (4.2) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &\equiv \dot{q}_i = \frac{\partial H(p_j, q_j)}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &\equiv \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p_j, q_j)}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Функция $H(p_j, q_j)$ называется функцией Гамильтона или *гамильтонианом*.

Набор всех переменных $\{p_i, q_i\}$ называется *фазовым пространством*. Очевидно, что²

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \quad (4.4)$$

¹Математики часто обсуждают другой вид динамических систем, где время *дискретно*. В этом случае вместо уравнений (4.2) можно записать $x_i^{(n+1)} = f_i[x_j^{(n)}]$. *Клеточные автоматы*, включающие знаменитую игру «Жизнь» Конвея и машину Тьюринга, принадлежат к этому классу. Но в этой книге дискретные системы изучаться не будут.

²Мы по-прежнему подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам, хотя ни q_i , ни p_i не являются векторами в смысле (1.3) и (1.4).

Другими словами, $H(p_j, q_j)$ есть *интеграл движения*: величина, сохраняющая своё значение в течение временной эволюции, описываемой уравнениями (4.3). Физический смысл этой величины — энергия.

Могут быть и другие интегралы движения помимо энергии.

Определение 4.2. Структура³

$$\{A, B\}_P = \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \quad (4.5)$$

называется *скобкой Пуассона* двух функций на фазовом пространстве (физики говорят: *наблюдаемых*) — $A(p_i, q_i)$ и $B(p_i, q_i)$.

Теорема 4.1. Для того чтобы наблюдаемая $f(p_i, q_i)$ являлась интегралом движения, необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона $\{H, f\}_P$ обращалась в ноль.

Доказательство. Подставляя гамильтоновы уравнения движения (4.3) в

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i,$$

мы получаем

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}_P. \quad (4.6)$$

□

Уравнение (4.6) описывает временную эволюцию произвольной наблюдаемой.

Скобка Пуассона (4.5) обладает следующими алгебраическими свойствами:

$$\begin{aligned} \{A, B\}_P &= -\{B, A\}_P, & \{AB, C\}_P &= A\{B, C\}_P + B\{A, C\}_P, \\ \{A, \{B, C\}_P\}_P &+ \{B, \{C, A\}_P\}_P &+ \{C, \{A, B\}_P\}_P &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Полагая в последнем тождестве (*тождестве Якоби*) $C(p_i, q_i) = H(p_i, q_i)$, мы выводим важную теорему.

Теорема 4.2. Если $A(p_i, q_i)$ и $B(p_i, q_i)$ — два интеграла движения, их скобка Пуассона либо тождественно равна нулю, либо, если это не так, также является интегралом движения.

³В разных учебниках знак скобки Пуассона определяется по-разному. Мы следуем конвенции курса Ландау [39].

Рассмотрим теперь функцию

$$L(q_i, \dot{q}_i) = p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i), \quad (4.8)$$

где вместо импульсов p_i в правой части следует подставить их выражения через q_i и \dot{q}_i , следующие из уравнений Гамильтона⁴, $\dot{q}_i = \partial H(p_j, q_j) / \partial p_i$. Функция L называется *лагранжианом*. А преобразование (4.8) называется *преобразованием Лежандра*. Это преобразование, очевидно, действует в обе стороны: можно начать с лагранжиана и вывести гамильтониан.

Для простейшего одномерного гамильтониана

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad (4.9)$$

мы получаем

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q). \quad (4.10)$$

Теорема 4.3. Система уравнений Гамильтона (4.3) эквивалентна следующей системе уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (4.11)$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциал

$$dL = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dH. \quad (4.12)$$

Используя уравнения (4.3), мы получаем

$$dL = p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i. \quad (4.13)$$

Отсюда следует⁵, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.14)$$

⁴Мы предполагаем, что эта система уравнений невырождена и имеет единственное решение для $p_i(q_j, \dot{q}_j)$.

⁵Отметим тонкость. Частные производные в левых частях уравнений (4.14) берутся, предполагая фиксацию q_i или \dot{q}_i , в то время как частные производные $\partial H / \partial q_i$ в правых частях берутся в предположении фиксированных p_i .

Дифференцируя по времени левые соотношения в (4.14), выражающие канонические импульсы через лагранжиан, подставляя вместо \dot{p}_i правые части соответствующих уравнений Гамильтона и принимая во внимание правые соотношения в (4.14), мы приходим к (4.11). \square

Введём теперь функционал действия,

$$S[q_i(t), t_1 - t_0] = \int_{t_0}^{t_1} L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] dt. \quad (4.15)$$

Тот факт, что он зависит, помимо $q_i(t)$, только от разности $t_1 - t_0$, но не от t_0 и t_1 по отдельности, следует из отсутствия в лагранжиане явной временной зависимости. Зафиксируем граничные условия:

$$q_i(t_0) = q_i^{(0)}, \quad q_i(t_1) = q_i^{(1)}, \quad (4.16)$$

где $q_i^{(0,1)}$ — набор констант. Докажем следующую важную теорему.

Теорема 4.4. Набор функций $q_i(t)$, реализующих экстремум функционала (4.15) с граничными условиями (4.16), удовлетворяет уравнениям Лагранжа (4.11) и определяет классическую траекторию системы.

Доказательство. Вариация функционала действия есть

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) + \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) \right] dt. \quad (4.17)$$

Проинтегрируем первый член по частям, принимая во внимание $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Мы получаем

$$\delta S = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \right] \delta q_i(t) dt. \quad (4.18)$$

В экстремуме эта вариация должна исчезнуть, и это должно выполняться для любой вариации $\delta q_i(t)$. А это возможно, только если выражение в квадратных скобках обращается в ноль. \square

Замечание. Для не слишком дикой невырожденной функции L система уравнений (4.11) с граничными условиями (4.16) имеет единственное решение. Это означает, что функционал действия имеет только один экстремум. Принято выбирать его знак

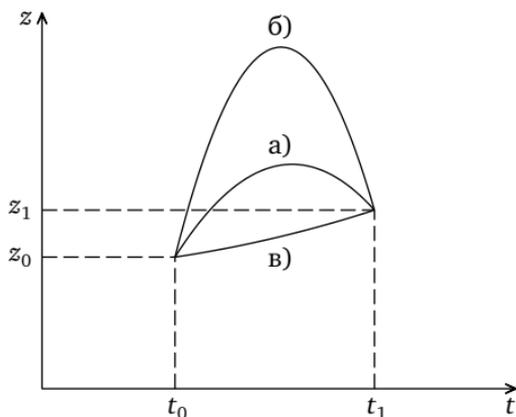


Рис. 4.1. Траектории камня: а) траектория с минимальным действием; б) слишком большая кинетическая энергия; в) слишком маленькая потенциальная энергия

(знак L) так, чтобы действие было *минимальным*. *Принцип наименьшего действия* — один из фундаментальных принципов физики.

Проиллюстрируем этот общий результат на простом примере (см. рис. 4.1). Возьмём лагранжиан

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz \equiv T - U.$$

Он описывает вертикальное движение камня массы m в поле тяжести. Зададимся вопросом: как камень должен поступить, чтобы минимизировать функционал (4.15)? С одной стороны, чтобы интеграл $\int (T - U)dt$ был как можно меньше, камню надо увеличить свою потенциальную энергию $U(z) = mgz$ и забраться повыше. Но принимая во внимание назначенное свидание в точке z_1 в фиксированный момент времени t_1 , если забраться слишком высоко, это увеличит скорость камня и даст большой положительный вклад в интеграл (4.15) от члена с кинетической энергией, $T = m\dot{z}^2/2$. Наименьшая кинетическая энергия имеет место для прямолинейной траектории. Фактическая траектория представляет «переговорный компромисс» между этими двумя требованиями.

Последняя тема, которая будет обсуждаться в этом параграфе, — это знаменитая *теорема Нётер* [40]. Она утверждает, что

каждой непрерывной симметрии лагранжиана отвечает определённый закон сохранения, определённый интеграл движения. Удобно вначале доказать ослабленную версию этой теоремы и потом её усилить.

Теорема 4.5. *Предположим, что лагранжиан $L(q_i, \dot{q}_i)$ инвариантен относительно инфинитезимального преобразования переменных:*

$$q_i \rightarrow q_i + \delta q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, \dot{q}_j), \quad \epsilon \ll 1. \quad (4.19)$$

Тогда нётеровский заряд $Q = (\partial L / \partial \dot{q}_i) f_i$ есть интеграл движения.

Доказательство. Вариация лагранжиана δL обращается в ноль, и то же относится к вариации действия δS . Последняя выражается уравнением (4.17). Проведём интегрирование по частям, не пренебрегая на этот раз граничным вкладом. Мы получаем

$$\delta S = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] f_i dt + \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (4.20)$$

Это должно обращаться в ноль при любых $q_i(t)$. В частности — для классических траекторий, удовлетворяющих лагранжевым уравнениям движения. Для таких траекторий обращение в ноль δS означает также обращение в ноль граничного члена в (4.20). Это приводит к равенству $Q(t_1) = Q(t_0)$. Таким образом, $Q(t)$ — действительно интеграл движения. \square

Теорема 4.6. *Пусть теперь лагранжиан не полностью инвариантен относительно преобразования (4.19), но сдвигается на полную производную по времени, $\delta L = \epsilon(d/dt)\Lambda(q_i, \dot{q}_i)$. В этом случае интеграл движения тоже существует и равен*

$$Q(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i - \Lambda. \quad (4.21)$$

Доказательство. Вариация действия (4.20) больше не исчезает, а равна $\epsilon[\Lambda(t_1) - \Lambda(t_0)]$. Для классической траектории мы выводим

$$\Lambda(t_1) - \Lambda(t_0) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \Big|_{t_0}^{t_1},$$

откуда следует сохранение величины (4.21). \square

Примеры. 1. Рассмотрим вариацию $\delta q_i = \epsilon \dot{q}_i$, отвечающую инфинитезимальному временному сдвигу, $t \rightarrow t + \epsilon$. При этом $\delta L = \epsilon \dot{L}$, что есть полная производная и выполняются условия теоремы 4.6. Соответствующий сохраняющийся нётеровский заряд есть просто энергия,

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

2. Рассмотрим лагранжиан

$$L = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - U(x^2 + y^2). \quad (4.22)$$

Он инвариантен относительно поворотов. Инфинитезимально:

$$\delta x = \epsilon y, \quad \delta y = -\epsilon x. \quad (4.23)$$

Сохраняющийся нётеровский заряд,

$$Q = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = p_x y - p_y x, \quad (4.24)$$

есть не что иное как момент количества движения J_z (взятый с противоположным знаком).

Чтобы избежать возможных недоумённых вопросов наших читателей-физиков, необходимо сделать следующее замечание.

В большинстве учебников по классической механике (см. например [41]) под теоремой Нётер понимается несколько иное, хотя и связанное утверждение. В условии теоремы требуется *точная* инвариантность лагранжиана относительно преобразований $\delta q_i = \epsilon f_i(q_j, t)$ (нет зависимости от обобщённых скоростей \dot{q}_j , но разрешена явная зависимость от времени), дополненных возможным преобразованием времени, $\delta t = \epsilon f_0(q_j, t)$. Такая формулировка вполне достаточна для обычных механических приложений (например, сохранение энергии следует в этом случае из инвариантности лагранжиана относительно сдвига времени, *не связанного* со сдвигом динамических переменных q_j).

Но чтобы применять теорему Нётер к суперсимметричным системам, что мы собираемся делать в последующих главах, нам будет нужна именно теорема 4.6: преобразования суперсимметрии включают зависимость от скоростей и лагранжиан не полностью инвариантен относительно таких преобразований, но сдвигается на полную временную производную.

В суперсимметричных теориях поля преобразование суперсимметрии сдвигают пространственную плотность лагранжиана на градиент $\partial_\mu \Lambda$ некоторой функции. Часто говорится, что такое преобразование оставляет инвариантным интеграл действия, но это предполагает, что мы интегрируем по всему пространству-времени и что поля обращаются в ноль на пространственной бесконечности и при $t = \pm\infty$. Действие механической системы, представляющее интеграл с конечными пределами, $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, может при этом измениться.

Заметим, однако, что хотя действие и может измениться при добавлении полной производной к лагранжиану, динамические уравнения движения остаются неизменными! Интуитивно ясно, почему это так: возможная модификация относится к граничным членам, в то время как уравнения движения определяют поведение системы *внутри* временного интервала (t_1, t_2) . Но можно доказать и простую строгую теорему.

Теорема 4.7. Пусть

$$L' = L + \dot{\Lambda}(q_i) = L + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Тогда лагранжевы уравнения движения, следующие из L' и L , совпадают.

Доказательство. Запишем уравнения

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{\Lambda}}{\partial q_i}$$

и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} \right].$$

Ясно, что сдвиги в лагранжевых уравнениях (4.11), пропорциональные Λ , сокращаются. \square

То же верно, если Λ зависит также от скоростей \dot{q}_i или от временных производных $q_i(t)$ более высокого порядка. Надо только иметь в виду, что для лагранжианов, включающих высшие производные (а если Λ зависит от скоростей, то сдвинутый лагранжиан L' зависит от ускорений), уравнения движения модифицируются. Например, для $L'(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i)$ они принимают вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L'}{\partial \ddot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0. \quad (4.25)$$

Именно эти уравнения совпадают в этом случае с уравнениями (4.11) для лагранжиана L .

4.1.1. Алгебра симметрий

Предположим теперь, что в пренебрежении граничными членами действие инвариантно относительно двух различных преобразований,

$$\delta_f q_i = \epsilon_1 f_i(q_j, \dot{q}_j) \quad \text{и} \quad \delta_g q_i = \epsilon_2 g_i(q_j, \dot{q}_j). \quad (4.26)$$

Определение 4.3. Вариация

$$\delta_{[f,g]} q_i = (\delta_f \delta_g - \delta_g \delta_f) q_i$$

называется скобкой Ли⁶ двух преобразований (4.26).

Рассмотрим вначале случай, когда f_i и g_i не зависят от скоростей. Тогда

$$\delta_{[f,g]} q_i = \epsilon_1 \epsilon_2 \left[f_j \frac{\partial g_i}{\partial q_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right] \equiv \epsilon_1 \epsilon_2 h_i(q_k). \quad (4.27)$$

Если действие инвариантно относительно преобразований (4.26), оно также инвариантно относительно (4.27).

При преобразованиях f и g лагранжиан может сдвигаться на полные производные. Предположим, что это производные функций, которые зависят только от q_i , но не от \dot{q}_i :

$$\delta_f L = \epsilon_1 \frac{d}{dt} \Lambda_f(q_i), \quad \delta_g L = \epsilon_2 \frac{d}{dt} \Lambda_g(q_i). \quad (4.28)$$

Тогда

$$\delta_{[f,g]} L = \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{d}{dt} \Lambda_h(q_i), \quad (4.29)$$

где

$$\Lambda_h = f_i \frac{\partial \Lambda_g}{\partial q_i} - g_i \frac{\partial \Lambda_f}{\partial q_i}. \quad (4.30)$$

Рассмотрим теперь нётеровские интегралы движения, отвечающие преобразованиям f , g , h :

$$Q_f = p_i f_i - \Lambda_f, \quad Q_g = p_i g_i - \Lambda_g, \quad Q_{[f,g]} = p_i h_i - \Lambda_h. \quad (4.31)$$

⁶Мы определили «физическую» скобку Ли. «Математическая» скобка Ли определяется как коммутатор абстрактных векторных полей.

Теорема 4.8. *Выполняется равенство $Q_{[f,g]} = \{Q_f, Q_g\}_P$.*

Проверяется простым явным вычислением.

Скобка Ли преобразований f и h (и, соответственно, скобка Пуассона $\{Q_f, Q_h\}_P$) могут дать ещё одну симметрию системы (ещё один интеграл движения) и так до тех пор, пока алгебра скобок Ли (скобок Пуассона) не замкнётся.

Простейшая нетривиальная алгебра включает три симметрии. Рассмотрим лагранжиан, зависящий от трёх координат x, y, z и инвариантный относительно вращений вокруг первой и второй оси:

$$R_1: \begin{cases} \delta_1 y = \epsilon_1 z, \\ \delta_1 z = -\epsilon_1 y; \end{cases} \quad R_2: \begin{cases} \delta_2 z = \epsilon_2 x, \\ \delta_2 x = -\epsilon_2 z. \end{cases} \quad (4.32)$$

Скобка Ли $[R_1, R_2]$ даёт, очевидно, вращение R_3 относительно третьей оси. Интегралы Нётер суть

$$L_1 = p_y z - p_z y, \quad L_2 = p_z x - p_x z, \quad L_3 = p_x y - p_y x, \quad (4.33)$$

и выполняется алгебра $so(3)$: $\{L_i, L_j\}_P = \epsilon_{ijk} L_k$.

Возникает вопрос: что происходит в случае, когда $f_i, g_i, \Lambda_f, \Lambda_g$ зависят не только от q_j , но также от \dot{q}_j . Как мы отмечали, таковы преобразования суперсимметрии, представляющие для нас главный интерес в этой книге. Можно предположить, что теорема 4.8 остаётся справедливой и в этом более общем случае.

Аргумент следующий. Теорема Нётер гарантирует существование интегралов движения Q_f и Q_g . Тогда теорема 4.1 говорит нам, что $\{H, Q_f\}_P = \{H, Q_g\}_P = 0$. Но тогда $\{H, \{Q_f, Q_g\}_P\}_P$ также обращается в ноль — это следствие тождества Якоби. Таким образом, $Q_h = \{Q_f, Q_g\}_P$ есть также интеграл движения. Единственное, что остаётся недоказанным — это тот факт, что Q_h есть нётеровский заряд, отвечающий скобке Ли $[f, g]$.

Встретившись с подобной трудностью, автор хочет вспомнить, что он не математик, ценящий превыше всего строгие доказательства, а полагающийся прежде всего на интуицию физик, задать риторический вопрос: «Чем ещё Q_h может быть?» и закрыть обсуждение. Конечно, строгое доказательство не помешало бы, но я не смог ни найти его в литературе, ни сконструировать сам. Одна из трудностей доказательства состоит в

том, что в общем случае скобка Ли функций f и g зависит не только от скоростей, но и от ускорений. Вероятно, при доказательстве недоказанной здесь теоремы следует наложить условие, что такая зависимость в $[f, g]$ отсутствует.

Следует, однако, успокоить читателя в том, что касается преобразований суперсимметрии, представляющих для нас главный интерес. Во всех случаях, рассматриваемых в книге, свойство $Q_{[f,g]} = \{Q_f, Q_g\}_P$ выполняется. В этом можно убедиться явно.

§ 4.2. Стандартная квантовая механика

Мы не будем подробно обсуждать физические аспекты квантовой механики, сконцентрировавшись на её математической структуре.

В квантовом мире классические траектории смысла не имеют, и главный описывающий систему объект — это её *волновая функция* $\Psi(q_i)$. Чтобы найти волновые функции $\Psi_n(q_i)$ стационарных состояний, надо решить спектральную задачу,

$$\hat{H} \Psi_n(q_i) = E_n \Psi_n(q_i), \quad (4.34)$$

с соответствующими граничными условиями. Квантовый гамильтониан \hat{H} есть эллиптический дифференциальный оператор, действующий на гильбертовом пространстве \mathcal{L}_2 , включающем квадратично интегрируемые функции $\Psi(q_i)$. Помимо квадратичной интегрируемости, мы требуем существование скалярного произведения:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_Q d\mu \overline{\Psi(q_i)} \Phi(q_i), \quad (4.35)$$

где $d\mu$ — мера на пространстве Q , где живут динамические переменные q_i .

Определение 4.4. Интеграл

$$\int_Q d\mu \overline{\Psi(q_i)} \hat{A} \Phi(q_i) \quad (4.36)$$

мы будем называть *матричным элементом* оператора \hat{A} между состояниями Ψ и Φ и обозначать через $\langle \Psi | \hat{A} | \Phi \rangle$.

Мы использовали здесь дираковское обозначение $|\varphi\rangle$ для элементов нашего гильбертова пространства (*кет-вектора*) и обозначение $\langle\varphi|$ для дуальных *бра-векторов*.

Фундаментальное уравнение квантовой механики не есть (4.34), а зависящее от времени уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q_i, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(q_i, t), \quad (4.37)$$

\hbar — постоянная Планка. Уравнение (4.34) выводится из (4.37), если подставить в него стационарный анзац

$$\Psi_n(q_i, t) = \Psi_n(q_i) \exp \left\{ -\frac{iE_n t}{\hbar} \right\}. \quad (4.38)$$

Квантовый гамильтониан получается из классического гамильтониана $H(p_i, q_i)$ заменой классических импульсов p_i на операторы $\hat{p}_i = -i\hbar \partial / \partial q_i$. Так, квантовая версия классического гамильтониана (4.9) — это

$$\hat{H}(\hat{p}, q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + U(q). \quad (4.39)$$

Для более сложных гамильтонианов, которые мы встретим позже в нашей книге, переход от классического гамильтониана к квантовому не столь тривиален. Не сразу ясно, например, какому квантовому гамильтониану соответствует классический гамильтониан $H^{\text{cl}} = p^2 q^2$. Это

$$\hat{H} = \hat{p}^2 q^2, \quad \hat{H} = q^2 \hat{p}^2 \quad (4.40)$$

или что-то другое? (Два выражения в (4.40) не совпадают, поскольку \hat{p} и q не коммутируют, $[\hat{p}, q] = -i\hbar$.)

Проблема выбора между разными квантовыми операторами, которые соответствуют одному и тому же классическому выражению, называется проблемой *неоднозначности упорядочения*. Чтобы разрешить эту неоднозначность, необходимо наложить на операторы дополнительные требования. Одно из таких требований весьма естественно: квантовый гамильтониан должен быть эрмитовым, иначе энергии собственных состояний — решений уравнения Шрёдингера (4.34) — становятся комплексными. Это недопустимо с точки зрения физики и приводит также к

трудностям в математическом описании. Таким образом, упорядочения, выбранные в (4.40) — это не то, что нам необходимо. Требование эрмитовости не фиксирует, однако, упорядочение однозначно: эрмитовы операторы $\hat{H} = \hat{p}q^2\hat{p}$ и $\hat{H} = q\hat{p}^2q$ не совпадают.

Мы будем подробно обсуждать неоднозначности упорядочения позже, в главах 5, 6, 8, 9, но мы хотим отметить уже сейчас, что среди различных рецептов упорядочения есть один выделенный — *вейлевский рецепт*. Мы дадим здесь определение, а смысл и преимущества вейлевской процедуры будут прояснены позже.

Определение 4.5. Пусть дана наблюдаемая $A(p_i, q_i)$. Представим её как интеграл Фурье,

$$A(p_i, q_i) = \int \prod_i d\alpha_i d\beta_i h(\alpha_i, \beta_i) e^{i(\alpha_i p_i + \beta_i q_i)}. \quad (4.41)$$

Тогда оператор

$$\hat{A}(\hat{p}_i, q_i) = \int \prod_i d\alpha_i d\beta_i h(\alpha_i, \beta_i) e^{i(\alpha_i \hat{p}_i + \beta_i q_i)} \quad (4.42)$$

называется *вейлевски упорядоченным* оператором, соответствующим классической функции $A(p_i, q_i)$. Функция $A(p_i, q_i)$ называется *вейлевским символом* оператора \hat{A} .

Для мономов типа p^2q^2 этот рецепт даёт симметричное упорядочение:

$$p^2q^2 \rightarrow \frac{1}{6}(\hat{p}^2q^2 + q^2\hat{p}^2 + \hat{p}q^2\hat{p} + q\hat{p}^2q + \hat{p}q\hat{p}q + q\hat{p}q\hat{p}).$$

Это следует из того простого факта, что каждый член разложения экспоненты в (4.42) включает подобные симметричные произведения.

Чтобы найти вейлевский символ произвольного полиномиального оператора, нужно вначале представить последний как сумму симметричных комбинаций, используя канонические коммутаторы $[\hat{p}_j, q_k] = -i\hbar\delta_{jk}$. Например, вейлевский символ оператора $\hat{p}q$ есть $pq - i\hbar/2$, а вейлевский символ оператора $q\hat{p}$ есть $pq + i\hbar/2$.

Отметим, что вейлевский символ произведения двух операторов не совпадает с произведением их вейлевских символов.

Вместо этого имеем

$$(\hat{A}\hat{B})_W = \exp\left[-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial Q_i} - \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial q_i}\right)\right] A_W(p_i, q_i) B_W(P_i, Q_i) \Big|_{\substack{p=P \\ q=Q}} \quad (4.43)$$

(так называемое *произведение Груневолда—Мояля* [42]).

Отсюда вейлевский символ коммутатора двух операторов есть

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}]_W &= -2i \sin\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial Q_i} - \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial q_i}\right)\right] A_W(p_i, q_i) B_W(P_i, Q_i) \Big|_{\substack{p=P \\ q=Q}} = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -i\hbar \{A_W, B_W\}_{GM}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Скобка Груневолда—Мояля $\{A, B\}_{GM}$ сводится к скобке Пуассона (4.5) в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$. Для большинства простых операторов, встречающихся в физических приложениях, члены высших порядков по \hbar в (4.44) исчезают, так что скобка Пуассона переходит при квантовании в коммутатор.

Из последнего утверждения и теоремы 4.1 выводим важное следствие: квантовый оператор \hat{A} , отвечающий классическому интегралу движения $A(p_i, q_i)$, коммутирует с квантовым гамильтонианом⁷, $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$.

Последнее замечание этого параграфа состоит в следующем. Когда математик пишет уравнение (4.34), он предполагает, что спектр точечен (*дискретен* на физическом языке) и что все собственные состояния Ψ_n нормируемы. Физики, однако, часто обсуждают задачи, где спектр непрерывен. Можно, например, взять гамильтониан (4.39) с нулевой потенциальной энергией $U(q)$, который описывает свободное движение. В этом случае собственные функции представляют плоские волны $\sim e^{ipq}$, которые не нормируемы. Чтобы придать этой задаче математический смысл, надо провести *регуляризацию* — ввести параметр, который модифицирует задачу так, что спектр становится дискретным, и

⁷Точное утверждение такое: если $A(p_i, q_i)$ интеграл движения, так что $\{H, A\}_P = 0$, всегда можно указать способ упорядочения операторов \hat{H} и \hat{A} , при котором $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$. Я не могу доказать это как строгую теорему, но это верно во всех известных мне случаях. В применении к суперсимметрии см. работу [43] и обсуждение на с. 139.

исследовать потом предел, в котором регуляризация снимается. Для свободного гамильтониана $-\partial^2/\partial q^2$ удобно «сколотить», а потом разобрать *конечный ящик* — позволить частице двигаться только в конечном интервале $|q| < L$, наложив граничные условия $\Psi(-L) = \Psi(L)$, и устремить потом L к бесконечности.

В нашей книге мы будем в основном изучать компактные многообразия. В соответствующей динамической системе движение финитно и спектр дискретен. Если же многообразие некомпактно (как, например, многообразия Taub-NUT и Эгучи—Хансона, изучавшиеся в главе 3), мы всегда будем иметь в виду такую регуляризационную процедуру.

§ 4.3. Грассмановы переменные

Стандартное фазовое пространство, обсуждавшееся в предыдущем параграфе, параметризуется координатами и импульсами, являющимися обычными вещественными числами. Можно, однако, обобщить это понятие и предположить, что, помимо обыкновенных коммутирующих координат и импульсов, фазовое пространство содержит также антикоммутирующие *грассмановы* переменные. Грассмановы переменные были введены в физику более полувека назад Феликсом Березиным [44]. Они необходимы для корректного описания физических фермионных полей (электронно-позитронного поля, поля нейтрино и других). В нашей книге мы не будем касаться этого полевого аспекта, но грассмановы динамические переменные можно ввести также для классических и квантовых *механических* систем. Об этом мы и будем говорить в двух заключительных параграфах этой главы.

Прежде всего, введём математические понятия грассмановых чисел и грассмановой алгебры. Основные определения следующие:

- Пусть $\{a_i\}$ — набор n антикоммутирующих переменных: $a_i a_j + a_j a_i = 0$. Элементы грассмановой алгебры являются функциями $f(a_i) = c_0 + c_i a_i + c_{ij} a_i a_j + \dots$, где коэффициенты c_0, c_i, \dots — обыкновенные (действительные или комплексные) числа. Ряды обрываются на $(n + 1)$ -м члене, $(n + 2)$ -й член содержал бы квадрат какой-нибудь антикоммутирующей переменной (скажем, a_1^2), что есть ноль. Заметим, что хотя грассманово число ти-

па $a_1 a_2$ коммутирует с остальными, это всё же не обыкновенное число. Оно является *чётным элементом* грассмановой алгебры. Имеются, конечно, также нечётные антикоммутирующие элементы. Базисные переменные $\{a_i\}$ называются *генераторами* алгебры.

- Грассмановы числа можно складывать,

$$f(a_i) + g(a_i) = c_0 + d_0 + (c_i + d_i)a_i + \dots,$$

и перемножать. Например,

$$(1 + a_1 + a_2)(1 + a_1 - a_2) = 1 + 2a_1 - 2a_1 a_2$$

(использовалось свойство антикоммутации a_i).

- Можно также дифференцировать функции $f(a_i)$ по грассмановым переменным: $\partial/\partial a_i(1) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $\partial/\partial a_i(a_j) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij}$. Производная суммы есть сумма производных, а производная произведения двух функций удовлетворяет правилу Лейбница с той модификацией, что оператор $\partial/\partial a_i$ следует понимать как нечётную грассманову переменную. Это иногда приводит к смене знака, когда мы «тянем» $\partial/\partial a_i$ направо, чтобы подвести к соответствующей базисной переменной, которую этот оператор уничтожает. Например, $\partial/\partial a_1(a_2 a_3 a_1) = a_2 a_3$, но $\partial/\partial a_1(a_2 a_1 a_3) = -a_2 a_3$.

- По грассмановым переменным можно также интегрировать. Это, конечно, не обычный интеграл, его нельзя получить как предел интегральных сумм, нельзя посчитать численно в «конечных пределах» (это не имеет смысла для грассмановых чисел) методом Симпсона и т. д. Можно, однако, взять интеграл по грассмановой переменной «по всей области» (если угодно, «от $-\infty$ до ∞ », хотя это тоже не имеет смысла).

Смысл имеет определение, предложенное Березиным:

$$\int da_j f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial a_j} f(a). \quad (4.45)$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\int da_i a_j = \delta_{ij}. \quad (4.46)$$

Очевидное (и важное для дальнейшего) следствие определения (4.45) есть

$$\int da_j \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \quad (4.47)$$

(по j здесь нет суммирования).

• Если грассманова алгебра включает чётное число $2n$ генераторов, то их можно разделить на две равные части,

$$\{a_{j=1,\dots,2n}\} \rightarrow \{a_{j=1,\dots,n}, \bar{a}_{j=1,\dots,n}\},$$

и ввести оператор инволюции, $a_j \leftrightarrow \bar{a}_j$, который мы будем отождествлять с комплексным сопряжением. Мы, в частности, будем полагать, что одновременно с инволюцией происходит комплексное сопряжение обычных чисел:

$$f(a) = c_0 + c_i a_i + d_i \bar{a}_i + \dots \rightarrow \overline{f(a)} = \bar{c}_0 + \bar{c}_i \bar{a}_i + \bar{d}_i a_i + \dots \quad (4.48)$$

Удобно также предположить, что для любых двух элементов f, g грассмановой алгебры выполняется такое же свойство

$$\overline{(fg)} = \bar{g}\bar{f}, \quad (4.49)$$

как для эрмитова сопряжения (а в уравнении (4.48) порядок факторов, конечно, роли не играет).

Отметим важное тождество:

$$\int \prod_{i=1}^n da_i d\bar{a}_i \exp\{M_{jk} \bar{a}_j a_k\} = \det(M). \quad (4.50)$$

§4.4. Грассманова динамика

Тот факт, что грассмановы переменные можно трактовать так же, как обычные переменные, что можно изучать их классическую динамику и описывать её, используя методы аналитической механики, очерченные в §4.1, и изучать также квантовую динамику, решая соответствующее уравнение Шрёдингера, был осознан сравнительно недавно [45, 46], уже после открытия суперсимметрии. Но в нашей книге мы не будем следовать исторической последовательности событий. Мы начнём с того, что обсудим несуперсимметричные динамические грассмановы системы, а суперсимметрия будет введена в следующей главе.

В качестве простейшего примера рассмотрим классический лагранжиан

$$L = -i\dot{\psi}\bar{\psi} + \omega\bar{\psi}\psi, \quad (4.51)$$

где ψ и $\bar{\psi}$ — комплексно сопряжённые антикоммутирующие переменные,

$$(\psi)^2 = (\bar{\psi})^2 = 0, \quad \psi\bar{\psi} + \bar{\psi}\psi = 0, \quad (4.52)$$

а ω — вещественная константа. Этот лагранжиан вещественен в том смысле, что при комплексном сопряжении он переходит в себя с добавкой, представляющей полную временную производную. Вещественность второго члена в лагранжиане (4.51) сразу следует из (4.49), а сопряжение первого члена даст

$$i\psi\dot{\bar{\psi}} = i\frac{d(\psi\bar{\psi})}{dt} - i\dot{\psi}\bar{\psi}.$$

Как мы отмечали, добавка полной производной не меняет уравнений движения. Это верно и для обычных лагранжианов, и для лагранжианов, включающих грассмановы переменные.

Уравнения Лагранжа записываются так же, как и в обычном случае:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = 0. \quad (4.53)$$

Это даст два комплексно сопряжённых уравнения:

$$i\dot{\psi} + \omega\psi = 0, \quad i\dot{\bar{\psi}} - \omega\bar{\psi} = 0. \quad (4.54)$$

Переменные ψ и $\bar{\psi}$ «параметризуют» (что бы это слово в данном случае ни значило) фазовое пространство.

Лагранжиан, записанный в виде (4.51), включает временную производную $\dot{\psi}$, но не производную $\dot{\bar{\psi}}$. Естественно в таком случае назвать ψ грассмановой координатой. Тогда канонический импульс есть $\Pi_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi} = -i\bar{\psi}$. Классический гамильтониан получается из (4.51) преобразованием Лежандра⁸,

$$H = \dot{\psi}\Pi_\psi - L = \omega\psi\bar{\psi}. \quad (4.55)$$

⁸Читатель-физик наверняка обратил внимание на сходство гамильтониана (4.55) и выражения $H = \omega a \bar{a}$ для гамильтониана обыкновенного гармонического осциллятора, выраженного через голоморфные переменные. Это сходство не случайно. Фактически, система, которую мы здесь изучаем, и есть осциллятор, только грассманов.

Гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\dot{\Pi}_\psi \quad (4.56)$$

плюс комплексно сопряжённое. Они совпадают с (4.54).

Скобка Пуассона двух «наблюдаемых» $f(\psi, \bar{\psi})$ и $g(\psi, \bar{\psi})$ определяется как

$$\{f, g\}_P = -i \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \bar{\psi}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\psi} \partial \psi} \right) f(\psi, \bar{\psi}) g(\Psi, \bar{\Psi}) \Big|_{\psi=\Psi, \bar{\psi}=\bar{\Psi}}. \quad (4.57)$$

В частности, мы выводим

$$\begin{aligned} \{\psi, \bar{\psi}\}_P &= \{\bar{\psi}, \psi\}_P = i, \\ \{\psi \bar{\psi}, \psi\}_P &= -\{\psi, \psi \bar{\psi}\}_P = i\psi, \\ \{\psi \bar{\psi}, \bar{\psi}\}_P &= -\{\bar{\psi}, \psi \bar{\psi}\}_P = -i\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Общее выражение для скобки Пуассона в фазовом пространстве, включающем несколько вещественных коммутирующих переменных (q_j, p_j) и несколько комплексных антикоммутирующих переменных $(\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \{f, g\}_P &= \left[\frac{\partial^2}{\partial p_j \partial Q_j} - \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial P_j} - i \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi_\alpha \partial \bar{\psi}_\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\psi}_\alpha \partial \psi_\alpha} \right) \right] \\ & f(p, q; \psi, \bar{\psi}) g(P, Q; \Psi, \bar{\Psi}) \Big|_{p=P, q=Q, \psi=\Psi, \bar{\psi}=\bar{\Psi}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

С таким определением временная эволюция произвольной функции $A(p_j, q_j, \psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$ на фазовом пространстве определяется, как и прежде, уравнением (4.6). Если скобка Пуассона $\{H, A\}_P$ обращается в ноль, $A(p_j, q_j, \psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$ есть интеграл движения.

Мы можем сделать теперь несколько замечаний.

- Скобка Пуассона (4.59) удовлетворяет обобщённому тождеству Якоби, аналогичному тождеству (4.7), но со знаками, зависящими от чётности A, B и C . По-прежнему справедлива теорема 4.2.

- Если по крайней мере одна из функций f, g есть чётный элемент грассмановой алгебры, построенной на генераторах $\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$, выражение (4.59) антисимметрично относительно перестановки $f \leftrightarrow g$. При переходе от классической к квантовой механике, скобка Пуассона [более точно — грассманово обобщение (5.54)

скобки Груневола—Мояля (4.44), но это уточнение релевантно только для достаточно сложных функций f, g] переходит тогда в коммутатор двух соответствующих операторов⁹,

$$\{f, g\}_P \rightarrow i[\hat{f}, \hat{g}]. \quad (4.60)$$

• Если f и g нечётны, выражение (4.59) симметрично относительно перестановки $f \leftrightarrow g$ и переходит при квантовании в антикоммутатор¹⁰:

$$\{f, g\}_P \rightarrow i\{\hat{f}, \hat{g}\}. \quad (4.61)$$

В частности, мы получаем

$$\{\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta\} = 0, \quad \{\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta\} = 0. \quad (4.62)$$

Нетривиальный антикоммутатор $\{\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta\}$ означает, что квантовые операторы, отвечающие классическим грассмановым переменным, удовлетворяют алгебре Клиффорда: «Грассман» становится «Клиффордом» после квантования.

В простой модели (4.51), (4.55) единственный нетривиальный антикоммутатор — это $\{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} = 1$. Естественное представление такой квантовой алгебры есть $\hat{\psi} = \psi$ и $\hat{\psi} = \partial/\partial\psi$. Оператор $\hat{\Pi}_\psi = -i\partial/\partial\psi$ играет роль канонического квантового импульса, сопряжённого координате ψ .

Квантовый гамильтониан, соответствующий классическому гамильтониану (4.55) имеет вид

$$\hat{H} = \omega\psi \frac{\partial}{\partial\psi}. \quad (4.63)$$

Гильбертово пространство, где он действует, элементарно. Оно включает волновые функции $\Psi(\psi)$ вида

$$\Psi(\psi) = b + a\psi. \quad (4.64)$$

Члены высшего порядка в разложении по ψ отсутствуют, ввиду нильпотентности, $\psi^2 = 0$. Гамильтониан (4.63) имеет всего две

⁹Мы положили здесь $\hbar = 1$ и будем в дальнейшем в основном придерживаться этой конвенции.

¹⁰Вот почему грассмановы переменные так интересны физикам. Хорошо известно из старых работ Фирца и Паули [47], что фермионные полевые операторы антикоммутируют.

собственных функции:

$$\begin{aligned}\Psi(\psi) &= 1 \quad \text{с собственным значением } E = 0, \\ \Psi(\psi) &= \psi \quad \text{с собственным значением } E = \omega.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Таким образом, наш грассманов осциллятор намного проще обыкновенного гармонического осциллятора: вместо бесконечной башни эквидистантных уровней его спектр включает всего два состояния.

Гамильтониан (4.63) допускает простое матричное представление. Вместо волновых функций (4.64), зависящих от голоморфной грассмановой переменной ψ , можно рассмотреть двухкомпонентные векторы¹¹

$$\Psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\tag{4.66}$$

Тогда операторы $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^\dagger$ и гамильтониан \hat{H} представляются матрицами,

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+, \quad \hat{\psi}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_-, \quad \hat{H} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \omega \frac{1 + \sigma_3}{2}.\tag{4.67}$$

Матричные гамильтонианы известны физикам. Такой гамильтониан описывает, например, движение электрона в магнитном поле (см. следующую главу), но матричное представление неудобно для описывания систем, включающих много обычных и грассмановых динамических переменных. В более удобном грассмановом описании гильбертово пространство таких систем включает волновые функции

$$\Psi(q_j, \psi_\alpha) = \Psi^{(0)}(q_j) + \Psi_\alpha^{(1)}(q_j)\psi_\alpha + \dots\tag{4.68}$$

Высший член в этом разложении включает произведение всех грассмановых переменных ψ_α . В менее удобном и редко используемом матричном описании волновые функции представляли бы тензорные произведения большого числа спиноров.

¹¹Физики предпочитают называть объекты (4.66) *спинорами*. На это есть определённые причины, но фактически, если мы ограничиваемся рассмотрением квантовой системы (4.63), они не преобразуются при вращениях в каком-либо пространстве и не являются в этом смысле ни векторами, ни спинорами. Это просто столбцы.

Глава 5

Суперсимметрия

§5.1. Основные определения

Определение 5.1. Квантовая система называется суперсимметричной, если её гамильтониан может быть представлен как антикоммутатор двух нильпотентных взаимно сопряжённых операторов, называемых *суперзарядами*:

$$\hat{Q}^2 = (\hat{Q}^\dagger)^2 = 0, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \hat{H}. \quad (5.1)$$

Мы уже писали эту алгебру и обсуждали её во введении [см. уравнение (0.4)]. Мы отметили, в частности, её важное следствие: коммутаторы $[\hat{Q}, \hat{H}]$ и $[\hat{Q}^\dagger, \hat{H}]$ обращаются в ноль, т. е. суперзаряды \hat{Q} , \hat{Q}^\dagger являются интегралами движения.

Представив комплексный суперзаряд \hat{Q} как сумму его действительной и мнимой части,

$$\hat{Q} = \frac{\hat{Q}_1 + i\hat{Q}_2}{2} \quad (5.2)$$

с эрмитовыми $\hat{Q}_{1,2}$, можно переписать алгебру (5.1) в виде

$$\hat{Q}_1^2 = \hat{Q}_2^2 = \hat{H}, \quad \{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\} = 0. \quad (5.3)$$

Другими словами, из гамильтониана можно в этом случае извлечь два разных антикоммутирующих эрмитовых квадратных корня. Заметим, что существование одного квадратного корня есть тривиальное свойство любого гамильтониана, чей спектр ограничен снизу. Более точно, нужно сначала позаботиться о том, чтобы низшее состояние в спектре имело положительную или нулевую энергию, прибавив при необходимости к гамильтониану положительную константу, и извлечь корень после этого. Но наличие двух разных квадратных корней накладывает на спектр нетривиальные ограничения.

Теорема 5.1. *Собственные состояния суперсимметричного гамильтониана имеют неотрицательные энергии. Если существует состояние Ψ_0 с нулевой энергией, оно аннигилируется действием суперзарядов:*

$$\hat{Q}\Psi_0 = \hat{Q}^\dagger\Psi_0 = 0. \quad (5.4)$$

Доказательство. Предположим, что (5.4) не выполняется. Тогда $\hat{Q}_1\Psi_0 \neq 0$ или $\hat{Q}_2\Psi_0 \neq 0$. Пусть $\hat{Q}_1\Psi_0 \neq 0$. Эрмитов оператор \hat{Q}_1 коммутирует с гамильтонианом, и, следовательно, эти два оператора можно одновременно диагонализировать. Тогда Ψ_0 является также собственным состоянием оператора \hat{Q}_1 , или, при наличии вырождений, его можно выбрать таковым, т. е. $\hat{Q}_1\Psi_0 = \lambda\Psi_0$ с ненулевым λ . Но тогда, ввиду $\hat{H} = \hat{Q}_1^2$, мы выводим, что $\hat{H}\Psi_0 = \lambda^2\Psi_0$ и энергия строго положительна¹. \square

Теорема 5.2. *Собственные состояния \hat{H} с ненулевыми энергиями двукратно вырождены.*

Доказательство. Выберем базис в гильбертовом пространстве, элементы которого являются собственными состояниями \hat{H} и одновременно собственными состояниями \hat{Q}_1 . Выберем одно из таких состояний с положительной энергией E . Собственное значение \hat{Q}_1 может в этом случае равняться $\lambda = \pm\sqrt{E}$. Пусть для определённости $\lambda = \sqrt{E}$. Тогда состояние $\Psi' = \hat{Q}_2\Psi/\sqrt{E}$ также является собственным состоянием \hat{Q}_1 с собственным значением $\lambda' = -\sqrt{E}$. В самом деле, принимая во внимание, что \hat{Q}_1 и \hat{Q}_2

¹Здесь можно сделать следующее побочное замечание. Для доказательства было важно, что операторы \hat{Q} и \hat{Q}^\dagger , входящие в алгебру (5.1), эрмитово сопряжены друг другу, так что \hat{Q}_1 и \hat{Q}_2 эрмитовы. Если это условие не выполнено, спектр может включать отрицательные энергии. На первый взгляд кажется, что мы получили таким образом неэрмитовый гамильтониан, который может иметь *любые*, не обязательно вещественные собственные значения. Существует, однако, некоторая особая суперсимметричная система, в алгебре которой фигурируют суперзаряды \hat{Q} и $\hat{Q} \neq \hat{Q}^\dagger$. Соответствующий гамильтониан кажется неэрмитовым, но, как оказывается, он принадлежит к классу так называемых *псевдоэрмитовых* или, лучше сказать, *криптоэрмитовых* гамильтонианов [48]. Он имеет вещественный спектр, включающий как положительные, так и отрицательные энергии. Эта система представляет пример системы с *доброкачественными духами*: её спектр не ограничен снизу и основное состояние отсутствует, но оператор эволюции остаётся унитарным [49].

антикоммутируют, мы выводим

$$\hat{Q}_1 \Psi' = -\frac{\hat{Q}_2 \hat{Q}_1 \Psi}{\sqrt{E}} = -\sqrt{E} \Psi'. \quad (5.5)$$

Состояния Ψ и Ψ' характеризуются разными собственными значениями оператора \hat{Q}_1 (и являются поэтому ортогональными), но имеют одинаковые энергии и ту же норму. Они получаются друг из друга действием \hat{Q}_2 (заметим, что $\hat{Q}_2 \Psi' = \sqrt{E} \Psi$) и представляют в спектре гамильтониана вырожденную пару. Выбрав изначально какое-то другое собственное состояние \hat{Q}_1 , мы получили бы другую подобную вырожденную пару (или, быть может, ту же пару, если изначально было выбрано состояние Ψ'). \square

Рассмотрим состояния $\Psi_{\pm} = \Psi \pm i\Psi'$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \hat{Q} \Psi_- &= \sqrt{E} \Psi_+, & \hat{Q}^\dagger \Psi_- &= 0, \\ \hat{Q} \Psi_+ &= 0, & \hat{Q}^\dagger \Psi_+ &= \sqrt{E} \Psi_-. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Другими словами, все состояния с ненулевой энергией можно разделить на два сектора. Состояния Ψ_- аннигилируются оператором \hat{Q}^\dagger и переходят в Ψ_+ под действием \hat{Q} . Состояния Ψ_+ аннигилируются оператором \hat{Q} и переходят в Ψ_- под действием \hat{Q}^\dagger (рис. 5.1).

$$0 \xleftarrow{\hat{Q}^\dagger} |-\rangle \xleftrightarrow[\hat{Q}]{\hat{Q}^\dagger} |+\rangle \xrightarrow{\hat{Q}} 0$$

Рис. 5.1. Суперсимметричный дублет

В квантовых суперсимметричных теориях поля, представляющих основной физический интерес², двукратное вырождение уровней суперсимметричного гамильтониана — это вырождение между бозонными и фермионными состояниями. Так, суперсимметричная версия электродинамики содержит помимо безмассового фотона безмассовый фермион, называемый «фотино», а также, помимо электронов, которые имеют фермионную природу, скалярные бозонные частицы с той же массой. В нашей

²Или, правильнее сказать, в теориях, которые будут представлять физический интерес, если они будут обнаружены экспериментально.

книге мы не будем касаться этого теоретико-полевого аспекта суперсимметрии, но слова «бозонный» и «фермионный» будут использоваться для маркировки состояний из двух описанных выше секторов.

Помимо состояний, принадлежащих суперсимметричным дублетам, в спектре могут присутствовать состояния с нулевой энергией. Они аннигилируются как \hat{Q} , так и \hat{Q}^\dagger и не спарены. Это низшие состояния спектра. Следуя физической терминологии, мы будем называть такие состояния *вакуумными*. Мы скоро увидим, что имеет смысл приписать часть вакуумных состояний сектору $|-\rangle$, а другую часть — сектору $|+\rangle$, но для этого необходимо конкретизировать наше обсуждение, написать суперсимметричные гамильтонианы для некоторых простых систем, отметить их общие черты и особенности.

Докажем перед этим простую общую теорему, обратную к теореме 5.2.

Теорема 5.3. *Если все собственные состояния гамильтониана с ненулевыми энергиями двукратно вырождены, система суперсимметрична.*

Доказательство. Разделим множество всех таких состояний на два подмножества, содержащее каждое по одному состоянию из вырожденной пары. Операторы \hat{Q} и \hat{Q}^\dagger можно определить через их матричные элементы. Определим ненулевые матричные элементы согласно (5.6). Нетрудно убедиться, что для так определённых суперзарядов выполняется алгебра (5.1). \square

§ 5.2. Суперсимметричный осциллятор

Простейшая обыкновенная квантовая система — это гармонический осциллятор. А простейшая суперсимметричная квантовая система — это суперсимметричный осциллятор³ [50]. Удобно работать в голоморфном представлении, где волновые функции обычного осциллятора зависят от голоморфной переменной

$$\bar{a} = \frac{\omega q - ip}{\sqrt{2\omega}} \quad (5.7)$$

³Фактически, можно суперсимметризовать любую обыкновенную систему; суперсимметрия — это универсальная одежда, которая может покрыть любое тело.

и квантовый гамильтониан имеет вид⁴

$$\hat{H}^{\text{осц}} = \frac{\omega}{2} \left(\bar{a} \frac{\partial}{\partial \bar{a}} + \frac{\partial}{\partial \bar{a}} \bar{a} \right). \quad (5.8)$$

Его нормированные собственные состояния суть

$$\Psi_n(\bar{a}) = \frac{(\bar{a})^n}{\sqrt{n!}}. \quad (5.9)$$

Хорошо известен спектр такого гамильтониана:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega. \quad (5.10)$$

Чтобы записать гамильтониан суперсимметричного осциллятора, следует просто прибавить к гамильтониану (5.8) гамильтониан грассмана осциллятора (4.63), сдвинутый на правильно подобранную константу:

$$\hat{H}^{\text{суп-осц}} = \omega \left(\bar{a} \frac{\partial}{\partial \bar{a}} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right). \quad (5.11)$$

Волновые функции зависят теперь от \bar{a} и грассмановой переменной ψ . Собственные функции и собственные значения суть

$$\begin{aligned} \Psi_n(\bar{a}, \psi) &= \frac{(\bar{a})^n}{\sqrt{n!}}, & E &= \omega n, \\ \tilde{\Psi}_n(\bar{a}, \psi) &= \frac{(\bar{a})^n}{\sqrt{n!}} \psi, & E &= \omega(n+1). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Мы видим две башни состояний. Есть состояния, не включающие грассманов фактор ψ , и есть состояния, его включающие. Для физика естественно назвать состояния первого типа бозонными, а второго — фермионными. Существует основное состояние с нулевой энергией. Оно бозонное⁵. Все возбуждённые состояния, т. е. состояния, лежащие выше вакуумного, разбиваются

⁴Здесь \bar{a} и $\partial/\partial\bar{a}$ представляют операторы рождения и уничтожения \bar{a}^\dagger и \bar{a} .

⁵Возможно также изменить знаки в соответствующих местах и рассмотреть систему с фермионным основным состоянием. В книге [51] мы сделали именно этот выбор, чтобы проиллюстрировать физическую дираковскую картину, где низшее вакуумное состояние включает бесконечное число фермионов, занимающих уровни с отрицательной энергией в дираковском море. Но в этой книге мы предпочли конвенцию, которая лучше проясняет математическую структуру теории.

на вырожденные пары; каждая пара включает одно бозонное и одно фермионное состояние.

Таким образом, гамильтониан (5.11) действительно суперсимметричен. Легко написать явные выражения для суперзарядов:

$$Q = \sqrt{\omega} \psi \frac{\partial}{\partial \bar{a}}, \quad Q^\dagger = \sqrt{\omega} \bar{a} \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (5.13)$$

Суперзаряды (5.13) нильпотентны, и их антикоммутатор даёт гамильтониан (5.11).

§ 5.3. Электроны в магнитном поле

Исторически первый построенный и изученный суперсимметричный гамильтониан описывал движение электрона в магнитном поле. Эта задача была решена Ландау в далёком 1930 году⁶ [52]. Этот параграф написан в несколько другом стиле, чем остальная книга. Он адресован читателю-физику, который знает эту систему с младенчества, но не подозревал того, что эта система суперсимметрична. Читатель-математик может этот параграф опустить [или почти опустить, быстрый взгляд на рис. 5.2 и уравнение (5.25) может оказаться полезен и математику] и перейти сразу к § 5.4.

Общий гамильтониан, описывающий движение электрона во внешнем магнитном поле (*гамильтониан Паули*), имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2}{2m}, \quad (5.14)$$

где e — заряд электрона, c — скорость света, \mathbf{A} — векторный потенциал, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули (3.11). Матрицы Паули удовлетворяют алгебре

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbb{1} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l. \quad (5.15)$$

Принимая во внимание это тождество и определение оператора импульса $\hat{P}_j = -i\hbar \partial / \partial x^j$, мы можем переписать гамильтониан

⁶Конечно, Ландау не говорил в той статье о суперсимметрии — само слово ещё не существовало. Ландау можно сравнить в этой ситуации с героем Мольера, который говорил прозой, не имея понятия о том, что это такое.

(5.14) в форме

$$\hat{H} = \frac{\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.16)$$

Гамильтонианы (5.14) и (5.16) действуют на спинорные волновые функции

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_+(\mathbf{x}) \\ a_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Второй член в (5.16) описывает взаимодействие дираковского магнитного момента электрона с внешним магнитным полем.

А первый член есть квантовый гамильтониан бесспиновой заряженной частицы в магнитном поле. Соответствующий классический гамильтониан есть $(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2/2m$, где \mathbf{P} — канонический импульс, который следует отличать от кинетического импульса, $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} = m \partial H / \partial \mathbf{P}$.

В общем случае гамильтониан (5.14) не суперсимметричен. Предположим, однако, что зафиксировано направление магнитного поля. Направим туда третью ось:

$$\mathbf{B} = [0, 0, B(x, y)]. \quad (5.18)$$

Ландау предполагал, что поле однородно. Но для суперсимметрии это не обязательно, можно допустить зависимость B от x и y . Для магнитного поля вида (5.18) можно выбрать векторный потенциал \mathbf{A} , содержащий только компоненты x и y . В этом случае гамильтониан представим в виде суммы двух членов. Первый член описывает нетривиальное движение в плоскости (x, y) , а второй член описывает свободное движение вдоль поля (действительно, если $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$, сила Лоренца обращается в ноль). Рассмотрим только первую нетривиальную часть. Она совпадает с (5.14), только теперь мы будем предполагать, что векторы $\hat{\mathbf{P}}$, \mathbf{A} и $\boldsymbol{\sigma}$ лежат в плоскости (x, y) .

Рассмотрим операторы

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \frac{1 - \sigma_3}{2} \quad (5.19)$$

⁷Но не от третьей координаты, иначе дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{B}$ была бы отлична от нуля, что запрещено уравнениями Максвелла.

и

$$\hat{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{1 + \sigma_3}{2} \quad (5.20)$$

с двумерными $\hat{\mathbf{P}}$, \mathbf{A} , $\boldsymbol{\sigma}$. Используя тот факт, что $\sigma_{1,2}$ антикоммутирует с σ_3 , легко проверить, что эти суперзаряды удовлетворяют алгебре (5.1).

Задача суперсимметрична для любого поля (5.18). Но для однородного магнитного поля можно решить уравнение Шрёдингера точно. В дальнейших формулах мы сделаем упрощения, избавившись от всех размерных констант \hbar , c , m , $|e|$ (при этом заряд электрона e приобретает значение -1). Мы их писали в начале главы, чтобы прояснить тот факт, что эта задача — не чисто математический конструкт, а вполне реальная физическая задача. Её решение объясняет наблюдаемый физический эффект, *диамагнетизм Ландау*⁸. Но нас в этой книге прежде всего интересуют математические структуры, и наличие констант типа \hbar сделало бы структуру менее ясной.

Двумерный векторный потенциал можно выбрать в виде $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$. Тогда гамильтониан и суперзаряды приобретают вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{By}{2} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{Bx}{2} \right)^2 \right] + \frac{B}{2} \sigma_3, \quad (5.21)$$

$$\hat{Q} = -i \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{B\bar{z}}{2} \right) \sigma_+, \quad \hat{Q}^\dagger = -i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{Bz}{2} \right) \sigma_-, \quad (5.22)$$

где⁹ $z = (x + iy)/\sqrt{2}$, а σ_\pm были определены в (4.67).

В согласии с общими теоремами полное гильбертово пространство (5.17) расщепляется на два подпространства: подпространство $|+\rangle$ с положительной проекцией электронного спина на третью ось и подпространство $|-\rangle$ с отрицательной проекцией. Спектр состояний с положительной энергией двукратно вырожден, и действие суперзарядов следует схеме, изображённой на рис. 5.1.

⁸Электроны, вращающиеся во внешнем магнитном поле \mathbf{B} , индуцируют собственное слабое магнитное поле в направлении, противоположном \mathbf{B} .

⁹Надеемся, что читатель не спутает комплексную координату z с третьей вещественной пространственной координатой, которой мы не дали имени!

Гамильтониан (5.21) сводится в обоих секторах к гамильтониану гармонического осциллятора. Этот спектр эквидистантен, и расстояние между уровнями равно B (мы положили для определённости $B > 0$). Все уровни бесконечнократно вырождены ввиду симметрии по отношению к трансляциям в плоскости (x, y) . (А в реальной физической задаче следует ещё добавить к гамильтониану $\hat{P}_3^2/2m$, не надо об этом *полностью* забывать.)

Единственное различие между двумя секторами состоит в том, что спектр состояний со спином вниз сдвинут вниз на величину B относительно состояний со спином вверх. Этот сдвиг совпадает с расщеплением уровней на рис. 5.2, и в этом *физическая* причина двукратного вырождения всех возбуждённых уровней. [А мы помним: *математическая* причина вырождения, прошедшая мимо внимания Ландау, есть алгебра суперсимметрии (5.1)!]

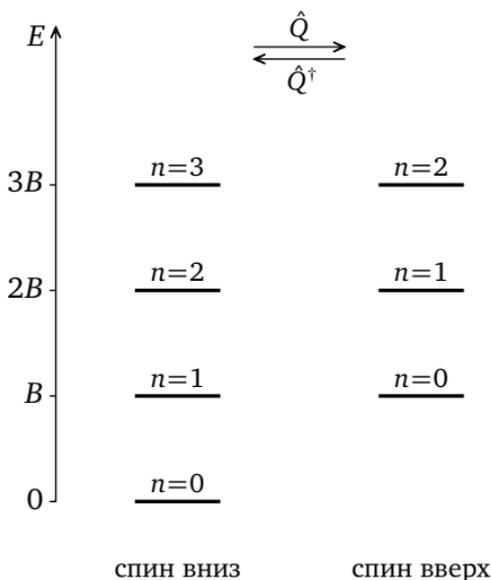


Рис. 5.2. Спектр гамильтониана Ландау ($B > 0$). Квантовое число $n = 0, 1, \dots$ помечает уровни осциллятора

Левая башня на рис. 5.2 включает вакуумные состояния с нулевой энергией. Найти их волновые функции проще, чем для всего спектра. Необходимо только наложить условие $\hat{Q}\Psi = 0$ (условие $\hat{Q}^\dagger\Psi = 0$ выполняется автоматически), что даёт уравнение

первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{B\bar{z}}{2}\right)a_- = 0 \quad (5.23)$$

с решениями

$$a_-(z, \bar{z}) = \exp\left\{-\frac{B\bar{z}(z+c)}{2}\right\}. \quad (5.24)$$

Различные комплексные c отвечают в классическом пределе различным положениям центра круговой электронной орбиты в плоскости (x, y) .

Если B отрицательно, картина противоположна. Имеется бесконечно много состояний с нулевой энергией со спином вверх, а в секторе со спином вниз такие состояния отсутствуют.

Если магнитное поле (5.18) не однородно, но зависит от x , у нетривиальным образом, задача по-прежнему суперсимметрична, и даже если её нельзя решить аналитически, общая картина спектра та же, что и в случае однородного поля: некоторое число вакуумных состояний с нулевой энергией, инвариантных относительно действия суперзарядов, и набор двукратно вырожденных суперсимметричных дублетов.

В главе 6 мы докажем следующую теорему.

Теорема 5.4. Число нормированных состояний с нулевой энергией (нулевых мод) в обобщённой задаче Ландау с неоднородным магнитным полем пропорционально магнитному потоку:

$$n_{E=0} = \frac{|\Phi|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \int B(x, y) dx dy \right|. \quad (5.25)$$

Поток Φ должен быть целым кратным 2π — иначе, как мы это увидим в тринадцатой главе (п. 13.2.1), суперсимметрия теряется.

Для однородного поля поток бесконечен и число нулевых мод тоже бесконечно. А если поток конечен, то конечно и число нулевых мод. Спин вакуумных состояний обращён вниз, если поток положителен, и вверх, если поток отрицателен.

«А что если поток равен нулю?» — может спросить читатель. Что же, в этом случае суперсимметричные вакуумы, аннигилируемые обоими суперзарядами, в спектре отсутствуют и все состояния спарены в вырожденные дублеты. Отсутствие суперсиммет-

ричных вакуумов означает, что суперсимметрия спонтанно нарушена — вакуумные состояния, низшие состояния спектра, не инвариантны под действием преобразований суперсимметрии¹⁰. Мы будем также обсуждать феномен спонтанного нарушения суперсимметрии в следующем параграфе и затем более детально в следующей главе.

Когда мы говорили о грасмановом осцилляторе в главе 4, мы отмечали, что его динамику можно также описать на матричном языке. Очевидно, что то же относится к суперсимметричному осциллятору предыдущего параграфа. Словарь перевода с одного языка на другой был дан в уравнении (4.67). Перевод можно делать в обоих направлениях, и мы легко можем написать квантовые суперзаряды задачи Ландау в грасмановой форме, сделав в (5.22) замену $\sigma_+ \rightarrow \psi$ и $\sigma_- \rightarrow \hat{\psi} = \partial/\partial\psi$. Мы получим выражения

$$\hat{Q} = -i \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{B\bar{z}}{2} \right) \psi, \quad \hat{Q}^\dagger = -i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{Bz}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (5.26)$$

а гамильтониан даётся выражением (5.21), где сделана замена

$$\sigma_3 = [\sigma_+, \sigma_-] \rightarrow \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial \psi} \psi.$$

Волновые функции зависят от z , \bar{z} и грасмановой переменной ψ . Есть бозонные состояния вида $\Psi(z, \bar{z}; \psi) = a_-(z, \bar{z})$ (они раньше назывались состояниями со спином вниз) и фермионные состояния вида $\Psi(z, \bar{z}; \psi) = \psi a_+(z, \bar{z})$ (в анамнезе — состояния со спином вверх).

§ 5.4. Модель Виттена

Когда Энрико Ферми сталкивался с нетривиальной физической проблемой, он спрашивал себя самого, своих учеников и коллег: «Что является атомом водорода в данном случае?» В смысле: как выглядит простейшая модель, сохраняющая все существенные черты сложного физического явления, которое он хотел понять.

¹⁰Читателя может здесь охватить справедливое недоумение, поскольку мы написали суперзаряды, но не объяснили пока, генераторами каких преобразований они являются. Мы это сделаем ближе к концу главы.

Суперсимметричный осциллятор, разобранный в § 5.2, прост, но, возможно, слишком прост. Задача Ландау, обсуждавшаяся в предыдущем параграфе, достаточно проста и в то же время достаточно сложна, чтобы послужить атомом водорода для суперсимметричных систем общего вида, но на эту роль имеется ещё лучший кандидат — суперсимметричная квантово-механическая модель, предложенная Виттенем [53]. Волновые функции в этой модели зависят от всего одной обыкновенной вещественной переменной x и голоморфной грассмановой переменной ψ . Суперзаряды и гамильтониан имеют вид

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi [\hat{P} - iW'(x)], \quad \hat{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\psi} [\hat{P} + iW'(x)], \quad (5.27)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2 + [W'(x)]^2}{2} + \frac{1}{2} W''(x) (\psi \hat{\psi} - \hat{\psi} \psi), \quad (5.28)$$

где $W(x)$ — произвольная вещественная функция, называемая *суперпотенциалом*, а \hat{P} и $-i\hat{\psi}$ — обыкновенный и грассманов операторы импульса: $\hat{P} = -i\partial/\partial x$ и $\hat{\psi} = \partial/\partial \psi$. Выполняется алгебра (5.1). В матричной формулировке гамильтониан (5.28) описывает одномерное движение частицы со спином $1/2$ во внешнем потенциале $V = \frac{1}{2} [W'(x)]^2$ и магнитном поле $W''(x)$.

В частном случае $W(x) = \omega x^2/2$ гамильтониан приобретает вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2 + \omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega}{2} (\psi \hat{\psi} - \hat{\psi} \psi). \quad (5.29)$$

Он совпадает с гамильтонианом суперсимметричного осциллятора (5.11), обсуждавшимся раньше, но теперь этот гамильтониан выражен в более привычном представлении: он действует на волновые функции $\Psi(x, \psi)$, а не на $\Psi(\bar{a}, \psi)$, как гамильтониан (5.11). Для общего суперпотенциала $W(x)$ полную спектральную задачу аналитически решить нельзя, но всегда можно найти явное выражение для волновой функции состояния с нулевой энергией, если такое состояние существует. Как и в двух предыдущих разобранных примерах, гильбертово пространство разделено на два сектора: фермионные состояния, волновая функция которых включает фактор ψ , и бозонные состояния, где такой фактор отсутствует.

Теорема 5.5. *Нормируемое бозонное решение уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (5.28), которое имеет нулевую энергию, существует тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) = \infty. \quad (5.30)$$

Нормируемое фермионное решение уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (5.28), которое имеет нулевую энергию, существует тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) = -\infty. \quad (5.31)$$

Доказательство. Все бозонные состояния аннигилируются, очевидно, оператором \hat{Q}^\dagger , а все фермионные состояния аннигилируются оператором \hat{Q} . Состояние с нулевой энергией в бозонном секторе должно также аннигилироваться оператором \hat{Q} . Это приводит к уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + W'(x) \right] \Psi_0^B(x) = 0 \quad (5.32)$$

с формальным решением

$$\Psi_0^B(x) = \exp\{-W(x)\}. \quad (5.33)$$

Условие (5.30) есть условие его нормируемости.

Аналогично фермионная нулевая мода $\Psi_0^F(\psi, x) = \psi \Psi_0^F(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - W'(x) \right] \Psi_0^F(x) = 0 \quad (5.34)$$

с формальным решением

$$\Psi_0^F(x) = \exp\{W(x)\}. \quad (5.35)$$

Оно нормируемо при условии выполнения (5.31). \square

Если $W(\infty) = \pm\infty$, но $W(-\infty) = \mp\infty$, состояния с нулевой энергией отсутствуют¹¹. Простейший пример — это система с супер-

¹¹Особый случай представляют системы, где $W(\infty)$ или $W(-\infty)$ есть константа. В этом случае гамильтониан имеет непрерывный спектр и спектральная задача нуждается в регуляризации (см. обсуждение в конце § 4.2). Нормируемые нулевые моды могут появиться как результат такой регуляризации.

потенциалом $W(x) = \lambda x^3$. Низшие состояния гамильтониана имеют в этом случае ненулевую энергию. Они образуют суперсимметричный дублет, как на рис. 5.1. Это то же явление спонтанного нарушения суперсимметрии, с которым мы встретились в предыдущем параграфе, изучая двумерное движение в магнитном поле с нулевым потоком.

§ 5.5. Расширенная суперсимметрия

Алгебра систем, изучавшихся в трёх предыдущих параграфах, включала два различных антикоммутирующих эрмитовых суперзаряда. Следуя принятой в нынешней литературе конвенции, мы будем называть такие системы $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными квантово-механическими (СКМ) системами. Эта терминология не очень удачна. Как мы отмечали выше, из эрмитова гамильтониана всегда можно извлечь один эрмитовый квадратный корень, и алгебра (5.1) — минимальная нетривиальная алгебра суперсимметрии. То есть лучше было бы считать не вещественные, а комплексные суперзаряды и назвать алгебру (5.1) $\mathcal{N} = 1$, а не $\mathcal{N} = 2$. Но принятая конвенция есть принятая конвенция, и мы тоже примем её, так же как мы раньше приняли термин НКТ, «гиперкэлеровы с кручением», для многообразий, которые не только не гиперкэлеровы, но даже не кэлеровы.

Важно, что симметрия системы может быть выше, чем (5.1), суперсимметричная система может включать несколько пар суперзарядов. Соответствующая алгебра есть¹²

$$\begin{aligned} \{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} &= \{\hat{Q}^i, \hat{Q}^j\} = 0, \\ \{\hat{Q}_i, \hat{Q}^j\} &= \delta_i^j \hat{H}, \quad i, j = 1, \dots, \mathcal{N}/2, \end{aligned} \tag{5.36}$$

где $\hat{Q}^i \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{Q}_i)^\dagger$.

Индексы i, j , различающие комплексные суперзаряды и связанные с ними грассмановы переменные, будут записываться

¹²Известны также системы СКМ с более сложными расширенными алгебрами [54], но они не играют большой роли в геометрических приложениях, и мы не будем их обсуждать в этой книге.

на двух уровнях, чтобы подчеркнуть тот факт, что \hat{Q}_i и \hat{Q}^i принадлежат к разным — фундаментальному и антифундаментальному — представлениям группы $U(\mathcal{N}/2)$, той подгруппы полной группы $SO(\mathcal{N})$ автоморфизмов алгебры (5.36), которая вращает комплексные суперзаряды и голоморфные грасмановы переменные. Во всех расширенных моделях, рассмотренных в этой книге, симметрия $U(\mathcal{N}/2)$ (она называется *R-симметрией*) будет играть важную роль. Во многих (хотя и не во всех случаях) это также симметрия гамильтониана.

\mathcal{N} всегда чётно. Минимальное расширение есть $\mathcal{N} = 4$. В этом случае группа *R-симметрии* есть $U(2)$, где фундаментальное и антифундаментальное представления совпадают. Тогда индексы поднимаются и опускаются инвариантными тензорами $SU(2)$, $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon_{ij}$:

$$X^i = \varepsilon^{ij} X_j \quad \text{и} \quad X_i = \varepsilon_{ij} X^j \quad (5.37)$$

с конвенцией $\varepsilon_{12} = 1$.

Дадим простейший пример $\mathcal{N} = 4$ СКМ системы. Её гамильтониан описывает движение на комплексной плоскости, но, в отличие от задачи Ландау, включает две комплексных грасмановых переменных $\psi_{1,2}$ и два соответствующих комплексных грасмановых импульса, $\Pi_{1,2} = -i\partial/\partial\psi_{1,2} \equiv -i\hat{\psi}^{1,2}$.

Суперзаряды имеют вид¹³

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= \psi_1 \hat{\pi} + i(\bar{z})^2 \hat{\psi}^2, & \hat{Q}_2 &= \psi_2 \hat{\pi} - i(\bar{z})^2 \hat{\psi}^1, \\ \hat{Q}^1 &= \hat{\psi}^1 \hat{\pi}^\dagger - i(z)^2 \psi_2, & \hat{Q}^2 &= \hat{\psi}^2 \hat{\pi}^\dagger + i(z)^2 \psi_1, \end{aligned} \quad (5.38)$$

где $\hat{\pi} = -i\partial/\partial z$, $\hat{\pi}^\dagger = -i\partial/\partial \bar{z}$. Гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} + (z\bar{z})^2 - 2z\psi_1\psi_2 - 2\bar{z}\hat{\psi}^2\hat{\psi}^1 \quad (5.39)$$

не квадратичен и включает нетривиальные взаимодействия.

Мы в дальнейшем разберём много других примеров. Для геометрических приложений существенны системы СКМ с симметриями $\mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = 4$ и $\mathcal{N} = 8$. Но изучались также системы $\mathcal{N} = 6$ и более сложные, вплоть до $\mathcal{N} = 32$.

¹³Не спутайте эти комплексные суперзаряды $\mathcal{N} = 4$ с $Q_{1,2}$, определёнными в (5.2) — действительной и мнимой частями комплексного суперзаряда $\mathcal{N} = 2$.

§ 5.6. Классическая суперсимметрия

В начале этой главы мы дали определение *квантовой* суперсимметричной системы. Затем мы рассмотрели несколько примеров квантовых суперсимметричных гамильтонианов, но не задалась до сих пор вопросом — каков их *классический* аналог?

Мы видели, что грассмановы переменные удобны для изучения квантовых суперсимметричных систем, особенно сложных систем. Но этот язык не является строго необходимым. Можно при желании переписать квантовые гамильтонианы в матричной форме. Однако без грассмановых переменных никак нельзя обойтись, если мы хотим записать выражения для классического гамильтониана и классического лагранжиана. Классическая грассманова динамика была разобрана в § 4.4, надо просто применить эту технику к суперсимметричному случаю. Во всех рассмотренных примерах суперсимметричные классические гамильтонианы находятся весьма просто.

Сделаем это вначале для суперсимметричного осциллятора. Возьмём квантовый гамильтониан (5.11) и заменим $\partial/\partial\bar{a} \rightarrow i\Pi_{\bar{a}} \equiv \equiv a$ и $\partial/\partial\psi \rightarrow i\Pi_{\psi} \equiv \bar{\psi}$. Мы получим

$$H^{\text{суп-осц}} = \omega(\bar{a}a + \psi\bar{\psi}). \quad (5.40)$$

Отсюда выводим гамильтоновы уравнения движения: уравнения

$$\dot{a} = -i \frac{\partial H}{\partial \bar{a}} = -i\omega a, \quad \dot{\psi} = -i \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}} = i\omega\psi \quad (5.41)$$

и комплексно-сопряжённые.

Классические суперзаряды выводятся аналогичным образом из (5.13):

$$Q = \sqrt{\omega} a\psi, \quad \bar{Q} = \sqrt{\omega} \bar{a}\bar{\psi}. \quad (5.42)$$

Квантовая алгебра суперсимметрии (5.1) переходит в

$$\{Q, Q\}_P = \{\bar{Q}, \bar{Q}\}_P = 0, \quad \{\bar{Q}, Q\}_P = i\hbar \quad (5.43)$$

или иначе¹⁴

$$\{Q_1, Q_1\}_P = \{Q_2, Q_2\}_P = i\hbar, \quad \{Q_1, Q_2\}_P = 0, \quad (5.44)$$

¹⁴Можно здесь заметить, что если в обычном фазовом пространстве соотношение $\{A, A\}_P = 0$ справедливо для любой наблюдаемой $A(p_j, q_j)$, это не так, если фазовое пространство включает также грассмановы переменные.

где $\{A, B\}_P$ — скобка Пуассона, определённая в (4.59). Из тождеств Якоби следует, что скобки Пуассона $\{Q, H\}_P$ и $\{\bar{Q}, H\}_P$ обращаются в ноль, то есть Q и \bar{Q} — классические интегралы движения.

Классический лагранжиан получается из H преобразованием Лежандра:

$$L = \dot{\bar{a}}\Pi_{\bar{a}} + \dot{\psi}\Pi_{\psi} - H. \quad (5.45)$$

(Такой конкретный порядок грассмановых факторов согласован с определением $\Pi_{\psi} = \partial L / \partial \dot{\psi}$.) С точностью до полной временной производной¹⁵ мы получаем

$$L = i(\dot{\bar{a}}\bar{a} - \dot{\psi}\bar{\psi}) - \omega(\bar{a}a + \psi\bar{\psi}). \quad (5.46)$$

В силу теоремы Нётер, существование классических интегралов движения влечёт инвариантность лагранжиана относительно некоторых преобразований. В нашем случае это *суперпреобразования*. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \delta a &= i\epsilon\bar{\psi}, & \delta \bar{a} &= i\bar{\epsilon}\psi, \\ \delta \psi &= -i\bar{a}\epsilon, & \delta \bar{\psi} &= ia\bar{\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

где ϵ — грассманов параметр преобразования.

Для модели Виттена классические выражения для гамильтониана и суперзарядов также нетрудно написать. Они просто совпадают с (5.27) и (5.28), где вместо дифференциальных операторов \hat{P} и $\hat{\psi}$ следует писать импульсные переменные фазового пространства P и $\bar{\psi}$. Соответствующий классический лагранжиан есть

$$L = \frac{\dot{x}^2 - [W'(x)]^2}{2} - i\dot{\psi}\bar{\psi} - W''(x)\psi\bar{\psi}. \quad (5.48)$$

Он инвариантен с точностью до полной производной относительно следующих суперпреобразований:

$$\begin{aligned} \delta x &= \epsilon\psi + \bar{\psi}\bar{\epsilon}, \\ \delta \psi &= \bar{\epsilon}[-i\dot{x} + W'(x)], \\ \delta \bar{\psi} &= \epsilon[i\dot{x} + W'(x)]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

¹⁵Мы отмечали ранее (см. с. 107), что лагранжианы, различающиеся на полную производную, эквивалентны: из них следуют одни и те же уравнения движения.

Для задачи Ландау классические суперзаряды получаются из квантовых выражений (5.26) заменой дифференциальных операторов $-i\partial/\partial z$, $-i\partial/\partial \bar{z}$ и $-i\partial/\partial \psi$ на классические импульсы π , $\bar{\pi}$ и $\Pi_\psi = -i\bar{\psi}$. Это даст

$$Q = \left(\pi - \frac{iB\bar{z}}{2} \right) \psi, \quad \bar{Q} = \left(\bar{\pi} + \frac{iBz}{2} \right) \bar{\psi}. \quad (5.50)$$

Скобка Пуассона $-i\{\bar{Q}, Q\}_P$ даст классический гамильтониан

$$H = \left(\pi - \frac{iB\bar{z}}{2} \right) \left(\bar{\pi} + \frac{iBz}{2} \right) + B\psi\bar{\psi}. \quad (5.51)$$

Соответствующий классический лагранжиан есть

$$L = \dot{z}\dot{\bar{z}} + \frac{iB}{2}(\dot{z}\bar{z} - z\dot{\bar{z}}) - i\dot{\psi}\bar{\psi} - B\psi\bar{\psi}. \quad (5.52)$$

Он инвариантен с точностью до полной производной относительно суперпреобразований

$$\begin{aligned} \delta z &= \epsilon \psi, & \delta \psi &= -i\bar{\epsilon}\dot{z}, \\ \delta \bar{z} &= -\bar{\epsilon}\bar{\psi}, & \delta \bar{\psi} &= i\epsilon\dot{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

В рассмотренных до сих пор примерах в выражениях для квантовых суперзарядов не было неоднозначностей, связанных с упорядочением координат и операторных импульсов, и легко писались естественные выражения для суперзарядов классических. Но в системах, где неоднозначности упорядочения присутствуют, становятся нетривиальными следующие вопросы:

1. Какие конкретные выражения для классических суперзарядов соответствуют заданным квантовым?
2. Всегда ли возможно записать их так, что квантовая алгебра суперсимметрии сохранится на классическом уровне со скобками Пуассона в роли коммутаторов?

Нетривиальны также ответы на эти вопросы. Правильный ответ на второй вопрос: «Не всегда!» Первый пример системы, где квантовая алгебра суперсимметрии не сохраняется на классическом уровне, был построен в работе [55]. В работе [56] был предложен более простой пример. Он описывает движение частицы

со спином во внешнем калибровочном поле, заданным в евклидовом пространстве чётной размерности D . В этой системе оператор Дирака \mathcal{D} и также оператор $\mathcal{D}\gamma^{D+1}$ [где γ^{D+1} даётся выражением (13.9) и есть многомерный аналог известной физикам матрицы γ^5] играют роль квантовых суперзарядов. У оператора \mathcal{D} есть классический аналог, но у оператора $\mathcal{D}\gamma^{D+1}$ такого аналога нет.

В квантовой теории поля специалистам хорошо знакомы квантовые *аномалии*, когда классическую симметрию нельзя поддержать на квантовом уровне (киральная аномалия, конформная аномалия и т. д.). А здесь мы имеем дело с противоположной ситуацией, когда суперсимметрию можно реализовать на квантовом, но не на классическом уровне. Более детальное обсуждение читатель найдёт в главе 13.

Первый вопрос из вышеприведённого списка изучался в работе [43]. В ней мы анализировали различные суперсимметричные системы, где суперзаряды и гамильтонианы включают произведения координат и соответствующих им канонических импульсов и существует проблема упорядочения. Основываясь на наблюдениях, сделанных во многих таких системах, мы сформулировали следующую **гипотезу**:

1. Рассмотрим систему, где действует обыкновенная или расширенная классическая алгебра суперсимметрии. По выражениям для классических суперзарядов построим соответствующие квантовые операторы, используя *вейлеву* процедуру упорядочения (4.42). Тогда эти операторы удовлетворяют квантовой алгебре суперсимметрии¹⁶.
2. Обратное: *если* квантовую алгебру суперсимметрии можно сохранить на классическом уровне, это достигается выбором классических суперзарядов в виде вейлевских символов квантовых суперзарядов.

¹⁶Наблюдение, что классическая алгебра суперсимметрии сохраняется на квантовом уровне при определённой процедуре упорядочения, было также сделано в работе [57]. Но универсального рецепта — *возьмите классические суперзаряды и упорядочьте их по Вейлю согласно (4.42)* — там сформулировано не было.

NB. Заметьте, что упорядочивать по Вейлю надо именно суперзаряды, но не гамильтониан. Как мы увидим в последующих главах, в сложных случаях квантовый гамильтониан — антикоммутирует квантовых суперзарядов — не получается из классического вейлевским упорядочением.

Описанная процедура выглядит довольно естественно. Мы установили в главе 4 [см. уравнение (4.44)], что вейлевский символ коммутатора двух обыкновенных операторов совпадает со скобкой Груневолда—Мояля их вейлевских символов. Этот результат можно обобщить на случай, когда фазовое пространство включает грассманы переменные: вейлевский символ коммутатора двух операторов или их антикоммутиатора, если оба оператора грассманово нечётны, совпадает со скобкой Груневолда—Мояля их вейлевских символов, определённой как

$$\{A, B\}_{GM} = 2 \sin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial Q_i} - \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial q_i} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi_\alpha \partial \bar{\psi}_\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\psi}_\alpha \partial \psi_\alpha} \right) \right] A(p, q; \psi, \bar{\psi}) B(P, Q; \Psi, \bar{\Psi}) \Big|_{\substack{p=P, q=Q; \\ \psi=\Psi, \bar{\psi}=\bar{\Psi}}} \quad (5.54)$$

(принято $\hbar = 1$).

Это означает, что квантовую алгебру можно *всегда* сохранить на классическом уровне, если в качестве бинарной операции выбрана скобка ГМ. Интуиции не противоречит предположение, что алгебра скобок ГМ в большинстве случаев соответствует такой же алгебре для скобок Пуассона. А если это правило буравчика не срабатывает, не помогает ничего.

Но, разумеется, было бы желательно получить строгое доказательство (или опровержение) этой гипотезы.

Глава 6

Интегралы по траекториям и индекс Виттена

В этой главе мы дадим читателю сведения, необходимые для понимания второй части главы 8 и главы 14, где мы докажем с помощью суперсимметрии знаменитую *теорему Атьи—Зингера* об индексе эллиптических операторов. Она была впервые была доказана Атьёй и Зингером традиционными математическими методами [58], но физический способ доказательства, основанный на анализе спектра некоторых систем СКМ, представляется нам проще и красивее [59].

Подчеркнём, что почти все конкретные квантовые системы, которые мы будем обсуждать в этой главе, имеют *дискретный* спектр. Иначе понятие индекса плохо определено.

§6.1. Интегралы по траекториям в квантовой механике

Классическая механика имеет два эквивалентных способа описания — лагранжев и гамильтонов формализмы. То же относится к квантовой механике. Исторически она была вначале сформулирована на гамильтоновом языке (см. § 4.2). Квантовый аналог лагранжевого формализма — это формализм интегралов по траекториям (которые называются также *континуальными* или *функциональными* интегралами), развитый Фейнманом. Мы опишем здесь основы этого подхода, отсылая читателя за деталями к книге [60].

Рассмотрим временное уравнение Шрёдингера (4.37). Положим $\hbar = 1$, концентрируясь на его математической структуре. Чтобы максимально упростить задачу, предположим вначале наличие всего одной вещественной динамической переменной $q \in (-\infty, \infty)$ с естественной мерой $d\mu = dq$ на этом конфигурационном пространстве. Но результаты, которые мы получим, легко обобщаются на системы с несколькими степенями свободы (и даже на теории поля, где число степеней свободы бесконечно) и на более сложную меру.

Чтобы решить уравнение, надо зафиксировать начальные условия — значения $\Psi(q, t_{\text{in}})$ в некоторый момент времени t_{in} . Тогда формальное решение уравнения (4.37) имеет вид

$$\Psi(q, t) = \hat{U}(t - t_{\text{in}})\Psi(q, t_{\text{in}}), \quad (6.1)$$

где

$$\hat{U}(t - t_{\text{in}}) = \exp \{-i(t - t_{\text{in}})\hat{H}\} \quad (6.2)$$

есть оператор эволюции. Рассмотрим теперь ядро оператора эволюции, т. е. матричный элемент

$$\mathcal{K}(q_f, q_{\text{in}}; t_f - t_{\text{in}}) = \langle q_f | \hat{U}(t_f - t_{\text{in}}) | q_{\text{in}} \rangle \equiv \langle q_f, t_f | q_{\text{in}}, t_{\text{in}} \rangle \quad (6.3)$$

($t_f - t_{\text{in}} \equiv \Delta t > 0$). Он описывает амплитуду вероятности того, что система в момент времени $t = t_f$ будет находиться в точке q_f при условии, что в момент времени $t = t_{\text{in}}$ она находилась в точке $q = q_{\text{in}}$. Решение (6.1) можно выразить в терминах (6.3):

$$\Psi(q_f, t_f) = \int dq_{\text{in}} \mathcal{K}(q_f, q_{\text{in}}; t_f - t_{\text{in}}) \Psi(q_{\text{in}}, t_{\text{in}}). \quad (6.4)$$

Объект \mathcal{K} играет во всём подходе фундаментальную роль.

Теорема 6.1. Ядро \mathcal{K} представимо как сумма (спектральное разложение)

$$\mathcal{K}(q_f, q_{\text{in}}; \Delta t) = \sum_k \Psi_k(q_f) \overline{\Psi_k(q_{\text{in}})} e^{-iE_k \Delta t}, \quad (6.5)$$

где $\Psi_k(q)$ — собственные состояния \hat{H} с собственными значениями E_k .

Доказательство. Это следует из (6.4), из ортонормируемости,

$$\langle r | l \rangle = \int \bar{\Psi}_k(q) \Psi_l(q) dq = \delta_{kl}, \quad (6.6)$$

и из того факта, что временная эволюция собственной функции $\Psi_k(q, t)$ сводится к умножению на фазовый фактор $e^{-iE_k \Delta t}$. \square

Читатель, безусловно, распознал в выражении (6.5) фундаментальное решение параболического уравнения (4.37). В самом деле,

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \Delta t} - \hat{H}\right) \mathcal{K}(q_f, q_{\text{in}}; \Delta t) = 0, \quad (6.7)$$

где оператор \hat{H} действует на первый аргумент в \mathcal{K} . А в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ ядро приобретает вид

$$\mathcal{K}(q_f, q_{in}; 0) = \sum_k \Psi_k(q_f) \overline{\Psi_k(q_{in})} = \delta(q_f - q_{in}). \quad (6.8)$$

Для простых систем ядро можно найти явно. Для свободной частицы единичной массы, движущейся по прямой, оно имеет вид

$$\mathcal{K}(q_f, q_{in}; \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \Delta t}} \exp\left\{\frac{i(q_f - q_{in})^2}{2\Delta t}\right\}. \quad (6.9)$$

Точное аналитическое выражение для ядра можно также найти для гамильтониана гармонического осциллятора [60]. Но как решать задачу в общем случае?

Заметим вначале, что матричный элемент (6.3) удовлетворяет свойству полноты,

$$\langle q_f, t_f | q_{in}, t_{in} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_* \langle q_f, t_f | q_*, t_* \rangle \langle q_*, t_* | q_{in}, t_{in} \rangle, \quad (6.10)$$

где t_* — произвольный момент времени между t_{in} и t_f . Соотношение (6.10) имеет прозрачный физический смысл: амплитуда вероятности перехода частицы из точки q_{in} в начальный момент t_{in} в точку q_f в конечный момент t_f даётся сверткой амплитуд перехода из q_{in} при t_{in} в некоторую промежуточную точку q_* в момент t_* и из точки q_* в конечную точку¹.

Разобьём теперь интервал Δt на большое число n равных маленьких временных интервалов и запишем:

$$\langle q_f, t_f | q_{in}, t_{in} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \langle q_f, t_f | q_{n-1}, t_f - \epsilon \rangle \dots \langle q_1, t_{in} + \epsilon | q_{in}, t_{in} \rangle, \quad (6.11)$$

где $\epsilon = \Delta t/n$.

Подынтегральное выражение (6.11) содержит произведение большого числа факторов. Каждый такой фактор можно вычис-

¹Читатель-физик может вспомнить принцип Гюйгенса—Френеля в оптике, который утверждает фактически то же самое, но для амплитуды электромагнитной волны. Аналогия между квантовой механикой и оптикой весьма глубока, хотя она, конечно, за пределами круга вопросов, обсуждаемых в этой книге.

лить с использованием (6.2) и (6.3). Например,

$$\langle q_1, t_{\text{in}} + \epsilon | q_{\text{in}}, t_{\text{in}} \rangle = \langle q_1 | \exp\{-i\epsilon \hat{H}\} | q_{\text{in}} \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \langle q_1 | p \rangle \langle p | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q_{\text{in}} \rangle. \quad (6.12)$$

Мы снова использовали свойство полноты, вставив промежуточные состояния $|p\rangle$, являющиеся собственными функциями оператора импульса $\hat{p} = -i\partial/\partial q$. Это плоские волны:

$$\langle q_1 | p \rangle = \Psi_p(q_1) = e^{ipq_1}, \quad \langle p | q_{\text{in}} \rangle = \overline{\Psi_p(q_{\text{in}})} = e^{-ipq_{\text{in}}}. \quad (6.13)$$

Фактор $1/2\pi$ в мере даёт правильную нормировку:

$$\langle q_1 | q_{\text{in}} \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_1 - q_{\text{in}})} = \delta(q_1 - q_{\text{in}}).$$

Предположим, что гамильтониан имеет простой вид,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(q). \quad (6.14)$$

Если ϵ мало, мы можем написать

$$\langle p | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q_{\text{in}} \rangle \approx e^{-i\epsilon H(p, q_{\text{in}})} \langle p | q_{\text{in}} \rangle = e^{-ipq_{\text{in}} - i\epsilon H(p, q_{\text{in}})}, \quad (6.15)$$

где $H(p, q)$ — классический гамильтониан. Подставляя это в уравнение (6.12), находим

$$\langle q_1, t_{\text{in}} + \epsilon | q_{\text{in}}, t_{\text{in}} \rangle \approx \int \frac{dp}{2\pi} \exp\{ip(q_1 - q_{\text{in}}) - iH(p, q_{\text{in}})\epsilon\}. \quad (6.16)$$

Для гамильтониана общего вида, содержащего члены, где координаты умножаются на импульсы, ситуация сложнее. Как обсуждалось раньше, имеет значение порядок, в котором \hat{p} и q входят в \hat{H} . Эта неоднозначность операторного упорядочения отвечает неоднозначности в определении континуального интеграла. В общем случае имеет значение, пишем ли мы $H(p, q_{\text{in}})$, $H(p, q_1)$ или, быть может, $H\left(p, \frac{q_1 + q_{\text{in}}}{2}\right)$ в подынтегральном выражении в уравнении (6.16). Например, если $H(p, q) = p^2 q^2$, то соотношение (6.15) справедливо для $\hat{H} = \hat{p}^2 q^2$, но не для $\hat{H} = q^2 \hat{p}^2$. Мы отсылаем читателя к обзору [61], где этот вопрос подробно обсуждается. В дальнейшем мы увидим, однако, что эта неоднозначность несущу-

щественна для главного интересующего нас в этой главе результата — интегрального представления для индекса Виттена.

Подставив в (6.11) выражения (6.16) для каждого входящего туда множителя и устремив n к бесконечности, мы получим следующее выражение для ядра оператора эволюции на конечном временном интервале:

$$\mathcal{K}(q_f, q_{in}; t_f - t_{in}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \exp\{ip_n(q_f - q_{n-1}) + \dots + ip_1(q_1 - q_{in}) - i\epsilon[H(p_n, q_{n-1}) + \dots + H(p_1, q_{in})]\} \frac{dp_n}{2\pi} \frac{dp_{n-1}dq_{n-1}}{2\pi} \dots \frac{dp_1dq_1}{2\pi}. \quad (6.17)$$

Заменив $\epsilon = (t_f - t_i)/n \rightarrow dt$, перепишем это в виде

$$\mathcal{K}(q_f, q_{in}; t_f - t_{in}) = \int \exp\left\{i \int_{t_{in}}^{t_f} [p\dot{q} - H(p, q)]dt\right\} \prod_t \frac{dp(t)dq(t)}{2\pi}, \quad (6.18)$$

где бесконечномерный континуальный интеграл берётся с граничными условиями на $q(t)$,

$$q(t_{in}) = q_{in}, \quad q(t_f) = q_f, \quad (6.19)$$

в то время как на $p(t)$ никаких условий не накладывается. Для гамильтониана (6.14) интеграл по $\prod_n dp_n$ в уравнении (6.17) гауссов и легко берётся:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q_f, q_{in}; t_f - t_{in}) &= \mathcal{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \\ &\exp\left\{i \left[\frac{(q_f - q_{n-1})^2}{2\epsilon} + \dots + \frac{(q_1 - q_{in})^2}{2\epsilon} - \epsilon V(q_{n-1}) - \dots - \epsilon V(q_{in}) \right]\right\} \propto \\ &\propto \int \prod_t dq(t) \exp\left\{i \int_{t_{in}}^{t_f} \left[\frac{\dot{q}^2}{2} - V(q) \right] dt\right\}. \quad (6.20) \end{aligned}$$

Бесконечный нормировочный фактор \mathcal{N} роли для нас здесь играть не будет². Третья строчка в уравнении (6.20) получается из первых двух заменами $q(t_1) - q(t_{in}) \rightarrow \epsilon \dot{q}(t_{in})$ и т. д. Представление (6.20) есть оригинальная фейнмановская форма интеграла

²См., однако, уравнение (14.53) с аккуратным вычислением подобного детерминантного фактора для индекса оператора Дирака на кривом многообразии.

по траекториям. Это интеграл в конфигурационном пространстве, а не в фазовом пространстве, как в уравнении (6.18). Ввиду граничных условий (6.19), интеграл в экспоненте — это просто действие $S = \int L dt$ на траектории $q(t)$, связывающей точки q_{in}, t_{in} и q_f, t_f .

(Квази)классический предел в квантовой теории соответствует большому действию в единицах \hbar . В этом случае основной вклад в интеграл (6.20) набирается вблизи стационарных точек (минимумов) действия, где вклады от многих траекторий суммируются с почти идентичными фазовыми факторами. Мы приходим к классическому принципу наименьшего действия.

Функциональный интеграл используется в физике более полувека. Но не в математике — математики его не любят, считая недостаточно строго определённым объектом. Выражаясь точнее, они не возражают против *евклидова* интеграла по траекториям, где время предполагается мнимым, $t = -i\tau$. В этом случае подынтегральное выражение в (6.20) приобретает вид

$$\exp \left\{ - \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] \right\}. \quad (6.21)$$

Если потенциал не очень сильно падает при больших q , вклад траекторий, сильно отклоняющихся от траектории, реализующей минимум евклидоваго действия, экспоненциально подавлен. Математики называют такие интегралы интегралами с *мерой Винера* и могут с ними работать. Спешу обрадовать читателя-математика: в этой книге мы будем работать только с евклидовыми функциональными интегралами!

Так что для нас это не столь важно, но мне всё же хочется заметить, что основная проблема с интегралами по траекториям в реальном времени состоит в том, что сложно доказать существование предела конечномерного интеграла (6.11), когда число точек стремится к бесконечности, а временной интервал между соседними точками стремится к нулю.

Я не математик в традиционном смысле и не могу даже пытаться это доказывать. Единственное, что мне хочется заметить, — это то, что для простых, хотя и нетривиальных квантовомеханических проблем вроде ангармонического осциллятора, функциональные интегралы в реальном времени были найдены

численно, и существование предела $\epsilon \rightarrow 0$ было установлено, если угодно, экспериментально [62]³.

Обратимся к евклидову функциональному интегралу (6.21). В минковском случае (т. е. в случае, когда время вещественно) нас интересовало ядро оператора эволюции (6.3), которое зависело от начальной и конечной координаты и от временного интервала Δt . Но в этой книге нас будет интересовать не минковский оператор эволюции, а объект, называемый *статсуммой*, и в особенности, его суперсимметричное обобщение, которое мы будем скоро обсуждать.

Определение 6.1. *Статсуммой* квантовой системы называется следующая спектральная сумма:

$$Z(\beta) = \sum_k e^{-\beta E_k}, \quad (6.23)$$

где β — параметр, физическая интерпретация которого есть обратная температура, $\beta = 1/T$.

Заметим, что для достаточно большого β (достаточно малой температуры) основной вклад в сумму (6.23) даёт основное состояние спектра, а вклады возбуждённых состояний подавлены.

Теорема 6.2. *Статсумма даётся интегралом*

$$Z = \int dq \mathcal{K}(q, q; -i\beta), \quad (6.24)$$

где $\mathcal{K}(q, q; -i\beta)$ — евклидов оператор эволюции по мнимому времени $-i\beta$ с совпадающими начальной и конечной точками.

Доказательство. Просто замените в (6.5) Δt на $-i\beta$, положите $q_{\text{in}} = q_f \rightarrow q$ и проинтегрируйте по q . \square

³В этой статье вычислялся фурье-образ

$$G(q, E) = \int_0^\infty dT e^{iET} \mathcal{K}(q, q; T) \quad (6.22)$$

оператора эволюции (6.20) с всего двумя-тремя промежуточными точками и наблюдались пики по E в правильных местах: при собственных значениях гамильтониана E_k в согласии со спектральным разложением (6.5). Фактические вычисления были проведены с небольшим сдвигом в евклидовом направлении — предполагалось, что параметр E в (6.22) имеет малую положительную мнимую часть. Это делает интегралы сходящимися и хорошо определёнными.

Евклидов оператор эволюции $\mathcal{K}(q_f, q_{in}; -i\beta)$ называют ещё *тепловым ядром*. Тепловое ядро является фундаментальным решением уравнения тепловой диффузии — евклидовой версии уравнения Шрёдингера.

§ 6.2. Ядро грассманова оператора эволюции

Перейдём теперь к системам, включающим грассмановы динамические переменные. Рассмотрим сперва как простейшую модель грассманов осциллятор из § 4.4. Он описывается всего одной голоморфной грассмановой переменной ψ , и гильбертово пространство включает всего два состояния: состояние $|1\rangle$ с $\Psi(\psi) = 1$ и состояние $|\psi\rangle$ с $\Psi(\psi) = \psi$. Естественно определённое скалярное произведение на этом пространстве, $\langle 1|1\rangle = \langle \psi|\psi\rangle = 1$ и $\langle 1|\psi\rangle = \langle \psi|1\rangle = 0$, следует из симпатичной формулы

$$\langle f|g\rangle = \int d\psi d\bar{\psi} e^{-\psi\bar{\psi}} \overline{f(\psi)} g(\psi). \quad (6.25)$$

Появление в мере фактора $e^{-\psi\bar{\psi}}$ не должно удивлять: экспоненциальный фактор в мере возникает также для обыкновенного гармонического осциллятора в голоморфном представлении: состояния в первой строчке уравнения (5.12) образуют ортонормированный базис с мерой

$$d\mu = \frac{dad\bar{a}}{2\pi i} e^{-a\bar{a}}. \quad (6.26)$$

Мы будем далее обсуждать системы с многими динамическими грассмановыми переменными ψ_α . В этом случае фермионная мера есть

$$d\mu_G = \prod_\alpha d\psi_\alpha d\bar{\psi}_\alpha e^{-\psi_\alpha\bar{\psi}_\alpha}. \quad (6.27)$$

Состояния $|1\rangle$ и $|\psi\rangle$ суть собственные состояния гамильтониана (4.63): $\hat{H}|1\rangle = 0$ и $\hat{H}|\psi\rangle = \omega|\psi\rangle$. Ядро оператора эволюции записывается теперь в виде

$$\langle f|e^{-i\hat{H}\Delta t}|i\rangle = \mathcal{K}(\psi_f, \bar{\psi}_{in}; \Delta t). \quad (6.28)$$

Тогда волновая функция в момент времени $t_f = t_{in} + \Delta t$ выражается свёрткой

$$\Psi(\psi_f, t_f) = \int d\psi_{in} d\bar{\psi}_{in} e^{-\psi_{in}\bar{\psi}_{in}} \mathcal{K}(\psi_f, \bar{\psi}_{in}; \Delta t) \Psi(\psi_{in}, t_{in}). \quad (6.29)$$

Интеграл по начальному фазовому пространству берётся с мерой, предписанной в (6.25).

Для грассманова осциллятора, как и для любой другой квантовой задачи с известным спектром, можно записать явное представление для ядра. Оно даётся спектральным разложением, имеющим вид

$$\mathcal{K}(\psi_f, \bar{\psi}_{in}; \Delta t) = \sum_k \Psi_k(\psi_f) \overline{\Psi_k(\psi_{in})} e^{-iE_k \Delta t} \quad (6.30)$$

(это теорема 6.1, обобщённая на системы с грассмановыми переменными). Для осциллятора получаем

$$\mathcal{K}(\psi_f, \bar{\psi}_{in}; \Delta t) = 1 + \psi_f \bar{\psi}_{in} e^{-i\omega \Delta t}. \quad (6.31)$$

Евклидов оператор эволюции даётся выражением (6.31), где Δt надо заменить на $-i\beta$:

$$\mathcal{K}(\psi_f, \bar{\psi}_{in}; -i\beta) = 1 + \psi_f \bar{\psi}_{in} e^{-\omega \beta}. \quad (6.32)$$

Рассмотрим естественное обобщение (6.24):

$$\tilde{Z}(\beta) = \int d\psi d\bar{\psi} e^{-\psi\bar{\psi}} \mathcal{K}(\psi, \bar{\psi}; -i\beta), \quad (6.33)$$

где мы снова использовали меру из (6.25). Вычисление интеграла даёт

$$\tilde{Z}(\beta) = 1 - e^{-\beta\omega}. \quad (6.34)$$

Эта формула напоминает (6.23), но второй член, вклад от возбуждённого состояния осциллятора, входит с отрицательным знаком!

Запомним этот замечательный факт и взглянем снова на ядро (6.32). В случае $\beta = 0$ (когда ψ_{in} и ψ_f совпадают), оно сводится к $\mathcal{K}(\psi, \bar{\psi}; 0) = 1 + \psi\bar{\psi} = e^{\psi\bar{\psi}}$. Для малых $\beta \ll \omega^{-1}$ ядро приобретает вид

$$\mathcal{K}(\psi_f, \bar{\psi}_{in}; -i\beta) \approx e^{\psi_f \bar{\psi}_{in} - \beta H(\psi_f, \bar{\psi}_{in})}, \quad (6.35)$$

где $H(\psi, \bar{\psi})$ — классический гамильтониан грассманова осциллятора (4.55).

Знак \approx в уравнении (6.35) означает следующее. Для малого β мы оставляем в $\mathcal{K}(\psi_f, \bar{\psi}_{in}; -i\beta)$ члены порядка $\sim \beta \psi \bar{\psi}$, но пренебрегаем членами порядка $\sim \beta^{n \geq 2} \psi \bar{\psi}$ (и пренебрегли бы членами порядка $\sim \beta^{n \geq 1}$ без фактора $\psi \bar{\psi}$, если бы такие члены присутствовали). Смысл такой процедуры будет прояснён в конце главы: мы увидим, что выкинутые вклады не влияют на величину индекса Виттена. См. также обсуждение на с. 392.

Результат (6.35) можно обобщить на системы с произвольным числом грассмановых переменных $\psi_{\alpha=1, \dots, n}$. Скалярное произведение определяется тогда с мерой (6.27).

Определение 6.2. Оператор $\hat{A}_N(\psi_\alpha, \hat{\psi}_\alpha)$ называется *нормально упорядоченным*, если в нём все множители ψ_α стоят слева, а множители $\hat{\psi}_\alpha = \partial / \partial \psi_\alpha$ — справа.

Ясно, что любой оператор можно выразить в виде суммы нормально упорядоченных слагаемых, отправляя факторы $\hat{\psi}_\alpha$ направо с использованием тождества $\{\hat{\psi}_\alpha, \psi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$.

Определение 6.3. Функция A_N , полученная из \hat{A}_N убиранием шляпок, называется *нормальным символом* оператора \hat{A} .

Так, нормальный символ $\psi_\alpha \hat{\psi}_\beta$ есть $\psi_\alpha \bar{\psi}_\beta$, а нормальный символ $\hat{\psi}_\beta \psi_\alpha$ есть $\delta_{\alpha\beta} - \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta$.

Теорема 6.3. Ядро $\mathcal{K}_A(\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$ произвольного оператора \hat{A} , определённое как⁴

$$(\hat{A}\Psi)(\psi) = \int \prod_\alpha d\chi_\alpha d\bar{\chi}_\alpha e^{-\chi_\alpha \bar{\chi}_\alpha} \mathcal{K}_A(\psi_\alpha, \bar{\chi}_\alpha) \Psi(\chi), \quad (6.36)$$

связано с его нормальным символом $A_N(\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$ формулой

$$\mathcal{K}_A(\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha) = e^{\sum_\beta \psi_\beta \bar{\psi}_\beta} A_N(\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha). \quad (6.37)$$

Доказательство. Нормально упорядоченный оператор \hat{A}_N может быть записан как

$$\hat{A}_N = C(\psi) + A_\alpha(\psi) \hat{\psi}_\alpha + A_{\alpha\beta}(\psi) \hat{\psi}_\alpha \hat{\psi}_\beta + \dots \quad (6.38)$$

⁴Ср. определение ядра оператора эволюции в уравнении (6.29).

В простейшем случае оператор не зависит от $\hat{\psi}$, и его действие сводится к умножению на $C(\psi)$. Чтобы доказать в этом случае теорему, надо показать, что

$$\int \prod_{\alpha} d\chi_{\alpha} d\bar{\chi}_{\alpha} e^{-\chi_{\alpha}\bar{\chi}_{\alpha}} e^{\psi_{\alpha}\bar{\chi}_{\alpha}} C(\psi)\Psi(\chi) = C(\psi)\Psi(\psi) \quad (6.39)$$

или

$$\int \prod_{\alpha} d\chi_{\alpha} d\bar{\chi}_{\alpha} e^{-\chi_{\alpha}\bar{\chi}_{\alpha}} e^{\psi_{\alpha}\bar{\chi}_{\alpha}} \Psi(\chi) = \Psi(\psi) \quad (6.40)$$

для произвольной функции Ψ . Это верно для любого монома типа $\Psi(\chi) = \chi_1\chi_3\chi_7$ ввиду тождеств

$$\int d\chi d\bar{\chi} e^{(\psi-\chi)\bar{\chi}} = 1, \quad \int d\chi d\bar{\chi} e^{(\psi-\chi)\bar{\chi}} \chi = \psi. \quad (6.41)$$

Рассмотрим теперь второй член $A_{\alpha}(\psi)\hat{\psi}_{\alpha}$. Надо доказать, что

$$\int \prod_{\alpha} d\chi_{\alpha} d\bar{\chi}_{\alpha} e^{(\psi_{\alpha}-\chi_{\alpha})\bar{\chi}_{\alpha}} \bar{\chi}_{\beta}\Psi(\chi) = \frac{\partial}{\partial\psi_{\beta}}\Psi(\psi). \quad (6.42)$$

Чтобы доказать справедливость (6.42), достаточно заметить, что для того, чтобы интеграл не обращался в ноль, фактор $\bar{\chi}_{\beta}$ в подынтегральном выражении должен быть спарен с каким-либо фактором χ_{γ} в разложении $\Psi(\chi)$. А такое спаривание эквивалентно дифференцированию $\partial\Psi(\chi)/\partial\chi_{\beta}$. Используя (6.40), мы приходим к уравнениям (6.42).

Это рассуждение распространяется и на старшие члены разложения (6.38). Например, справедливость теоремы для члена, содержащего два оператора $\hat{\psi}$, следует из равенства

$$\int \prod_{\alpha} d\chi_{\alpha} d\bar{\chi}_{\alpha} e^{(\psi_{\alpha}-\chi_{\alpha})\bar{\chi}_{\alpha}} \bar{\chi}_{\beta}\bar{\chi}_{\gamma}\Psi(\chi) = \frac{\partial^2}{\partial\psi_{\beta}\partial\psi_{\gamma}}\Psi(\psi). \quad (6.43) \quad \square$$

Применяя эту теорему к евклидову оператору эволюции $e^{-\beta\hat{H}}$, получаем

$$\mathcal{K}(\psi_{\alpha}^f, \bar{\psi}_{\alpha}^{\text{in}}; -i\beta) = \exp\{\psi_{\alpha}^f\bar{\psi}_{\alpha}^{\text{in}}\} (e^{-\beta\hat{H}})_{N}. \quad (6.44)$$

Для малых β нормальный символ экспоненты в (6.44) можно заменить на экспоненту $e^{-\beta H}$ от классического гамильтониана.

Последний можно выбрать как нормальный символ квантового гамильтониана, но это не обязательно: можно также выбрать символ, связанный с любым другим упорядочиванием, — в приближении малых β это различие не чувствуется. Мы получаем:

$$\mathcal{K}(\psi_\alpha^f, \bar{\psi}_\alpha^{\text{in}}; -i\beta) \approx \exp\{\psi_\alpha^f \bar{\psi}_\alpha^{\text{in}}\} e^{-\beta H(\psi_\alpha^f, \bar{\psi}_\alpha^{\text{in}})}. \quad (6.45)$$

В этой связи читатель может взглянуть другими глазами на инфинитезимальное ядро бозонного оператора эволюции (6.15). В близкой аналогии с только что доказанной теоремой можно показать, что матричный элемент $\langle p | \hat{A} | q \rangle$ произвольного оператора \hat{A} даётся произведением фактора e^{-ipq} и так называемого p - q символа [61] оператора \hat{A} . При малых ϵ рассматриваемый p - q символ оператора эволюции $\exp\{-i\epsilon \hat{H}\}$ приближённо равен экспоненте $\exp\{-i\epsilon H(p, q)\}$, где $H(p, q)$ есть p - q символ квантового гамильтониана. Таким образом, мы приходим к (6.15).

§ 6.3. Индекс Виттена

Рассмотрим теперь систему СКМ, включающую как обыкновенные переменные q_j , так и грассмановы переменные ψ_α . Рассмотрим инфинитезимальное евклидово ядро

$$\mathcal{K}_{\text{inf}}(q_j, \psi_\alpha; q_j, \bar{\psi}_\alpha; -i\beta) = \langle q_j, \psi_\alpha; -i\beta | q_j, \psi_\alpha; 0 \rangle$$

с одинаковыми значениями переменных при $t = 0$ и $t = -i\beta$. Объединяя выражения (6.16) (с $\epsilon \rightarrow -i\beta$) и (6.45), мы выводим

$$\mathcal{K}_{\text{inf}}(q_j, \psi_\alpha; q_j, \bar{\psi}_\alpha; -i\beta) \approx e^{\psi_\alpha \bar{\psi}_\alpha} \int \prod_j \frac{dp_j}{2\pi} e^{-\beta H(p_j, q_j; \psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)}, \quad (6.46)$$

где $H(p_j, q_j; \psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$ — классический гамильтониан (связанный с квантовым какой-нибудь процедурой упорядочения).

Эта формула справедлива в приближении малых β . Ядро оператора эволюции при конечных β может быть вычислено как континуальный интеграл от свёртки бесконечного числа инфи-

нитезимальных ядер:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q_j, \psi_\alpha; q_j, \bar{\psi}_\alpha; -i\beta) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_j dq_j^{(m)} \prod_\alpha d\psi_\alpha^{(m)} d\bar{\psi}_\alpha^{(m)} e^{-\psi_\alpha^{(m)} \bar{\psi}_\alpha^{(m)}} \right) \times \\ &\times \mathcal{K}_{\text{inf}}\left(q_j, \psi_\alpha; q_j^{(1)}, \bar{\psi}_\alpha^{(1)}; \frac{-i\beta}{n}\right) \dots \mathcal{K}_{\text{inf}}\left(q_j^{(n-1)}, \psi_\alpha^{(n-1)}; q_j, \bar{\psi}_\alpha; \frac{-i\beta}{n}\right). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Отличная новость состоит, однако, в том, что в большинстве случаев (хотя и не во всех случаях; сложные случаи, когда континуальный интеграл приходится реально вычислять, будут обсуждаться в главе 14) нам не надо вычислять интеграл (6.47). Достаточно использовать выражение (6.46) для ядра при малых β и его спектральное разложение при произвольных β .

Спектральное разложение бозонного ядра было написано в уравнении (6.5) и для грассмана ядра в игрушечной осцилляторной модели — в уравнении (6.30). Заменяя ϵ на $-i\beta$, произведя очевидное обобщение и положив $\langle \text{in} \rangle = \langle \text{f} \rangle$, мы можем записать

$$\mathcal{K}(q_j, \psi_\alpha; q_j, \bar{\psi}_\alpha; -i\beta) = \sum_k \Psi_k(q_j, \psi_\alpha) \overline{\Psi_k(q_j, \psi_\alpha)} e^{-\beta E_k}. \quad (6.48)$$

Рассмотрим интеграл [обобщение (6.33)]:

$$\tilde{Z}(\beta) = \int \prod_j dq_j \prod_\alpha d\psi_\alpha d\bar{\psi}_\alpha e^{-\psi_\alpha \bar{\psi}_\alpha} \mathcal{K}(q_j, \psi_\alpha; q_j, \bar{\psi}_\alpha; -i\beta). \quad (6.49)$$

Подставив сюда спектральное разложение (6.48) и приняв во внимание условие нормировки $\langle \Psi_k | \Psi_k \rangle = 1$ с мерой (6.27), мы получаем

$$\tilde{Z}(\beta) = \sum_k \eta_k e^{-\beta E_k}, \quad (6.50)$$

где $\eta_k = 1$ для бозонных состояний с грассманово-чётными волновыми функциями Ψ_k и $\eta_k = -1$ для фермионных состояний с грассманово-нечётными волновыми функциями. Величина \tilde{Z} называется *суперсимметричной статсуммой* или *индексом Виттена*.

Континуальный интеграл (6.49) для \tilde{Z} может быть формально записан как [ср. с представлением (6.20)]

$$\tilde{Z}(\beta) = \int \prod_{j\tau} dq_j(\tau) \prod_{\alpha\tau} d\psi_\alpha(\tau) d\bar{\psi}_\alpha(\tau) \exp\left\{-\int_0^\beta L_E[q_j(\tau), \psi_\alpha(\tau), \bar{\psi}_\alpha(\tau)]d\tau\right\}, \quad (6.51)$$

где L_E — евклидов лагранжиан и все переменные, обыкновенные и грассмановы, удовлетворяют *периодическим* граничным условиям:

$$q_j(\beta) = q_j(0); \quad \psi_\alpha(\beta) = \psi_\alpha(0); \quad \bar{\psi}_\alpha(\beta) = \bar{\psi}_\alpha(0). \quad (6.52)$$

Читатель может спросить: а возможно ли определить аналогичным образом обыкновенную статсумму (6.23), где все состояния, бозонные и фермионные, входят в сумму с одним знаком? Ответ положительный. Надо просто написать

$$Z(\beta) = \int \prod_j dq_j \prod_\alpha d\psi_\alpha d\bar{\psi}_\alpha e^{-\psi_\alpha \bar{\psi}_\alpha} \mathcal{K}(q_j, \psi_\alpha; q_j, -\bar{\psi}_\alpha; -i\beta). \quad (6.53)$$

Отрицательный знак перед вторым грассмановым аргументом в \mathcal{K} даёт в спектральной сумме дополнительный минус при вкладе грассманово-нечётных волновых функций, что компенсирует множитель $\eta_\kappa = -1$ в (6.50)⁵.

Вернёмся к суперсимметричной статсумме (6.50) и отметим её интересные свойства. Как вы помните, суперсимметричная квантовая система характеризуется двукратным вырождением всех возбуждённых уровней — у каждого бозонного состояния имеется фермионный партнёр с той же энергией. Но это значит, что вклады возбуждённых состояний в сумму (6.50) сокра-

⁵Для нас это не очень важно, но можно отметить, что обычную статсумму физики изучают, когда их интересует поведение системы при конечной температуре $T = 1/\beta$. Появление дополнительного минуса во втором грассмановом (но не бозонном) аргументе у \mathcal{K} в уравнении (6.53) означает, что для вычисления следует наложить в функциональном интеграле (6.51) периодические граничные условия по мнимому времени для бозонных переменных и антипериодические условия для фермионных переменных. Физики говорят, что симметрия между фермионами и бозонами, т. е. суперсимметрия, при конечной температуре разрушается.

щаются, и в неё могут дать вклад только (не обязательно спаренные) низшие (вакуумные) состояния с нулевой энергией. Но если $E_k = 0$, то $e^{-\beta E_k} = 1$. Мы видим, что $\tilde{Z}(\beta)$ не зависит от β и даётся замечательной формулой [53, 63]

$$\tilde{Z}(\beta) \equiv I_W = n_B^{E=0} - n_F^{E=0}, \quad (6.54)$$

где $n_B^{E=0}$ — число бозонных вакуумных состояний и $n_F^{E=0}$ — число фермионных вакуумных состояний. Очевидно, что индекс Виттена есть целое число. Но коль скоро $\tilde{Z}(\beta)$ не зависит от β , мы можем вычислять эту величину при любом β , и удобно это делать, полагая β малым. В этом случае мы можем подставить в (6.49) приближённое выражение (6.46). Функциональный интеграл сводится при этом к обычному [64]:

$$I_W = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int \prod_j \frac{dp_j dq_j}{2\pi} \prod_\alpha d\psi_\alpha d\bar{\psi}_\alpha e^{-\beta H(p_j, q_j; \psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)}. \quad (6.55)$$

Этот интеграл легко вычисляется для многих суперсимметричных квантовых систем.

Результат (6.55) можно также выразить на альтернативном языке, когда грассмановы динамические переменные не вводятся, но суперсимметричные суперзаряды и гамильтониан (как квантовые, так и классические) имеют матричный вид. Например, для модели Виттена мы можем записать классический гамильтониан как

$$\hat{H} = \frac{p^2 + [W'(x)]^2}{2} + \frac{1}{2} W''(x) \sigma_3. \quad (6.56)$$

Здесь шляпка над H означает только то, что \hat{H} есть матрица. Но P здесь — это импульсная переменная в классическом фазовом пространстве, а не дифференциальный оператор.

Ядро евклидова оператора эволюции в квантовой задаче также имеет в этом представлении матричную структуру. Функциональный след этого ядра, включающий обычный матричный след и интеграл по координатам конфигурационного пространства, даёт статсумму системы:

$$Z(\beta) = \int \prod_j dq_j \text{Tr}\{\hat{\mathcal{K}}(q_j, q_j; -i\beta)\}. \quad (6.57)$$

Чтобы найти суперсимметричную статсумму, надо вспомнить, что спектр суперсимметричного гамильтониана включает две башни вырожденных состояний, как на рис. 5.2. Введём оператор $(-1)^{\hat{F}}$, который коммутирует с гамильтонианом и имеет собственные значения $+1$ для состояний из одной из башен и -1 для состояний из другой башни.

Чтобы понять нотацию $(-1)^{\hat{F}}$, надо вернуться к грассманову описанию, в котором \hat{F} имеет смысл фермионного заряда,

$$\hat{F} = \psi_j \hat{\psi}_j. \quad (6.58)$$

Он просто считает число грассмановых факторов в волновой функции. Во всех разобранных в книге примерах \hat{F} коммутирует с гамильтонианом, но существуют суперсимметричные системы, где это не так. Свойство же $[(-1)^{\hat{F}}, \hat{H}] = 0$ выполняется всегда — гамильтониан всегда включает чётное число грассмановых факторов. Что касается операторов суперзарядов — они всегда включают нечётное число грассмановых факторов и переводят состояния с чётным \hat{F} в состояния с нечётным \hat{F} и обратно. Таким образом, на грассмановом языке состояния из двух упомянутых башен имеют противоположную фермионную чётность. Естественно назвать состояния с чётным \hat{F} бозонными и состояния с нечётным \hat{F} — фермионными.

Вернёмся к матричной формулировке. Суперсимметричная статсумма записывается как

$$\tilde{Z}(\beta) = \int \prod_j dq_j \operatorname{Tr}\{[(-1)^{\hat{F}}]_{\text{матр}} \hat{\mathcal{K}}(q_j, q_j; -i\beta)\}, \quad (6.59)$$

где $[(-1)^{\hat{F}}]_{\text{матр}}$ есть матричное представление оператора фермионной чётности, определённого выше. Как мы увидим чуть позже, в модели Виттена и в задаче Ландау

$$[(-1)^{\hat{F}}]_{\text{матр}} = -\sigma_3 \quad (6.60)$$

в принятых конвенциях.

Формула (6.55) приобретает вид

$$I_W = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int \prod_j \frac{dp_j dq_j}{2\pi} \operatorname{Tr}\{[(-1)^{\hat{F}}]_{\text{матр}} e^{-\beta \hat{H}(p_j, q_j)}\} \quad (6.61)$$

с классическим матричным гамильтонианом.

Народно-хозяйственная важность понятия индекса Виттена состоит в следующем. Пусть нас интересует сложная суперсимметричная система (не обязательно система СКМ, это может быть теория поля) и мы хотим узнать, включает или нет спектр системы суперсимметричные состояния с нулевой энергией, которые аннигилируются действием суперзарядов. Другими словами, мы хотим узнать, нарушена суперсимметрия спонтанно или нет. Ответить на этот вопрос, явно решая уравнение $\hat{Q}\Psi = \hat{Q}^{\dagger}\Psi = 0$, может быть весьма сложной задачей.

Но этому прямому подходу есть альтернатива: можно вычислить I_W через интеграл (6.55). Если этот интеграл всё-таки достаточно сложен, мы можем *деформировать* теорию, плавно изменив её параметры. Будучи целым числом, индекс не может резко измениться при такой плавной деформации. Можно, например, деформировать теорию поля, посадив её в конечный пространственный ящик и устремив потом размер ящика к нулю, так что в системе остаются только нулевые фурье-моды и теория поля сводится к квантовой механике [63].

Разумеется, описанный метод имеет, как и любой другой научный метод, свою область применимости.

1. Прежде всего, само понятие индекса Виттена определено только для систем с дискретным спектром. Как мы уже отмечали в конце § 5.2, только такие системы хорошо математически определены. Если спектр непрерывен и состояния ненормируемы, большинство методов функционального анализа не работают. И даже храбрый физик, не боящийся систем с непрерывным спектром (например, задачи о движении по прямой), всегда держит в голове возможность регуляризации, делающей спектр дискретным. Для систем с непрерывным спектром интегралы (6.55) часто дают дробные значения индекса, не имеющие большого смысла⁶.

2. Даже для систем с дискретным спектром интеграл (6.55) даёт в некоторых случаях неверные дробные значения. Причина

⁶Существуют достаточно сложные суперсимметричные калибровочные теории, где спектр непрерывен, но имеются также нормируемые вакуумные состояния с нулевой энергией и индекс Виттена, считающий эти состояния, может быть определён [65]. Но в этой книге такие системы рассматриваться не будут.

этого в том, что приближение (6.46) для этих систем не работает, и для вычисления исходного функционального интеграла надо учитывать *однопетлевые* эффекты. Мы встретимся с такими системами в главе 14.

Вычислив индекс Виттена, мы можем отвечать на вопрос о спонтанном нарушении. Строго говоря, определённый ответ можно дать, только если $I_W \neq 0$. Тогда суперсимметричные вакуумы существуют и суперсимметрия не нарушена. А если $I_W = 0$, чёткого ответа нет: $n_B^{E=0}$ и $n_F^{E=0}$ могут быть отличны от нуля, но иметь равные значения.

Однако в большинстве случаев I_W обращается в ноль вместе с $n_B^{E=0}$ и $n_F^{E=0}$. Если эти числа всё же отличны от нуля, для того должна быть какая-то специальная причина. А в этом случае можно обычно определить модифицированный вариант индекса, который не обращается в ноль.

6.3.1. Примеры

Покажем теперь как этот общий метод работает на простых моделях СКМ, разобранных в прошлой главе. Рассмотрим вначале модель Виттена с классическим гамильтонианом

$$H = \frac{p^2 + [W'(x)]^2}{2} + W''(x)\psi\bar{\psi}. \quad (6.62)$$

Подставим этот гамильтониан в формулу (6.55). Интегрируя по $d\psi d\bar{\psi}$ и по импульсам, мы получаем

$$I_W = \lim_{\beta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx W''(x) \exp\left\{-\frac{\beta[W'(x)]^2}{2}\right\}. \quad (6.63)$$

Заменяя $y = W'(x)$, мы выводим

$$I_W = \lim_{\beta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{W'(-\infty)}^{W'(\infty)} dy \exp\left\{-\frac{\beta y^2}{2}\right\}. \quad (6.64)$$

Нас интересуют только системы, в которых потенциал $U(x) = [W'(x)]^2/2$ растёт на бесконечности. Иначе спектр гамильтониана не был бы дискретен и понятие индекса не было бы определено. Пусть $W(x)$ — полином. Имеются три возможности.

1. Старшая степень суперпотенциала $W(x)$ нечётна. Тогда $W'(\infty) = W'(-\infty)$, пределы в интеграле (6.64) совпадают и $I_W = 0$. Это предполагает, что суперсимметрия спонтанно нарушена, и такое предположение подтверждается точным анализом из предыдущей главы.

2. Старшая степень $W(x)$ чётна и коэффициент при ней положителен. Тогда $W'(\pm\infty) = \pm\infty$ и интеграл в (6.64) не зависит от β и даёт $I_W = 1$: в спектре имеется одно бозонное состояние с нулевой энергией⁷ в согласии с явными вычислениями в § 5.4.

3. Старшая степень $W(x)$ чётна и коэффициент при ней отрицателен. Тогда $W'(\pm\infty) = \mp\infty$ и интеграл (6.64) даёт $I_W = -1$: в спектре имеется одно фермионное вакуумное состояние. Это тоже согласуется с анализом § 5.4.

Рассмотрим теперь обобщённую систему Ландау с магнитным полем (5.18). Классический гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(P_x + A_x)^2 + \frac{1}{2}(P_y + A_y)^2 + B(x, y)\psi\bar{\psi}, \quad (6.65)$$

где $A_{x,y}$ — компоненты векторного потенциала. Имеем:

$$I_W = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int \frac{dP_x dx}{2\pi} \frac{dP_y dy}{2\pi} d\psi d\bar{\psi} \exp\left\{-\frac{\beta}{2}[(P_x + A_x)^2 + (P_y + A_y)^2] - \beta B(x, y)\psi\bar{\psi}\right\}. \quad (6.66)$$

Интегрируя по $dP_x dP_y d\psi d\bar{\psi}$, получаем

$$I_W = \frac{1}{2\pi} \int dx dy B(x, y) = \frac{\Phi}{2\pi}, \quad (6.67)$$

где Φ — магнитный поток. Мы воспроизвели (5.25) с дополнительным уточнением: знак индекса совпадает со знаком потока.

⁷Строго говоря, мы можем только утверждать, что $n_B^{E=0} - n_F^{E=0} = 1$, что не исключает в принципе возможности, что система имеет, скажем, два бозонных и один фермионный вакуум. Но здесь можно сделать то же замечание, что мы сделали при обсуждении случая $I_W = 0$ на с. 158: должна быть какая-то специальная причина для существования дополнительных вакуумов. В модели Виттена такой специальной причины нет.

И это согласуется с анализом § 5.3: если $B > 0$, то состояния с нулевой энергией имеют отрицательную проекцию спина на матрично-спинорном языке и они бозонны на грассмановом языке.

Результат (6.67) можно также получить из матричной формулы (6.61). Матричное представление оператора фермионной чётности $(-1)^{\hat{F}}$ даётся в этом случае уравнением (6.60), $(-1)^{\hat{F}} \equiv -\sigma_3$. Действительно, в квантовом гамильтониане фигурирует $\psi\bar{\psi} \rightarrow (\psi\hat{\psi} - \hat{\psi}\psi)/2$. В нашей конвенции (см. с. 131) $\psi \equiv \sigma_+$, $\hat{\psi} \equiv \sigma_-$, $[\psi, \hat{\psi}] \equiv \sigma_3$, а бозонный сектор отвечает состояниям с отрицательной проекцией спина. Мы получаем

$$I_W = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\beta} \int dx dy \operatorname{Tr}\{-\sigma_3 e^{-\beta\sigma_3 B(x,y)/2}\}, \quad (6.68)$$

что совпадает с (6.67).

Индекс I_W есть по определению целое число. Отсюда следует, что магнитный поток Φ должен квантоваться, $\Phi = 2\pi n$. В п. 13.2.1 мы разберём вопрос о том, что не в порядке с системами с нецелым $\Phi/2\pi$. Мы развенчаем популярное заблуждение, что квантовая задача в этом случае не определена. Это не так: спектр гамильтониана определить можно. Однако:

- если поток нецелый, гамильтониан теряет суперсимметрию;
- физика существенно в этом случае зависит от положения так называемой *нити Дирака*.

В большей части книги мы будем при обсуждении калибровочных полей предполагать, что поток (6.67) и его обобщения для более сложных систем квантуются.

Читатель, безусловно, обратил внимание, что в рассмотренных выше примерах интеграл не зависел от β и операция предельного перехода $\beta \rightarrow 0$ была излишней. Такая приятная черта нашей процедуры была следствием удачного выбора классического гамильтониана H как вейлевского символа квантового гамильтониана \hat{H} . На самом деле тот факт, что это вейлевский символ, а не какой-либо другой, не важен, а важно то, что наш классический гамильтониан удовлетворяет вместе с классическими суперзарядами, полученными из выражений (5.26) или (5.27) заменой $\hat{P} \rightarrow P$, классической алгебре суперсимметрии (5.43). Как

было уже сказано, в сложных системах, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, классические суперзаряды должны быть для этого выбраны как вейлевские символы квантовых суперзарядов. Таковы экспериментальные факты. Мы можем на их основе сформулировать гипотезу:

Пусть \hat{Q} , $\hat{\bar{Q}}$ и \hat{H} — квантовые операторы, удовлетворяющие алгебре суперсимметрии (5.1). Пусть спектр \hat{H} дискретен. Пусть Q и \bar{Q} — вейлевские символы \hat{Q} и $\hat{\bar{Q}}$ и пусть скобки Пуассона $\{Q, Q\}_P$ и, следовательно, $\{\bar{Q}, \bar{Q}\}_P$ обращаются в ноль⁸. Определим классический гамильтониан согласно $H = -i\{Q, \bar{Q}\}_P$. Тогда интеграл в (6.55) не зависит от β .

Мы не знаем доказательства этой теоремы, но она выполняется во всех известных нам системах.

Если классический гамильтониан H выбран без должного тщания, но квантовый гамильтониан получается из H в результате некоторой процедуры упорядочения, то интеграл (6.55) может зависеть от β , но его значение в пределе $\beta \rightarrow 0$ должно совпадать для всех таких H .

Как и в предыдущем случае, мы не можем это доказать математически, но эвристическая физическая причина следующая. Неоднозначность упорядочения — это квантовый эффект. С другой стороны, малые β соответствуют большим температурам, когда квантовые эффекты становятся несущественны и динамика становится классической. Но тогда интеграл в (6.55) не должен в пределе малых β быть чувствительным к конкретному способу разрешения этих неоднозначностей.

Проиллюстрируем это общее свойство на конкретном примере модели Виттена.

1. В квантовых суперзарядах (5.27) координаты и импульсы не зацеплены. Следовательно, все их символы совпадают, имея тот же функциональный вид, что и (5.27).

2. Классический гамильтониан (6.62) совпадает с $-i\{Q, \bar{Q}\}_P$, что совпадает также с вейлевским символом квантового гамильтониана (5.28). А мы видели, что в таком случае интеграл для индекса не зависит от β .

⁸Эта оговорка необходима, чтобы отсеять системы, включающие классическую суперсимметричную аномалию, см. с. 138, 340.

3. Если выбрать другое выражение для H — например нормальный символ (5.28) вместо вейлевского — подынтегральное выражение в (6.63) приобретёт дополнительный множитель $\exp\{\beta W''(x)/2\}$.

4. Для того чтобы движение было финитным и спектр дискретен, потенциал $[W'(x)]^2/2$ и, следовательно, функция $W'(x)$ должны расти на бесконечности. Тогда для малых β , интеграл (6.63) в основном набирается на больших x . А в этих условиях $[W'(x)]^2/2 \gg W''(x)/2$ и тогда множитель $\exp\{\beta W''(x)/2\}$ становится несущественным — он не влияет на вычисляемый интеграл в пределе $\beta \rightarrow 0$.

Глава 7

Суперпространства и суперполя

Суперсимметричные лагранжианы (5.46), (5.48), (5.52), построенные в главе 5, инвариантны с точностью до полной временной производной относительно преобразований суперсимметрии (5.47), (5.49) и (5.53). Эти преобразования смешивают обыкновенные и грассмановы переменные, что напоминает обычные вращения, смешивающие разные векторные компоненты. В случае вращений мы знаем, что, хотя вектора и можно описывать как набор компонент, значительно удобнее использовать экономные векторные обозначения и писать одно векторное уравнение типа $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ вместо нескольких скалярных $B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y$ и т. д.

Естественно задаться вопросом: «Существует ли суперсимметричный аналог такого векторного формализма? Можно ли ввести единый объект, включающий обыкновенные и грассмановы компоненты, так что суперсимметричные лагранжианы и уравнения движения могут быть записаны в более ясном и компактном виде?» Ответ положителен. Такой объект существует, он называется *суперполем* — функцией, зависящей от координат *суперпространства*.

Здесь мы снова должны пожаловаться на универсально принятую терминологию. Понятие суперпространства было вначале введено для суперсимметричных полевых теорий [66]. В этой книге нас интересуют только суперсимметричные *квантово-механические* системы, и объекты, которые мы собираемся ввести, лучше назвать динамическими *суперпеременными*, зависящими от *супервремени*. Но люди так не говорят. Они и в этом случае используют термины «суперполе» и «суперпространство» (добавляя иногда прилагательное «одномерное»). И в нашей книге мы будем поступать так же.

§7.1. $\mathcal{N} = 1$

Определение 7.1. Простейшее одномерное суперпространство $\mathcal{N} = 1$ включает помимо времени t одну вещественную грасманову переменную $\theta = \bar{\theta}$. Преобразования

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta + \epsilon, \\ t &\rightarrow t + i\epsilon\theta\end{aligned}\tag{7.1}$$

с вещественным грасмановым ϵ играют здесь роль «вращений».

Рассмотрим композицию двух различных преобразований (7.1). Мы получаем:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta + \epsilon_1, & \theta_2 &= \theta_1 + \epsilon_2 = \theta + \epsilon_1 + \epsilon_2, \\ t_1 &= t + i\epsilon_1\theta, & t_2 &= t_1 + i\epsilon_2\theta_1 = t + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)\theta + i\epsilon_2\epsilon_1.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Другими словами, композиция двух суперпреобразований с параметрами ϵ_1 и ϵ_2 даёт суперпреобразование с грасмановым параметром $\epsilon_1 + \epsilon_2$ и дополнительный вещественный грасманово-чётный сдвиг по времени на величину $\alpha = i\epsilon_2\epsilon_1$. (Заметим, что $\bar{\alpha} = -i\epsilon_1\epsilon_2 = i\epsilon_2\epsilon_1 = \alpha$.)

Теорема 7.1. Множество всех преобразований (7.1) вместе с временными сдвигами $t \rightarrow t + \alpha$, параметризуемое вещественным грасманово-нечётным параметром ϵ и вещественным грасманово-чётным параметром α , образует группу.

Доказательство. Мы оставляем его читателю. □

Такие группы, характеризуемые как грасманово-чётными, так и грасманово-нечётными параметрами, и действующие на суперпространствах, называются *супергруппами*.

Обозначив элемент простейшей описанной супергруппы через $g(\alpha, \epsilon)$, мы можем представить закон композиции (7.2) в виде $g(0, \epsilon_2)g(0, \epsilon_1) = g(i\epsilon_2\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2)$. Как мы видим, эта группа некоммутативна. Групповой коммутатор

$$g(0, \epsilon_2)g(0, \epsilon_1)g(0, -\epsilon_2)g(0, -\epsilon_1) = g(2i\epsilon_2\epsilon_1, 0): \quad \begin{cases} \theta \rightarrow \theta \\ t \rightarrow t + 2i\epsilon_2\epsilon_1 \end{cases}\tag{7.3}$$

нетривиален и сводится к временной трансляции.

Элемент непрерывной группы представим в виде экспоненты линейной комбинации генераторов. В нашем случае мы можем

записать

$$g(\alpha, \epsilon) = \exp\{i(\alpha\hat{H} + \epsilon\hat{Q})\}, \quad (7.4)$$

где

$$\hat{H} = -i\partial/\partial t \quad (7.5)$$

есть генератор временного сдвига, т. е. гамильтониан, а

$$\hat{Q} = -i\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}\right) \quad (7.6)$$

есть не что иное, как *суперзаряд*! Действительно, выполняется соотношение

$$\hat{Q}^2 = \hat{H}, \quad (7.7)$$

откуда следует $[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$. Эта алгебра, упрощённая версия (5.3), называется алгеброй $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии в одномерном суперпространстве.

Таким же образом, как, согласно теореме Нётер, симметрия относительно временных трансляций отвечает для конкретной динамической системы конкретному классическому гамильтониану, по которому может быть построено его квантовое обобщение, симметрия относительно преобразований $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии (7.1) приводит к выражениям для классического и квантового суперзарядов.

Выведенные таким образом квантовые гамильтониан и суперзаряды (в третьей части книги мы на многих примерах увидим, как эта процедура работает) должны удовлетворять той же алгебре, что и генераторы (7.5) и (7.6).

Если гамильтониан \hat{H} , действующий на гильбертовом пространстве нашей квантовой системы, положительно определён (а если спектр гамильтониана ограничен снизу, что мы предполагаем, этого всегда можно добиться, добавив при необходимости к гамильтониану константу), из алгебры (7.7) следует, что спектр \hat{Q} вещественен, т.е. суперзаряд \hat{Q} эрмитов. Это, в частности, относится к оператору $\sigma \cdot (\hat{P} - eA/c)$, чей квадрат даёт гамильтониан Паули (5.14).

Как мы уже отмечали в главе 5, из положительно определённого гамильтониана всегда можно извлечь квадратный корень, и алгебра (7.7) слишком мала и слишком бедна, чтобы привести к нетривиальным динамическим последствиям.

Мы всё же обсуждаем детально случай $\mathcal{N} = 1$. На это есть две причины.

1. Суперпространство (t, θ) самое простое. Поняв его конструкцию, легко будет понять всё остальное.
2. Хотя сама по себе симметрия $\mathcal{N} = 1$ и не приводит к интересным эффектам, $\mathcal{N} = 1$ суперполя (о которых очень скоро пойдёт речь) представляют удобный технический инструмент, которым теоретику полезно уметь пользоваться. Насколько нам известно, $\mathcal{N} = 1$, $d = 1$ суперполя были впервые введены в работе [67] для описания одномерной супергравитации. Мы будем их использовать в главе 9, чтобы описать на суперсимметричном языке общую комплексную геометрию и в главе 12, чтобы записать общее суперсимметричное действие СКМ для моделей би-НКТ¹ и найти условия, когда оно сводится к действию НКТ.

Чтобы вывести в суперпространственном подходе выражения для лагранжианов (а затем гамильтонианов и суперзарядов) в виде конкретных функций динамических переменных, необходимо определить понятие суперпеременных, или суперполей.

Определение 7.2. Суперполе $\mathcal{N} = 1$ — это функция

$$\mathcal{X}(t, \theta) = x(t) + i\theta\Psi(t). \quad (7.8)$$

Обычная динамическая переменная $x(t)$ и грассманова динамическая переменная $\Psi(t)$ суть его бозонная и фермионная компоненты².

Преобразования (7.1) суперпространственных координат индуцируют преобразование

$$\delta\mathcal{X} = i\epsilon\hat{Q}\mathcal{X}, \quad (7.9)$$

или в компонентах:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= i\epsilon\Psi(t), \\ \delta\Psi(t) &= -\epsilon\dot{x}(t). \end{aligned} \quad (7.10)$$

¹Читатель узнает, что это такое, в главе 10.

²Мы продолжаем использовать эту физическую терминологию, хотя, как отмечалось, в механических системах не очень хорошо говорить о бозонах и фермионах — полный смысл эти понятия имеют только в полевых теориях.

Переменные $x(t)$ и $\Psi(t)$ могут быть, вообще говоря, комплексными, но можно наложить связь $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}$, которая делает их вещественными³. Эта связь совместима с законом преобразования (7.10). Можно сказать, что вещественное суперполе $\mathcal{X}(t, \theta)$ представляет неприводимое представление⁴ супералгебры (7.7).

Теорема 7.2. Пусть \mathcal{X}_M — набор вещественных суперполей, которые обращаются в ноль при $t = \pm\infty$. Функционал⁵

$$S = \int d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dt F(\mathcal{X}_M) \quad (7.11)$$

инвариантен относительно преобразований (7.1).

Доказательство. Если \mathcal{X}_M — суперполя, то $F(\mathcal{X}_M)$ — также суперполе: его закон преобразования такой же, как в (7.9). Мы выводим:

$$\delta S = \epsilon \int d\theta dt \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} + i\theta \frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0. \quad (7.12)$$

Действительно, второй член включает временной интеграл от полной временной производной и обращается в ноль. А первый член исчезает ввиду свойства (4.47). \square

Предположим, что у нас имеется всего одно вещественное суперполе \mathcal{X} . Подставив (7.8) в (7.11) и проинтегрировав по $d\theta$, мы можем выразить функционал (7.11) через компоненты:

$$S = i \int F'[x(t)] \Psi(t) dt. \quad (7.13)$$

Это выражение не содержит временных производных, грасманово-нечётно, и оно не может играть роль действия динамической системы. Более интересные выражения получаются, если

³Вот почему мы выбрали заглавное Ψ для обозначения грасмановой компоненты \mathcal{X} — чтобы отличить её от комплексных фермионных переменных, которые войдут в разложения (7.23) и т. п. для суперполей $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$.

⁴Заметьте, что мы говорим сейчас о бесконечномерных представлениях. Конечномерные представления супералгебр обсуждались в главе 5: дублет вырожденных состояний в алгебре $\mathcal{N} = 2$, квартет вырожденных состояний в алгебре $\mathcal{N} = 4$ и т. д.

⁵Интеграл Березина $\int d\theta$, фигурирующий в (7.11), был определён в уравнении (4.45).

ввести оператор

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\theta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (7.14)$$

который называется *суперсимметричной ковариантной производной*. Он обладает важным свойством.

Теорема 7.3. *Если \mathcal{X} — вещественное суперполе, то $i\mathcal{D}\mathcal{X}$ — тоже вещественное суперполе, преобразующееся так же, как \mathcal{X} под действием (7.9).*

Доказательство. Действительно, операторы (7.6) и (7.14) антикоммутируют. Инфинитезимальная вариация \mathcal{X} под действием (7.9) есть по определению $\delta\mathcal{X} = i\epsilon\hat{Q}\mathcal{X}$. Тогда вариация $\mathcal{D}\mathcal{X}$ есть

$$\delta(\mathcal{D}\mathcal{X}) = \mathcal{D}(\delta\mathcal{X}) = \mathcal{D}(i\epsilon\hat{Q}\mathcal{X}) = i\epsilon\hat{Q}(\mathcal{D}\mathcal{X}) \quad (7.15)$$

— тот же закон, что и для \mathcal{X} . Вещественность $i\mathcal{D}\mathcal{X} = -\Psi + \theta\dot{\mathcal{X}}$ очевидна⁶. \square

Разумеется, временная производная суперполя \mathcal{X} — это тоже суперполе. Это следует из условия $[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$ или иначе из равенства $\mathcal{D}^2 = -i\partial/\partial t$ и из только что доказанной теоремы. Таким образом, функционал

$$S = \int d\theta dt F(\mathcal{X}_M, \dot{\mathcal{X}}_M, \mathcal{D}\mathcal{X}_M) \quad (7.16)$$

есть суперсимметричный инвариант.

Простейший пример, дающий динамическую систему, — это

$$S = \frac{i}{2} \int d\theta dt \dot{\mathcal{X}}\mathcal{D}\mathcal{X}. \quad (7.17)$$

Подставив сюда (7.8) и проинтегрировав по $d\theta$, мы получаем систему с лагранжианом

$$L = \frac{\dot{\mathcal{X}}^2}{2} - \frac{i}{2}\dot{\Psi}\Psi. \quad (7.18)$$

Его бозонная часть описывает свободное движение вдоль оси x .

⁶Специфическая черта суперполя $\mathcal{D}\mathcal{X} = i(\Psi - \theta\dot{\mathcal{X}})$ — это, однако, грассманова природа его нижней, не зависящей от θ компоненты. Подобные грассмановы $\mathcal{N} = 1$ и $\mathcal{N} = 2$ суперполя встретятся нам также в последующих главах.

§ 7.2. $\mathcal{N} = 2$

Рассмотрим теперь суперпространство, включающее время t и комплексную грассманову переменную θ . Суперпреобразования координат определяются здесь так:

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta + \epsilon, \\ \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta} + \bar{\epsilon}, \\ t &\rightarrow t + i(\epsilon\bar{\theta} - \theta\bar{\epsilon})\end{aligned}\tag{7.19}$$

с комплексным грассмановым ϵ . Удобно представить элемент супергруппы в виде

$$g(\alpha, \epsilon, \bar{\epsilon}) = \exp\{i[\alpha\hat{H} + \sqrt{2}(\epsilon\hat{Q} + \bar{\epsilon}\hat{\bar{Q}})]\},\tag{7.20}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right), \\ \hat{\bar{Q}} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\end{aligned}\tag{7.21}$$

и $\hat{H} = -i\partial/\partial t$. Суперзаряды (7.21) подчиняются алгебре (5.1), так что мы встали на правильную лыжню, которая приведёт нас к суперпространственному описанию суперсимметричных моделей главы 5.

Введём также ковариантные производные

$$\begin{aligned}D &= \frac{\partial}{\partial\theta} - i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}, \\ \bar{D} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}\tag{7.22}$$

D и \bar{D} нильпотентны и антикоммутируют как с \hat{Q} , так и с $\hat{\bar{Q}}$.

Суперполе $\mathcal{N} = 2$ общего вида представимо как

$$Z = z + \chi\theta + \psi\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}F,\tag{7.23}$$

где z и F — комплексные бозонные, а ψ и χ — комплексные фермионные переменные. Заметим, что число бозонных и фермионных переменных в разложении (7.23) совпадает.

Теорема 7.4. *Последнее свойство справедливо для всех суперполей.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное суперполе $\Phi(t, \theta_\alpha)$, зависящее от t и нескольких грассмановых координат $\theta_{\alpha=1, \dots, n}$.

Ясно, что его разложение по θ содержит всего 2^n компонент (2^{n+1} вещественных компонент, если Φ комплексно). Половина членов разложения включает грасманово-чётные мономы $\theta_{\alpha_1} \dots \theta_{\alpha_{2k}}$, а другая половина — грасманово-нечётные мономы. \square

Как и в случае $\mathcal{N} = 1$, преобразования суперкоординат (7.19) влекут за собой преобразования суперполей:

$$\delta Z = i\sqrt{2}(\epsilon\hat{Q} + \bar{\epsilon}\hat{\bar{Q}})Z. \quad (7.24)$$

Однако (7.23) не является неприводимым представлением супералгебры (5.1). Неприводимые представления строятся наложением определённых связей на Z . Прежде всего, можно наложить связь $Z = \bar{Z}$, что даёт вещественное $\mathcal{N} = 2$ суперполе:

$$X = x + \theta\psi + \bar{\psi}\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}F \quad (7.25)$$

с вещественными x, F . Вещественное суперполе остаётся вещественным после суперпреобразования (7.24).

Суперполе X имеет компоненты на трёх уровнях: (i) вещественная бозонная компонента x , представляющая нулевой член разложения по θ , (ii) фермионные компоненты ψ и $\bar{\psi}$, отвечающие линейным членам разложения, и (iii) вещественная бозонная компонента F при квадратичном члене. Пользуясь удобной терминологией, предложенной в [68], мы можем поставить в соответствие этому супер полю числа **(1, 2, 1)** — количество вещественных степеней свободы в нулевом, линейном и квадратичном секторах⁷.

Теорема 7.5. *Суперполе (7.25) неприводимо. На него нельзя наложить дополнительных, совместных с суперсимметрией связей.*

Доказательство. Это следует из того факта, что каждое полевое представление алгебры $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии должно включать по крайней мере две бозонных и две фермионных компоненты. Действительно: возьмём какую-либо бозонную компоненту и подействуем на неё двумя различными имеющимися в алгебре суперзарядами. Мы получим две различные

⁷А суперполе $\mathcal{N} = 1$ с компонентным разложением (7.8) есть, очевидно, в этих терминах суперполе **(1, 1)**!

фермионные компоненты. А исходя из фермионной компоненты мы получим две бозонных. Суперполе (7.25) насыщает этот минимум, и число компонент уменьшить далее нельзя. \square

Это рассуждение применимо также к суперполям (7.28) и (7.29), которые обсуждаются ниже. Они также неприводимы.

Суперпреобразования компонент (7.25), индуцированные преобразованием (7.24), имеют вид

$$\begin{aligned}\delta x &= \epsilon\psi - \bar{\epsilon}\bar{\psi}, \\ \delta\psi &= \bar{\epsilon}(F - i\dot{x}), \\ \delta\bar{\psi} &= \epsilon(F + i\dot{x}), \\ \delta F &= -i(\epsilon\dot{\psi} + \bar{\epsilon}\dot{\bar{\psi}}).\end{aligned}\tag{7.26}$$

Можно заметить: вариация некоторой компоненты суперполя X содержит его следующую компоненту (ψ и $\bar{\psi}$ в вариации δx и F в вариациях $\delta\psi$ и $\delta\bar{\psi}$) и также временную производную его предыдущей компоненты. Этот общий паттерн имеет место также для более сложных суперполей, которые мы будем далее обсуждать. В частности, суперсимметричная вариация высшей суперполевой компоненты есть всегда полная временная производная.

Единственное неприводимое бозонное $\mathcal{N} = 1$ суперполе — это вещественное суперполе (7.8). Но случай $\mathcal{N} = 2$ богаче: наряду с вещественным суперполем (7.25), имеются ещё два неприводимых представления алгебры (5.1).

Определение 7.3. Голломорфное киральное $\mathcal{N} = 2$ суперполе Z есть общее суперполе (7.23), удовлетворяющее условию $\bar{D}Z = 0$. Антиголоморфное киральное $\mathcal{N} = 2$ суперполе \bar{Z} есть общее суперполе (7.23) удовлетворяющее условию⁸ $D\bar{Z} = 0$.

Принимая во внимание, что $\{\bar{D}, \hat{Q}\} = \{D, \hat{Q}\} = 0$, мы убежда-

⁸На физическом жаргоне эти поля называются «левыми киральными» и «правыми киральными». Эта терминология пришла из полевых теорий, где слова «левый» и «правый» имеют физический смысл: частица, представляющая элементарное возбуждение кирального поля, несимметрична относительно зеркальных отражений так же, как правая и левая рука (слово *киральный* происходит из древнегреческого корня $\chi\epsilon\rho$ — *рука*). Но понятия «левый» и «правый» не имеют, конечно, особого смысла для механических систем, и мы попытаемся воздержаться от их употребления, оставив, однако, их следы в обозначениях t_L и t_R .

емся, что если Z голоморфно-кирально, то его вариация (7.24) также голоморфно-киральна. То же справедливо для антиголоморфных полей.

Связь $\bar{D}Z = 0$ убивает половину степеней свободы. Общий вид Z , удовлетворяющего этому условию, есть⁹

$$Z = z + \sqrt{2}\theta\psi - i\theta\bar{\theta}\dot{z}. \quad (7.27)$$

Как мы видим, член $\propto \bar{\theta}$ теперь отсутствует, а член $\propto \theta\bar{\theta}$ более не независим, а связан с временной производной низшего члена.

Технически удобно ввести понятие «голоморфного времени» $t_L = t - i\theta\bar{\theta}$. Под действием преобразований суперсимметрии оно переходит в $t_L - 2i\theta\bar{\epsilon}$ и «не чувствует» наличие $\bar{\theta}$. Ковариантная производная \bar{D} сводится в базисе $(t_L, \theta, \bar{\theta})$ просто к $-\partial/\partial\bar{\theta}$, и решения уравнения $\bar{D}Z = 0$ — это произвольные функции, не зависящие от $\bar{\theta}$:

$$Z = Z(t_L, \theta) = z(t_L) + \sqrt{2}\theta\psi(t_L). \quad (7.28)$$

Аналогично решения уравнения $D\bar{Z} = 0$ суть

$$\bar{Z} = \bar{Z}(t_R, \bar{\theta}) = \bar{z}(t_R) - \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(t_R), \quad (7.29)$$

куда входит $t_R = \bar{t}_L = t + i\theta\bar{\theta}$.

Определение 7.4. Координаты (t_L, θ) описывают голоморфное киральное суперпространство $\mathcal{N} = 2$, а координаты $(t_R, \bar{\theta})$ описывают антиголоморфное киральное суперпространство $\mathcal{N} = 2$.

Низший бозонный член в разложении (7.28) или (7.29) включает две вещественных степени свободы, линейные члены $\propto \theta$ или $\propto \bar{\theta}$ дают две вещественных фермионных степени свободы, а квадратичного члена нет вовсе. Мы имеем дело с суперполями типа $(2, 2, 0)$.

Суперпреобразования компонент (7.28) и (7.29), индуцированные (7.24), имеют вид

$$\begin{aligned} \delta z &= \sqrt{2}\epsilon\psi, & \delta\psi &= -i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\dot{z}, \\ \delta\bar{z} &= -\sqrt{2}\bar{\epsilon}\bar{\psi}, & \delta\bar{\psi} &= i\sqrt{2}\epsilon\dot{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

⁹Множитель $\sqrt{2}$ — удобная конвенция.

Они совпадают с преобразованиями (5.53) с точностью до несущественного фактора $\sqrt{2}$!

Помимо вещественного суперполя (7.25) и киральных суперполей (7.28), (7.29), не существует других неприводимых бесконечномерных представлений алгебры суперсимметрии $\mathcal{N} = 2$. Это утверждение нетривиально. Как мы увидим в главе 9 (см. обсуждение после теоремы 9.4), оно по сути дела следует из теоремы 2.6 (теоремы Ньюландера—Ниренберга).

Чтобы вывести в суперпространственном подходе лагранжиан задачи Ландау (5.52), надо написать подходящее суперполевое действие. Согласно очевидному обобщению теоремы 7.2 на случай $N > 1$, полный суперпространственный интеграл от произвольного суперполя есть инвариант суперпреобразований. Чтобы действие было вещественно, это суперполе тоже должно быть вещественным¹⁰.

Существует много способов соорудить вещественное суперполе из кирального суперполя (7.27). Можно просто умножить Z на \bar{Z} — произведение $Z\bar{Z}$, очевидно, вещественно. Но чтобы получить нетривиальную динамику, необходимо достать из нашей сумки с инструментами также ковариантные производные D и \bar{D} . Как и в случае $\mathcal{N} = 1$, эти операторы, действуя на суперполе, дают суперполе. Но тип суперполя при этом меняется: ввиду нильпотентности D и \bar{D} , $D\Phi$ — антиголоморфное киральное, а $\bar{D}\Phi$ — голоморфное киральное суперполе для любого Φ . Можно убедиться в том, что действие¹¹

$$S = \int d\bar{\theta} d\theta dt \left(\frac{1}{4} \bar{D}\bar{Z} DZ - \frac{B}{2} Z\bar{Z} \right) \quad (7.31)$$

даёт желаемое и соответствующий компонентный лагранжиан

¹⁰Вообще говоря, существует также альтернатива: можно написать интеграл от кирального суперполя по киральному суперпространству и добавить комплексно-сопряжённое выражение [см. ниже уравнение (7.49)]. Но таким образом мы не получим гамильтониан Ландау.

¹¹Заметим, что интеграл $\int d\bar{\theta} d\theta X$ совпадает со старшей компонентой суперполя (7.25). Именно так предлагается строить суперсимметричные действия в учебнике [69]: сконструируйте какое-либо вещественное суперполе из имеющихся в наличии базисных суперполей и выделите старшую компоненту в его разложении по θ .

совпадает с точностью до полной производной с лагранжианом (5.52).

Уравнения (5.52) и (7.31) — два различных способа представить одну и ту же суперсимметричную систему. В первом случае лагранжиан выражен в компонентах, и, чтобы показать, что он суперсимметричен, необходимо явно проверить инвариантность лагранжиана относительно преобразований (5.53). С другой стороны, суперсимметрия действия (7.31) есть следствие теоремы 7.2 (его обобщения для высших \mathcal{N}). Закон преобразования компонент следует из закона преобразования суперпространственных координат (7.19). Инвариантность получающегося лагранжиана можно при желании проверить, но это факультативно. Суперпространственный подход даёт, если угодно, «индустриальный» метод получения суперсимметричных лагранжианов без больших усилий — как метод математического анализа, разработанный в современной форме Ньютоном и Лейбницем, позволил вычислить «на коленке» объём шара, решить задачу, впервые решённую Архимедом с помощью замысловатой геометрической конструкции.

Помимо компонентного описания и описания в терминах $\mathcal{N} = 2$ суперполей, задача Ландау допускает также третий промежуточный способ описания. Положим

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}}, \quad \psi = \frac{\Psi_1 + i\Psi_2}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \theta = i \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}} \quad (7.32)$$

и выразим суперполе (7.27) в следующем виде:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\theta_2 \mathcal{D}_1)(\mathcal{X}_1 + i\mathcal{X}_2), \quad (7.33)$$

где $\mathcal{X}_{1,2} = x_{1,2} + i\theta_1 \Psi_{1,2}$ — суперполя $\mathcal{N} = 1$ и \mathcal{D}_1 — ковариантные производные $\mathcal{N} = 1$, выписанные в уравнении (7.14).

Заменяя в (7.31) $d\bar{\theta} d\theta$ на¹² $-i d\theta_1 d\theta_2$, проинтегрировав по $d\theta_2$ и переобозначив $\theta_1 \rightarrow \theta$, мы можем переписать действие в

¹²Заметим, что если $\theta = i(\theta_1 + i\theta_2)/\sqrt{2}$, мы должны определить $d\theta = -i(d\theta_1 - i d\theta_2)/\sqrt{2}$, чтобы обеспечить одновременно $\int d\theta \theta = 1$ и $\int d\theta_{1,2} \theta_{1,2} = 1$. Тогда $D = -i(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2)/\sqrt{2}$.

виде

$$S = \frac{i}{2} \int d\theta dt \dot{\chi}_M \mathcal{D}\chi_M - \frac{iB}{2} \varepsilon_{MN} \int d\theta dt \chi_M \mathcal{D}\chi_N. \quad (7.34)$$

Переходя к компонентам, получаем

$$L = \frac{1}{2} \dot{\chi}_M^2 - \frac{i}{2} \dot{\Psi}_M \Psi_M + \frac{B}{2} \varepsilon_{MN} (\dot{\chi}_M x_N + i\Psi_M \Psi_N), \quad (7.35)$$

что эквивалентно (5.52).

В выражении (7.34) θ вещественно, и преобразование (7.10) компонент суперполя $\mathcal{N} = 1$ даёт одно из двух вещественных преобразований суперсимметрии, фигурирующих в (7.30): $\varepsilon_{\mathcal{N}=1} = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\varepsilon_{\mathcal{N}=2})$. А другое преобразование с вещественным грассмановым параметром η (действительная часть $\sqrt{2} \varepsilon_{\mathcal{N}=2}$) реализуется как

$$\delta \chi_M = \eta \varepsilon_{MN} \mathcal{D}\chi_N. \quad (7.36)$$

Можно явно убедиться, что (7.36) — симметрия действия, используя тождество $D^2 = -i\partial/\partial t$. Часто такое смешанное описание, когда часть суперсимметричных преобразований реализуется как преобразования суперпространства, а другая часть — как преобразования суперполей, оказывается весьма удобным. Мы неоднократно встретимся с ним в дальнейшем.

На двух последних страницах мы обсуждали задачу Ландау с однородным магнитным полем. Но мы можем также заменить $BZ\bar{Z}/2$ в уравнении (7.31) на любую вещественную функцию $F(\bar{Z}, Z)$ и получить систему с неоднородным магнитным полем

$$B(z, \bar{z}) = 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (7.37)$$

Гамильтониан этой системы был выписан ранее в уравнении (6.65).

Чтобы вывести лагранжиан (5.48) для модели Виттена, нужно взять вещественное $\mathcal{N} = 2$ суперполе (7.25) и записать

$$\begin{aligned} L &= \int d\bar{\theta} d\theta \left[\frac{1}{2} \bar{D}X DX - W(X) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + F^2) - i\dot{\psi}\bar{\psi} - W''(x)\psi\bar{\psi} - FW'(x). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Это напоминает лагранжиан (5.48), но не совпадает с ним полностью: лагранжиан (7.38) зависит от дополнительной переменной F , отсутствовавшей в (5.48). Заметим, однако, что F является *вспомогательной* нединамической переменной: она входит в лагранжиан без производных, и соответствующее уравнение движения — это просто

$$\frac{\partial L}{\partial F} = F - W'(x) = 0. \quad (7.39)$$

Оно имеет тривиальное решение $F = W'(x)$. Подставив это решение в (7.38), мы воспроизведём (5.48). Прделав то же самое для суперпреобразования (7.26), мы воспроизведём (5.49).

Тот факт, что F можно алгебраически исключить, связан с конкретным выбором лагранжиана (7.38). Если написать более сложный лагранжиан, включающий дополнительные временные производные наподобие

$$L = \int d\bar{\theta} d\theta DX \bar{D}\dot{X}, \quad (7.40)$$

поле F стало бы динамическим: в компонентном лагранжиане появилась бы зависимость от \dot{F} [49].

Последний комментарий этого параграфа касается суперсимметричного осциллятора. В прошлой главе мы вначале описали его с использованием голоморфных бозонных переменных a, \bar{a} и затем заметили, что та же самая система, выраженная через обычные переменные (x, p) , имеет гамильтониан (5.29) и представляет частный случай модели Виттена. Здесь мы показали, как этот последний гамильтониан и соответствующий компонентный лагранжиан можно вывести в рамках суперполевого подхода. Но мы не знаем, как непосредственно вывести через суперполя лагранжиан (5.46), включающий переменные a, \bar{a} . Проблема в том, что преобразования суперсимметрии (5.47) не содержат временных производных, как это всегда бывает в законах преобразования суперполевых компонент.

§7.3. $\mathcal{N} = 4$

Рассмотрим суперпространство, включающее t и две комплексные грассмановы переменные θ_j и их сопряжённые $\bar{\theta}^j$.

Они преобразуются по суперсимметрии следующим образом:

$$\begin{aligned}\theta_j &\rightarrow \theta_j + \epsilon_j, \\ \bar{\theta}^j &\rightarrow \bar{\theta}^j + \bar{\epsilon}^j, \\ t &\rightarrow t + i(\epsilon_j \bar{\theta}^j + \bar{\epsilon}^j \theta_j).\end{aligned}\tag{7.41}$$

Генераторы этих преобразований,

$$\begin{aligned}\hat{Q}^j &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} + i \bar{\theta}^j \frac{\partial}{\partial t} \right), \\ \hat{\bar{Q}}_j &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^j} + i \theta_j \frac{\partial}{\partial t} \right),\end{aligned}\tag{7.42}$$

удовлетворяют расширенной алгебре суперсимметрии (5.36). Ковариантные производные

$$\begin{aligned}D^j &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} - i \bar{\theta}^j \frac{\partial}{\partial t}, \\ \bar{D}_j &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^j} + i \theta_j \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}\tag{7.43}$$

удовлетворяют изоморфной алгебре,

$$\{D^j, D^k\} = \{\bar{D}_j, \bar{D}_k\} = 0, \quad \{D^j, \bar{D}_k\} = 2i \delta_k^j \frac{\partial}{\partial t},\tag{7.44}$$

и антикоммутируют со всеми суперзарядами.

Общее комплексное $\mathcal{N} = 4$ суперполе включает много членов в разложении по θ (вплоть до $\sim \theta^4$) и $16 + 16$ вещественных бозонных и фермионных компонент. Это представление алгебры (5.36) далеко не неприводимо. В $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве есть всего одно неприводимое суперполе (7.8). В $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве присутствуют неприводимые суперполя двух типов: вещественное и киральные.

В $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве имеются несколько типов неприводимых суперполей. Каждое из них содержит четыре вещественные бозонные компоненты и столько же фермионных.

7.3.1. Суперполе (2, 4, 2)

Прямое обобщение $\mathcal{N} = 2$ киральных суперполей, обсуждавшихся в предыдущем параграфе, представляют $\mathcal{N} = 4$ киральные суперполя.

Определение 7.5. Голоморфное киральное $\mathcal{N} = 4$ суперполе есть общее $\mathcal{N} = 4$ суперполе \mathcal{Z} , удовлетворяющее условию $\bar{D}_j \mathcal{Z} = 0$. Антиголоморфное киральное $\mathcal{N} = 4$ суперполе удовлетворяет условию $D^j \mathcal{Z} = 0$.

Если мы введём голоморфное время

$$t_L = t - i\theta_j \bar{\theta}^j, \quad (7.45)$$

связь $\bar{D}_j \mathcal{Z} = 0$ переписывается как

$$\partial \mathcal{Z} / \partial \bar{\theta}^j \Big|_{\text{при фикс. } t_L} = 0.$$

В этом базисе голоморфное киральное суперполе не зависит от $\bar{\theta}^j$ и содержит в разложении только три члена¹³:

$$\mathcal{Z}(t_L, \theta_j) = z(t_L) + \sqrt{2} \theta_j \psi^j(t_L) + 2 \theta_1 \theta_2 F(t_L). \quad (7.46)$$

Поле $z(t_L)$ содержит две вещественные бозонные компоненты, две вещественные бозонные компоненты содержит квадратичный член $\sim \theta^2$, а линейные по θ члены дают ещё четыре вещественные фермионные компоненты. Это суперполе типа **(2, 4, 2)**.

Антиголоморфное киральное суперполе имеет аналогичную структуру. Оно может быть представлено как

$$\bar{\mathcal{Z}}(t_R, \bar{\theta}^j) = \bar{z}(t_R) + \sqrt{2} \bar{\theta}^j \bar{\psi}_j(t_R) + 2 \bar{\theta}^2 \bar{\theta}^1 \bar{F}(t_R), \quad (7.47)$$

где

$$t_R = \bar{t}_L = t + i\theta_j \bar{\theta}^j. \quad (7.48)$$

Поле (7.46) живёт в голоморфном киральном $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве, а поле (7.47) — в антиголоморфном киральном $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве.

Рассмотрим систему

$$S = \frac{1}{4} \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt \bar{\mathcal{Z}}(t_R, \bar{\theta}) \mathcal{Z}(t_L, \theta) + \frac{1}{2} \int d^2 \theta dt_L W(\mathcal{Z}) + \frac{1}{2} \int d^2 \bar{\theta} dt_R \overline{W(\mathcal{Z})}, \quad (7.49)$$

¹³Вспомним, что индексы поднимаются и опускаются согласно (5.37). При комплексном сопряжении ψ_j переходит в $\bar{\psi}^j$ — та же конвенция, что для θ_j . Отсюда следует, что $\bar{\theta}_j = -\bar{\theta}^j$ и $\bar{\psi}_j(t_R) = -\bar{\psi}^j(t_L)$.

где

$$d^2\theta = d\theta_1 d\theta_2, \quad d^2\bar{\theta} = d\bar{\theta}^2 d\bar{\theta}^1 \quad (7.50)$$

и $W(\mathcal{Z})$ — произвольная голоморфная функция. Первый член в (7.49) содержит интеграл по всему суперпространству, а второй и третий члены представляют интегралы по киральным суперпространствам (t_L, θ) и $(t_R, \bar{\theta})$. Все эти интегралы — суперсимметричные инварианты.

Подставив сюда (7.46), (7.47), (7.45) и (7.48), проинтегрировав по $d^4\theta$ [интегрируя первый член, следует принять во внимание, что \mathcal{Z} и $\bar{\mathcal{Z}}$ зависят от разных аргументов, и нужно вначале разложить $z(t_L) = z - i\theta_j \bar{\theta}^j \dot{z} - (\theta_j \bar{\theta}^j)^2 \ddot{z}/2$ и аналогично для $z(t_R)$] и опустив некоторые полные временные производные, мы получаем

$$L = \dot{z}\dot{\bar{z}} + F\bar{F} - \frac{i}{2}(\dot{\psi}_j \bar{\psi}^j - \psi_j \dot{\bar{\psi}}^j) - \\ - FW'(z) - \bar{F}\overline{W'(z)} + W''(z)\psi_1\psi_2 + \overline{W''(z)}\bar{\psi}^2\bar{\psi}^1. \quad (7.51)$$

Мы видим, что переменные F и \bar{F} не динамичны. Их можно исключить, заменив на решения $F = \overline{W'(z)}$, $\bar{F} = W'(z)$ соответствующих (чисто алгебраических) лагранжевых уравнений движения. Прделав это и перейдя к классическому и затем к квантовому гамильтониану, мы приходим к

$$\hat{H} = \hat{\pi}\hat{\pi}^\dagger + W'(z)\overline{W'(z)} - W''(z)\psi_1\psi_2 - \overline{W''(z)}\hat{\psi}^2\hat{\psi}^1. \quad (7.52)$$

Если выбрать кубический суперпотенциал $W(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}^3/3$, этот гамильтониан совпадёт с гамильтонианом (5.39) из главы 5. Фактически только что описанная система есть не что иное, как квантово-механическая версия суперсимметричной полевой теории — модели Весса—Зумино [70].

Чтобы определить киральные $\mathcal{N} = 4$ суперполя, мы накладывали связи $\bar{D}_j \mathcal{Z} = 0$ или $D^j \mathcal{Z} = 0$. Но можно также наложить «смешанную» связь наподобие

$$D^2 \mathcal{Z} = \bar{D}_1 \mathcal{Z} = 0. \quad (7.53)$$

Суперполе, удовлетворяющее условию (7.53), можно назвать «твистованным» или «зеркальным» киральным суперполем. Если действие модели включает только такие зеркальные поля и

их комплексные сопряжения, это не даёт ничего нового — при простом переопределении $\theta_2 \leftrightarrow \bar{\theta}^2$ поле \mathcal{Z} становится обыкновенным голоморфным киральным суперполем. Нетривиальные системы возникают, когда действие содержит суперполя обоих типов. Такие модели были впервые построены в теоретико-полевым контексте в работе [71]. Различные модели СКМ, включающие как обыкновенные, так и зеркальные суперполя (2, 4, 2), изучались в [72]. Мы будем их подробно обсуждать в главе 10.

7.3.2. Суперполя (3, 4, 1) и (4, 4, 0)

Число фермионных компонент в неприводимом суперполе $\mathcal{N} = 4$ равно четырём. То же относится к бозонным компонентам, но не все из них обязательно динамические. В только что разобранным примере имелось две динамические и две вспомогательные степени свободы. Но существуют также суперполя с любым другим динамическо-вспомогательным распределением. Мы подробно обсудим два таких суперполя: суперполе (3, 4, 1) и суперполе (4, 4, 0).

Наложим на общее $\mathcal{N} = 4$ суперполе V условие вещественности, $V = \bar{V}$. У нас останется 8 бозонных и 8 фермионных вещественных компонент. Рассмотрим теперь суперполе

$$\Phi_{jk} = i(D_j \bar{D}_k + D_k \bar{D}_j)V. \quad (7.54)$$

Оно удовлетворяет условию псевдовещественности,

$$\overline{\Phi_{jk}} = \varepsilon^{jl} \varepsilon^{kp} \Phi_{lp}, \quad (7.55)$$

и также условию

$$D_p \Phi_{jk} + D_j \Phi_{kp} + D_k \Phi_{pj} = 0. \quad (7.56)$$

И обратно, можно показать, что любое симметричное по перестановке $j \leftrightarrow k$ комплексное $\mathcal{N} = 4$ суперполе Φ_{jk} , удовлетворяющее связям (7.55) и (7.56), может быть представлено в виде (7.54).

Замечательно то, что Φ_{jk} не меняется при замене

$$V \rightarrow V + \mathcal{Z} + \bar{\mathcal{Z}}, \quad (7.57)$$

где \mathcal{Z} — киральное суперполе (2, 4, 2) из предыдущего подраздела. Это следует из тождеств $\bar{D}_j \mathcal{Z} = D_j \bar{\mathcal{Z}} = 0$ и $\{D_j, \bar{D}_k\} = 2i\varepsilon_{jk} \partial/\partial t$.

Киральное суперполе содержит, как мы знаем, 4 бозонные и 4 фермионные компоненты. Чтобы определить количество независимых компонент в Φ_{jk} , надо *вычесть* эти числа из $8 + 8$ компонент вещественного суперполя V . Остаётся $4 + 4$ компоненты; это означает, что суперполе Φ_{jk} неприводимо.

Преобразование (7.57) есть не что иное, как *суперкалибровочная симметрия*. Читатель-физик, который уже имел до того, как взял в руки эту книгу, некоторое представление о суперсимметрии, мог встретить это преобразование (его теоретико-полевую версию), например, в главе 6 стандартного учебника по суперсимметрии [69]. Фактически суперполе V является квантово-механическим аналогом вещественного 4-мерного суперполя [75]¹⁴.

Не случайно таким образом, что первый пример системы СКМ, основанной на суперполе Φ_{jk} , был найден (в компонентной форме) как эффективный гамильтониан 4-мерной суперсимметричной калибровочной полевой теории, помещённой в маленький пространственный ящик [73]. Его суперполевое описание было построено в работе [74].

Чтобы представить независимые компоненты суперполя Φ_{jk} в явной форме, удобно использовать свободу (7.57) и привести V к виду (так называемая *калибровка Весса—Зумино*)

$$V = -\frac{1}{2}A_M \bar{\theta} \sigma_M \theta + (\psi \theta + \bar{\psi} \bar{\theta}) \bar{\theta} \theta + F \theta_1 \theta_2 \bar{\theta}^2 \bar{\theta}^1 \quad (7.58)$$

с вещественными A_M и F и комплексным ψ_j . Сокращённые обозначения в этом уравнении расшифровываются как

$$\bar{\theta} \sigma_M \theta \equiv \bar{\theta}^j (\sigma_M)_j^k \theta_k, \quad \bar{\theta} \theta \equiv \bar{\theta}^j \theta_j, \quad \psi \theta \equiv \psi^j \theta_j, \quad \bar{\psi} \bar{\theta} \equiv \bar{\psi}_j \bar{\theta}^j. \quad (7.59)$$

Удобно выразить псевдовещественные суперполя Φ_{jk} через триплет вещественных суперполей

$$\Phi_M = \frac{i}{2} (\sigma_M)^{jk} \Phi_{jk}, \quad \Phi_{jk} = -i (\sigma_M)_{jk} \Phi_M, \quad (7.60)$$

¹⁴Что касается суперполя Φ_{jk} [точнее — Φ_M из уравнения (7.60)], оно является квантово-механическим аналогом так называемой *суперсвязности* Γ_μ (см. например [76]), её пространственных компонент. В 4-мерной теории Γ_μ зависит от калибровки, но в одномерном случае Φ_M есть калибровочный инвариант.

где матрицы $(\sigma_M)^{jk}$ и $(\sigma_M)_{jk}$ были определены в (3.16). В этих терминах связь (7.56) приобретает вид

$$D_s \Phi_M = \frac{i}{2} \varepsilon_{MNP} (\sigma_P)_s^j D_j \Phi_N. \quad (7.61)$$

Решение этого уравнения есть

$$D_s \Phi_M = (\sigma_M)_{sq} \bar{\mathcal{W}}^q \quad (7.62)$$

с произвольным $\bar{\mathcal{W}}^q$. Иными словами, связь (7.56) устраняет в $D_s \Phi_M$ структуру со спином 3/2.

Черта в $\bar{\mathcal{W}}^q$ указывает на то, что мы имеем дело с парой антиголоморфных киральных суперполей. Антиголоморфность следует не из (7.61), а из определений (7.54) и (7.60). Но этот факт не столь важен. Выполняется также тождество

$$\bar{D}^s \Phi_M = (\sigma_M)^{sq} \mathcal{W}_q \quad (7.63)$$

с голоморфным \mathcal{W}_q . Суперполе Φ_M как бы находится посередине качелей, взирая на качающиеся на них [77] \mathcal{W}_q и $\bar{\mathcal{W}}^q$ — одномерные аналоги известных 4-мерных суперполей \mathcal{W}_α и $\bar{\mathcal{W}}_{\dot{\alpha}}$.

Компонентное разложение Φ_M имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_M = & A_M + \psi \sigma_M \theta - \bar{\theta} \sigma_M \bar{\psi} + \varepsilon_{MNP} \dot{A}_N \bar{\theta} \sigma_P \theta + F \bar{\theta} \sigma_M \theta + \\ & + i(\bar{\theta} \sigma_M \theta)(\dot{\psi} \theta - \dot{\bar{\psi}} \bar{\theta}) + \ddot{A}_M \theta_1 \theta_2 \bar{\theta}^2 \bar{\theta}^1, \end{aligned} \quad (7.64)$$

где $\psi \sigma_M \theta = \psi^j (\sigma_M)_j^k \theta_k$ и $\bar{\theta} \sigma_M \bar{\psi} = \bar{\theta}^j (\sigma_M)_j^k \bar{\psi}_k$. Простейшее действие

$$S = -\frac{1}{12} \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt (\Phi_M)^2 \quad (7.65)$$

даёт компонентный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (\dot{A}_M)^2 + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \psi) + \frac{F^2}{2}. \quad (7.66)$$

Он включает комплексный фермионный дублет, три динамические переменные A_M (бозонная часть лагранжиана описывает свободное трёхмерное движение) и одну вспомогательную переменную F , которую можно исключить в силу уравнения движения $F = 0$.

Мы откладываем обсуждение более сложных моделей, основанных на суперполе Φ_M , до главы 10.

Чтобы определить неприводимое суперполе¹⁵ $(4, 4, 0)$, возьмём пару киральных $\mathcal{N} = 4$ суперполей \mathcal{Z}^A и наложим в дополнение к связям $\bar{D}_j \mathcal{Z}^A = 0$ условие

$$D_j \mathcal{Z}^A - \varepsilon^{AB} \bar{D}_j \bar{\mathcal{Z}}^B = 0. \quad (7.67)$$

Эта связь убивает половину степеней свободы, так что у нас остаётся 4 бозонные и 4 фермионные переменные. Решение уравнений (7.67) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^A &= Z^A + \theta_2 \varepsilon^{AB} \bar{D}_1 \bar{Z}^B - i\theta_2 \bar{\theta}^2 \dot{Z}^A, \\ \bar{\mathcal{Z}}^A &= \bar{Z}^A - \bar{\theta}^2 \varepsilon^{AB} D^1 Z^B + i\theta_2 \bar{\theta}^2 \dot{\bar{Z}}^A, \end{aligned} \quad (7.68)$$

где Z^A — голоморфные киральные $\mathcal{N} = 2$ суперполя (7.27), живущие в подпространстве $(t; \theta_1, \bar{\theta}^1)$. На уровне компонент мы имеем две комплексные бозонные переменные z^A и две комплексные фермионные переменные ψ^A . Простейшее инвариантное действие есть

$$S = \frac{1}{8} \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt \mathcal{Z}^A \bar{\mathcal{Z}}^A. \quad (7.69)$$

Соответствующий компонентный лагранжиан очень прост:

$$L = \dot{z}^A \dot{\bar{z}}^A + \frac{i}{2} (\bar{\psi}^A \dot{\psi}^A - \dot{\bar{\psi}}^A \psi^A). \quad (7.70)$$

Он не содержит вспомогательных переменных¹⁶.

По аналогии с тем, что имело место в случае $(2, 4, 2)$, можно также определить зеркальное суперполе $(4, 4, 0)$, заменив в связях $\theta_2 \leftrightarrow \bar{\theta}^2$.

§ 7.4. Гармоническое суперпространство

Цель этой книги — описать некоторые геометрические структуры гладких многообразий, используя суперсимметричные методы. Методы, которые обсуждались до сих пор, достаточны для

¹⁵ Оно было впервые введено в работе [78]. Мы следуем здесь подходу [72].

¹⁶ Вспомогательные переменные, присутствовавшие в $(2, 4, 2)$ -суперполях \mathcal{Z}^A , были устранены связями (7.67).

описания (i) комплекса де Рама на многообразиях общего вида, (ii) комплексных многообразий и комплекса Дольбо, (iii) кэлеровых многообразий, (iv) *обата-плоских* многообразий НКТ. Кроме того, они позволят нам описать некоторые *новые* геометрические структуры, на которые математики не обращали до сих пор внимания (см. главы 10, 11). Но эти методы оказываются недостаточными для описания многообразий НКТ общего вида и гиперкэлеровых многообразий. Для этого нам надо познакомиться с разработанным в Дубне вариантом суперпространственного формализма — формализмом *гармонического суперпространства* [79].

Как мы видели в предыдущих параграфах этой главы, чем больше \mathcal{N} в алгебре суперсимметрии (5.36) — тем сложнее соответствующее суперполевое описание. Задача состоит в том, чтобы найти набор условий, которому должно удовлетворять суперполе в том или ином неприводимом представлении алгебры (5.36). Нам удалось решить эту задачу в случаях $\mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = 2$ и частично для $\mathcal{N} = 4$, но использовавшийся нами прямой подход не работает для $\mathcal{N} = 8$. Неприводимое суперполе $\mathcal{N} = 8$ должно включать 8 обыкновенных и 8 грассмановых вещественных компонент, в то время как общее суперполе $\mathcal{N} = 8$ включает $256 + 256$ компонент, и набор связей в стандартном суперпространстве $\mathcal{N} = 8$, который оставил бы только $8 + 8$ компонент, неизвестен. Кроме того, даже на уровне $\mathcal{N} = 4$ стандартный подход не позволяет определить некоторые специальные суперполя, необходимые для описания многообразий НКТ общего вида.

Гармоническое суперпространство было изначально изобретено для описания полевых теорий с расширенной суперсимметрией. Адаптация этого формализма для систем СКМ была разработана в работе [80], и мы в основном будем следовать её логике и конвенциям. Мы гармонизируем вначале суперпространство $\mathcal{N} = 4$, а несколько более сложный случай $\mathcal{N} = 8$ оставим на десерт.

Формализм гармонического суперпространства основан на присутствии R -симметрии (упомянутой на с. 135), которая вращает комплексные суперзаряды и фермионные переменные. В случае $\mathcal{N} = 4$ это симметрия $U(2)$. Её подгруппа $U(1)$ присутствует также в случае минимальной суперсимметрии $\mathcal{N} = 2$.

Подгруппа $SU(2)$ — её новая релевантная часть. Главная идея состоит в *расширении* $\mathcal{N} = 4$ суперпространства $(t; \theta_j, \bar{\theta}^j)$, куда добавляется дополнительная коммутирующая координата, которая параметризует группу $SU(2)$.

Для наших целей наиболее удобно использовать параметризацию $SU(2) \equiv S^3$ с помощью комплексного дублета $u^{+(j=1,2)}$ единичной длины,

$$u^{+j} \overline{u^{+j}} \stackrel{\text{def}}{=} u^{+j} u_j^- = 1. \quad (7.71)$$

Можно явно выразить $u_j^+ = \varepsilon_{jk} u^{+k}$ через три угла Эйлера:

$$u_j^+ = e^{i\psi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{i\phi/2} \\ i \sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (7.72)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$. Тогда

$$u_j^- = e^{-i\psi/2} \begin{pmatrix} i \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (7.73)$$

Матрица

$$U = \begin{pmatrix} u_1^+ & u_1^- \\ u_2^+ & u_2^- \end{pmatrix} \quad (7.74)$$

принадлежит $SU(2)$, так что выполняется тождество

$$u_j^+ u_k^- - u_j^- u_k^+ = \varepsilon_{jk}. \quad (7.75)$$

Введём теперь нечётные координаты $\theta^\pm = \theta^j u_j^\pm$, $\bar{\theta}^\pm = \bar{\theta}^j u_j^\pm$. Они инвариантны относительно вращений $SU(2)$. Заметьте, что $\bar{\theta}^\pm$ не сопряжены к θ^\pm . Вместо этого мы имеем

$$\bar{\theta}^+ = -\bar{\theta}^-, \quad \bar{\theta}^- = \bar{\theta}^+. \quad (7.76)$$

В дальнейшем мы также будем использовать особую операцию *псевдосопряжения* — композицию обычного комплексного сопряжения и преобразования гармоник¹⁷ $u_j^+ \rightarrow u_j^-$, $u_j^- \rightarrow -u_j^+$. Псевдосопряжение действует на введённые выше грассманы координаты следующим образом:

$$\widetilde{\theta}^\pm = \bar{\theta}^\pm, \quad \widetilde{\bar{\theta}}^\pm = -\theta^\pm, \quad \widetilde{u_j^\pm} = u^{\pm j}. \quad (7.77)$$

¹⁷Его можно интерпретировать в параметризации (7.72) как антиподальное отражение двумерной сферы $SU(2)/U(1)$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\phi \rightarrow \phi + \pi$, с дополнительным отражением $\psi \rightarrow -\psi$.

Определение 7.6. Одномерное $\mathcal{N} = 4$ гармоническое суперпространство — это суперпространство с координатами

$$t; \theta^+, \bar{\theta}^+, \theta^-, \bar{\theta}^-; u_j^\pm. \quad (7.78)$$

Суперпреобразования координат (7.41) индуцируют преобразования

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t + i(\theta^+ \bar{\epsilon}^- + \epsilon^- \bar{\theta}^+ - \epsilon^+ \bar{\theta}^- - \theta^- \bar{\epsilon}^+), \\ \theta^\pm &\rightarrow \theta^\pm + \epsilon^\pm, \\ \bar{\theta}^\pm &\rightarrow \bar{\theta}^\pm + \bar{\epsilon}^\pm. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Гармоническое суперполе общего вида — это функция на этом суперпространстве:

$$\Phi = \phi(t, u) + \dots + D(t, u) \bar{\theta}^+ \theta^+ \bar{\theta}^- \theta^-. \quad (7.80)$$

Преобразования суперкоординат (7.79) индуцируют преобразования компонент (7.80).

Как и в обычном суперпространстве, можно определить ковариантные производные. В данном случае наличествуют ковариантные производные двух типов. Во-первых, есть *грасмановы* ковариантные производные:

$$\begin{aligned} D^+ &= \frac{\partial}{\partial \theta^-} - i \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial t}, & D^- &= -\frac{\partial}{\partial \theta^+} - i \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial t}, \\ \bar{D}^+ &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} - i \theta^+ \frac{\partial}{\partial t}, & \bar{D}^- &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} - i \theta^- \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Во-вторых, имеются *гармонические* ковариантные производные,

$$\begin{aligned} D^0 &= \partial^0 + \theta^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} + \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} - \theta^- \frac{\partial}{\partial \theta^-} - \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-}, \\ D^{++} &= \partial^{++} + \theta^+ \frac{\partial}{\partial \theta^-} + \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-}, \\ D^{--} &= \partial^{--} + \theta^- \frac{\partial}{\partial \theta^+} + \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+}, \end{aligned} \quad (7.82)$$

где

$$\partial^0 = u_j^+ \frac{\partial}{\partial u_j^+} - u_j^- \frac{\partial}{\partial u_j^-}, \quad \partial^{++} = u_j^+ \frac{\partial}{\partial u_j^+}, \quad \partial^{--} = u_j^- \frac{\partial}{\partial u_j^-}. \quad (7.83)$$

Они удовлетворяют алгебре $su(2)$,

$$[D^{++}, D^{--}] = D^0, \quad [D^0, D^{\pm\pm}] = \pm 2D^{\pm\pm} \quad (7.84)$$

— так же, как и «короткие» производные (7.83). Остальные ненулевые (анти)коммутаторы ковариантных производных равны

$$\begin{aligned} [D^{\pm\pm}, D^\mp] &= D^\pm, & [D^{\pm\pm}, \bar{D}^\mp] &= \bar{D}^\pm, \\ \{D^-, \bar{D}^+\} &= -\{D^+, \bar{D}^-\} = 2i \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Отметим, что все грассмановы ковариантные производные (7.81) антикоммутируют, а гармонические ковариантные производные (7.82) коммутируют с суперзарядами — генераторами преобразований (7.79):

$$Q^+ = \frac{\partial}{\partial \theta^-} + i\bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и т. д.}$$

Следствие. Если Φ — гармоническое суперполе (7.80), то $D\Phi$, где D — любая ковариантная производная из списка (7.81), (7.82), также является гармоническим суперполем с тем же законом преобразования компонент (ср. теорему 7.3).

Оператор D^0 называется гармоническим зарядом. Если для u_j^\dagger выбрана параметризация (7.72), короткая версия D^0 принимает вид $\partial^0 = -2i\partial/\partial\psi$. Переменные u_j^\dagger , так же как θ^+ и $\bar{\theta}^+$, несут гармонический заряд $+1$. А переменные u_j^- , θ^- , $\bar{\theta}^-$ несут заряд -1 . Все гармонические суперполя, с которыми мы будем иметь дело, имеют определённое целое значение этого заряда. Оператор D^{++} , действуя на суперполе с гармоническим зарядом q , даёт суперполе с зарядом $q + 2$. Оператор D^{--} , действуя на суперполе с гармоническим зарядом q , даёт суперполе с зарядом $q - 2$. Для любого выражения X^q с определённым гармоническим зарядом q выполняется свойство

$$\widetilde{X^q} = (-1)^q X^q. \quad (7.86)$$

Интеграл $\int dt d^2\theta^+ d^2\theta^- \Phi$ инвариантен относительно суперпреобразований (7.79). Он зависит, однако, от u^\pm , и чтобы избавиться от этой зависимости и написать выражение для инвариантного действия, надо проинтегрировать также по гармоникам, иными словами — по группе $SU(2)$, которую они параметризуют.

Мы нормируем объём группы $\int du$ на единицу. Для любой функции гармоник $\Phi^{(q)}$ с ненулевым гармоническим зарядом q , интеграл $\int \Phi^q(u) du$ обращается в ноль. А интегралы типа $\int u_j^+ u_k^- du$ или $\int u_j^+ u_k^+ u_l^- u_p^- du$ должны выражаться через ε_{jk} , инвариантный тензор $SU(2)$. Принимая также во внимание нормировку (7.71), мы выводим

$$\int u_j^+ u_k^- du = \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}, \quad \int u_j^+ u_k^+ u_l^- u_p^- du = \frac{1}{6} (\varepsilon_{jl} \varepsilon_{kp} + \varepsilon_{jp} \varepsilon_{kl}) \quad (7.87)$$

и т. д.

Но в чём удобство подобного расширения стандартного суперпространства $\mathcal{N} = 4$? Гармоническое суперпространство кажется довольно сложной конструкцией. Чем плохо стандартное суперпространство $\mathcal{N} = 4$, описанное в предыдущем параграфе?

Главное преимущество гармонического формализма состоит в том, что он позволяет найти простые связи, налагаемые на общее суперполе (7.80) и выделяющие неприводимые представления супералгебр. С этими неприводимыми суперполями значительно проще работать, чем с общим суперполем. Мы будем их использовать в третьей части книги для описания нетривиальных геометрических структур многообразий.

Наложим для начала связь

$$D^+ \Phi = \bar{D}^+ \Phi = 0. \quad (7.88)$$

Суперполя Φ , удовлетворяющие этому условию, называются *грассмано-аналитическими* суперполями. Они имеют много общих черт с киральными суперполями (7.28) и (7.29). Как мы видели, голоморфное киральное суперполе $\mathcal{N} = 2$ живёт фактически в редуцированном голоморфном киральном суперпространстве, которое содержит не $\bar{\theta}$, а только θ и голоморфное время $t_L = t - i\theta \bar{\theta}$. Аналогично *грассмано-аналитическое суперполе живёт в редуцированном аналитическом суперпространстве*

$$(t_A; \theta^+, \bar{\theta}^+; u) \equiv (\zeta, u), \quad (7.89)$$

включающем гармоники, *аналитическое время*

$$t_A = t + i(\theta^+ \bar{\theta}^- + \theta^- \bar{\theta}^+) \quad (7.90)$$

и половину нечётных координат: θ^+ и $\bar{\theta}^+$, но не θ^- и $\bar{\theta}^-$ (поэтому разложение по θ для грассмано-аналитических суперполей намного короче, чем для суперполей общего вида).

В самом деле, в аналитическом базисе $(\zeta, \theta^-, \bar{\theta}^-, u)$ грассмановы ковариантные производные приобретают вид

$$\begin{aligned} D^+ &= \frac{\partial}{\partial \theta^-}, & D^- &= -\frac{\partial}{\partial \theta^+} - 2i\bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial t_A}, \\ \bar{D}^+ &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-}, & \bar{D}^- &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} - 2i\theta^- \frac{\partial}{\partial t_A}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

И мы видим, что связи (7.88) сводятся в аналитическом базисе к условию, что Φ не зависит от θ^- и $\bar{\theta}^-$.

Суперпреобразования координат (7.41) индуцируют преобразования

$$\begin{aligned} t_A &\rightarrow t_A + 2i(\theta^+ \bar{\epsilon}^- + \epsilon^- \bar{\theta}^+), \\ \theta^+ &\rightarrow \theta^+ + \epsilon^+, \\ \bar{\theta}^+ &\rightarrow \bar{\theta}^+ + \bar{\epsilon}^+, \end{aligned} \quad (7.92)$$

где $\epsilon^\pm = \epsilon^j u_j^\pm$ и $\bar{\epsilon}^\pm = \bar{\epsilon}^j u_j^\pm$. Таким образом, аналитическое суперпространство (7.89) есть инвариантное подпространство полного гармонического суперпространства (7.78).

Стоит заметить, что аналитическое время инвариантно относительно псевдосопряжения, определённого в (7.77) (но не относительно обыкновенного комплексного сопряжения). Принимая во внимание тождества $\widetilde{\theta^+} = \bar{\theta}^+$ и $\widetilde{\bar{\theta}^+} = -\theta^+$, это означает, что псевдосопряжение оставляет инвариантным всё аналитическое суперпространство.

Наиболее важный для геометрических приложений объект — это грассмано-аналитическое суперполе $q^+(\zeta, u)$ с гармоническим зарядом +1. Как и ожидалось, его компонентное разложение быстро обрывается (ср. короткие ряды (7.28) и (7.29) для киральных суперполей):

$$q^+(\zeta, u) = f^+(t_A, u) + \theta^+ \chi(t_A, u) + \bar{\theta}^+ \kappa(t_A, u) + \theta^+ \bar{\theta}^+ A^-(t_A, u), \quad (7.93)$$

где $f^+(t_A, u)$ и $A^-(t_A, u)$ — грассмано-чётные переменные с гармоническими зарядами, соответственно, +1 и -1, а $\chi(t_A, u)$ и $\kappa(t_A, u)$ — грассмано-нечётные переменные, несущие нулевой заряд.

Мы уменьшили число компонент в разложении по θ по сравнению с обычным (негармоническим) суперпространственным описанием, но нам пришлось за это заплатить довольно высокую цену: переменные $f^+(t_A, u)$ и т. д. зависят не только от времени, но представляют бесконечный ряд по u^+ и u^- . Удобно разлагать по симметризованным произведениям гармоник. Например,

$$f^+(t_A, u) = f^j(t_A) u_j^+ + A^{(ijk)}(t_A) u_i^+ u_j^+ u_k^- + \dots \quad (7.94)$$

Тогда различные члены разложения взаимно ортогональны по отношению к мере (7.87).

Кажется, что мы имеем теперь дело с бесконечным числом обычных и грассмановых зависящих от времени переменных, множащих бесконечное число мономов в разложении (7.94). Замечательно то, однако, что почти всех их можно истребить, наложив связь

$$D^{++} q^+ = 0. \quad (7.95)$$

Действительно, в аналитическом базисе гармонические производные имеют вид

$$\begin{aligned} D^{++} &= \partial^{++} + 2i\theta^+ \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial t_A} + \theta^+ \frac{\partial}{\partial \theta^-} + \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-}, \\ D^{--} &= \partial^{--} + 2i\theta^- \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial t_A} + \theta^- \frac{\partial}{\partial \theta^+} + \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+}. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Разлагая левую часть (7.95) по θ и u , мы получаем бесконечное число условий. И оказывается, что эта бесконечность почти соответствует бесконечности в гармоническом разложении суперполя $q^+(\zeta, u)$. Решение уравнения (7.95) есть

$$q^+(\zeta, u) = f^j(t_A) u_j^+ + \theta^+ \chi(t_A) + \bar{\theta}^+ \kappa(t_A) - 2i\theta^+ \bar{\theta}^+ f^j(t_A) u_j^-. \quad (7.97)$$

Остаются только две комплексные бозонные переменные $f^j(t_A)$ и две комплексные фермионные $\chi(t_A)$ и $\kappa(t_A)$. Этот набор компонент совпадает с набором компонент в неприводимом $\mathcal{N} = 4$ суперполе (4, 4, 0), обсуждавшемся выше!

Читатель захочет, наверное, спросить: а почему мы уделили столько внимания достаточно сложному и нетривиальному способу получить в итоге суперполе (4, 4, 0), когда в предыдущем

параграфе это было сделано достаточно просто, без обращения к гармоническому формализму.

Ответ следующий. Да, для описания *линейного* мультиплета q^+ , удовлетворяющего условию (7.95), гармонический формализм не нужен; все результаты, которые можно получить с его помощью, могут быть также выведены традиционным, более простым способом. Но только гармоническое суперпространство позволяет описать так называемые *нелинейные* мультиплеты, удовлетворяющие нелинейным связям [81]

$$D^{++}q^{+a} = \mathcal{L}^{+3a}(q^{+b}, u), \quad (7.98)$$

где \mathcal{L}^{+3a} — набор $2n$ произвольных функций гармонического заряда $+3$ от $2n$ грассманово-аналитических суперполей q^{+b} и гармоник¹⁸.

Только так можно построить модель СКМ, описывающую геометрию многообразий НКТ общего вида. Также только гармоническое описание позволяет включить в конструкцию живущие на многообразии НКТ внешние калибровочные поля. Мы продолжим это обсуждение в главе 12.

Другое интересное гармоническое $\mathcal{N} = 4$ суперполе — это грассманово-аналитическое суперполе $V^{++}(\zeta, u)$ гармонического заряда $+2$. Чтобы убить члены высшего порядка в гармоническом разложении, мы накладываем связь

$$D^{++}V^{++} = 0. \quad (7.101)$$

Чтобы выделить в V^{++} неприводимое представление супералгебры, мы также требуем

$$V^{++} = \widetilde{V}^{++}. \quad (7.102)$$

¹⁸Здесь q^{+a} удовлетворяют дополнительному условию псевдовещественности

$$\widetilde{q^{+a}} = -\Omega_{ab}q^{+b} \equiv -q_a^+, \quad (7.99)$$

где Ω_{ab} — симплектическая матрица со свойствами $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$, $\Omega^2 = -\mathbb{1}$. Условие (7.99) можно также представить в виде (3.13):

$$\widetilde{q^{ja}} = \varepsilon_{jk}\Omega_{ab}q^{kb}. \quad (7.100)$$

Суперполе, удовлетворяющее условиям аналитичности $D^+V^{++} = \bar{D}^+V^{++} = 0$ и связям (7.101), (7.102) имеет вид [80]

$$V^{++} = v^{(jk)}(t_A)u_j^+u_k^+ + i\theta^+\psi^j(t_A)u_j^+ + i\bar{\theta}^+\bar{\psi}^j(t_A)u_j^+ + \\ + i\theta^+\bar{\theta}^+[F(t_A) - 2\dot{v}^{(jk)}(t_A)u_j^+u_k^-], \quad (7.103)$$

где F — вещественная функция от t_A и $v_{jk} = v_{kj}$ — набор функций, удовлетворяющих условию псевдовещественности (7.55). Как мы отмечали, такой набор можно описать тремя независимыми вещественными функциями.

Мы видим, что суперполе (7.103) имеет столько же динамических компонент, что и суперполе (7.64). Другими словами, V^{++} даёт гармоническое описание мультиплета (3, 4, 1).

В гармоническом подходе есть два способа конструировать инвариантные действия. Либо мы интегрируем общее суперполе Φ нулевого гармонического заряда по всему суперпространству,

$$S = \int dt d^2\theta^+ d^2\theta^- du \Phi = \int dt d\bar{\theta}^+ d\theta^+ d\bar{\theta}^- d\theta^- du \Phi, \quad (7.104)$$

либо мы можем проинтегрировать грассмано-аналитическое суперполе Φ_G^{++} заряда +2 по аналитическому суперпространству¹⁹,

$$S = i \int dt_A d\bar{\theta}^+ d\theta^+ du \Phi_G^{++}. \quad (7.105)$$

Замечание. Если мы хотим, чтобы действие было вещественным, надо потребовать вещественности Φ и псевдовещественности (т. е. инвариантности относительно псевдосопряжения) суперполя Φ_G^{++} [это немедленно следует из равенств (7.76) и (7.77)].

Простейшее нетривиальное действие, включающее V^{++} , имеет вид

$$S = - \int dt d^2\theta^+ d^2\theta^- du V^{++}V^{--}, \quad (7.106)$$

где $V^{--} = (D^{--})^2V^{++}$. Переходя к компонентам, мы воспроизводим с точностью до несущественных коэффициентов свободный лагранжиан (7.66).

¹⁹Символы $d\bar{\theta}^+$, $d\theta^+$ несут гармонический заряд -1 , ср. с уравнением (7.81).

Перейдём теперь к гармоническому суперпространству $\mathcal{N} = 8$. Обыкновенное суперпространство $\mathcal{N} = 8$ включает четыре комплексные нечётные координаты, которые мы обозначаем $\theta_{j\alpha}$, где j и α пробегает два значения. При комплексном сопряжении оба индекса поднимаются: $\theta_{j\alpha} \rightarrow \bar{\theta}^{j\alpha}$. Для гармонизации рассмотрим проекции $\theta_{\alpha}^{\pm} = \theta_{\alpha}^j u_j^{\pm}$ и $\bar{\theta}^{\pm\alpha} = \bar{\theta}^{j\alpha} u_j^{\pm}$. Введём аналитическое время t_A по той же формуле (7.90), что в случае $\mathcal{N} = 4$, но с дополнительным суммированием по α . Аналитическое суперпространство $\mathcal{N} = 8$ включает переменные t_A , θ_{α}^{\pm} , $\bar{\theta}^{\pm\alpha}$ и u .

Рассмотрим грасманово-аналитическое суперполе

$$Q^+(\zeta, u) = F^+(t_A, u) + \theta_{\alpha}^+ \chi^{\alpha}(t_A, u) + \dots + (\theta_{\alpha}^+ \bar{\theta}^{\pm\alpha})^2 D^{-3}(t_A, u). \quad (7.107)$$

Возьмём $2n$ таких суперполей Q^{+a} и наложим на них условие псевдовещественности (7.99) — в этом случае никаких других связей накладывать не надо. Рассмотрим суперполевое действие (см. главу 5 книги [79])²⁰

$$S = \frac{1}{4} \int dt_A du d^2 \bar{\theta}^+ d^2 \theta^+ \left[\frac{1}{2} Q_a^+ D^{++} Q^{+a} + \mathcal{L}^{+4}(Q^{+b}, u) \right], \quad (7.108)$$

где

$$D^{++} = \partial^{++} + 2i \theta_{\alpha}^+ \bar{\theta}^{\pm\alpha} \frac{\partial}{\partial t_A}. \quad (7.109)$$

Здесь препотенциал \mathcal{L}^{+4} — произвольная вещественная функция от Q^{+a} и u^{\pm} , несущая гармонический заряд $+4$.

Суперполя $Q^{+a}(\zeta, u)$ содержат в своём гармоническом разложении бесконечное число грасманово-чётных и грасманово-нечётных переменных. Как с ними жить и работать и какую динамику описывает действие (7.108)?

Как оказывается, почти все эти переменные имеют нединамическую вспомогательную природу. Они определяются алгебраически из уравнений движения, следующих из (7.108). Эти уравнения можно компактно записать в суперполевой форме:

$$D^{++} Q^{+a} = \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial Q^{+b}} \quad (7.110)$$

²⁰ Дополнительный множитель $1/4$ в действии следует из нашей конвенции (7.50) для грасмановой меры. В книге [79] использовалась конвенция $d^2 \theta^+ = \frac{1}{2} d\theta_1^+ d\theta_2^+$, $d^2 \bar{\theta}^+ = \frac{1}{2} d\bar{\theta}^{+2} d\bar{\theta}^{+1}$.

с симплектической матрицей $\Omega^{ab} = -\Omega_{ab}$. После перехода к компонентам и выражения вспомогательных переменных через динамические из компонентных уравнений, следующих из (7.110)²¹, у нас остаётся всего $4n$ вещественных бозонных и $8n$ вещественных фермионных динамических переменных. Подставляя в (7.108) решения для вспомогательных переменных, мы приходим к динамической модели СКМ с бозонной частью, описывающей движение по некоторому $4n$ -мерному гиперкэлерову многообразию.

Гиперкэлеровы модели и модели НКТ будут детально обсуждаться в главе 12.

²¹Это непростые нелинейные уравнения. Решить их *аналитически* можно только для некоторых специальных препотенциалов \mathcal{L}^{+4} . Но всегда можно построить решения в виде ряда по параметру нелинейности.

Часть III

Синтез

Глава 8

Суперсимметричное описание комплекса де Рама

§ 8.1. Основные структуры

В главах 5–7 мы построили и обсудили простейшие модели СКМ. Теперь мы начнём обсуждать более сложные модели, описывающие движение по искривлённым многообразиям. По историческим причинам, в которые мы не будем вдаваться, физики называют их *суперсимметричными сигма-моделями*. Изучение этих моделей позволит нам воспроизвести и развить геометрические конструкции первой части.

Определение 8.1. Обыкновенная (несуперсимметричная) механическая¹ сигма-модель — это система, включающая D динамических переменных $x^M(t)$ с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} g_{MN}(x) \dot{x}^M \dot{x}^N. \quad (8.2)$$

Здесь x^M имеют смысл координат на D -мерном многообразии с метрикой $g_{MN}(x)$. Уравнения движения, следующие из лагранжиана (8.2), совпадают с уравнением (4.1), описывающим движение по геодезической.

В этой и последующих главах мы рассмотрим много различных *суперсимметричных* сигма-моделей, включающих помимо $x^M(t)$ грассмановы динамические переменные.

¹Физики изучают также сигма-модели, куда вместо конечного числа динамических переменных входят поля $x^M(t, \xi)$, где компоненты вектора ξ суть плоские пространственные координаты, не имеющие ничего общего с x^M . Такие модели описываются действиями типа

$$S = \frac{1}{2} \int dt d\xi g_{MN}(x) \partial_\mu x^M \partial^\mu x^N, \quad (8.1)$$

где $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_\xi)$.

Мы отметили это, чтобы дать читателю правильную перспективу, но в дальнейшем полевые сигма-модели обсуждаться не будут.

Можно, например, взять D суперполей $\mathcal{N} = 1$, определённых в уравнении (7.8), и обобщить (7.17) следующим образом:

$$L = \frac{i}{2} \int d\theta g_{MN}(\mathcal{X}) \dot{\mathcal{X}}^M \mathcal{D}\mathcal{X}^N. \quad (8.3)$$

В компонентах это даёт

$$L = \frac{1}{2} g_{MN}(x) (\dot{x}^M \dot{x}^N + i\Psi^M \nabla\Psi^N), \quad (8.4)$$

где

$$\nabla\Psi^M = \dot{\Psi}^M + \Gamma_{PS}^M \dot{x}^P \Psi^S \quad (8.5)$$

и Γ_{PS}^M — символы Кристоффеля (1.17). (Оператор ∇ есть ковариантная временная производная: если x^M и Ψ^M — векторы, то $\nabla\Psi^M$ — также вектор.)

По построению лагранжиан (8.4) инвариантен относительно суперпреобразований (7.10) для каждой пары (x^M, Ψ^M) . Однако, как мы ранее отмечали, суперсимметрия $\mathcal{N} = 1$ — не настоящая симметрия, она не влечёт динамических следствий, наподобие двукратного вырождения уровней. Мы увидим позже, что для комплексных многообразий лагранжиан (8.4) имеет дополнительную «скрытую» суперсимметрию [ср. уравнение (7.36)]. Но в общем случае изучение системы (8.4) не позволит прояснить геометрические свойства многообразий. Мы должны придумать что-то ещё.

Если мы хотим иметь систему с суперсимметрией $\mathcal{N} = 2$, лучше всего выразить её лагранжиан в терминах суперполей $\mathcal{N} = 2$. Для вещественного многообразия общего вида единственная возможность — взять D вещественных суперполей (7.25), чьи бозонные нижние компоненты совпадают с координатами x^M . Чтобы суперсимметризовать (8.2), напомним лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta g_{MN}(X) \bar{D}X^M DX^N \quad (8.6)$$

с $\mathcal{N} = 2$ ковариантными производными (7.22).

В компонентах получаем

$$L = \frac{1}{2} g_{MN}(x) [\dot{x}^M \dot{x}^N + F^M F^N + i(\bar{\psi}^M \nabla\psi^N - \nabla\bar{\psi}^M \psi^N)] + \\ + \Gamma_{M,PQ} F^M \psi^P \bar{\psi}^Q + \frac{1}{2} (\partial_P \partial_Q g_{MN}) \bar{\psi}^P \bar{\psi}^M \psi^Q \psi^N. \quad (8.7)$$

Вспомогательные переменные F^M входят в лагранжиан без производных, и соответствующие чисто алгебраические уравнения движения $\partial L/\partial F^M = 0$ позволяют выразить F^M через другие переменные. Решение следующее:

$$F^M = -\Gamma_{PQ}^M \psi^P \bar{\psi}^Q. \quad (8.8)$$

Подставляя это в (8.7), получаем

$$L = \frac{1}{2} g_{MN} [\dot{x}^M \dot{x}^N + i(\bar{\psi}^M \nabla \psi^N - \nabla \bar{\psi}^M \psi^N)] - \frac{1}{4} R_{PMQN} \bar{\psi}^P \bar{\psi}^M \psi^Q \psi^N, \quad (8.9)$$

где R_{PMQN} — тензор Римана.

Но можно также выразить лагранжиан модели в терминах суперполей $\mathcal{N} = 1$. Рассмотрим наряду с бозонными вещественными $\mathcal{N} = 1$ суперполями² $\mathcal{X}^M = x^M + i\Theta \Psi^M$ набор D грассмановых вещественных суперполей $\Phi^M = \phi^M + \Theta F^M$. Тогда компонентный лагранжиан, следующий из

$$L = \frac{1}{2} \int d\Theta g_{MN}(\mathcal{X}) [i\dot{\mathcal{X}}^M \mathcal{D}\mathcal{X}^N + \Phi^M (\mathcal{D}\Phi^N + \Gamma_{PS}^N(\mathcal{X}) \mathcal{D}\mathcal{X}^P \Phi^S)], \quad (8.10)$$

даёт то же выражение (8.7) после идентификации

$$\psi^M = (\Psi^M - i\phi^M)/\sqrt{2}.$$

Помимо явной суперсимметрии $\mathcal{N} = 1$, перемешивающей компоненты суперполей \mathcal{X}^M и Φ^M , лагранжиан (8.10) обладает дополнительной «скрытой» симметрией $\mathcal{N} = 1$ относительно преобразований

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{X}^M &= -i\eta \Phi^M, \\ \delta \Phi^M &= \eta \dot{\mathcal{X}}^M \end{aligned} \quad (8.11)$$

с вещественным η .

Отметим закономерность: чем дальше в разложении по θ находится суперполевая компонента — тем меньше степень временной производной, с которой она входит в лагранжиан. Низшая компонента \mathcal{X}^M даёт член $\propto \dot{x}^2$, средняя компонента даёт

²Мы пишем здесь заглавную Θ , чтобы не спутать вещественную Θ с комплексной θ в уравнении (8.6).

структуру $\propto \dot{\psi}$, а высшая компонента F входит без производных. Это вполне естественно. При действии на высшую компоненту X^M в ковариантных производных D и \bar{D} работают только члены $\propto \partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\bar{\theta}$, в то время как для низшей компоненты дают вклад также члены $\propto \bar{\theta}\partial/\partial t$ и $\propto \theta\partial/\partial t$: для низших компонент нам надо не убрать «лишние» факторы θ , как для высших, а наоборот, добавить недостающие. Это увеличивает число временных производных в компонентном лагранжиане.

В суперполевым лагранжиан можно также добавить структуры с дополнительными временными производными типа

$$\int d\bar{\theta} d\theta \kappa_{MN}(X) \bar{D}X^M \frac{d}{dt} DX^N. \quad (8.12)$$

Тогда высшие компоненты F^M войдут в компонентный лагранжиан с временной производной и станут динамическими. Но в этом случае низшие компоненты x^M войдут с дополнительной временной производной, приводя к появлению в лагранжиане членов $\propto \dot{x}\ddot{x}$. Это даёт интересные модели с «доброкачественными духами» [49], но для задач дифференциальной геометрии такие модели с высшими производными в лагранжиане интереса не представляют. Поэтому в нашей книге мы их не будем рассматривать.

Следующая наша задача — найти в этой модели суперзаряды. Общий метод нахождения сохраняющихся суперзарядов в любой суперсимметричной системе связан с теоремой Нётер. Из (7.26) и (8.8) следует, что лагранжиан (8.9) инвариантен относительно следующих нелинейных суперпреобразований:

$$\begin{aligned} \delta x^M &= \epsilon \psi^M + \bar{\psi}^M \bar{\epsilon}, \\ \delta \psi^M &= -\bar{\epsilon}(i\dot{x}^M + \Gamma_{PQ}^M \psi^P \bar{\psi}^Q), \quad \delta \bar{\psi}^M = \epsilon(i\dot{x}^M - \Gamma_{PQ}^M \psi^P \bar{\psi}^Q). \end{aligned} \quad (8.13)$$

С использованием общей теоремы 4.6 мы отсюда выводим:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^M \left[\Pi_M + \frac{i}{2} \Gamma_{M, NP} \psi^N \bar{\psi}^P \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^M \left[\Pi_M - \frac{i}{2} \partial_M g_{NP} \psi^N \bar{\psi}^P \right], \\ \bar{Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^M \left[\Pi_M - \frac{i}{2} \Gamma_{M, NP} \psi^N \bar{\psi}^P \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^M \left[\Pi_M + \frac{i}{2} \partial_M g_{NP} \psi^N \bar{\psi}^P \right], \end{aligned} \quad (8.14)$$

где

$$\Pi_M = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M} = g_{MN} \dot{x}^N + \frac{i}{2} (\partial_Q g_{PM} - \partial_P g_{QM}) \psi^P \bar{\psi}^Q \quad (8.15)$$

есть канонический импульс, соответствующий переменной x^M (множитель $1/\sqrt{2}$ введён в суперзаряды для удобства).

Классический гамильтониан получается преобразованием Лежандра из лагранжиана (8.9). Он имеет вид

$$\begin{aligned} H = \frac{g^{MN}}{2} \left[\Pi_M + \frac{i}{2} (\partial_P g_{QM} - \partial_Q g_{PM}) \psi^P \bar{\psi}^Q \right] \times \\ \times \left[\Pi_N + \frac{i}{2} (\partial_S g_{TM} - \partial_T g_{SN}) \psi^S \bar{\psi}^T \right] + \\ + \frac{1}{4} R_{PMQN} \bar{\psi}^P \bar{\psi}^M \psi^Q \psi^N. \quad (8.16) \end{aligned}$$

Часто удобнее иметь дело с классическими суперзарядами и гамильтонианом, выраженными через плоские (лежащие в касательном пространстве) фермионные переменные $\psi_A = e_{AM} \psi^M$ (в частности, это нужно для квантования, что есть наша следующая задача). Тогда суперзаряды принимают следующий вид [82]:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_C e_C^M (P_M - i\omega_{AB,M} \psi_A \bar{\psi}_B), \\ \bar{Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_C e_C^M (P_M - i\omega_{AB,M} \psi_A \bar{\psi}_B), \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\omega_{AB,M}$ — спиновая связность. При сравнении (8.14) и (8.17) необходимо иметь в виду, что канонические импульсы Π_M и P_M не совпадают. Импульсы Π_M получаются вариацией лагранжиана по \dot{x}^M при условии, что ψ^M держатся фиксированными, в то время как P_M даются такой же вариацией, но при фиксированных ψ_A . Различие связано с членами, содержащими временные производные фермионных переменных [83, 84]:

$$\begin{aligned} P_M &= \Pi_M + \frac{\partial \dot{\psi}^N}{\partial \dot{x}^M} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^N} + \frac{\partial \dot{\bar{\psi}}^N}{\partial \dot{x}^M} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}^N} = \\ &= \Pi_M + \frac{i}{2} [(\partial_M e_B^N) e_{AN} - (\partial_M e_A^N) e_{BN}] \psi_A \bar{\psi}_B. \end{aligned} \quad (8.18)$$

В базисе $(x^M, P_M; \psi_A, \bar{\psi}_A)$ ненулевые скобки Пуассона имеют простой вид

$$\{P_N, x^M\}_P = \delta_N^M, \quad \{\psi_A, \bar{\psi}_B\}_P = i\delta_{AB}, \quad (8.19)$$

в то время как в базисе $(x^M, \Pi_M; \psi^M, \bar{\psi}^M)$ выражения более сложные:

$$\begin{aligned} \{\Pi_N, x^M\}_P &= \delta_N^M, & \{\psi^M, \bar{\psi}^N\}_P &= ig^{MN}, \\ \{\Pi_M, \psi^N\}_P &= \frac{1}{2}\psi_Q \partial_M g^{NQ}, & \{\Pi_M, \bar{\psi}^N\}_P &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_Q \partial_M g^{NQ}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Иначе говоря, базис $(x^M, P_M; \psi_A, \bar{\psi}_A)$ ортонормирован относительно симплектической Пуассоновой структуры в отличие от базиса $(x^M, \Pi_M; \psi^M, \bar{\psi}^M)$. В ортонормированном базисе скобка Пуассона произвольных функций на фазовом пространстве имеет канонический вид (4.59).

Скобка Пуассона $-i\{Q, \bar{Q}\}_P$ даёт классический гамильтониан,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}g^{MN}(P_M - i\omega_{AB,M}\psi_A\bar{\psi}_B)(P_N - i\omega_{CD,N}\psi_C\bar{\psi}_D) + \\ &+ \frac{1}{4}R_{ABCD}\bar{\psi}_A\bar{\psi}_B\psi_C\psi_D, \end{aligned} \quad (8.21)$$

совпадающий с (8.16).

Чтобы проквантовать эту систему, возьмём классические суперзаряды (8.17) и применим рецепт, предложенный в работе [43] и упомянутый на с. 139. Мы делаем замены в классических суперзарядах $P_M \rightarrow \hat{P}_M = -i\partial/\partial x^M$ и $\bar{\psi}_A \rightarrow \hat{\psi}_A = \partial/\partial\psi_A$ и затем упорядочиваем произведения операторов, используя *вейлеву симметризацию* (или антисимметризацию для грасманово-нечётных операторов). В частности, мы должны сделать замены

$$\begin{aligned} e_C^M P_M &\rightarrow \frac{1}{2}(e_C^M \hat{P}_M + \hat{P}_M e_C^M) = e_C^M \hat{P}_M - \frac{i}{2}(\partial_M e_C^M), \\ \psi_C \psi_A \bar{\psi}_B &\rightarrow \frac{1}{6}\left(2\psi_C \psi_A \frac{\partial}{\partial\psi_B} + 2\frac{\partial}{\partial\psi_B} \psi_C \psi_A + \right. \\ &+ \left. \psi_A \frac{\partial}{\partial\psi_B} \psi_C - \psi_C \frac{\partial}{\partial\psi_B} \psi_A\right) = \psi_C \psi_A \frac{\partial}{\partial\psi_B} + \frac{1}{2}(\delta_{BC}\psi_A - \delta_{BA}\psi_C). \end{aligned} \quad (8.22)$$

После вычислений с использованием выражения (1.55) для спиновой связности (с $G_{MP}^N \rightarrow \Gamma_{MP}^N$) и тождества $\Gamma_{NM}^N = \frac{1}{2}\partial_M \ln g$, где $g = \det(g_{MN})$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^M \left[\frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M}\psi_A \frac{\partial}{\partial\psi_B} - \frac{1}{4}\partial_M \ln g \right], \\ \hat{\bar{Q}} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}e_C^M \frac{\partial}{\partial\psi_C} \left[\frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M}\psi_A \frac{\partial}{\partial\psi_B} - \frac{1}{4}\partial_M \ln g \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Эти суперзаряды эрмитово сопряжены друг с другом в гильбертовом пространстве, включающем комплексные волновые функции

$$\Psi(x^M, \psi_A) = \Psi_0(x^M) + \Psi_A(x^M)\psi_A + \dots \quad (8.24)$$

и снабжённом скалярным произведением с плоской мерой [см. уравнение (6.25)]

$$d\mu_{\text{плоск}} \sim \prod_M dx^M \prod_A d\psi_A d\bar{\psi}_A e^{-\psi_A \bar{\psi}_A}. \quad (8.25)$$

Для геометрических приложений нам нужны ковариантные суперзаряды (и другие операторы), действующие на гильбертовом пространстве с мерой, включающей дополнительный фактор \sqrt{g} . Такие ковариантные суперзаряды связаны с (8.23) преобразованием подобия

$$(\hat{Q}^{\text{ков}}, \hat{\bar{Q}}^{\text{ков}}) = g^{-1/4} (\hat{Q}^{\text{плоск}}, \hat{\bar{Q}}^{\text{плоск}}) g^{1/4}. \quad (8.26)$$

Это преобразование убивает члены $\propto \partial \ln g$ в (8.23), и мы в итоге получаем:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{\text{ков}} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^M \left[\frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M} \psi_A \frac{\partial}{\partial \psi_B} \right], \\ \hat{\bar{Q}}^{\text{ков}} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} e_C^M \frac{\partial}{\partial \psi_C} \left[\frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M} \psi_A \frac{\partial}{\partial \psi_B} \right], \end{aligned} \quad (8.27)$$

где оператор

$$D_M = \frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M} \psi_A \frac{\partial}{\partial \psi_B} \quad (8.28)$$

действует на коэффициенты в разложении (8.24) так же, как спинорная часть в ковариантной производной (1.51) действует на фильбайны.

Операторы (8.27) нильпотентны. Антиккоммутатор $\{\hat{Q}^{\text{ков}}, \hat{\bar{Q}}^{\text{ков}}\}$ даёт ковариантный квантовый гамильтониан³:

$$\hat{H}^{\text{ков}} = -\frac{1}{2\sqrt{g}} D_M \sqrt{g} g^{MN} D_N - \frac{1}{2} R_{ABCD} \hat{\psi}_A \psi_B \hat{\psi}_C \psi_D, \quad (8.29)$$

³Различные коэффициенты и знаки в (8.21) и (8.29) перед последним членом — не ошибка. В классическом пределе гамильтониан (8.29) сводится к (8.21), если принять во внимание циклическое свойство тензора Римана [вторая строчка в уравнении (1.21)].

где $\hat{\psi}_A = \partial/\partial\psi_A$. При замене $D_M \rightarrow \partial_M$ первый член в (8.29) сводится к оператору Лапласа—Бельтрами (1.35).

Оператор D_M и весь гамильтониан (8.29) коммутируют с оператором фермионного заряда $\hat{F} = \psi_A \hat{\psi}_A$ (который считает число грассмановых факторов в волновой функции). Следовательно, фермионный заряд в этой модели сохраняется.

Заметим, что квантовый гамильтониан *не* получается применением описанной выше процедуры — вейлевого упорядочивания с последующим преобразованием подобия. Если мы хотим сохранить симметрию (в данном случае суперсимметрию) на квантовом уровне, эту процедуру следует применять к *генераторам симметрии* (в данном случае — к суперзарядам), а не к гамильтониану.

Всё готово для доказательства ключевой теоремы.

Теорема 8.1. Действие суперзарядов $\hat{Q}^{\text{КОВ}}$ и $\hat{\bar{Q}}^{\text{КОВ}}$ на волновые функции $\Psi(x^M, \psi_A)$ изоморфно действию внешней производной d и сопряжённого оператора d^\dagger в комплексе де Рама.

Доказательство. Рассмотрим волновую функцию с фермионным зарядом p . Представим её как

$$\Psi_p = A_{M_1 \dots M_p}(x) \psi^{M_1} \dots \psi^{M_p}, \quad (8.30)$$

где $\psi^M = e_A^M \psi_A$ и тензор $A_{M_1 \dots M_p}(x)$ полностью антисимметричен. В суперзаряде $\hat{Q}^{\text{КОВ}}$ есть два члена. Действие члена с производной ∂_M на (8.30) есть

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^M \frac{\partial}{\partial x^M} \Psi_p &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_M A_{M_1 \dots M_p}) \psi^M \psi^{M_1} \dots \psi^{M_p} - \\ &- \frac{i p}{\sqrt{2}} A_{M_1 \dots M_p} (\partial_M e_A^{M_1}) e_{AN} \psi^M \psi^N \psi^{M_2} \dots \psi^{M_p}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Действие члена $\propto \omega_{AB,M}$ даст

$$-\frac{i p}{\sqrt{2}} \omega_{AB,M} e_{AN} e_B^{M_1} A_{M_1 \dots M_p} \psi^M \psi^N \psi^{M_2} \dots \psi^{M_p}.$$

Добавляя это ко второму члену в (8.31), мы получаем выражение, содержащее фактор

$$e_{AN} (\partial_M e_A^{M_1} + \omega_{AB,M} e_B^{M_1}) \psi^M \psi^N.$$

С помощью (1.51) и (1.53) мы можем представить это как

$$-e_{AN}\Gamma_{MP}^{M_1}e_A^P\psi^M\psi^N = -\Gamma_{MN}^{M_1}\psi^M\psi^N = 0.$$

Получаем результат

$$\hat{Q}^{\text{ков}}\Psi_p = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_M A_{M_1\dots M_p})\psi^M\psi^{M_1}\dots\psi^{M_p}, \quad (8.32)$$

который имеет тот же вид с точностью до множителя $-i/\sqrt{2}$, что уравнение (1.30), определяющее действие d . Чтобы доказать изоморфизм $\hat{Q}^{\text{ков}}$ и d , достаточно только отождествить ψ^M и dx^M .

Оператор d^\dagger сопряжён с d с мерой (1.27), включающей множитель \sqrt{g} . И оператор $\hat{Q}^{\text{ков}}$ сопряжён с $\hat{Q}^{\text{ков}}$ с той же ковариантной мерой. Так как $\hat{Q}^{\text{ков}}$ изоморфно d , $\hat{Q}^{\text{ков}}$ изоморфно d^\dagger . \square

§ 8.2. Эйлерова характеристика

В предыдущем параграфе мы перевели содержание § 2.2 на суперсимметричный язык, установив изоморфизм комплекса де Рама дифференциальных форм и гильбертова пространства суперсимметричных квантовых систем. Естественный вопрос: а что мы этим выиграли? Чем суперсимметричный язык лучше традиционного?

На этот вопрос есть два ответа. Во-первых, пользуясь языком суперсимметрии, мы сможем в дальнейшем вывести некоторые новые математические результаты. А во-вторых, суперсимметрия позволяет упростить вывод многих известных математических результатов. В качестве примера мы докажем сейчас важную теорему.

Теорема 8.2 (Ходж). *Произвольная дифференциальная форма α может быть однозначно представлена как сумма точной, ко-точной и гармонической формы,*

$$\alpha = d\beta + d^\dagger\gamma + h. \quad (8.33)$$

Доказательство. Это сразу следует из общих свойств спектра системы СКМ, установленных в главе 5: он состоит из выродившихся дублетов, компоненты которых получаются друг из

друга под действием $\hat{Q} \equiv d$ либо $\hat{Q}^\dagger \equiv \hat{Q} \equiv d^\dagger$, и некоторого количества неспаренных вакуумных состояний, которые аннигилируются действием как \hat{Q} , так и \hat{Q}^\dagger . Этот спектр был схематически изображён на рис. 5.2. В рамках установленного соответствия точные формы отвечают правой башне состояний, коточные формы — левой башне, а гармонические формы — вакуумным состояниям. \square

Связанное математическое понятие, которое начинает играть новыми красками, если взглянуть на него сквозь суперсимметричные очки — это *когомологии де Рама*. Мы уже говорили о них на с. 32. Когомология де Рама — это пространство всех замкнутых форм (т. е. форм, удовлетворяющих условию $d\alpha_p = 0$), профакторизованное по пространству точных форм, представимых в виде $\alpha_p = d\beta_{p-1}$. Для форм данной степени p факторпространство *замкнутые/точные* обозначается как $H_{\text{dR}}^p(\mathcal{M})$.

Определение 8.2. Число Бетти b_p есть размерность векторного пространства H_{dR}^p .

Определение 8.3. Эйлера характеристика многообразия есть знакопеременная сумма

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_p (-1)^p b_p(\mathcal{M}). \quad (8.34)$$

Дадим два элементарных примера.

1. Для сферы S^2 имеем $b_0 = 1$: замкнутые 0-формы — это вещественные константы C , точной 0-форма быть не может, и, значит, $H_{\text{dR}}^0(S^2) = \mathbb{R}$. Аналогично $b_2 = 1$: замкнутые, но не точные 2-формы — это вещественные константы, умноженные на $dx^1 \wedge dx^2$. Замкнутых, но не точных 1-форм нет вовсе и $b_1 = 0$. Эйлера характеристика равна

$$\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2. \quad (8.35)$$

2. Для T^2 мы имеем $b_0 = b_2 = 1$, как и для сферы⁴, но в этом случае существуют замкнутые, но не точные 1-формы⁵, $\alpha_1 = A dx^1 + B dx^2$. Тогда $H_{\text{dR}}^2(T^2) = \mathbb{R}^2$ и $b_1 = 2$. Эйлера характеристика

⁴Фактически для любого многообразия \mathcal{M} размерности D верно, что $b_0 = b_D = 1$.

⁵Форма dx^1 теперь не точна, поскольку x^1 не есть 0-форма — она не определена на торе однозначно.

равна

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0. \quad (8.36)$$

Замечание. Стоит отметить здесь, что когда мы обсуждаем формы, комплекс де Рама и другие комплексы, мы всегда имеем в виду важное ограничительное условие. Мы предполагаем, что пространство форм снабжено хорошо определёнными нормой и скалярным произведением (1.27). Математики тоже это предполагают, но для нас это особенно важно. Если скалярное произведение не определено, мы не можем отобразить пространство форм на гильбертово пространство системы СКМ и вся идеология рухнет. Вычисление эйлеровой характеристики в вышеприведённых примерах также предполагает, что формы имеют конечную норму. В противоположном случае это вычисление неверно.

Действительно, рассмотрим форму $d\phi$ на S^2 . Кажется, что она обладает всеми свойствами формы dx^1 на T^2 , будучи замкнутой, но не точной. Но норма (1.27) этой формы расходится $\sim \int d\theta / \sin \theta$, и она не является поэтому допустимой. С другой стороны, форма $d\theta$ замкнута, имеет конечную норму, но она также точна (θ — допустимая 0-форма на S^2) и, следовательно, не даёт вклада в b_1 .

Числа Бетти и, следовательно, эйлерова характеристика — топологические инварианты. Мы покажем теперь, как их вычислить с использованием суперсимметричной техники. Ключевое замечание состоит в следующем.

Теорема 8.3. *Эйлерова характеристика гладкого многообразия совпадает с индексом Виттена суперсимметричной сигма-модели (8.3).*

Доказательство. Взглянем на рис. 5.2. Видно, что каждое собственное состояние Ψ гамильтониана, которое аннигилируется оператором \hat{Q} , но не представимо в виде $\Psi = \hat{Q}\Psi'$, не принадлежит к суперсимметричному дублету состояний с ненулевой энергией. Таким образом, b_p считает состояния нулевой энергии гамильтониана (8.29) с фермионным зарядом p . Если p чётно, мы имеем дело с бозонными, а если p нечётно — с фермионными состояниями. Тогда сумма (8.34) совпадает с определением (6.54) индекса Виттена для этой системы. \square

В главе 6 мы рассказали, как можно вычислить индекс Виттена системы СКМ через интеграл (6.55) по фазовому пространству, к которому сводится функциональный интеграл (6.49) в пределе малых⁶ β . Подставив туда гамильтониан (8.21) и проинтегрировав по импульсам, мы получим интегральное представление для эйлеровой характеристики:

$$\chi = \frac{1}{(2\pi\beta)^{D/2}} \int d^D x \sqrt{g} \int \prod_{A=1}^D d\psi_A d\bar{\psi}_A \exp\left\{-\frac{\beta}{4} R_{ABCD} \bar{\psi}_A \bar{\psi}_B \psi_C \psi_D\right\}. \quad (8.37)$$

Мы сразу видим, что фермионный интеграл обращается в ноль при нечётных D . И действительно, эйлерова характеристика любого нечётномерного многообразия равна нулю, как следует из определения (8.34) и из тождества $b_p = b_{D-p}$ — следствия того факта, что p -формы и $(D-p)$ -формы связаны преобразованием дуальности Ходжа \star .

Если D чётно и $R_{ABCD} \neq 0$, фермионный интеграл, вообще говоря, не исчезает. Ненулевой вклад даёт (может дать) $D/2$ -й член в разложении экспоненты. Множитель $\beta^{D/2}$, возникающий при разложении, сокращает фактор $\beta^{-D/2}$ перед интегралом в (8.37), который возникает при интегрировании по импульсам. В простейшем двумерном случае мы получаем

$$\chi_2 = \frac{1}{2\pi} \int d^2 x \sqrt{g} \mathbb{R}, \quad (8.38)$$

где $\mathbb{R} = R_{1212}$ — гауссова кривизна. Мы пришли к хорошо известной формуле Гаусса—Бонне. Для многообразия произвольной чётной размерности $D = 2n$ мы выводим обобщённую формулу Гаусса—Бонне,

$$\chi_{2n} = \frac{1}{(8\pi)^n n!} \int d^D x \sqrt{g} \varepsilon_{A_1 B_1 \dots A_n B_n} \varepsilon_{C_1 D_1 \dots C_n D_n} \prod_{k=1}^n R_{A_k B_k C_k D_k}. \quad (8.39)$$

В четырёх измерениях это можно переписать так:

$$\chi_4 = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4 x \sqrt{g} R_{ABCD} \tilde{R}_{ABCD}, \quad (8.40)$$

⁶Мы уже отмечали в главе 6 и практически убедимся в этом в главе 14, что этот рецепт работает во многих, но не во всех случаях. Но для систем, рассмотренных в этой главе, он работает.

где

$$\tilde{R}_{ABCD} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ABEF} \varepsilon_{CDGH} R_{EFGH} \quad (8.41)$$

есть дуальный тензор Римана.

Формула (8.39) — это второй пример *теоремы об индексе* — интегрального представления топологического инварианта, который нам встретился в этой книге [первым таким примером был магнитный поток (6.67)]. Другие примеры будут обсуждаться в главах 13, 14. Обобщённая формула Гаусса—Бонне была впервые выведена Чженем в далёком 1942 году [85]. Чжень использовал традиционные математические методы. Суперсимметричное доказательство было дано в 1983–1984 гг. в работах [59]. Как вы видели, оно весьма несложно⁷.

§ 8.3. Деформации. Теория Морса. Квазикручения

Лагранжиан (8.6) — не самый общий суперсимметричный лагранжиан, который можно сконструировать из $\mathcal{N} = 2$ (1, 2, 1) суперполя $X^M(t, \theta, \bar{\theta})$. Так же, как в модели Виттена [см. уравнение (7.38)], мы можем добавить к кинетическому члену (8.6) член с суперпотенциалом:

$$L_{\text{пот}} = - \int d\bar{\theta} d\theta W(X^M). \quad (8.42)$$

Чтобы лагранжиан оставался вещественным, $W(X^M)$ должно быть вещественным.

Сложив (8.6) и (8.42) и проделав те же стандартные манипуляции, что для недеформированного лагранжиана, которые мы больше не будем детально описывать, мы приходим к следующим выражениям для ковариантных квантовых суперзарядов:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_W &= \hat{Q}_0 - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_M W \psi^M = e^{-W} \hat{Q}_0 e^W, \\ \hat{\bar{Q}}_W &= \hat{\bar{Q}}_0 + \frac{i}{\sqrt{2}} e_A^M (\partial_M W) \frac{\partial}{\partial \psi_A} = e^W \hat{\bar{Q}}_0 e^{-W}, \end{aligned} \quad (8.43)$$

⁷Конечно, чтобы оценить простоту этого доказательства, необходимо сначала ознакомиться с основами суперсимметричной динамики, обрисованными в главах 5–7. Чтобы освоить любой новый метод, требуется определённое время и усилия. Но затем приходит вознаграждение в виде богатого урожая интересных и нетривиальных результатов.

где \hat{Q}_0 и $\hat{\bar{Q}}_0$ — недеформированные ковариантные квантовые суперзаряды (8.27).

На языке дифференциальных форм эта деформация означает замену операторов d и d^\dagger на d_W и d_W^\dagger , определяемых как

$$\begin{aligned} d_W \alpha &= d\alpha + dW \wedge \alpha, \\ d_W^\dagger \alpha &= d^\dagger \alpha - \langle dW, \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (8.44)$$

где $\langle dW, \alpha \rangle$ обозначает внутреннее произведение (1.28) форм dW и α :

$$\langle dW, \alpha \rangle = p(\partial_{M_1} W) \alpha^{M_1}_{M_2 \dots M_p} dx^{M_2} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}, \quad (8.45)$$

где p — степень α . Суперзаряды (8.43) нильпотентны — так же, как суперзаряды (8.27). Антисимметричный коммутатор $\{\hat{Q}_W, \hat{\bar{Q}}_W\}$ даёт квантовый гамильтониан:

$$\hat{H}_W = \hat{H}_0 + \frac{1}{2} \partial_M W \partial^M W + \frac{1}{2} \partial_M \partial_N W (\psi^M \hat{\psi}^N - \hat{\psi}^N \psi^M), \quad (8.46)$$

где \hat{H}_0 было выписано в (8.29).

Аналогично скобка Пуассона классических суперзарядов даёт классический гамильтониан:

$$H_W = H_0 + \frac{1}{2} \partial_M W \partial^M W + \psi^M \bar{\psi}^N \partial_M \partial_N W. \quad (8.47)$$

Важное замечание. Индекс Виттена у этой новой системы совпадает с индексом Виттена системы с гамильтонианом H_0 ! В самом деле, *плавная* деформация не может изменить значение индекса. Возможно в принципе, что вакуумное состояние приобретает после деформации ненулевую энергию или, наоборот, состояние с ненулевой энергией становится вакуумным. Но такой переход возможен только для *пары* состояний, поскольку, как мы помним, все состояния с ненулевой энергией с необходимостью спарены в суперсимметричные дублеты. И такой переход не изменит *разность* (6.54) числа бозонных и фермионных вакуумных состояний.

Как и в недеформированном случае, индекс даётся интегралом (6.55), но теперь в него следует подставить классический гамильтониан H_W , а не H_0 , как мы это делали в предыдущем параграфе. И *этот* интеграл, в отличие от интеграла (8.39), может быть вычислен путём простых алгебраических манипуляций.

Как видно из уравнения (8.47), гамильтониан приобретает после деформации потенциальный член $\propto (\partial_M W)^2$. Потенциал обращается в ноль в критических точках функции W . Такие критические точки всегда существуют для гладких функций на компактных многообразиях⁸. Проведём плавную деформацию, умножив W на большой численный фактор, так что подынтегральное выражение в (6.55) станет экспоненциально подавлено всюду, кроме окрестности критических точек. Мы можем теперь вычислить отдельно вклады от каждой критической точки и сложить их.

Подставив (8.47) в (6.55) и проинтегрировав по импульсам, мы получаем

$$I_W = \frac{1}{(2\pi\beta)^{D/2}} \int d^D x \sqrt{g} \prod_A d\psi_A d\bar{\psi}_A \exp\left\{-\beta \left[\frac{1}{2} \partial_M W \partial_N W g^{MN} + \psi^M \bar{\psi}^N \partial_M \partial_N W + \frac{1}{4} R_{ABCD} \bar{\psi}_A \bar{\psi}_B \psi_C \psi_D \right]\right\}. \quad (8.48)$$

В окрестности каждой критической точки P мы можем разложить

$$W(x) = W_0^{(P)} + \frac{1}{2} a_{MN}^{(P)} x^M x^N + \dots \quad (8.49)$$

Если $a_{MN}^{(P)}$ достаточно велики, мы можем пренебречь членами высшего порядка в этом разложении и выбросить также в показателе экспоненты член $\propto R_{ABCD}$. Фермионный интеграл можно взять с помощью (4.50), и мы приходим к выражению

$$I_W^{(P)} = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{D/2} \int d^D x \sqrt{g} \det(e_A^M e_B^N a_{MN}^{(P)}) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\beta}{2} a_{MQ}^{(P)} a_{NR}^{(P)} x^Q x^R g^{MN}\right\} = \frac{\det(a^{(P)})}{|\det(a^{(P)})|} = (-1)^{f_P}, \quad (8.50)$$

где f_P — число отрицательных собственных значений в матрице $a_{MN}^{(P)}$, которое называется *индексом Морса*. Полный индекс Виттена есть $I_W = \sum_P I_W^{(P)}$.

Мы вывели формулу, представляющую эйлерову характеристику многообразия как сумму по критическим точкам гладкой

⁸Мы даём доказательство этого факта в «греческом стиле», приглашая читателя посмотреть на рис. 8.1.

функции $\mathcal{M} \xrightarrow{W} \mathbb{R}$ (математики называют эту функцию *функцией Морса*):

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_P (-1)^{f_P}. \quad (8.51)$$

Этот результат проиллюстрирован на рис. 8.1. Вложим S^2 и T^2 в \mathbb{R}^3 , как показано на рисунке. Выберем в качестве W координату z точки многообразия. В случае сферы W имеет две критические точки — максимум и минимум. Вклад каждой точки в сумму (8.51) равен $+1$, и мы получаем $\chi(S^2) = 2$. В случае тора W имеет 4 критические точки — максимум, минимум и две седловые точки. Вклад каждого экстремума равен $+1$, а вклад каждой седловой точки равен -1 . Мы получаем $\chi(T^2) = 0$ в согласии с (8.36).

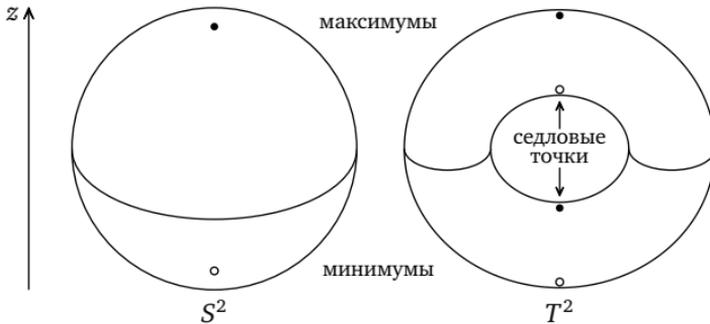


Рис. 8.1. Критические точки функции Морса $z(\mathcal{M})$. Индексы Морса равны $f_P = 0$ в минимуме, $f_P = 2$ в максимуме и $f_P = 1$ в седловых точках

Индекс Морса f_P имеет физическую интерпретацию. Выберем локально плоские координаты в окрестности критической точки P , в которых $g_{MN}(P) = \delta_{MN}$, а матрица $a_{MN}^{(P)}$ диагональна. Квантовый гамильтониан в окрестности P приобретает вид

$$\hat{H}^{(P)} = \frac{1}{2} \sum_M [\hat{P}_M^2 + \omega_M^2 (x^M)^2 + \omega_M (\psi^M \hat{\psi}^M - \hat{\psi}^M \psi^M)], \quad (8.52)$$

где ω_M — собственные значения a_{MN} . Это сумма D гамильтонианов (5.29), описывающих суперсимметричные осцилляторы. Как мы видели в главе 5, основное состояние каждого такого гамильтониана имеет нулевую энергию; оно бозонно, если $\omega_M > 0$ и

фермионно, если $\omega_M < 0$. Если матрица a_{MN} имеет f_P отрицательных собственных значений, волновая функция основного состояния включает f_P грассмановых факторов и несет фермионный заряд f_P .

Мы построили, однако, только *приближённые* волновые функции основных состояний исходного гамильтониана (8.46). Свойства *истинных* основных состояний могут отличаться. В случае S^2 два суперсимметричных бозонных основных состояния (8.52) отвечают двум суперсимметричным бозонным основным состояниям полного гамильтониана, потому что для сферы $I_W = 2$. С другой стороны, на торе $I_W = 0$ и точный гамильтониан не имеет суперсимметричных основных состояний. Четыре основные состояния $\hat{H}^{(P)}$ сдвигаются с нуля, если принять во внимание опущенные вклады в гамильтониане. Вместо четырёх неспаренных состояний с нулевой энергией мы получаем два суперсимметричных дублета с маленькими (если тор велик), но ненулевыми энергиями.

Суперсимметричный вывод (8.51) и физическая интерпретация индекса Морса — заслуга Виттена [1].

Включение потенциального члена (8.42) — не единственная возможная суперсимметричная деформация (8.6). Мы можем также добавить член [86]

$$L_B = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta \mathcal{B}_{MN}(X^P) DX^M DX^N + \text{компл. сопр.} \quad (8.53)$$

с антисимметричным $\mathcal{B}_{MN}(X^P)$. Подставив компонентное разложение X^M , проинтегрировав по $d\bar{\theta}d\theta$ и исключив вспомогательные переменные, мы получаем [86, 87, 83]:

$$L_B = \frac{1}{2} \left[-3i\dot{x}^M (C_{MNP} \psi^N \psi^P + \bar{C}_{MNP} \bar{\psi}^N \bar{\psi}^P) + \nabla_M C_{NPQ} \psi^N \psi^P \psi^Q \bar{\psi}^M + \nabla_M \bar{C}_{NPQ} \bar{\psi}^N \bar{\psi}^P \bar{\psi}^Q \psi^M - \frac{1}{4} C^M C_M \right], \quad (8.54)$$

где

$$C_{MNP} = \frac{1}{3} (\partial_M \mathcal{B}_{NP} + \partial_N \mathcal{B}_{PM} + \partial_P \mathcal{B}_{MN}) \quad (8.55)$$

и

$$C_M = 3(C_{MNP} \psi^N \psi^P - \bar{C}_{MNP} \bar{\psi}^N \bar{\psi}^P). \quad (8.56)$$

Вклад (8.54) зависит от антисимметричного тензора третьего ранга (8.55), что заставляет думать о кручениях, но это не вполне кручения: они не входят в ковариантную производную⁹ ∇_M . Кроме того, кручения вещественны, в то время как C_{MNP} может быть комплексным. Мы будем называть C_{MNP} квазикручениями.

Мы видим, что, помимо членов $\propto \psi^3 \bar{\psi}$ и $\propto (\psi \bar{\psi})^2$, деформированный лагранжиан (и соответствующий гамильтониан) содержит теперь члены $\propto \psi^3 \bar{\psi}$ и $\propto \bar{\psi}^3 \psi$. И это значит, что фермионный заряд больше не сохраняется!

Деформированные ковариантные квантовые суперзаряды можно вывести согласно описанной выше процедуре, которая, как мы помним, состоит из трёх шагов: (i) вычисления классических суперзарядов по теореме Нётер; (ii) перехода к соответствующим квантовым операторам с использованием вейлевской процедуры упорядочения и (iii) преобразования подобия (8.26). Деформированные суперзаряды отличаются от недеформированных наличием дополнительных членов $\propto \psi^3$ и $\propto \hat{\psi}^3$:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_B &= \hat{Q}_0 + \frac{i}{\sqrt{2}} C_{MNP} \psi^M \psi^N \psi^P, \\ \hat{\hat{Q}}_B &= \hat{\hat{Q}}_0 + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{C}_{MNP} \hat{\psi}^M \hat{\psi}^N \hat{\psi}^P.\end{aligned}\tag{8.57}$$

Эти суперзаряды удовлетворяют по построению алгебре суперсимметрии $\mathcal{N} = 2$ и, следовательно, нильпотентны. Дотошный читатель, который захочет проверить этот факт явным вычислением, должен учесть, что производные в \hat{Q}_0 и $\hat{\hat{Q}}_0$ действуют не только на C_{MNP} , но также на фильбайны в $\psi^M = e_A^M \psi_A$. Эти вклады точно сокращают вклады от антикоммутирующих структур $\propto \omega \psi^2 \hat{\psi}$ и $\propto \omega \hat{\psi}^2 \psi$ в \hat{Q}_0 и $\hat{\hat{Q}}_0$ с новыми структурами $\propto C \psi^3$ и $\bar{C} \hat{\psi}^3$.

Суперзаряды (8.57) можно также представить в таком виде, что их нильпотентность становится очевидной:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_B &= e^{B_{MN} \psi^M \psi^N} \hat{Q}_0 e^{-B_{MN} \psi^M \psi^N}, \\ \hat{\hat{Q}}_B &= e^{B_{MN} \hat{\psi}^M \hat{\psi}^N} \hat{\hat{Q}}_0 e^{-B_{MN} \hat{\psi}^M \hat{\psi}^N}.\end{aligned}\tag{8.58}$$

⁹Речь идёт об обыкновенной римановой ковариантной производной, а не о временной ковариантной производной ∇ в (8.5).

Это представление можно перевести на язык дифференциальных форм:

$$\begin{aligned} d_B \alpha &= d\alpha - d\mathcal{B} \wedge \alpha, \\ d_B^\dagger \alpha &= d^\dagger \alpha - \langle d\bar{\mathcal{B}}, \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (8.59)$$

где $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{MN} dx^M \wedge dx^N$.

Можно проделать ещё более сложную деформацию, добавив к лагранжиану член

$$L_\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta \varepsilon_{MNPQ} DX^M DX^N DX^P DX^Q + \text{компл. сопр.} \quad (8.60)$$

На языке форм получаются выражения, аналогичные (8.59), с заменой 2-формы \mathcal{B} на 4-форму \mathcal{E} . Можно добавить также член с шестью ковариантными производными и т. д. Но для многообразия данной размерности D число возможных подобных деформаций конечно. Деформация (8.59) нетривиальна, когда $D \geq 3$; деформация $d_\mathcal{E} \alpha = d\alpha - d\mathcal{E} \wedge \alpha$ нетривиальна, когда $D \geq 5$ и т. д.

Индекс Виттена всех описанных деформированных моделей совпадает с индексом Виттена недеформированной модели и равен эйлеровой характеристике многообразия.

В этой главе мы обсуждали только деформации, которые были известны математикам и изучались ими прежде. Но можно также рассмотреть деформации, которые не привлекли до сей поры внимания математиков. Такие деформации и, в частности, так называемые *квазикомплексные* деформации будут обсуждаться в главах 10, 11.

Глава 9

Суперсимметричное описание комплекса Дольбо

Как мы знаем из главы 2, существует два способа описывать комплексные многообразия. Можно использовать либо комплексные координаты, либо вещественные координаты, но принять во внимание присутствие тензора комплексной структуры, удовлетворяющего условию интегрируемости (теорема 2.6). Соответственно, у комплекса Дольбо также есть два возможных суперсимметричных описания.

§9.1. Описание через суперполя $\mathcal{N} = 2$

Рассмотрим набор из d голоморфных киральных $(2, 2, 0)$ суперполей Z^m ($\bar{D}Z^m = 0$) и антиголоморфных сопряжённых суперполей $\bar{Z}^{\bar{m}}$. Напишем суперполевое действие

$$S = \int d\bar{\theta} d\theta dt \left[\frac{1}{4} h_{m\bar{n}}(Z, \bar{Z}) \bar{D}\bar{Z}^{\bar{n}} DZ^m + W(Z, \bar{Z}) \right] \quad (9.1)$$

с эрмитовым $h_{m\bar{n}}$ и вещественным W . Это действие является естественным обобщением действия (7.31) для модели Ландау. Мы скоро увидим, что член $\propto W$ описывает калибровочное поле — так же, как член $\propto BZ\bar{Z}$ в уравнении (7.31). Но рассмотрим вначале систему с $W = 0$. Компонентный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} L = & h_{m\bar{n}} \left[\dot{z}^m \dot{\bar{z}}^{\bar{n}} + \frac{i}{2} \left(\psi^m \dot{\bar{\psi}}^{\bar{n}} - \dot{\psi}^m \bar{\psi}^{\bar{n}} \right) \right] - \\ & - \frac{i}{2} \left[(2\partial_m h_{k\bar{n}} - \partial_k h_{m\bar{n}}) \dot{z}^k - (2\partial_{\bar{n}} h_{m\bar{k}} - \partial_{\bar{k}} h_{m\bar{n}}) \dot{\bar{z}}^{\bar{k}} \right] \psi^m \bar{\psi}^{\bar{n}} + \\ & + (\partial_k \partial_{\bar{q}} h_{m\bar{n}}) \psi^k \psi^m \bar{\psi}^{\bar{q}} \bar{\psi}^{\bar{n}}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Мы видим, что $h_{m\bar{n}}$ имеет смысл комплексной эрмитовой метрики.

При переходе к квазивещественной нотации (2.13) [где также принято $P_M = (p_m, p_{\bar{m}})$ и $\psi^M = (\psi^m, \bar{\psi}^{\bar{m}})$] лагранжиан (9.2)

приобретает следующий симпатичный вид:

$$L = \frac{1}{2} \left[g_{MN} \dot{x}^M \dot{x}^N + i g_{MN} \psi^M \nabla \psi^N - \frac{1}{6} \partial_P C_{KLM} \psi^P \psi^K \psi^L \psi^M \right]. \quad (9.3)$$

Полностью антисимметричный тензор C_{KLM} имеет смысл кручения. Он имеет следующие ненулевые компоненты:

$$C_{kl\bar{m}} = (\partial_l h_{k\bar{m}} - \partial_k h_{l\bar{m}}), \quad C_{\bar{k}l m} = \overline{C_{kl\bar{m}}} = (\partial_{\bar{l}} h_{m\bar{k}} - \partial_{\bar{k}} h_{m\bar{l}}). \quad (9.4)$$

Этот тензор уже выписывался¹ в главе 2 [уравнение (2.16)]. Там было отмечено, что кручение (9.4) входит в бисмутову аффинную связность

$$G_{M,NP}^{(B)} = \Gamma_{M,NP} + \frac{1}{2} C_{MNP}. \quad (9.5)$$

Ковариантная производная

$$\nabla \psi^M = \dot{\psi}^M + G_{NP}^M \dot{x}^N \psi^P$$

в уравнении (9.3) включает именно эту связность. Отметим, что в кэлеровом случае кручение (9.4) обращается в ноль.

Классические суперзаряды вычисляются стандартным образом по теореме Нётер, так же, как мы это делали в предыдущей главе для сигма-моделей с вещественными суперполями. Они имеют вид

$$\begin{aligned} Q &= \psi^m \left[\pi_m + \frac{i}{2} \Gamma_{m,n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right] = \psi^m \left[\pi_m - \frac{i}{2} \partial_m h_{n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right], \\ \bar{Q} &= \bar{\psi}^{\bar{m}} \left[\pi_{\bar{m}} - \frac{i}{2} \Gamma_{\bar{m},n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right] = \bar{\psi}^{\bar{m}} \left[\pi_{\bar{m}} + \frac{i}{2} \partial_{\bar{m}} h_{n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right], \end{aligned} \quad (9.6)$$

где канонические импульсы π_m и $\pi_{\bar{m}}$ получаются вариацией лагранжиана по \dot{z}^m и $\dot{\bar{z}}^{\bar{m}}$ при фиксированных ψ^m и $\bar{\psi}^{\bar{m}}$.

Введя голоморфные и антиголоморфные грассмановы переменные на касательном пространстве², $\psi^c = e_m^c \psi^m$ и $\bar{\psi}^{\bar{c}} = e_{\bar{m}}^{\bar{c}} \bar{\psi}^{\bar{m}}$, и канонические импульсы p_m и $p_{\bar{m}}$, которые даются вариацией

¹Можно сравнить его с ружьём, которое опытный драматург вешает на стену кабинета главного героя в первом акте пьесы и которое выстрелит в третьем. На страницах нашей книги развешено много таких ружей.

²Напомним, что, в отличие от вещественного случая, когда не надо было заботиться о положении касательных индексов, в комплексном случае это делать надо — см. примечание на с. 45.

лагранжиана по каноническим скоростям с фиксированными ψ^c и $\bar{\psi}^{\bar{c}}$, мы выводим

$$Q = e_c^m \psi^c [p_m - i\omega_{a\bar{b},m} \psi^a \bar{\psi}^{\bar{b}}], \quad \bar{Q} = e_{\bar{c}}^{\bar{m}} \bar{\psi}^{\bar{c}} [p_{\bar{m}} - i\omega_{a\bar{b},\bar{m}} \psi^a \bar{\psi}^{\bar{b}}], \quad (9.7)$$

где $\omega_{a\bar{b},m}$ и $\omega_{a\bar{b},\bar{m}}$ — спиновые связности, соответствующие стандартным аффинным связностям Леви-Чивиты Γ_{NP}^M . Выполняется свойство

$$\omega_{a\bar{b},\bar{m}} = \overline{\omega_{ab,m}} = -\overline{\omega_{b\bar{a},m}}.$$

Заметим, что спиновые связности $\omega_{ab,M}$ и $\omega_{\bar{a}\bar{b},M}$, которые не равны нулю на общем комплексном многообразии (см. обсуждение на с. 46), в выражения (9.7) для суперзарядов не входят.

Канонический классический гамильтониан может быть записан в следующем компактном виде:

$$H = h^{\bar{m}m} \mathcal{P}_m \bar{\mathcal{P}}_{\bar{n}} - e_a^k e_c^m e_b^{\bar{l}} e_{\bar{d}}^{\bar{n}} (\partial_k \partial_{\bar{l}} h_{m\bar{n}}) \psi^a \psi^c \bar{\psi}^{\bar{b}} \bar{\psi}^{\bar{d}}, \quad (9.8)$$

где

$$\mathcal{P}_m = p_m - i\omega_{a\bar{b},m}^{(B)} \psi^a \bar{\psi}^{\bar{b}}, \quad \bar{\mathcal{P}}_{\bar{n}} = \bar{p}_{\bar{n}} - i\omega_{a\bar{b},\bar{n}}^{(B)} \psi^a \bar{\psi}^{\bar{b}}. \quad (9.9)$$

В отличие от суперзарядов (9.7) гамильтониан (9.8) включает бисмутовы спиновые связности,

$$\omega_{AB,M}^{(B)} = e_{AN} (\partial_M e_B^N + G_{MK}^N e_B^K) = \omega_{AB,M} - \frac{1}{2} e_A^N e_B^K C_{NKM}. \quad (9.10)$$

Обратимся теперь к квантовой теории. Как и в предыдущей главе, мы разрешаем неоднозначности упорядочения по рецепту, предложенному в [43], т. е. мы используем симметричное вейлевское упорядочение для суперзарядов и затем делаем преобразование подобия (8.26), так что получающиеся суперзаряды получают геометрическую интерпретацию.

Мы приходим к следующим выражениям для ковариантных квантовых суперзарядов³:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= e_c^m \psi^c \left[\hat{p}_m - \frac{i}{2} \partial_m (\ln \det e) - i \omega_{a\bar{b},m} \psi^a \hat{\psi}^{\bar{b}} \right], \\ \hat{\bar{Q}} &= e_{\bar{c}}^{\bar{m}} \hat{\psi}^{\bar{c}} \left[\hat{p}_{\bar{m}} - \frac{i}{2} \partial_{\bar{m}} (\ln \det e) - i \omega_{a\bar{b},\bar{m}} \psi^a \hat{\psi}^{\bar{b}} \right], \end{aligned} \quad (9.11)$$

³Чтобы избежать ненужных усложнений, мы предположили, что комплексные фильбайны e_m^a выбраны так, что их детерминант вещественен: $\det e = \det \bar{e} = \sqrt{\det h} = \sqrt[4]{\det g}$.

где \hat{p}_m , $\hat{p}_{\bar{m}}$ и $\hat{\psi}^{\bar{a}}$ суть операторы $-i\partial/\partial z^m$, $-i\partial/\partial \bar{z}^{\bar{m}}$ и $\partial/\partial \psi^a$. Эти выражения почти совпадают по форме с классическими выражениями (9.7), но обратите внимание на присутствие дополнительных членов $\propto \partial_M \ln \det e$ в квантовых суперзарядах.

Чтобы понять их смысл, рассмотрим второй член в действии (9.1). Соответствующий вклад в компонентный лагранжиан есть

$$\Delta L_W = i(\dot{\bar{z}}^{\bar{m}} \partial_{\bar{m}} W - \dot{z}^m \partial_m W) + 2 \partial_m \partial_{\bar{n}} W \psi^m \bar{\psi}^{\bar{n}}. \quad (9.12)$$

Это приводит к дополнительным членам в суперзарядах:

$$\Delta \hat{Q}_W = i\psi^m \partial_m W, \quad \Delta \hat{\bar{Q}}_W = -i\bar{\psi}^{\bar{m}} \partial_{\bar{m}} W. \quad (9.13)$$

Сдвиг (9.13) сводится к преобразованию подобия⁴:

$$\hat{Q}_W = e^W \hat{Q} e^{-W}. \quad (9.14)$$

Эта формула напоминает суперзаряд (8.43) из предыдущей главы, который описывал комплекс де Рама, деформированный наличием дополнительного скалярного потенциала, но динамический смысл происходящего теперь другой. После добавления (9.13) к (9.11) импульсы \hat{p}_m и $\hat{p}_{\bar{m}}$ заменяются выражениями $\hat{p}_m + i\partial_m W$ и $\hat{p}_{\bar{m}} - i\partial_{\bar{m}} W$. Эти структуры также входят в гамильтониан (9.17). Это говорит о том, что вектор

$$A_M = (i\partial_m W, -i\partial_{\bar{m}} W) \quad (9.15)$$

имеет смысл калибровочного векторного потенциала [ср. выражение (5.14) для гамильтониана Паули, где следует сделать замену $e/c \rightarrow -1$]. Соответствующий тензор напряжённости поля $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ имеет компоненты

$$F_{\bar{n}m} = -F_{m\bar{n}} = 2i\partial_m \partial_{\bar{n}} W, \quad F_{mn} = F_{\bar{m}\bar{n}} = 0. \quad (9.16)$$

Классический гамильтониан общей модели (9.1) имеет вид

$$H_W = h^{\bar{n}m} (\mathcal{P}_m + i\partial_m W)(\bar{\mathcal{P}}_{\bar{n}} - i\partial_{\bar{n}} W) - e_a^k e_c^m e_b^{\bar{l}} e_{\bar{d}}^{\bar{n}} (\partial_k \partial_{\bar{l}} h_{m\bar{n}}) \psi^a \psi^c \bar{\psi}^{\bar{b}} \bar{\psi}^{\bar{d}} - 2 \partial_m \partial_{\bar{n}} W \psi^m \bar{\psi}^{\bar{n}}. \quad (9.17)$$

Помимо сдвига импульсов $\mathcal{P}_M \rightarrow \mathcal{P}_M + A_M$, появляется бифермионный член, пропорциональный F_{MN} .

⁴В одиннадцатой главе мы приведём и обсудим много других примеров преобразований подобия.

Замечание. Выражение (9.16) для напряжённости поля означает, что $F_{AB} = e_A^M e_B^N F_{MN}$ не имеет самый общий вид, но лежит в алгебре $u(2n) \subset so(4n)$ — так же, как бисмутова спиновая связность $\omega_{AB}^{(B)}$. А это значит, что F_{AB} коммутирует с комплексной структурой I_{AB} . Обратное также верно: если $[F, I] = 0$, то голоморфная и антиголоморфная компоненты F_{MN} обращаются в ноль. Оба эти утверждения легко выводятся из (9.16) и (2.51).

Мы можем теперь обратить внимание на тот факт, что вклад (9.13) имеет тот же вид, что и дополнительный член $\propto \partial_M \ln \det e$ в квантовых суперзарядах (9.11) системы без W . Более точно: выбрав $W = (1/4) \ln \det h$, мы можем избавиться от такого дополнительного члена в \hat{Q} , а выбрав $W = -(1/4) \ln \det h$, мы можем избавиться от дополнительного члена в $\hat{\bar{Q}}$.

Определение 9.1. Абелево калибровочное поле (9.15) с пре-потенциалом

$$W = \frac{1}{2} \ln \det h, \quad (9.18)$$

называется математиками связностью *канонического линейного расслоения*. Калибровочное поле, следующее из $W = (1/4) \ln \det h$ (и которое интересует нас больше), называется связностью *квадратного корня* из канонического линейного расслоения. А поле, следующее из $W = -(1/4) \ln \det h$, есть связность *квадратного корня* из *антиканонического* линейного расслоения.

Я привёл эти переводы на математический язык для читателей-математиков, но в дальнейшем мы будем держаться физической терминологии.

Всё готово теперь для доказательства центральной теоремы — комплексного аналога теоремы 8.1 предыдущей главы.

Теорема 9.1. *Рассмотрим суперсимметричную систему (9.1) с $W = (1/4) \ln \det h$. Действие её квантовых суперзарядов*

$$\begin{aligned} \hat{Q}_W &= -ie_c^m \psi^c \left[\frac{\partial}{\partial z^m} + \omega_{a\bar{b},m} \psi^a \frac{\partial}{\partial \psi^b} \right], \\ \hat{\bar{Q}}_W &= -ie_{\bar{c}}^{\bar{m}} \frac{\partial}{\partial \psi^c} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{m}}} + \frac{1}{2} \partial_{\bar{m}} (\ln \det h) + \omega_{a\bar{b},\bar{m}} \psi^a \frac{\partial}{\partial \psi^b} \right] \end{aligned} \quad (9.19)$$

на волновые функции $\Psi(z^m, \bar{z}^{\bar{m}}, \psi^a)$ изоморфно действию оператора голоморфной внешней производной ∂ и сопряжённого оператора ∂^\dagger в комплексе Дольбо.

Доказательство. Доказательство практически такое же, как в случае комплекса де Рама. Рассмотрим волновую функцию фермионного заряда p ,

$$\Psi_p = A_{m_1 \dots m_p}(x) \psi^{m_1} \dots \psi^{m_p}, \quad (9.20)$$

и вычислим $\hat{Q}_W \Psi_p$. Член с производной в \hat{Q}_W даст

$$\begin{aligned} -i\psi^m \frac{\partial}{\partial z^m} \Psi_p &= -i(\partial_m A_{m_1 \dots m_p}) \psi^m \psi^{m_1} \dots \psi^{m_p} - \\ &- ip A_{m_1 \dots m_p} (\partial_m e_a^{m_1}) e_n^a \psi^m \psi^n \psi^{m_2} \dots \psi^{m_p}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Действие члена $\sim \omega_{a\bar{b},m}$ даст

$$-ip \omega_{a\bar{b},m} e_n^a e_b^{m_1} A_{m_1 \dots m_p} \psi^m \psi^n \psi^{m_2} \dots \psi^{m_p}.$$

Складывая это со вторым членом в (9.21), мы получим выражение, содержащее фактор

$$X^{m_1} = e_n^a (\partial_m e_a^{m_1} + \omega_{a\bar{b},m} e_b^{m_1}) \psi^m \psi^n. \quad (9.22)$$

Посмотрим теперь на «полную» ковариантную производную (1.51) с аффинной связностью Леви-Чивиты Γ_{NP}^M и соответствующей спиновой связностью. Согласно (1.53) она равна нулю. Выберем в левой части (1.53) все свободные индексы голоморфными: $M \rightarrow m_1$, $N \rightarrow m$, $A \rightarrow a$. Мы получаем

$$\partial_m e_a^{m_1} + \Gamma_{mP}^{m_1} e_a^P + \omega_{aB,m} e_B^{m_1} = 0. \quad (9.23)$$

Заметим теперь, что и индекс P с необходимостью голоморфен, поскольку $e_a^{\bar{P}} = 0$. Также третий член в (9.23) может быть записан как⁵ $\omega_{a\bar{b},m} e_b^{m_1}$. Принимая всё это во внимание, мы выводим

$$X^{m_1} = -\Gamma_{mp}^{m_1} \psi^m \psi^p = 0. \quad (9.24)$$

В итоге получаем:

$$\hat{Q}_W \Psi_p = -i(\partial_m A_{m_1 \dots m_p}) \psi^m \psi^{m_1} \dots \psi^{m_p}, \quad (9.25)$$

что совпадает по форме с точностью до множителя $-i$ с уравнением (2.39), определяющим действие голоморфной внешней

⁵Вспомним, что $Y_A Z_A \equiv Y_a Z_{\bar{a}} + Y_{\bar{a}} Z_a$.

производной ∂ на голоморфные p -формы. Осталось только провести отождествление $\psi^m \equiv dz^m$.

Оператор ∂^\dagger сопряжён к оператору ∂ с мерой (2.37), включающей фактор $\det h = \sqrt{\det g}$. И оператор \hat{Q}_W сопряжён к \hat{Q}_W с той же ковариантной мерой. Таким образом, коль скоро \hat{Q}_W изоморфен ∂ , \hat{Q}_W изоморфен ∂^\dagger . \square

Замечание. Это доказательство «объясняет» «экспериментальный факт», что квантовые суперзаряды данной модели включают *обыкновенную* спиновую связность $\omega_{a\bar{b},m}$, а не бисмутову спиновую связность (9.10). В последнем случае в уравнении (9.24) вместо $\Gamma_{m\bar{n}}^{m_1}$ стояла бы связность $G_{m\bar{n}}^{m_1}$ с кручением, X^{m_1} не обращалось бы в ноль и \hat{Q}_W не имело бы хорошей геометрической интерпретации.

Рассмотрим теперь калибровочное поле, следующее из преобразования $W = -(1/4) \ln \det h$ и рассмотрим действие соответствующих квантовых суперзарядов не на $\Psi(z^m, \bar{z}^m; \psi^a)$, а на *дуальные* волновые функции $\Psi(z^m, \bar{z}^m; \bar{\psi}^a)$ (ср. переход из координатного в импульсное представление в обыкновенной квантовой механике). Точно тем же способом, что раньше, можно доказать, что действие \hat{Q}_W изоморфно в этом случае действию оператора $\bar{\partial}$ на формы (2.41) комплекса анти-Дольбо. И \hat{Q}_W изоморфно $\bar{\partial}^\dagger$.

При произвольном W мы имеем дело с *твистованным* комплексом Дольбо. Следующий известный математикам факт⁶ — непосредственное следствие из (9.11) и (9.13).

Теорема 9.2. Действие \hat{Q}_W общего вида на волновые функции $\Psi(z^m, \bar{z}^m; \psi^a)$ изоморфно действию нильпотентного оператора

$$\partial_W = \partial - \partial \left(W - \frac{1}{4} \ln \det h \right) \wedge \quad (9.26)$$

на формы комплекса Дольбо. Действие \hat{Q}_W общего вида на дуальные волновые функции $\Psi(z^m, \bar{z}^m, \bar{\psi}^a)$ изоморфно действию оператора

$$\bar{\partial}_W = \bar{\partial} + \bar{\partial} \left(W + \frac{1}{4} \ln \det h \right) \wedge \quad (9.27)$$

в комплексе анти-Дольбо.

⁶См. напр. предложения 1.4.23 и 1.4.25 в книге [88].

Замечание на будущее. Если многообразие кэлерово, то сумма $\hat{Q}_W + \hat{\bar{Q}}_W$ изоморфна оператору Дирака с калибровочным полем (9.15), живущим на этом многообразии. В случае общего комплексного многообразия стандартный оператор Дирака деформируется наличием кручений [см. уравнение (13.22)]. Комплекс Дирака и его связь с комплексом Дольбо будет подробно обсуждаться в главах 13 и 14.

9.1.1. Голоморфные кручения

В отличие от суперпотенциального члена (8.42) в суперсимметричной сигма-модели, изоморфной комплексу де Рама, член $\int d\bar{\theta}d\theta W(Z, \bar{Z})$ в (9.1), дающий калибровочное поле (9.15), нельзя рассматривать как деформацию. В главе 13 мы покажем, что $W(Z, \bar{Z})$ не может быть инфинитезимальным — существуют топологические инварианты, выражающиеся через интегралы, зависящие от⁷ W , которые равны либо нулю (если $W = 0$), либо ненулевому целому числу.

Но модель (9.1) можно продеформировать, добавив член [83]

$$S_B = \frac{1}{4} \int d\bar{\theta}d\theta dt [\mathcal{B}_{mn}(Z, \bar{Z}) DZ^m DZ^n - \bar{\mathcal{B}}_{\bar{m}\bar{n}}(Z, \bar{Z}) \bar{D}\bar{Z}^{\bar{m}} \bar{D}\bar{Z}^{\bar{n}}] \quad (9.28)$$

с произвольным антисимметричным комплексным \mathcal{B}_{mn} и сопряжённым ему $\bar{\mathcal{B}}_{\bar{m}\bar{n}}$. Эта деформация похожа на деформацию (8.53) в случае комплекса де Рама, но \mathcal{B}_{mn} несёт теперь голоморфные индексы.

Компонентный лагранжиан получает вклад

$$L_B = -3i \partial_{[k} \mathcal{B}_{mn]} \dot{z}^k \psi^m \psi^n - \partial_{\bar{p}} \partial_k \mathcal{B}_{mn} \bar{\psi}^{\bar{p}} \psi^k \psi^m \psi^n + \text{компл. сопр.} \quad (9.29)$$

Отметим, что добавление этого дополнительного члена в лагранжиан (9.3) даёт лагранжиан того же вида, где тензор кручения включает помимо (9.4) чисто голоморфные компоненты $C_{kmn} = 12 \partial_{[k} \mathcal{B}_{mn]}$ и $C_{\bar{k}\bar{m}\bar{n}} = 12 \partial_{[\bar{k}} \bar{\mathcal{B}}_{\bar{m}\bar{n}]}$ (см. также теорему 9.5 в следующем параграфе). Таким образом, деформация (9.29) привносит дополнительные *кручения*, а не «квазикручения», как это было в случае деформации (8.53).

⁷Простейший такой инвариант — это магнитный поток (5.25).

Соответствующие вклады в суперзаряды имеют вид

$$\Delta \hat{Q}_B = i \partial_k \mathcal{B}_{mn} \psi^k \psi^m \psi^n, \quad \Delta \hat{Q}_B = i \partial_{\bar{k}} \bar{\mathcal{B}}_{\bar{m}\bar{n}} \hat{\psi}^{\bar{k}} \hat{\psi}^{\bar{m}} \hat{\psi}^{\bar{n}}. \quad (9.30)$$

Рассмотрим $(2, 0)$ -форму $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{mn} dz^m \wedge dz^n$ и комплексно сопряжённую $(0, 2)$ -форму $\bar{\mathcal{B}}$. Легко доказать теорему [89, 83]:

Теорема 9.3. Действие суперзаряда $\hat{Q}_{W,B}$ общего вида на волновые функции $\Psi(z^m, \bar{z}^m; \psi^a)$ изоморфно действию нильпотентного оператора

$$\partial_{W,B} = \partial_W - \partial \mathcal{B} \wedge \quad (9.31)$$

в комплексе Дольбо⁸. Действие суперзаряда $\hat{Q}_{W,B}$ общего вида на дуальные волновые функции $\Psi(z^m, \bar{z}^m; \psi^a)$ изоморфно действию оператора

$$\bar{\partial}_{W,B} = \bar{\partial}_W - \bar{\partial} \bar{\mathcal{B}} \wedge \quad (9.32)$$

в комплексе анти-Дольбо.

Деформации (9.31) и (9.32) возможны, когда комплексная размерность многообразия d есть 3 или больше. Если $d \geq 5$, то можно также осуществить более сложную деформацию

$$S_\varepsilon \propto \int d\bar{\theta} d\theta dt \varepsilon_{mnpq} DZ^m DZ^n DZ^p DZ^q + \text{компл. сопр.} \quad (9.33)$$

Начиная с $d = 7$, можно добавить член с шестью ковариантными производными и т. д.

§ 9.2. Описание через суперполя $\mathcal{N} = 1$

Возьмём $D = 2d$ вещественных $\mathcal{N} = 1$ суперполей $\mathcal{X}^M = x^M + i\theta\Psi^M$ [см. уравнение (7.8)] и напишем следующее действие [78]:

$$S = \frac{i}{2} \int d\theta dt g_{MN}(\mathcal{X}) \dot{\mathcal{X}}^M \mathcal{D}\mathcal{X}^N - \frac{1}{12} \int d\theta dt C_{KLM} \mathcal{D}\mathcal{X}^K \mathcal{D}\mathcal{X}^L \mathcal{D}\mathcal{X}^M \quad (9.34)$$

⁸Более точно — в *твистованном деформированном* комплексе Дольбо, где «твистованный» означает присутствие калибровочного поля и «деформированный» означает присутствие дополнительных голоморфных кручений.

с ковариантной производной \mathcal{D} , определённой в уравнении (7.14). Мы добавили к действию (8.3) дополнительный член, включающий полностью антисимметричный тензор C_{KLM} , имеющий смысл кручения. Интегрируя по $d\theta$, мы воспроизводим лагранжиан (9.3).

Действие (9.34) обладает по построению суперсимметрией $\mathcal{N} = 1$. Интеграл $\int d\theta dt$ инвариантен относительно замены переменных (7.1), генерирующей сдвиг суперполей

$$\delta_0 \mathcal{X}^M = \mathcal{X}^M(\theta + \epsilon_0, t + i\epsilon_0 \theta) - \mathcal{X}^M(\theta, t). \quad (9.35)$$

Компоненты \mathcal{X}^M преобразуются, как в (7.10):

$$\delta_0 x^M = i\epsilon_0 \Psi^M, \quad \delta_0 \Psi^M = -\epsilon_0 \dot{x}^M. \quad (9.36)$$

Потребуем теперь инвариантности действия относительно следующих дополнительных суперсимметричных преобразований:

$$\delta \mathcal{X}^M = \epsilon I_N^M(\mathcal{X}^P) \mathcal{D} \mathcal{X}^N, \quad (9.37)$$

где тензор $I_N^M(\mathcal{X}^P)$ будет определён ниже. Компоненты в \mathcal{X}^M преобразуются при этом следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta x^M &= i\epsilon I_N^M \Psi^N, \\ \delta \Psi^M &= \epsilon (I_N^M \dot{x}^N - i \partial_S I_N^M \Psi^S \Psi^N). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Симметрии (9.36) и (9.38) дают два сохраняющихся вещественных суперзаряда \mathcal{Q}_0 и \mathcal{Q} . Довольно очевидно, что преобразования (9.35) и (9.37) коммутируют. Действительно, $\mathcal{Y}^M = \delta \mathcal{X}^M$ есть суперполе и, значит, $\delta_0(\delta \mathcal{X}^M)$ и $\delta(\delta_0 \mathcal{X}^M)$ совпадают, имея вид (9.35), где \mathcal{X}^M заменено на \mathcal{Y}^M . Отсюда следует, что антикоммутатор $\{\hat{\mathcal{Q}}, \hat{\mathcal{Q}}_0\}$ двух квантовых суперзарядов равен нулю.

Нетривиальное налагаемое нами требование состоит в том, что коммутатор двух преобразований (9.37) сводится к временному сдвигу. Тогда квадрат соответствующего суперзаряда совпадает с гамильтонианом и мы приходим к алгебре $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии,

$$\hat{\mathcal{Q}}_0^2 = \hat{\mathcal{Q}}^2 = \hat{H}, \quad \{\hat{\mathcal{Q}}_0, \hat{\mathcal{Q}}\} = 0. \quad (9.39)$$

Это требование и требование инвариантности действия относительно (9.37) налагают нетривиальные ограничения на ком-

плексную структуру⁹ и тензор кручения C_{KLM} . Эти ограничения составляют содержание следующей теоремы:

Теорема 9.4. Действие (9.34) инвариантно относительно (9.37) и справедлива алгебра (9.39) в том и только том случае, когда выполняется следующий набор условий:

1. $I^2 = -\mathbb{1}$.

2. Тензор Нейенхейса (2.60) обращается в ноль.

3. Матрица $I_{MN} = g_{NK} I_M^K$ антисимметрична.

4.
$$\nabla_L^{(B)} I_N^M + \nabla_N^{(B)} I_L^M = 0, \quad (9.40)$$

где $\nabla_L^{(B)}$ — ковариантная производная с бисмутовой связностью (9.5).

5.
$$(\partial_L C_{[MSN]} I_R]^L + I_{[N}^L (\partial_R C_{MS]L}) - 2C_{L[MS} (\partial_R I_N]^L) = 0. \quad (9.41)$$

Эта теорема была впервые доказана в работе [26] прямыми компонентными вычислениями. Здесь мы даём, следуя [90], альтернативное доказательство на языке суперполей $\mathcal{N} = 1$.

Доказательство. Условия 1 и 2 необходимы и достаточны для выполнения алгебры (9.39). Заметим вначале, что закон (9.37) влечёт

$$\delta(\mathcal{D}\mathcal{X}^N) = -\epsilon \mathcal{D}(I_L^N \mathcal{D}\mathcal{X}^L) = -\epsilon (\partial_K I_L^N) \mathcal{D}\mathcal{X}^K \mathcal{D}\mathcal{X}^L + i\epsilon I_K^N \dot{\mathcal{X}}^K. \quad (9.42)$$

Тогда коммутатор двух преобразований суперсимметрии (9.37) есть

$$(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) \mathcal{X}^M = 2i\epsilon_1 \epsilon_2 (I^2)_K^M \dot{\mathcal{X}}^K + 2\epsilon_1 \epsilon_2 [I_K^L (\partial_L I_N^M) + (\partial_N I_K^L) I_L^M] \mathcal{D}\mathcal{X}^K \mathcal{D}\mathcal{X}^N. \quad (9.43)$$

Если мы хотим, чтобы эта вариация совпала с $-2i\epsilon_1 \epsilon_2 \partial_t \mathcal{X}^M$ [как это следует из $\hat{Q}^2 = \hat{H}$], должны выполняться условия $I^2 = -\mathbb{1}$ и также

$$(\partial_L I_{[N}^M) I_{K]}^L + (\partial_{[N} I_{K]}^L) I_L^M = 0. \quad (9.44)$$

⁹Мы скоро увидим, что I_N^M обладает всеми свойствами интегрируемой комплексной структуры.

Умножая это на I_N^M , используя $I^2 = -1$ и интегрируя по частям первый член, мы можем привести условие (9.44) к виду $\mathcal{N}_{KN}^S = 0$ с тензором \mathcal{N}_{KN}^S , определённым в (2.60).

Условия 3 и 4 следуют из инвариантности действия относительно (9.37). Вычисление даёт

$$\delta S = \epsilon \int d\theta dt I_{MN} \dot{\chi}^M \dot{\chi}^N - \frac{i\epsilon}{4} \int d\theta dt P_{M,SN} \dot{\chi}^M \mathcal{D}\chi^S \mathcal{D}\chi^N + \\ + \frac{\epsilon}{12} \int d\theta dt T_{RMSN} \mathcal{D}\chi^R \mathcal{D}\chi^M \mathcal{D}\chi^S \mathcal{D}\chi^N, \quad (9.45)$$

где

$$P_{MSN} = 2\nabla_M I_{SN} + 4\nabla_N I_{(MS)} - C^L{}_{SN} I_{ML}, \\ T_{RMSN} = (\partial_L C_{MSN}) I_R{}^L - 3C_{LSN} (\partial_R I_M{}^L). \quad (9.46)$$

Заметим, что ∇_M в уравнении (9.46) — обычные ковариантные производные Леви-Чивиты.

Давайте вначале посмотрим, что происходит, когда нет кручения. В этом случае вторая строчка в уравнении (9.45) исчезает, а первая строчка зануляется тогда и только тогда, когда $I_{(MN)} = 0$ (что означает вместе с уже выведенными условиями 1 и 2, что I_{MN} есть интегрируемая комплексная структура) и $\nabla_M I_{SN} = 0$. Мы приходим к кэлеровой геометрии.

Если C_{MSN} отличен от нуля, ситуация несколько более сложная. Одно из усложнений состоит в том, что второй и третий интегралы в (9.45) не полностью независимы: если обратить производную \mathcal{D} во втором интеграле, в нём частично возникает та же структура, что и в третьем.

В самом деле, посмотрим на второй член в правой части (9.45). Даёт вклад только антисимметричная по перестановке $S \leftrightarrow N$ часть P_{MSN} . Представим

$$P_{M[SN]} = P_{[MSN]} + \frac{1}{3}(2P_{M[SN]} + P_{S[MN]} - P_{N[MS]}), \quad (9.47)$$

так что структура в скобках даёт ноль после полной антисимметризации по $[MSN]$. Если представить $\dot{\chi}^M$ как $i\mathcal{D}^2 \chi^M$ и проинтегрировать по частям, вклад в интеграл, зависящий от $P_{[MSN]}$

приобретёт вид

$$\begin{aligned} \int d\theta dt P_{[MSN]} \dot{\chi}^M \mathcal{D}\chi^S \mathcal{D}\chi^N = \\ = -\frac{i}{3} \int d\theta dt \partial_R P_{[MSN]} \mathcal{D}\chi^R \mathcal{D}\chi^M \mathcal{D}\chi^S \mathcal{D}\chi^N. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Вариация (9.45) представляет таким образом сумму трёх независимых структур:

$$\begin{aligned} \delta S = \epsilon \int d\theta dt I_{MN} \dot{\chi}^M \dot{\chi}^N - \\ - \frac{i\epsilon}{12} \int d\theta dt (2P_{M[SN]} + P_{S[MN]} - P_{N[MS]}) \dot{\chi}^M \mathcal{D}\chi^S \mathcal{D}\chi^N + \\ + \frac{\epsilon}{12} \int d\theta dt (T_{RMSN} - \partial_{[R} P_{MSN]}) \mathcal{D}\chi^R \mathcal{D}\chi^M \mathcal{D}\chi^S \mathcal{D}\chi^N. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Для её зануления необходимо и достаточно

$$I_{(MN)} = 0, \quad (9.50)$$

$$2P_{M[SN]} + P_{S[MN]} - P_{N[MS]} = 0 \quad (9.51)$$

и

$$T_{[RMSN]} = \partial_{[R} P_{MSN]}. \quad (9.52)$$

Уравнение (9.50) есть условие 3 в вышеприведённом списке. Уравнение (9.51) даёт

$$2\nabla_M^{(B)} I_{SN} + \nabla_S^{(B)} I_{MN} - \nabla_N^{(B)} I_{MS} = 0 \quad (9.53)$$

после подстановки $P_{M[SN]}$ из уравнения (9.46) и учёта (9.50). Левую часть (9.53) можно переписать в виде $A_{(MS)N} - A_{(MN)S}$, где

$$A_{(MS)N} = \nabla_M^{(B)} I_{SN} + \nabla_S^{(B)} I_{MN}.$$

Мы видим, что условие зануления (9.53) эквивалентно условию зануления $A_{(MS)N}$. Поднимая индекс N (мы можем это сделать, ввиду $\nabla_M^{(B)} g^{QN} = 0$), мы приходим к (9.40).

Наконец, подставив в (9.52) выражение (9.46) для T_{RMSN} и

$$P_{[MSN]} = \left(\frac{2}{3} \partial_M I_{SN} - \frac{1}{3} C^L{}_{SN} I_{ML} \right) + \text{цикл}(M, S, N) \quad (9.54)$$

(члены $\propto \Gamma_{MN}^P$ сокращаются), мы выводим (9.41). \square

Условия 1–3 из списка относятся только к тензору I . Согласно теореме Ньюландера—Ниренберга 2.6, они необходимы и достаточны, чтобы I_{MN} была интегрируемой комплексной структурой. Фактически мы только что дали альтернативное суперсимметричное доказательство *необходимости* этих условий¹⁰. Действительно, пусть мы ввели комплексные координаты. Тогда можно написать комплексные суперзаряды (9.11). Их вещественная и мнимая части удовлетворяют алгебре (9.39). Как мы только что доказали, отсюда следуют условия 1–3, включающие условие интегрируемости 2.

Но суперсимметричное описание также позволяет понять, почему эти условия *достаточны* для введения комплексных координат z^n . Имеется следующий эвристический аргумент. Из теоремы 9.4 мы знаем, что, если $I^2 = -1$ и тензор Нейенхейса равен нулю, генераторы преобразований (9.36) и (9.38) удовлетворяют алгебре $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии (9.39). В задаче всего имеется $2d$ вещественных динамических бозонных и $2d$ вещественных динамических фермионных переменных. Этот набор переменных даёт бесконечномерное представление алгебры $\mathcal{N} = 2$, но это представление должно быть приводимо, так как единственное известное неприводимое представление суперсимметрии $\mathcal{N} = 2$, включающее равное число бозонных и фермионных динамических переменных, есть представление $(2, 2, 0)$. Представление $(2d, 2d, 0)$ должно разлагаться в прямую сумму d представлений $(2, 2, 0)$, компоненты которых преобразуются согласно (7.26). Но это то же самое, что сказать, что существует решение уравнений (2.50) для z^n .

В главе 3 мы не доказали вполне строго теорему НН, поскольку мы не доказали сходимость бесконечного ряда (2.73). Но строгое математическое доказательство этой теоремы существует. Вот почему, возможно, лучше посмотреть на задачу с обратной стороны. Теореме НН можно дать следующую суперсимметричную интерпретацию [9].

¹⁰Можно усмотреть много общих черт между этим доказательством и традиционным доказательством необходимости условий (2.50), данным на с. 56. В частности, коммутатор $[\delta_1, \delta_2]$ в левой части уравнения (9.43) имеет тот же смысл, что и коммутатор $[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N]$ в левой части уравнения (2.62).

Суперполевоe представление супералгебры $\mathcal{N} = 2$, включающее $2d$ вещественных динамических бозонных и $2d$ вещественных динамических фермионных переменных с необходимостью приводимо и распадается в прямую сумму d неприводимых представлений $(2, 2, 0)$.

Рассмотрим теперь условия (9.40) и (9.41). Уравнение (9.40) напоминает условие $\nabla_N^{(B)} I_L^M = 0$, которое однозначно определяет кручение Бисмута (2.16) для интегрируемой комплексной структуры I_{MN} . Однако из уравнения (9.40), согласно которому ковариантная производная от I обращается в ноль только после симметризации по $N \leftrightarrow L$, кручение однозначно не определяется.

Чтобы понять геометрический смысл связей, которым всё же удовлетворяет тензор кручения, рассмотрим также условие (9.41). Выразим его на языке форм. Введём оператор ι , который действует на P -форму α общего вида следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{если } \alpha &= \alpha_{M_1 \dots M_p} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}, \\ \text{то } \iota \alpha &= P \alpha_{N[M_2 \dots M_p} I^N_{M_1]} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_p}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Для формы $\alpha_{p,q}$ с p голоморфными и q антиголоморфными индексами по отношению к комплексной структуре I (так что $P = p + q$) действие ι сводится к умножению на $i(p - q)$.

В этих терминах (9.41) эквивалентно условию

$$\iota dC = \frac{2}{3} d(\iota C), \quad (9.56)$$

для 3-формы C .

Мы можем теперь доказать следующую теорему [26, 90].

Теорема 9.5. Пусть (g, I, C) удовлетворяют условиям 1–5 предыдущей теоремы. Рассмотрим голоморфное разложение формы кручения относительно комплексной структуры I :

$$C = \sum_{q=0}^3 C_{3-q,q} = C_{3,0} + C_{2,1} + C_{1,2} + C_{0,3}. \quad (9.57)$$

Тогда (i) смешанная часть разложения $C_{2,1} + C_{1,2}$ есть бисмутово кручение (2.16); (ii) голоморфная и антиголоморфная части C замкнуты,

$$\partial C_{3,0} = \bar{\partial} C_{0,3} = 0. \quad (9.58)$$

Доказательство. Выразим (9.40) в комплексных координатах. Комплексная структура I приобретает простой вид (2.51). Выберем $L = l, N = \bar{n}, M = \bar{m}$. Рассмотрим первый член в (9.40). Имеем $\partial_l \delta_{\bar{n}}^{\bar{m}} = 0$, а два других вклада сокращаются. Во втором члене они складываются, и мы выводим условие

$$G_{\bar{n}l}^{\bar{m}} = 0 \Rightarrow G_{m,\bar{n}l} = 0, \quad (9.59)$$

как в (2.19). Компоненты $G_{\bar{m},n\bar{l}}$ комплексно сопряжены $G_{m,\bar{n}l}$ и тоже обращаются в ноль; это также прямо следует из (9.40), если положить там $L = l, N = \bar{n}, M = m$. Из этого, из определения (9.5) и из выражения (2.15) для символов Кристоффеля мы можем вывести, что часть тензора кручения, соответствующая $C_{2,1} + C_{1,2}$, имеет бисмутов вид (9.4). В случае, если все три индекса в (9.40) голоморфны или все они антиголоморфны, равенство (9.40) выполняется автоматически. Выбор $L = l, N = n, M = \bar{m}$ не даёт новой информации.

Можно также заметить, что формы $C_{2,1}$ и $C_{1,2}$ точны:

$$C_{2,1} = 3C_{m\bar{l}\bar{n}} dz^m \wedge dz^l \wedge d\bar{z}^{\bar{n}} = -6\delta\omega,$$

где $\omega = h_{m\bar{n}} dz^m \wedge d\bar{z}^{\bar{n}}$. Аналогично $C_{1,2} = -6\bar{\delta}\omega$.

Рассмотрим теперь условие (9.41) и выберем все свободные индексы голоморфными: $M = m, N = n, S = s, R = r$. Принимая во внимание (2.51), мы немедленно выводим $\partial_{[r} C_{mns]} = 0$, что означает замкнутость формы¹¹ $C_{3,0}$. Выбрав все индексы антиголоморфными, мы выводим, что $\bar{\partial} C_{0,3} = 0$.

Заметим в заключение, что из вещественности C , разложенного согласно (9.57), вытекает, что $C_{\bar{m}\bar{n}\bar{s}} = \overline{C_{mns}}$. \square

Мы можем теперь установить связь с описанием $\mathcal{N} = 2$ предыдущего параграфа. Если $C_{3,0} = 0$, кручение бисмутово и система (9.34) эквивалентна системе (9.1) с $W = 0$. Как мы узнали в предыдущем параграфе, эта система изоморфна твистованному комплексу Дольбо с калибровочным полем [см. уравнения (9.15)

¹¹Это также ясно видно на языке форм. Подставив $C_{3,0}$ в (9.56), мы получаем

$$i(4\partial + 2\bar{\partial})C_{3,0} = 2i(\partial + \bar{\partial})C_{3,0}.$$

Отсюда следует, что $\partial C_{3,0} = 0$.

и (9.26)]

$$A_M = \left(-\frac{i}{4} \partial_m \ln \det h, \frac{i}{4} \partial_{\bar{m}} \ln \det h \right). \quad (9.60)$$

А кручение с ненулевым $C_{3,0}$ даёт деформированный твистованный комплекс Дольбо, включающий дополнительный член (9.28) в действии, так что $C_{3,0} = 12\partial\mathcal{B}$.

Добавляя к $\mathcal{N} = 1$ действию (9.34) член с пятью факторами $\mathcal{D}\mathcal{X}^M$ под интегралом, можно воспроизвести член (9.33) в действии $\mathcal{N} = 2$ и т. д.

Установленную связь между двумя подходами можно использовать для того, чтобы написать выражения для вещественных суперзарядов \mathcal{Q}_0 и \mathcal{Q} . Классические суперзаряды можно найти как вещественную и мнимую части комплексных классических суперзарядов¹² с дополнительным множителем 2. В случае $W = 0$ и при отсутствии деформаций мы выводим, исходя из (9.7), следующие выражения для вещественных суперзарядов [91, 5, 92]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= \Psi^M \left(P_M - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \Psi^A \Psi^B + \frac{i}{12} C_{MKP} \Psi^K \Psi^P \right), \\ \mathcal{Q} &= \Psi^N I_N{}^M \left(P_M - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \Psi^A \Psi^B - \frac{i}{4} C_{MKP} \Psi^K \Psi^P \right), \end{aligned} \quad (9.61)$$

где $\omega_{AB,M}$ — спиновые связности Леви-Чивиты и P_M получается из вариации лагранжиана с фиксированными переменными Ψ^A . Члены $\propto C_{MKP}$ сокращают голоморфные и антиголоморфные связности $\omega_{ab,\bar{m}}$ и $\omega_{\bar{a}b,m}$, присутствующие в $\omega_{AB,M}$ [см. (2.23), (2.24)], но отсутствующие в (9.7). Принимая во внимание нормировку $\{\Psi^A, \Psi^B\}_P = i\delta^{AB}$, суперзаряды (9.61) удовлетворяют классической алгебре суперсимметрии.

Соответствующие ковариантные квантовые суперзаряды, полученные в результате процедуры упорядочения, описанной на с. 202, имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}_0 &= \hat{\Psi}^M \left(\hat{P}_M - \frac{i}{8} \partial_M \ln \det g - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \hat{\Psi}^A \hat{\Psi}^B + \frac{i}{12} C_{MKP} \hat{\Psi}^K \hat{\Psi}^P \right), \\ \hat{\mathcal{Q}} &= \hat{\Psi}^N I_N{}^M \left(\hat{P}_M - \frac{i}{8} \partial_M \ln \det g - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \hat{\Psi}^A \hat{\Psi}^B - \frac{i}{4} C_{MKP} \hat{\Psi}^K \hat{\Psi}^P \right), \end{aligned} \quad (9.62)$$

¹²В выбранных соглашениях комплексные суперзаряды выражаются как $(\mathcal{Q}_0 \pm i\mathcal{Q})/2$ [ср. уравнение (5.2)].

где $\hat{P}_M = -i\partial_M$ и $\hat{\Psi}_A$ — операторы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда,

$$\{\hat{\Psi}_A, \hat{\Psi}_B\} = \delta_{AB} \Rightarrow \{\hat{\Psi}^M, \hat{\Psi}^N\} = g^{MN}. \quad (9.63)$$

Естественно, суперзаряды (9.62) совпадают с точностью до двойки с эрмитовой и антиэрмитовой частями комплексного квантового суперзаряда \hat{Q} в уравнении (9.11).

Чтобы описать на языке $\mathcal{N} = 1$ систему (9.1) с ненулевым W [деформированную или недеформированную дополнительными членами (9.28) с голоморфными кручениями], надо добавить к (9.34) член

$$S_A = -i \int d\theta dt A_M(\mathcal{X}) \mathcal{D}\mathcal{X}^M. \quad (9.64)$$

В компонентах это даст

$$S_A = \int dt \left[-A_M \dot{x}^M + \frac{i}{2} F_{MN} \Psi^M \Psi^N \right]. \quad (9.65)$$

Теорема 9.6. Действие (9.64) инвариантно относительно преобразований (9.37), если

$$F_K^M I_M^L - I_K^M F_M^L = 0. \quad (9.66)$$

Доказательство. Принимая во внимание (9.42), вариация S_A есть

$$\delta S_A = -i\epsilon \int d\theta dt \left[(\partial_K A_M) I_L^K \mathcal{D}\mathcal{X}^M \mathcal{D}\mathcal{X}^L + A_M I_L^M \mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{X}^L + A_M (\partial_K I_L^M) \mathcal{D}\mathcal{X}^K \mathcal{D}\mathcal{X}^L \right], \quad (9.67)$$

где мы заменили $-i\partial/\partial t \rightarrow \mathcal{D}\mathcal{D}$. Проинтегрируем по частям средний член. Структура $\propto (\partial I)(\mathcal{D}\mathcal{X})(\mathcal{D}\mathcal{X})$ сократит третий член, и выражение приобретает вид

$$\delta S_A = i\epsilon \int d\theta dt (\partial_K A_M) [I_L^M \mathcal{D}\mathcal{X}^K - I_L^K \mathcal{D}\mathcal{X}^M] \mathcal{D}\mathcal{X}^L, \quad (9.68)$$

что совпадает с

$$\delta S_A = \frac{i\epsilon}{2} \int d\theta dt (I_M^K F_{KL} - F_M^K I_{KL}) \mathcal{D}\mathcal{X}^M \mathcal{D}\mathcal{X}^L. \quad (9.69)$$

Вариация обращается в ноль, если обращается в ноль $[F, I]$. \square

Фактически мы не получили ничего нового, а просто воспроизвели на языке $\mathcal{N} = 1$ полученный ранее результат: чтобы поддержать суперсимметрию $\mathcal{N} = 2$ при включении калибровочного поля, F должно коммутировать с I (см. замечание на с. 221).

§9.3. Комплекс Дольбо на S^4 с выколотой точкой

В предыдущих параграфах мы показали, что как классический комплекс Дольбо, так и комплекс Дольбо, твистованный калибровочным полем и/или деформированный голоморфными кручениями, можно описать на суперсимметричном языке. Однако как мы отмечали раньше, суперсимметричный формализм мощнее традиционных математических методов. Он позволяет описать геометрические конструкции, которые не привлекли пока внимания математиков.

Рассмотрим S^4 . Это не комплексное многообразие. Однако, можно попытаться поступить с ним так же, как мы это делали в случае S^2 : провести через её южный полюс касательное 4-мерное пространство и сделать стереографическую проекцию. Все точки S^4 , кроме северного полюса, параметризуются тогда декартовыми координатами ($x^{M=1,2,3,4}$) на касательном пространстве. Введём комплексные координаты:

$$z^1 = \frac{x^1 + ix^2}{\sqrt{2}}, \quad z^2 = \frac{x^3 + ix^4}{\sqrt{2}}. \quad (9.70)$$

Метрику на S^4 можно тогда представить в виде¹³ [ср. (2.5); радиус такой сферы равен $1/\sqrt{2}$]

$$ds^2 = \frac{2dz_j d\bar{z}_j}{(1 + z_j \bar{z}_j)^2}. \quad (9.71)$$

Эта метрика хорошо определена всюду, кроме северного полюса S^4 , когда одно из z_j обращается в бесконечность. В отличие от S^2 ,

¹³Метрика (9.71) конформно-плоска. В этих условиях становится неудобным различать ковариантные и контравариантные индексы. Индексы j и \bar{j} мы также в этом параграфе не будем различать. То же касается фермионных индексов, которые мы введём чуть позже. Выберем конформно-плоские фильбайны, $e_a^j = (1 + z_k \bar{z}_k) \delta_a^j$, и не будем различать между мировыми и касательными индексами, явно выписывая при необходимости конформный фактор. Как обычно, будет подразумеваться суммирование по повторяющимся индексам.

где можно определить похожую карту для северного полушария с аналитическими отображениями склейки между двумя комплексными базами, для S^4 этого сделать нельзя (см. с. 43). Но не будем печалиться по этому поводу. Просто рассмотрим S^4 без северного полюса¹⁴ и используем выражение (9.71) для метрики.

Топология такого многообразия — это просто \mathbb{R}^4 . В отличие от S^4 , \mathbb{R}^4 — комплексное многообразие, и нет проблем определить там комплекс Дольбо. Однако \mathbb{R}^4 некомпактно, и на нём можно сформулировать разные спектральные задачи для разных гамильтонианов, определённых на гильбертовых пространствах с различными мерами. Так, в простейшей спектральной задаче на \mathbb{R}^4 , гамильтониан есть плоский лапласиан; его спектр непрерывен.

Но то, что мы собираемся сейчас сделать — это взять сферическую метрику (9.71) и рассмотреть спектральную задачу с мерой

$$\det h = \frac{1}{(1 + z_j \bar{z}_j)^4}. \quad (9.72)$$

Тогда объём нашего многообразия $V = \int d^2z d^2\bar{z} \det h$ конечен и спектральная задача похожа на спектральные задачи на компактных комплексных многообразиях.

Действуя так же, как мы поступали для компактных многообразий, рассмотрим [93] действие суперсимметричной модели (9.1) с метрикой (9.71). Выберем

$$W = \frac{1}{4} \ln \det h,$$

так что ковариантные квантовые суперзаряды нашей модели определяются выражением (9.19), что в нашем случае даст

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= -i\psi_j [(1 + z_k \bar{z}_k) \partial_j + \bar{z}_k \psi_k \hat{\psi}_j], \\ \hat{\bar{Q}} &= -i\hat{\psi}_j [(1 + z_k \bar{z}_k) \bar{\partial}_j - 2z_j + z_k \hat{\psi}_k \psi_j], \end{aligned} \quad (9.73)$$

где $\hat{\psi}_j \equiv \partial/\partial\psi_j$.

Они изоморфны операторам ∂ и ∂^\dagger стандартного (нетвистованного) комплекса Дольбо. Операторы (9.73) и гамильтониан

¹⁴ $S^4 \setminus \{\cdot\}$ в математических обозначениях.

$\hat{H} = \{\hat{Q}, \hat{\bar{Q}}\}$ действуют на гильбертовом пространстве, включающем волновые функции, квадратично интегрируемые с мерой

$$d\mu = \frac{d^2z d^2\bar{z}}{(1 + z_k \bar{z}_k)^4} d^2\psi d^2\bar{\psi} e^{-\psi_j \bar{\psi}_j} \quad (9.74)$$

[ср. уравнение (6.27)].

В спектре такой задачи имеется три нормируемые бозонные нулевые моды, которые аннигилируются как \hat{Q} , так и $\hat{\bar{Q}}$:

$$\Psi^{(0)}(z_j, \bar{z}_j; \psi_j) = 1, \quad \bar{z}_1, \quad \bar{z}_2. \quad (9.75)$$

Таким образом, индекс Виттена равен $I_W = 3$.

Полный спектр гамильтониана был найден в [93]. Все состояния этого спектра квадратично интегрируемы и суперзаряды \hat{Q} и $\hat{\bar{Q}}$ ограничены на таком гильбертовом пространстве. Иначе говоря, для каждого собственного состояния гамильтониана Ψ , действие $\hat{Q}\Psi$ или $\hat{\bar{Q}}\Psi$ даёт либо ноль, либо также квадратично интегрируемое собственное состояние¹⁵. В результате спектр возбуждённых состояний двукратно (по крайней мере) вырожден, как и подобает в суперсимметричной системе.

Можно решить такую же задачу для твистованного комплекса Дольбо на $S^4 \setminus \{\cdot\}$ с препотенциалом

$$W_q = \frac{q}{4} \ln \det h, \quad (9.76)$$

включающим произвольное целое q (допустимы только целые q — см. главу 13). Суперзаряды в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= -i\psi_j [(1 + z_k \bar{z}_k) \partial_j + (q - 1) \bar{z}_j \bar{z}_k z_k \psi_j + \bar{z}_k \psi_k \hat{\psi}_j], \\ \hat{\bar{Q}} &= -i\hat{\psi}_j [(1 + z_k \bar{z}_k) \bar{\partial}_j - (q + 1) z_j + z_k \hat{\psi}_k \psi_j]. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Если q положительно, нулевые моды «сидят» в секторе $F = 0$. Общее нормируемое решение уравнения $\hat{Q}\Psi^{(0)} = 0$ (условие

¹⁵Это нетривиальный факт. Взглянув на (9.73), мы видим, что операторы \hat{Q} и $\hat{\bar{Q}}$ привносят дополнительную степень z и могли бы, вообще говоря, сфабриковать неинтегрируемую на бесконечности функцию из интегрируемой. Но этого не происходит.

$\hat{Q}\Psi^{(0)} = 0$ удовлетворяется автоматически) есть

$$\Psi_{q>0}^{(0)} = \frac{P_{2q-1}(\bar{z}_k)}{(1 + z_j \bar{z}_j)^{q-1}}. \quad (9.78)$$

Полином степени $2q - 1$ от двух аргументов имеет $2q^2 + q$ различных коэффициентов, т. е. имеется всего $2q^2 + q$ вакуумных состояний.

Если q отрицательно, вакуумные состояния по-прежнему бозонные, но они сидят теперь в секторе $F=2$. Общее нормируемое решение уравнения $\hat{Q}\Psi^{(0)} = 0$ (условие $\hat{Q}\Psi^{(0)} = 0$ удовлетворяется автоматически) есть

$$\Psi_{q<0}^{(0)} = \frac{P_{-2q-1}(\bar{z}_k)}{(1 + z_j \bar{z}_j)^{-q-1}} \psi_1 \psi_2, \quad (9.79)$$

что даст $2q^2 - q$ состояний. То есть индекс Виттена в задаче с произвольным q равен

$$I_W(q) = 2q^2 + |q|. \quad (9.80)$$

Случай $q = 0$ особый. Суперзаряды приобретают вид

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= -i\psi_j [(1 + z_k \bar{z}_k) \partial_j - \bar{z}_j + \bar{z}_k \psi_k \hat{\psi}_j], \\ \hat{\bar{Q}} &= -i\hat{\psi}_j [(1 + z_k \bar{z}_k) \bar{\partial}_j - z_j + z_k \hat{\psi}_k \psi_j]. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Но в этом случае с гамильтонианом коммутирует также другая пара суперзарядов:

$$\begin{aligned} \hat{R} &= -i\varepsilon_{jk} \psi_k [(1 + z_k \bar{z}_k) \bar{\partial}_j - z_j - z_l \psi_l \hat{\psi}_j], \\ \hat{\bar{R}} &= -i\varepsilon_{jk} \hat{\psi}_k [(1 + z_k \bar{z}_k) \partial_j - \bar{z}_j - \bar{z}_l \hat{\psi}_l \psi_j]. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Прямое вычисление показывает, что четыре суперзаряда (9.81), (9.82) удовлетворяют расширенной алгебре $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии (5.36).

И это не чудо, а следствие того факта, что $S^4 \setminus \{\cdot\}$ является многообразием НКТ! В самом деле, его метрика конформно-плоская и принадлежит классу (3.72). А мы увидим в следующей главе и

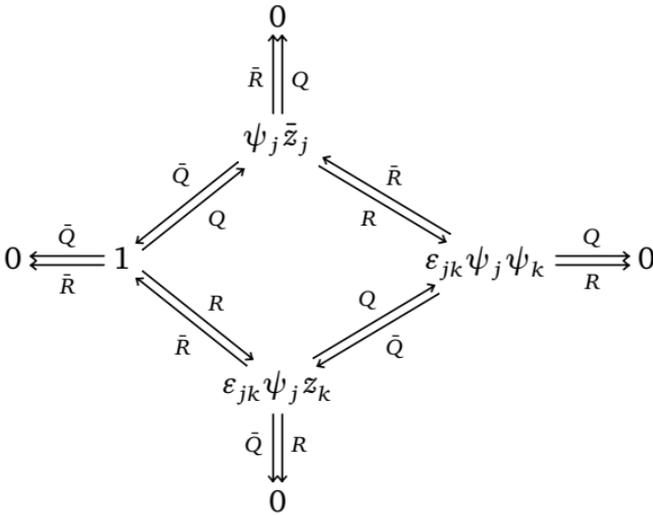


Рис. 9.1. Суперсимметричный квартет вырожденных состояний гамильтониана Дольбо при $q = 0$ на $S^4 \setminus \{\cdot\}$

затем в главе 12, что многообразия НКТ допускают $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричное описание¹⁶.

В этом случае индекс (9.80) равен нулю и в спектре нет состояний с нулевой энергией. Состояния с ненулевой энергией расщепляются на вырожденные квартеты. Один из таких квартетов и действия суперзарядов на этом квартете схематически показаны на рис. 9.1. Все состояния в этом квартете (и во всех других квартетах) нормируемы с мерой (9.74).

В главе 13 мы вернёмся к суперсимметричной сигма-модели¹⁷ на S^4 с $q = 0$ и покажем, что её можно обобщить, включив *неабелево самодуальное* калибровочное поле (*инстантон*), так что суперсимметрия $\mathcal{N} = 4$ остаётся ненарушенной.

Можно также рассмотреть S^6 и чётномерные сферы высшей размерности. Является или нет S^6 комплексным многообразием — открытый вопрос. Но даже если S^6 комплексно, комплексная структура I_{MN} и соответствующие комплексные координаты

¹⁶Фактически выражения (9.81) и (9.82) — не что иное, как квантовые партнёры классических суперзарядов (10.80), записанных для S^4 .

¹⁷Мы узнаем там, что она описывает «чисто гравитационный» комплекс Дирака с дополнительными кручениями.

неизвестны. При любом d можно, однако, построить для S^{2d} такую же стереографическую проекцию, как для S^2 и S^4 , ввести координаты $z^1 = (x^1 + ix^2)/\sqrt{2}$ и т. д. и рассмотреть задачу на $S^{2d} \setminus \{\cdot\}$ таким же образом, как мы это сделали для $S^4 \setminus \{\cdot\}$. Для нетвистованного комплекса Дольбо мы находим таким образом C_{2d-1}^{d-1} бозонных вакуумных состояний. Если $d = 3$, то $I_W = 10$.

Глава 10

Сигма-модели с расширенными суперсимметриями

В главах 2, 3 мы рассмотрели некоторые специальные классы комплексных многообразий: кэлеровы, гиперкэлеровы многообразия и многообразия НКТ. А сейчас мы собираемся описать эти и некоторые другие геометрические конструкции на суперсимметричном языке. Соответствующие сигма-модели обладают расширенными суперсимметриями $\mathcal{N} = 4$ и $\mathcal{N} = 8$. Вначале мы рассмотрим модели $\mathcal{N} = 4$.

§10.1. Кэлеровы и кэлеровоподобные многообразия

Кэлеровы геометрии допускают несколько различных суперсимметричных описаний. Рассмотрим прежде всего модель (8.6), включающую чётное число вещественных суперполей $\mathcal{N} = 2$,

$$X^M = x^M + \theta\psi^M + \bar{\psi}^M\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}F^M. \quad (10.1)$$

По построению действие этой модели инвариантно относительно преобразований $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии (7.26):

$$\begin{aligned} \delta_0 x^M &= \epsilon_0 \psi^M - \bar{\epsilon}_0 \bar{\psi}^M, \\ \delta_0 \psi^M &= \bar{\epsilon}_0 (F^M - i\dot{x}^M), \\ \delta_0 \bar{\psi}^M &= \epsilon_0 (F^M + i\dot{x}^M), \\ \delta_0 F^M &= -i(\epsilon_0 \dot{\psi}^M + \bar{\epsilon}_0 \dot{\bar{\psi}}^M). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Наложим теперь дополнительное условие и потребуем, чтобы действие было инвариантно относительно дополнительных преобразований

$$\delta X^M = I_N^M(X)(\epsilon DX^N - \bar{\epsilon} \bar{D}X^N). \quad (10.3)$$

Для низших компонент это даёт

$$\delta x^M = I_N^M(\epsilon \psi^N - \bar{\epsilon} \bar{\psi}^N). \quad (10.4)$$

Выражения для $\delta\psi^M$ и δF^M чуть длиннее.

По той же причине, что в предыдущей главе [см. комментарий после уравнения (9.38)], преобразования (10.2) и (10.3) коммутируют и, следовательно, антикоммутаторы $\{\hat{Q}, \hat{Q}_0\}$, $\{\hat{\bar{Q}}, \hat{\bar{Q}}_0\}$, $\{\hat{Q}, \hat{\bar{Q}}_0\}$ и $\{\hat{\bar{Q}}, \hat{Q}_0\}$ соответствующих суперзарядов зануляются.

По аналогии с теоремой 9.4 предыдущей главы мы можем теперь сформулировать и доказать следующую теорему¹.

Теорема 10.1. *Соответствующее лагранжиану (8.6) действие инвариантно относительно (10.3), а генераторы преобразований (10.2) и (10.3) удовлетворяют стандартной алгебре $\mathcal{N} = 4$ тогда и только тогда, когда I_N^M — интегрируемая комплексная структура, ковариантно постоянная по отношению к связности Леви-Чивиты, $\nabla_P I_M^N = 0$, т. е. когда многообразие кэлерово.*

Доказательство строится так же, как доказательство теоремы 9.4. Заметим прежде всего, что условия $I^2 = -\mathbb{1}$ и $\mathcal{N}_{MN}^K = 0$ необходимы и достаточны для замыкания алгебры суперсимметрии — чтобы скобка Ли двух суперпреобразований (10.3) давала временную производную:

$$(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) X^M = 2i(\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 - \bar{\epsilon}_2 \epsilon_1) \dot{X}^M. \quad (10.5)$$

Это можно проверить прямым вычислением.

Рассмотрим теперь суперсимметричную вариацию лагранжиана (8.6), обусловленную вариацией (10.3). Сконцентрируемся на членах, пропорциональных ϵ . Принимая во внимание, что $D^2 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \delta X^M &\sim \epsilon I_N^M(X) DX^N, \\ \delta(DX^M) &\sim -\epsilon(\partial_P I_N^M) DX^P DX^N, \\ \delta(\bar{D}X^M) &\sim -\epsilon[(\partial_P I_N^M) \bar{D}X^P DX^N + I_N^M \bar{D}DX^N]. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Это даёт следующую вариацию действия:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{\epsilon}{2} \int d\bar{\theta} d\theta dt & [(\partial_P g_{MN}) I_Q^P DX^Q \bar{D}X^M DX^N - \\ & - g_{MN} (\partial_P I_Q^M) \bar{D}X^P DX^Q DX^N - \\ & - I_{QN} (\bar{D}DX^Q) DX^N + g_{MN} (\partial_P I_Q^N) \bar{D}X^M DX^P DX^Q]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

¹Подобная теорема для теоретико-полевых сигма-модельных систем была доказана на компонентном языке в работе [94].

Первый, второй и четвёртый члены в этом выражении содержат одинаковую структуру $\sim \bar{D}XDXDX$. Чтобы разобраться с третьим членом, представим $I_{QN} = I_{(QN)} + I_{[QN]}$. Часть, содержащую $I_{[QN]}$, тоже можно привести к виду $\sim \bar{D}XDXDX$, перекидывая грассманову ковариантную производную \bar{D} :

$$\begin{aligned} - \int d\bar{\theta} d\theta dt I_{[QN]}(\bar{D}DX^Q)DX^N &= \\ &= \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta dt (\partial_P I_{[QN]})\bar{D}X^P DX^Q DX^N. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Часть, содержащая $I_{(QN)}$, даст линейно независимую структуру. Для обращения в ноль вариации (10.7) необходимо условие $I_{(QN)} = 0$, что мы и будем в дальнейшем предполагать.

Что касается членов $\sim \bar{D}XDXDX$, то они обращаются в ноль, если

$$I_Q^P \partial_P g_{MN} + g_{PN} \partial_M I_Q^P - \frac{1}{2} \partial_M I_{QN} + g_{PM} \partial_N I_Q^P - [Q \leftrightarrow N] = 0. \quad (10.9)$$

После некоторых преобразований это условие может быть приведено к виду

$$A_{M[QN]} = \nabla_M I_{QN} + \nabla_N I_{QM} - \nabla_Q I_{NM} = 0. \quad (10.10)$$

Если $\nabla_Q I_{NM} = 0$, это выражение, очевидно, обращается в ноль. Чтобы показать, что условие ковариантного постоянства комплексной структуры также необходимо, мы симметризуем (10.10) по $M \leftrightarrow Q$, что даст, с учётом $I_{(MN)} = 0$, равенство $\nabla_M I_{QN} - \nabla_Q I_{NM} = 0$. Используя снова (10.10), приходим к $\nabla_N I_{QM} = 0$. \square

Далее мы работаем по лекалам, выточенным в главах 8, 9. На первом этапе мы переходим к компонентам и выводим с помощью теоремы Нётер выражения для сохраняющихся классических комплексных суперзарядов, отвечающих симметриям (10.2) и (10.3). Эти выражения особенно просты, если записать их через фермионные поля ψ^M с мировыми индексами и канонические импульсы Π_M , полученные вариацией L по \dot{x}_M с фиксированными

ми ψ^M [95]:

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^M \left(\Pi_M - \frac{i}{2} \partial_M g_{PK} \psi^P \bar{\psi}^K \right), \\
 \bar{Q}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^M \left(\Pi_M + \frac{i}{2} \partial_M g_{PK} \psi^P \bar{\psi}^K \right), \\
 Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^N I_N^M \left(\Pi_M - \frac{i}{2} \partial_M g_{PK} \psi^P \bar{\psi}^K \right), \\
 \bar{Q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^N I_N^M \left(\Pi_M + \frac{i}{2} \partial_M g_{PK} \psi^P \bar{\psi}^K \right).
 \end{aligned} \tag{10.11}$$

На втором этапе мы проводим квантование по процедуре, предложенной в работе [43]. Для квантовых суперзарядов более удобно представление через плоские фермионные переменные ψ^A . Мы выводим следующие выражения для ковариантных суперзарядов [96]:

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}_0 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^M D_M, & \hat{Q}_1 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^N I_N^M D_M, \\
 \hat{Q}_0^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2}} e_C^M \frac{\partial}{\partial \psi_C} D_M, & \hat{Q}_1^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2}} e_C^N I_N^M \frac{\partial}{\partial \psi_C} D_M,
 \end{aligned} \tag{10.12}$$

где оператор «спинорной» ковариантной производной

$$D_M = \frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M} \psi_A \frac{\partial}{\partial \psi_B} \tag{10.13}$$

был определён в (8.28), а сопряжённые суперзаряды маркированы не чертой, а крестом.

Докажем теперь теорему, аналогичную теоремам 8.1 и 9.1 и проясняющую геометрический смысл суперзарядов (10.12).

Теорема 10.2. Для кэлеровых многообразий действие суперзарядов Q_0 и Q_1 на волновые функции $\Psi(x^M, \psi^M)$ изоморфно действию определённых линейных комбинаций операторов ∂ и $\bar{\partial}$ в комплексе Кэлера—де Рама, включающего (p, q) -формы.

Доказательство. Перейдём к комплексным координатам $x^M \rightarrow (z^m, \bar{z}^{\bar{m}})$, так что тензор комплексной структуры I_N^M приобретёт вид (2.51). Тогда \hat{Q}_0 и \hat{Q}_1 можно представить как²

$$\hat{Q}_0 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\psi^m D_m + \psi^{\bar{m}} D_{\bar{m}}), \quad \hat{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{\bar{m}} D_{\bar{m}} - \psi^m D_m). \tag{10.14}$$

²Мы не пишем черту над $\psi^{\bar{m}}$, чтобы не спутать их с операторами $\hat{\psi} \equiv \hat{\psi}^\dagger = \partial/\partial \psi$.

Рассмотрим действие оператора $\psi^m D_m$ на волновую функцию

$$\Psi(x^M, \psi^M) = A_{m_1 \dots m_p \bar{n}_1 \dots \bar{n}_q}(z, \bar{z}) \psi^{m_1} \dots \psi^{m_p} \psi^{\bar{n}_1} \dots \psi^{\bar{n}_q}. \quad (10.15)$$

То же вычисление, что при доказательстве теоремы 8.1, даёт

$$\psi^s D_s \Psi = (\partial_s A_{m_1 \dots m_p \bar{n}_1 \dots \bar{n}_q}) \psi^s \psi^{m_1} \dots \psi^{m_p} \psi^{\bar{n}_1} \dots \psi^{\bar{n}_q} \quad (10.16)$$

плюс дополнительные члены со структурами $\sim \Gamma_{sN}^P \psi^m \psi^N$.

В общем случае эти добавки не исчезают (и поэтому данная теорема не верна для общих комплексных многообразий), но в кэлеровом случае ненулевые символы Кристоффеля имеют либо все голоморфные, либо все антиголоморфные индексы [см. уравнение (2.28)]. Следовательно,

$$\Gamma_{sN}^P \psi^m \psi^N \rightarrow \Gamma_{sN}^P \psi^m \psi^N,$$

что обращается в ноль ввиду симметрии $\Gamma_{mn}^P = \Gamma_{nm}^P$. Тогда тождество (10.16) является точным, и изоморфизм $\psi^m D_m \leftrightarrow \partial$ установлен.

Аналогичное рассуждение позволяет установить изоморфизм $\psi^{\bar{m}} D_{\bar{m}} \leftrightarrow \bar{\partial}$. А суперзаряды (10.12) изоморфны с точностью до численного множителя операторам $\partial + \bar{\partial}$, $\partial - \bar{\partial}$ и операторам, к ним эрмитово сопряжённым. \square

Отдадим теперь наш старый долг и докажем теорему 2.3. Она утверждала, что для кэлеровых многообразий справедлива алгебра

$$\begin{aligned} \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \{\partial, \bar{\partial}\} = (\partial^\dagger)^2 = (\bar{\partial}^\dagger)^2 = \{\partial^\dagger, \bar{\partial}^\dagger\} = \{\partial, \bar{\partial}^\dagger\} = \{\partial^\dagger, \bar{\partial}\} = 0, \\ \{\partial, \partial^\dagger\} = \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^\dagger\}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Доказательство. Установленный изоморфизм делает это утверждение тривиальным. Алгебра (10.17) изоморфна алгебре расширенной суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$, которой удовлетворяют суперзаряды $\hat{Q}_0 \equiv -i(\partial + \bar{\partial})/\sqrt{2}$ и $\hat{Q}_1 \equiv (\bar{\partial} - \partial)/\sqrt{2}$ и им сопряженные, как следует из теоремы 10.1. \square

Для геометрических приложений вполне удобно описание модели $\mathcal{N} = 4$ в терминах $\mathcal{N} = 2$ суперполей (10.1). Но если читатель уже настолько свыкся с надетыми на него автором суперсимметричными очками, что не желает их снимать, наиболее простое

и естественное описание кэлеровых сигма-моделей и кэлеровых многообразий основано на киральных $\mathcal{N} = 4$ суперполях (7.46).

Возьмём d таких суперполей,

$$z^{m=1,\dots,d} = z^m(t_L) + \sqrt{2}\theta_j \psi^{jm}(t_L) + 2\theta_1 \theta_2 F^m(t_L). \quad (10.18)$$

Их нижние компоненты интерпретируются как комплексные координаты; ψ^{jm} — их фермионные суперпартнёры (в этом случае каждой комплексной координате z^m соответствуют две комплексные динамические фермионные переменные) и F^m — комплексные вспомогательные переменные. Каждое суперполе (10.18) является мультиплетом $(2, 4, 2)$, который можно представить как пару $(1, 2, 1)$ мультиплетов (10.1).

Напишем следующее действие [97]:

$$S^{\text{кин}} = \frac{1}{4} \int d^2\bar{\theta} d^2\theta dt K[\mathcal{Z}^m(\theta_j, t_L), \bar{\mathcal{Z}}^{\bar{m}}(\bar{\theta}^j, t_R)] \quad (10.19)$$

с вещественной функцией K . Это очевидное обобщение первого (кинетического) члена в (7.49). Интегрирование по $d^2\bar{\theta}d^2\theta$ даёт [с использованием обозначений (7.59)] следующий компонентный лагранжиан:

$$\begin{aligned} L = \kappa_{m\bar{n}} \left[\dot{z}^m \dot{\bar{z}}^{\bar{n}} + F^m \bar{F}^{\bar{n}} + \frac{i}{2} (\bar{\psi}^{\bar{n}} \nabla \psi^m - \nabla \bar{\psi}^{\bar{n}} \psi^m) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\partial_m \kappa_{p\bar{n}} \bar{F}^{\bar{n}} (\psi^m \psi^p) + \partial_{\bar{n}} \kappa_{m\bar{p}} F^m (\bar{\psi}^{\bar{p}} \bar{\psi}^{\bar{n}}) + \right. \\ \left. + \partial_m \partial_{\bar{n}} \kappa_{p\bar{q}} (\bar{\psi}^{\bar{n}} \psi^m) (\bar{\psi}^{\bar{q}} \psi^p) \right], \quad (10.20) \end{aligned}$$

где

$$\kappa_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} K, \quad (10.21)$$

а оператор ∇ временной ковариантной производной был определён в уравнении (8.5). В кэлеровом случае

$$\nabla \psi^m = \dot{\psi}^m + \Gamma_{st}^m \dot{z}^s \psi^t, \quad \nabla \bar{\psi}^{\bar{n}} = \dot{\bar{\psi}}^{\bar{n}} + \Gamma_{\bar{s}\bar{t}}^{\bar{n}} \dot{\bar{z}}^{\bar{s}} \bar{\psi}^{\bar{t}}. \quad (10.22)$$

Исключая F^m и $\bar{F}^{\bar{n}}$, получаем

$$L = \kappa_{m\bar{n}} \left[\dot{z}^m \dot{\bar{z}}^{\bar{n}} + \frac{i}{2} (\bar{\psi}^{\bar{n}} \nabla \psi^m - \nabla \bar{\psi}^{\bar{n}} \psi^m) + \frac{1}{2} R_{m\bar{n}p\bar{q}} (\bar{\psi}^{\bar{n}} \psi^m) (\bar{\psi}^{\bar{q}} \psi^p) \right], \quad (10.23)$$

где $R_{m\bar{n}p\bar{q}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} \kappa_{p\bar{q}} - \kappa^{\bar{s}t} (\partial_m \kappa_{p\bar{s}}) (\partial_{\bar{n}} \kappa_{t\bar{q}})$.

Другими словами, K — не что иное, как кэлеров потенциал, $\kappa_{m\bar{n}}$ — эрмитова кэлерова метрика, а $R_{m\bar{n}p\bar{q}}$ — кэлеров тензор Римана (см. с. 47). Комплексная структура имеет канонический вид (2.51) в комплексных терминах и (2.49) в вещественных.

Заметьте, что уравнение (10.21) даёт полную классификацию кэлеровых метрик на одной из карт атласа, определяющего многообразии: напишите произвольную вещественную функцию $K(z^m, \bar{z}^{\bar{m}})$ и вы получите метрику. Но оно ничего не говорит о топологической структуре многообразия — как склеены различные карты и каковы голоморфные отображения склейки.

Можно добавить к (10.19) член с суперпотенциалом, как в (7.49):

$$S_W = \frac{1}{2} \int d^2\theta dt_L W(z^m) + \frac{1}{2} \int d^2\bar{\theta} dt_R \bar{W}(\bar{z}^{\bar{m}}). \quad (10.24)$$

В этом случае уравнения движения для F^m принимают вид

$$F^m = -\frac{1}{2} \Gamma_{pq}^m (\psi^p \psi^q) + \kappa^{\bar{n}m} \partial_{\bar{n}} \bar{W}. \quad (10.25)$$

После исключения вспомогательных переменных в компонентном лагранжиане появляются новые члены — в частности, потенциальный член

$$V = \kappa^{\bar{n}m} \partial_m W \partial_{\bar{n}} \bar{W}. \quad (10.26)$$

Для полноты картины отметим здесь, что существует ещё одно описание кэлеровых моделей $\mathcal{N} = 4$ [98]. Это описание в терминах суперполей $\mathcal{N} = 2$ различной природы: вместо того, чтобы брать D вещественных суперполей $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, мы можем взять половинное количество киральных суперполей $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ и столько же грассмановых суперполей $(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$, включающих динамические фермионные и бозонные вспомогательные компоненты:

$$\Phi^n = \chi^n + \sqrt{2}\theta G^n - i\theta\bar{\theta}\dot{\chi}^n.$$

Это описание аналогично описанию $\mathcal{N} = 2$ модели де Рама в терминах бозонных и грассмановых $\mathcal{N} = 1$ суперполей, данному на с. 199. Лагранжиан модели имеет вид

$$L = \int d\bar{\theta} d\theta \partial_m \partial_{\bar{n}} \mathcal{K}(Z, \bar{Z}) \left(\frac{1}{4} \bar{D} \bar{Z}^{\bar{n}} D Z^m + \frac{1}{2} \Phi^m \bar{\Phi}^{\bar{n}} \right). \quad (10.27)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно дополнительных $\mathcal{N} = 2$ преобразований:

$$\delta Z^n = -\eta \Phi^n, \quad \delta \bar{Z}^{\bar{n}} = \bar{\eta} \bar{\Phi}^{\bar{n}}, \quad \delta \Phi^n = i\bar{\eta} \dot{Z}^n, \quad \delta \bar{\Phi}^{\bar{n}} = -i\eta \dot{\bar{Z}}^{\bar{n}}. \quad (10.28)$$

После интегрирования по $d\bar{\theta} d\theta$, исключения вспомогательных переменных $F^m, \bar{F}^{\bar{m}}, G^m, \bar{G}^{\bar{m}}$ и объединения фермионных переменных из суперполей Z и Φ в двухиндексные переменные ψ^{mj} мы приходим к такому же компонентному лагранжиану (10.23), что и ранее.

10.1.1. Квазикомплексная кэлерава модель

Деформация (10.24) сохраняет по построению суперсимметрию $\mathcal{N} = 4$. Но это не единственная подобная деформация. Помимо суперпотенциала (10.24), в действие можно добавить следующий $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричный член, включающий временные производные суперполей \mathcal{Z}^m :

$$S^{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int d^2\theta dt_L \mathcal{A}_m(\mathcal{Z}) \dot{\mathcal{Z}}^m + \text{компл. сопр.} \quad (10.29)$$

с произвольной векторной голоморфной функцией \mathcal{A}_m . Эта структура, введённая в работах [72, 95], специфична для квантовой механики и не имеет теоретико-полевого аналога. Возможно, по этой причине она не привлекала ранее внимания.

Рассмотрим компонентный лагранжиан, полученный из действия

$$S = S^{\text{кин}} + S^{\mathcal{A}}. \quad (10.30)$$

Бозонные члены (полные выражения выписаны в [95, 72]) имеют вид

$$L_{\text{боз}} = \kappa_{m\bar{n}} (\dot{\mathcal{Z}}^m \dot{\bar{\mathcal{Z}}}^{\bar{n}} + F^m \bar{F}^{\bar{n}}) + F^m \mathcal{F}_{nm} \dot{\mathcal{Z}}^n + \bar{F}^{\bar{m}} \bar{\mathcal{F}}_{\bar{n}\bar{m}} \dot{\bar{\mathcal{Z}}}^{\bar{n}}, \quad (10.31)$$

где $\mathcal{F}_{nm} = \partial_n \mathcal{A}_m - \partial_m \mathcal{A}_n$. Исключая вспомогательные переменные, находим

$$L_{\text{боз}} = h_{m\bar{n}} \dot{\mathcal{Z}}^m \dot{\bar{\mathcal{Z}}}^{\bar{n}}, \quad (10.32)$$

где

$$h_{m\bar{n}} = \kappa_{m\bar{n}} + \mathcal{F}_{ml} \kappa^{\bar{p}l} \bar{\mathcal{F}}_{\bar{p}\bar{n}}. \quad (10.33)$$

Лагранжиан (10.32) описывает движение по комплексному многообразию с метрикой (10.33). В отличие от $\kappa_{m\bar{n}}$, эта метрика некэлерова³! Заметьте, что после исключения вспомогательных переменных лагранжиан не включает больше линейные по \dot{z}^m члены.

Объект \mathcal{A}_m выглядит, как абелево калибровочное поле, а \mathcal{F}_{mn} — как напряжённость поля, но они на самом деле имеют другую природу⁴.

Возникает естественный вопрос: как оказалось возможным получить некэлерову метрику при сохранении суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$? Не доказали ли мы теорему 10.1, утверждавшую, что для дополнительной $\mathcal{N} = 2$ инвариантности (10.3) действия (8.6) необходима кэлерова геометрия?

Ответ следующий. Действительно, если действие (10.30) выразить через $\mathcal{N} = 2$ суперполя X^M , оно принимает вид (8.6). Однако тензор $g_{MN}(X)$ больше не является вещественным и симметричным. Он приобретает мнимую антисимметричную часть,

$$g_{MN} = g_{(MN)} + ib_{[MN]}. \quad (10.34)$$

Действие при этом остаётся вещественным — единственное необходимое требование. Модель (10.30) принадлежит к классу квазикомплексных суперсимметричных сигма-моделей [84]. Бозонная часть действия таких моделей описывает движение по многообразию с метрикой

$$G_{MN} = g_{(MN)} + b_{[MP]}g^{(PS)}b_{[SN]} \quad (10.35)$$

[ср. уравнение (10.33)]. Мы вернёмся к обсуждению квазикомплексных моделей в следующей главе. Квазикомплексная модель общего вида обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 2$, но модель (10.30) обладает расширенной суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$.

Выражаясь несколько небрежно, мы будем называть модель (10.30) квазикомплексной кэлеровой моделью. Многообразия, ко-

³Второй член в правой части (10.33) работает, начиная с комплексной размерности многообразия $d \geq 2$.

⁴Напомним, что на комплексных, в частности, на кэлеровых многообразиях могут существовать калибровочные поля. Они удлиняют импульсы и добавляют бифермионный член в гамильтониан [см. уравнение (9.17)], но не меняют метрику.

торое оно описывает, кэлеровым, однако, не является (можно здесь вспомнить, что многообразия, которые мы называем «гиперкэлеровыми с кручением», не являются ни гиперкэлеровыми, ни даже кэлеровыми) и более точное (но также более длинное) имя для этой модели было бы «квазикомплексная деформация суперсимметричной сигма-модели Кэлера—де Рама».

10.1.2. Бикэлеровы модели

Суперполя (10.18) — это обычные киральные суперполя $\mathcal{N}=4$, удовлетворяющие связям $\bar{D}_j z^m = 0$. Но, как было отмечено в конце п. 8.3.1, можно ввести также *зеркальные* суперполя (2, 4, 2), удовлетворяющие модифицированным связям⁵

$$\bar{D}_1 \mathcal{U} = D^2 \mathcal{U} = 0. \quad (10.36)$$

Если все поля, которые входят в действие, зеркальны, это сводится к переобозначению $\theta_2 \leftrightarrow \bar{\theta}^2$ и не даёт ничего нового. Однако, ситуация меняется, если действие зависит как от обыкновенных, так и от зеркальных полей.

Рассмотрим систему, включающую d_1 обыкновенных $\mathcal{N}=4$ киральных мультиплетов z^m и d_2 зеркальных мультиплетов \mathcal{U}^μ , $d_1 + d_2 = d$. Напишем действие

$$S = \frac{1}{4} \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt \mathcal{L}(z^m, \bar{z}^{\bar{m}}; \mathcal{U}^\mu, \bar{\mathcal{U}}^{\bar{\mu}}). \quad (10.37)$$

Спустимся в компоненты. Бозонная часть лагранжиана может быть выражена в виде

$$L_{\text{боз}} = h_{m\bar{n}} \dot{z}^m \dot{\bar{z}}^{\bar{n}} + h_{\mu\bar{\nu}} \dot{\mathcal{U}}^\mu \dot{\bar{\mathcal{U}}}^{\bar{\nu}}, \quad (10.38)$$

где

$$h_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} \mathcal{L}, \quad h_{\mu\bar{\nu}} = -\partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{L}. \quad (10.39)$$

Мы видим два сектора. В обоих секторах метрика даётся двойной производной препотенциала \mathcal{L} , но в зеркальном секторе эта двойная производная входит с отрицательным знаком. Смешанные компоненты метрики $h_{m\bar{\nu}}$ и $h_{\mu\bar{n}}$ отсутствуют. Это не значит, однако, что соответствующее многообразие является прямым произведением двух кэлеровых многообразий: $h_{m\bar{n}}$ может

⁵ D^2 — ничей не квадрат, это просто $D^j=2$.

зависеть не только от z, \bar{z} , но и от u, \bar{u} , а $h_{\mu\bar{\nu}}$ может зависеть не только от u, \bar{u} , но и от z, \bar{z} .

Как обычные киральные суперполя $\mathcal{Z}^{m=1, \dots, d_1}$, так и зеркальные суперполя $\mathcal{U}^{\mu=1, \dots, d_2}$ можно выразить в терминах вещественных $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ суперполей $X^{M=1, \dots, 2d_1}$ и $Y^{M=2d_1+1, \dots, 2d}$ соответственно. Действие (10.37) приобретает вид (8.6) с вещественным тензором $g_{MN}(X, Y)$. Можно снова спросить: почему геометрия нашей модели некэлерова (что кажется следствием теоремы 10.1), но имеет более сложную бикэлерову природу?

Ответ состоит в том, что закон дополнительных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных преобразований сложнее в данном случае, чем закон (10.3), и он не один и тот же в обычном и зеркальном секторах. Эти преобразования можно представить в следующей канонической форме [71, 72]:

$$\begin{aligned} M, N = 1, \dots, 2d_1 &\Rightarrow \delta X^M = I_N^M (\epsilon D - \bar{\epsilon} \bar{D}) X^N, \\ M, N = 2d_1 + 1, \dots, 2d &\Rightarrow \delta Y^M = J_N^M (\bar{\epsilon} D - \epsilon \bar{D}) Y^N, \end{aligned} \quad (10.40)$$

где I и J — канонические матрицы⁶ (2.49) с размерностями $2d_1$ и $2d_2$. Представив

$$\epsilon = \epsilon_+ + i\epsilon_-, \quad D = D_+ + iD_- \quad (10.41)$$

с вещественными ϵ_{\pm} и эрмитовыми D_{\pm} , можно переписать (10.40) в виде

$$\delta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^M = 2i\epsilon_+ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}_N^M D_- \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^N + 2i\epsilon_- \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}_N^M D_+ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^N. \quad (10.42)$$

Комплексную структуру бикэлерова многообразия можно выбрать в виде $\text{diag}(I, J)$, либо $\text{diag}(I, -J)$.

Действие (10.37) можно продеформировать, добавив потенциальный или квазикомплексный член. Сконцентрируемся на второй возможности. Очевидно, что мы можем добавить члены

⁶Это не те же самые матрицы, что матрицы I, J в (3.2). Увы, длина латинского алфавита ограничена.

вида (10.29) отдельно в каждом секторе и записать

$$S_{\text{би-К}}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int d\theta_1 d\theta_2 dt_L \mathcal{A}_m(\mathcal{Z}) \dot{\mathcal{Z}}^m + \frac{1}{2} \int d\theta_1 d\bar{\theta}^2 d\tilde{t}_L \mathcal{B}_\mu(\mathcal{U}) \dot{\mathcal{U}}^\mu +$$

+ компл. сопр., (10.43)

где

$$t_L = t - i(\theta_1 \bar{\theta}^1 + \theta_2 \bar{\theta}^2), \quad \tilde{t}_L = t - i(\theta_1 \bar{\theta}^1 - \theta_2 \bar{\theta}^2) \quad (10.44)$$

(t_L аннигилируется действием $\bar{D}_{1,2}$, а \tilde{t}_L аннигилируется действием \bar{D}_1 и D^2).

Но можно также написать инварианты $\mathcal{N} = 4$ более сложной структуры. Рассмотрим суперполе

$$R = \bar{D}_2[\mathcal{A}_m(\mathcal{Z}, \mathcal{U})D^2\mathcal{Z}^m].$$

Принимая во внимание, что $\bar{D}_1\mathcal{Z}^m = \bar{D}_1\mathcal{U}^\mu = 0$ и $(\bar{D}_2)^2 = 0$, мы выводим, что $\bar{D}_j R = 0$, и, следовательно, $\int dt_L d\theta_1 d\theta_2 R$ есть суперсимметричный инвариант. В специальном случае, когда \mathcal{A}_m не зависит от \mathcal{U}^μ , можно вытянуть \bar{D}_2 направо, получить $R = 2i\mathcal{A}_m \dot{\mathcal{Z}}^m$ и воспроизвести таким образом структуру (10.29).

Наиболее общая квазикомплексная деформация имеет вид

$$S_{\text{би-К}}^{\mathcal{A},\mathcal{B}} = -\frac{i}{4} \int d\theta_1 d\theta_2 dt_L \{ \bar{D}_2[\mathcal{A}_m^{(1)}(\mathcal{Z}, \mathcal{U})D^2\mathcal{Z}^m] +$$

+ $\bar{D}_1[\mathcal{A}_m^{(2)}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{U}})D^1\mathcal{Z}^m] \} -$

$$-\frac{i}{4} \int d\theta_1 d\bar{\theta}^2 d\tilde{t}_L \{ D^2[\mathcal{B}_\mu^{(1)}(\mathcal{U}, \mathcal{Z})\bar{D}_2\mathcal{U}^\mu] + \bar{D}_1[\mathcal{B}_\mu^{(2)}(\mathcal{U}, \bar{\mathcal{Z}})D^1\mathcal{U}^\mu] \} +$$

+ компл. сопр. (10.45)

§10.2. Симплектическая сигма-модель

Кэлероподобные модели предыдущего параграфа были определены на комплексных многообразиях с чётной вещественной размерностью D . Но для некоторых специальных многообразий размерности $D = 3n$ или $D = 5n$ можно также сформулировать

суперсимметричные сигма-модели, обладающие расширенной суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$ и даже $\mathcal{N} = 8$ (в случае $D = 5n$). Модели $\mathcal{N} = 8$ будут обсуждаться в конце главы. В этом параграфе мы сконцентрируем внимание на моделях $\mathcal{N} = 4$, живущих на многообразиях размерности $3n$.

Рассмотрим (3, 4, 1) суперполе (7.60) с компонентным разложением (7.64). Естественное обобщение свободного действия (7.65) выглядит следующим образом [74]⁷:

$$S = - \int d^2\bar{\theta} d^2\theta dt F(\Phi_M) \quad (10.46)$$

с произвольным $F(\Phi_M)$, $M = 1, 2, 3$. Бозонная часть этого действия имеет вид

$$S_{\text{боз}} = \frac{1}{2} h(A) \dot{A}^2, \quad (10.47)$$

где

$$h(A) = 2\Delta F(A). \quad (10.48)$$

Она описывает движение по конформно-плоскому 3-мерному многообразию⁸.

Компонентные выражения для квантовых суперзарядов и гамильтониана можно найти, следуя стандартной процедуре, описанной в предыдущих главах. Суперзаряды имеют вид [73]

$$\begin{aligned} \hat{Q}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} f(A) \hat{P}_M (\sigma_M)_j{}^k \psi_k + \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_M f) \hat{\psi} \sigma_M \psi \psi_j, \\ \hat{Q}^j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{P}_M f(A) \hat{\psi}^k (\sigma_M)_k{}^j - \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_M f) \hat{\psi}^j \hat{\psi} \sigma_M \psi, \end{aligned} \quad (10.49)$$

где $f(A) = 1/\sqrt{h(A)}$.

Мы видим, что суперзаряды несут спиновые индексы и лежат в фундаментальном представлении группы $Spin(3) \equiv Sp(1)$. В сигма-модели (5, 8, 3), которую мы будем обсуждать в § 11.4, комплексные суперзаряды лежат в фундаментальном представлении $Spin(5) \equiv Sp(2)$. Вот почему мы называли модели этого типа *симплектическими* [99, 75]. Эти модели описывают движение

⁷Другой знак по сравнению с [74] связан с другим принятым в книге соглашением для фермионной меры.

⁸Здесь Δ не ковариантный лапласиан, а просто $\Delta = \partial_M \partial_M$.

по определённому классу многообразий, которые мы не можем назвать симплектическими (термин «симплектическое многообразие» уже занят) и, за неимением лучшего слова, мы будем называть такие многообразия *спиновыми*.

Антикоммутатор суперзарядов (10.49) даёт гамильтониан:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} f(\hat{P}_M)^2 f + \varepsilon_{MNP} \hat{\psi} \sigma_M \psi f(\partial_N f) \hat{P}_P + \frac{1}{6} f(\Delta f) \hat{\psi} \sigma_M \psi \hat{\psi} \sigma_M \psi. \quad (10.50)$$

Очевидное обобщение действия (10.46) включает несколько (3, 4, 1) суперполей $\Phi_{k=1, \dots, n}$:

$$S = - \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt F(\Phi_k). \quad (10.51)$$

Бозонная часть (10.51) описывает движение по $3n$ -мерному многообразию с метрикой

$$g_{Mk, Nl} = 2\delta_{MN} \frac{\partial^2 F}{\partial A_{Pk} \partial A_{Pl}}. \quad (10.52)$$

Нам трудно сказать, насколько эта новая геометрия интересна с математической точки зрения, но система (10.51) имеет интересные физические приложения.

1. Для некоторого специального набора Φ_k и для некоторой специальной функции $F(\Phi_k)$ она даёт эффективное действие 4-мерной суперсимметричной калибровочной теории, помещённой в маленький пространственный ящик [73, 100].
2. Удивительным образом та же самая модель описывает динамику экстремальной чёрной дыры Рейсснера—Нордстрема [101].

Заговорив о физике, я не могу не отметить другой интересный класс моделей СКМ, включающих суперполя (3, 4, 1), которые дают эффективный лагранжиан 4-мерных киральных (т. е. моделей с лево-право-асимметричным фермионным наполнением) суперсимметричных калибровочных теорий, помещённых в маленький ящик. Простейшая такая система была найдена в [102].

Она содержит пару комплексных суперзарядов:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_M)_j^k \psi_k (\hat{P}_M + \mathcal{A}_M) + i\psi_j \mathcal{D}], \\ \hat{Q}^j &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\psi}^k (\sigma_M)_k^j (\hat{P}_M + \mathcal{A}_M) - i\hat{\psi}^j \mathcal{D}],\end{aligned}\quad (10.53)$$

где \mathcal{A} и \mathcal{D} — такие функции \mathcal{A} , что ротор \mathcal{A} совпадает с градиентом \mathcal{D} :

$$\nabla \times \mathcal{A} = \mathcal{B} = \nabla \mathcal{D}. \quad (10.54)$$

Выполняется стандартная алгебра $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии (5.36) с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{P} + \mathcal{A})^2 + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 + \mathcal{B} \hat{\psi} \sigma \psi. \quad (10.55)$$

Физически интересный случай — это $\mathcal{D} = 1/(2|\mathcal{A}|) \equiv 1/(2\mathcal{A})$, когда гамильтониан (10.55) описывает 3-мерное движение частицы со спином $\frac{1}{2}$ в поле дираковского магнитного монополя $B_M = A_M/(2A^3)$ с добавленным скалярным потенциалом $V(A) = 1/(8A^2)$. Замечательно, что похожий гамильтониан описывает динамику 4-мерной киральной суперсимметричной электродинамики (теории, включающей фотон, фотино, левый фермион заряда 2, восемь правых фермионов с единичным электрическим зарядом⁹ и скалярные суперпартнёры этих фермионов) в маленьком ящике. (Заметим для ясности, что компоненты \mathcal{A} не имеют здесь отношения к физическим пространственным координатам. Они представляют нулевые фермионные фурье-моды физическо-го вектор-потенциала [не имеющего в свою очередь отношения к $\mathcal{A}(\mathcal{A})$, фигурирующему в уравнениях (10.53) и (10.55)].)

Более точно: эффективный гамильтониан такой теории описывает движение частицы в поле не одного, а целой решётки из монополей с магнитным зарядом -8 , наложенной на в два раза более частую решётку монополей с зарядом $+1$, так что средний «пространственный» магнитный заряд равен нулю. Но мы не будем далее испытывать терпение нашего читателя-математика. Читатель-физик может обратиться к оригинальной статье [103].

⁹Замечание для специалистов: надо их взять восемь штук, чтобы сократить киральную аномалию.

Модель де Кромбруг—Риттенберга допускает обобщения. Прежде всего, мы можем снабдить трёхмерное многообразие, по которому движется частица, нетривиальной конформно-плоской метрикой. Квантовые суперзаряды и гамильтониан приобретают вид [73]

$$\begin{aligned}\hat{Q}_j &= \frac{f}{\sqrt{2}}[(\sigma_M)_j{}^k \psi_k (\hat{P}_M + \mathcal{A}_M) - i\psi_j \mathcal{D}] + \frac{i\partial_M f}{\sqrt{2}} \hat{\psi} \sigma_M \psi \psi_j, \\ \hat{Q}^j &= [\hat{\psi}^k (\sigma_M)_k{}^j (\hat{P}_M + \mathcal{A}_M) + i\hat{\psi}^j \mathcal{D}] \frac{f}{\sqrt{2}} - \frac{i\partial_M f}{\sqrt{2}} \hat{\psi}^j \hat{\psi} \sigma_M \psi,\end{aligned}\quad (10.56)$$

$$\begin{aligned}\hat{H} &= f \left[\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{P}} + \mathcal{A})^2 + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 + \mathcal{B}_M \hat{\psi} \sigma_M \psi \right] f + \\ &+ \varepsilon_{MNP} \hat{\psi} \sigma_M \psi f (\partial_N f) (\hat{P}_P + \mathcal{A}_P) - f (\partial_M f) \mathcal{D} \hat{\psi} \sigma_M \psi + \\ &+ \frac{1}{6} f (\Delta f) \hat{\psi} \sigma_M \psi \hat{\psi} \sigma_M \psi.\end{aligned}\quad (10.57)$$

Можно также взять несколько (3, 4, 1) суперполей, что позволяет, в частности, описать эффективные гамильтонианы неабелевых киральных калибровочных теорий в маленьком ящике [104].

Мы выпишем здесь такой гамильтониан для киральной теории с группой $SU(3)$. В этом случае достаточно взять два симплектических суперполя. Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{2}{3} [(\hat{P}^a + \mathcal{A}^a)^2 + (\hat{P}^b + \mathcal{A}^b)^2 + (\hat{P}^{(a} + \mathcal{A}^{(a)} \cdot (\hat{P}^{b)} + \mathcal{A}^{b)}) + \\ &+ (\mathcal{D}^a)^2 + (\mathcal{D}^b)^2 + \mathcal{D}^a \mathcal{D}^b] + \\ &+ \mathcal{B}_M^a \hat{\psi}^a \sigma_M \psi^a + \mathcal{B}_M^b \hat{\psi}^b \sigma_M \psi^b + \mathcal{B}_M^{ab} (\hat{\psi}^a \sigma_M \psi^b + \hat{\psi}^b \sigma_M \psi^a),\end{aligned}\quad (10.58)$$

где $f = 1/\sqrt{\hbar}$, а $\mathcal{D}^{a,b}$, $\mathcal{A}^{a,b}$ и $\mathcal{B}^{a,b,ab}$ — определённые функции динамических переменных¹⁰ $A^{a,b}$. Эти функции удовлетворяют усло-

¹⁰Приближение Борна—Оппенгеймера, в рамках которого вычисляется эффективный гамильтониан, становится несправедливым вблизи вершин дуальной решётки, где живут переменные $A^{a,b}$ [ср. монополярную сингулярность при $A=0$ в гамильтониане (10.55)]. Приведённое выражение справедливо в далёкой от вершин области.

виям

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_M^a &= \varepsilon_{MNP} \partial_N^a \mathcal{A}_P^a = -\partial_M^a \mathcal{D}^a, \\ \mathcal{B}_M^b &= \varepsilon_{MNP} \partial_N^b \mathcal{A}_P^b = -\partial_M^b \mathcal{D}^b, \\ \mathcal{B}_M^{ab} &= \varepsilon_{MNP} \partial_N^a \mathcal{A}_P^b = \varepsilon_{MNP} \partial_N^b \mathcal{A}_P^a = -\partial_M^a \mathcal{D}^b = -\partial_M^b \mathcal{D}^a. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Переменные A^a и A^b суть проекции нулевых фурье-мод компонент калибровочного потенциала, принадлежащих картановской подалгебре $su(3)$, на простые корни $a = \text{diag}(1, -1, 0)$ и $b = \text{diag}(0, 1, -1)$.

Суперполевое описание симплектических моделей, включающих калибровочные поля, возможно только в формализме гармонического суперпространства [80]. Для этого надо ввести набор грассманово-аналитических суперполей V_k^{++} , несущих двойной гармонический заряд, наложить на них связи $D^{++}V_k^{++} = 0$ [компонентное разложение таких суперполей выписано в уравнении (7.103)] и записать действие в виде интеграла по аналитическому суперпространству,

$$S^{\text{кин}} = \int d^2\theta^+ d^2\theta^- dt du \mathcal{L}(V_k^{++}, V_k^{+-}, V_k^{-+}, u), \quad (10.60)$$

где

$$V_k^{+-} = \frac{1}{2} D^{--} V_k^{++}, \quad V_k^{-+} = (D^{--})^2 V_k^{++}, \quad (10.61)$$

а \mathcal{L} несёт нулевой гармонический заряд. Действие (10.60) даёт такой же компонентный лагранжиан, что и действие (10.51). А члены с калибровочными полями \mathcal{A} воспроизведутся при добавлении структуры

$$S^A = \int d^2\theta^+ dt_A du \mathcal{L}^{++}(V_k^{++}), \quad (10.62)$$

с подходящей функцией¹¹ \mathcal{L}^{++} , которая несёт гармонический заряд +2.

Мы отсылаем читателя к статье [80] за дальнейшими деталями.

¹¹Чтобы получить правильный эффективный гамильтониан для конкретной киральной теории, надо взять некоторые конкретные функции \mathcal{L} и \mathcal{L}^{++} . Но система обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$ при произвольных \mathcal{L} и \mathcal{L}^{++} .

10.2.1. Бисимплектические модели

Как мы установили в предыдущем параграфе, супермультиплет $(2, 4, 2)$ существует в двух формах — обыкновенной и зеркальной. Оба мультиплета удовлетворяют условию $\bar{D}_1 \mathcal{Z} = \bar{D}_1 \mathcal{U} = 0$, но вторые условия не совпадают, имея вид $\bar{D}_2 \mathcal{Z} = 0$ для обыкновенного мультиплета и $D^2 \mathcal{U} = 0$ для зеркального. Эта разница сводится к замене $\theta_2 \leftrightarrow \bar{\theta}^2$ в разложении по θ .

Точно так же, помимо обыкновенного симплектического мультиплета Φ , чьё компонентное разложение выписано в уравнении (7.64), можно рассмотреть зеркальный мультиплет $\check{\Phi}$ с тем же разложением с точностью до замены $\theta_2 \leftrightarrow \bar{\theta}^2$. Если модель содержит только зеркальные мультиплеты, компонентное действие имеет тот же вид, что и действие с обыкновенными мультиплетами. Но если действие включает мультиплеты обоих типов, мы получаем новую модель, которую естественно назвать *бисимплектической* сигма-моделью. Рассмотрим простейший случай с одним обыкновенным и одним зеркальным мультиплетом. Напишем действие

$$S = - \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt F(\Phi, \check{\Phi}). \quad (10.63)$$

Бозонная часть компонентного лагранжиана имеет вид [ср. (10.38), (10.39)]

$$L_{\text{боз}} = \frac{\partial^2 F(A, \check{A})}{(\partial A)^2} \dot{A}^2 - \frac{\partial^2 F(A, \check{A})}{(\partial \check{A})^2} \dot{\check{A}}^2. \quad (10.64)$$

Соответствующая 6-мерная метрика включает два конформно-плоских блока,

$$g_{MN} = 2 \operatorname{diag} \left(\frac{\partial^2 F}{(\partial A)^2}, -\frac{\partial^2 F}{(\partial \check{A})^2} \right). \quad (10.65)$$

Обобщение на случай нескольких обыкновенных и зеркальных мультиплетов достаточно очевидно. Метрика биспинорного многообразия общего вида блок-диагональна со структурой (10.52) (взятой с положительным или отрицательным знаком в зависимости от того, имеем ли мы дело с обыкновенным мультиплетом или зеркальным) в каждом из блоков.

§ 10.3. Модели НКТ и би-НКТ

Интересные геометрии связаны с сигма-моделями, включающими суперполя $(4, 4, 0)$. Как и мультиплеты $(2, 4, 2)$ и $(3, 4, 1)$, мультиплет $(4, 4, 0)$ существует в двух разновидностях: обыкновенной и зеркальной [26, 11, 105]; зеркальный мультиплет получается из обыкновенного заменой $\theta_2 \leftrightarrow \bar{\theta}^2$ в разложении по θ .

Модели, включающие такие мультиплеты *одного* типа, описывают геометрию НКТ. В рамках гармонического подхода можно дать полную классификацию таких метрик: для этого надо взять несколько *нелинейных* мультиплетов $(4, 4, 0)$, удовлетворяющих условию (7.98). Мы подробно рассмотрим эти модели в главе 12. В этой главе мы ограничимся случаем $\mathcal{L}^{+3a} = 0$. Это определяет модель с линейными мультиплетами, которые можно также описать в обычном суперпространстве $\mathcal{N} = 4$.

Как показано в главе 7, обычный линейный мультиплет можно описать парой $(2, 4, 2)$ суперполей \mathcal{Z}^A , на которые наложена связь (7.67):

$$D_j \mathcal{Z}^A - \varepsilon^{AB} \bar{D}_j \bar{\mathcal{Z}}^B = 0. \quad (10.66)$$

Очевидное обобщение свободного действия (7.69) имеет вид

$$S = \frac{1}{8} \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt \mathcal{L}(\mathcal{Z}_k^A, \bar{\mathcal{Z}}_k^A), \quad (10.67)$$

где k маркирует мультиплеты, а \mathcal{L} — произвольная вещественная функция.

Для линейных мультиплетов нетрудно найти решение уравнений (7.98). Оно даётся выражениями (7.68), где мультиплет \mathcal{Z}^A выражен через пару несвязанных киральных $(2, 2, 0)$ суперполей Z^A . Подставив (7.68) в (10.67), мы получаем

$$S = \frac{1}{4} \int d\theta_1 d\bar{\theta}^1 dt (\Delta_{AB}^{kl} \mathcal{L}) D^1 Z_k^A \bar{D}_1 \bar{Z}_l^B, \quad (10.68)$$

где

$$\Delta_{AB}^{kl} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Z_k^A \partial \bar{Z}_l^B} + \varepsilon^{AC} \varepsilon^{BD} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \bar{Z}_k^C \partial Z_l^D} \right). \quad (10.69)$$

Проинтегрировав это выражение по $d\theta_1 d\bar{\theta}^1$, мы получаем компонентный лагранжиан. Его бозонная часть имеет вид¹²

$$L_{\text{боз}} = (\Delta_{AB}^{kl} \mathcal{L}) \dot{z}_k^A \dot{\bar{z}}_l^B. \quad (10.70)$$

Другими словами, выражение (10.69) есть не что иное как эрмитова метрика $h_{kA, \bar{l}B}$ на нашем комплексном многообразии. Когда имеется только один мультиплет, лагранжиан (10.70) сводится к

$$L_{\text{боз}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^A \partial \bar{z}^A} \dot{z}^B \dot{\bar{z}}^B. \quad (10.71)$$

Этот лагранжиан описывает движение по конформно-плоскому многообразию вещественной размерности 4.

При таком описании половина суперсимметрий действия (10.68), связанная с координатными преобразованиями в суперпространстве $(t, \theta_1, \bar{\theta}^1)$, видна явно, а другая половина «скрыта», будучи реализована как

$$\delta Z_k^A = \eta \varepsilon^{AB} \bar{D}_1 \bar{Z}_k^B, \quad \delta \bar{Z}_k^A = -\bar{\eta} \varepsilon^{AB} D^1 Z_k^B, \quad (10.72)$$

где η — комплексный грасманов параметр, связанный со сдвигом θ_2 .

Теорема 10.3. *Метрика (10.69) описывает обата-плоское многообразие НКТ.*

Доказательство.

Лемма 1. *Многообразие с метрикой (10.69) гиперкомплексно.*

Доказательство. Спустимся на один шаг и представим каждый киральный мультиплет Z_k^m как пару $\mathcal{N} = 1$ мультиплетов, как мы это делали в § 9.2. Действия (10.67) и (10.68) можно тогда переписать в виде (9.34).

По построению это действие обладает четырьмя вещественными суперсимметриями. Одна из них явная, она даётся уравнением (9.36). А три остальных скрыты. Одна из этих трёх суперсимметрий выражается на компонентах так:

$$\delta_1 x^M = i \epsilon_1 I_N^M \Psi^N, \quad \delta_1 \Psi^M = \epsilon_1 I_N^M \dot{x}^N, \quad (10.73)$$

где комплексная структура I_N^M имеет каноническую форму (2.49) с чётным числом блоков. Заметим, что (2.49) — постоянная матрица и мы можем опустить по этой причине второй член в (9.38).

¹²Полное выражение приведено в работе [72].

Две оставшиеся вещественные суперсимметрии следуют из комплексной суперсимметрии (10.72). Положив $\eta = i(\epsilon_2 + i\epsilon_3)/\sqrt{2}$, используя разложение (7.27) и выразив комплексные бозонные и фермионные координаты через вещественные,

$$\begin{aligned} z_1^1 &= \frac{x^1 + ix^2}{\sqrt{2}}, & z_1^2 &= \frac{x^3 + ix^4}{\sqrt{2}}, \\ \psi_1^1 &= \frac{\Psi^1 + i\Psi^2}{\sqrt{2}}, & \psi_1^2 &= \frac{\Psi^3 + i\Psi^4}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (10.74)$$

(тогда z_2^A выражаются через $x^{5,6,7,8}$ и т. д.), мы можем привести (10.72) к такому же виду, как (10.73):

$$\begin{aligned} \delta_2 x^M &= i\epsilon_2 J_N^M \Psi^N, & \delta_3 x^M &= i\epsilon_3 K_N^M \Psi^N, \\ \delta_2 \Psi^M &= \epsilon_2 J_N^M \dot{x}^N, & \delta_3 \Psi^M &= \epsilon_3 K_N^M \dot{x}^N \end{aligned} \quad (10.75)$$

с постоянными матрицами J, K , имеющими канонический вид (3.2). Тройка (I, J, K) кватернионна, и, значит, многообразие гиперкомплексно. \square

Лемма 2. Форма $\omega_+ = \omega_J + i\omega_K$ замкнута относительно внешней голоморфной производной, связанной с комплексной структурой I : $\partial_I \omega_+ = 0$.

Доказательство. Согласно теореме 3.4, $\mathcal{I}^+ = (J + iK)/2$ имеет только компоненты $(\mathcal{I}^+)_m^{\bar{n}}$, а остальные обращаются в ноль. В нашем случае выражения ненулевых компонент чрезвычайно просты¹³:

$$(\mathcal{I}^+)_m^{\bar{n}} = \text{diag}(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon). \quad (10.76)$$

Тогда форма ω_+ принимает вид

$$\omega_+ = 2(\mathcal{I}^+)_n^{\bar{m}} h_{p\bar{m}} dz^n \wedge dz^p = 2\varepsilon_{AC} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z_k^C \partial z_l^B} dz_k^A \wedge dz_l^B. \quad (10.77)$$

Действуя на неё внешней голоморфной производной $\partial_{pD} dz_p^D \wedge$, мы получаем ноль. \square

¹³Эту матрицу [и связанную с ней матрицу $\mathcal{I}^- = (J - iK)/2$, которая имеет тот же вид (10.76) с точностью до перестановки индексов n и индексов \bar{n}] мы назвали на с. 81 гиперкомплексной структурой. Заметьте, что матрицы \mathcal{I}^\pm входят в закон (10.72) дополнительных преобразований суперсимметрии так же, как матрица обычной комплексной структуры входит в законы дополнительных преобразований суперсимметрии в формулах (9.37) и (10.3).

Две этих леммы и теорема 3.5 позволяют нам заключить, что наше многообразие является многообразием НКТ. Так как комплексные структуры I_N^M , J_N^M и K_N^M постоянны, связность Оба-ты (3.66) обращается в ноль. \square

Замечание. Мы доказали нашу теорему, используя некоторые специальные свойства [такие как постоянство комплексных структур $(I, J, K)_N^M$] действия (10.67), включающего линейные мультиплеты $(4, 4, 0)$. В главе 12 мы докажем более общую теорему 12.4, говорящую, что любое гиперкомплексное многообразие, описываемое суперсимметричной моделью $\mathcal{N} = 4$, является НКТ.

Инвариантности (9.37), (10.73), (10.75) дают четыре сохраняющихся вещественных суперзаряда. Они имеют вид [92]

$$\begin{aligned} Q_0 &= \Psi^M \left(P_M - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \Psi^A \Psi^B + \frac{i}{12} C_{MKP} \Psi^K \Psi^P \right), \\ Q_1 &= \Psi^N I_N^M \left(P_M - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \Psi^A \Psi^B - \frac{i}{4} C_{MKP} \Psi^K \Psi^P \right), \\ Q_2 &= \Psi^N J_N^M \left(P_M - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \Psi^A \Psi^B - \frac{i}{4} C_{MKP} \Psi^K \Psi^P \right), \\ Q_3 &= \Psi^N K_N^M \left(P_M - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \Psi^A \Psi^B - \frac{i}{4} C_{MKP} \Psi^K \Psi^P \right). \end{aligned} \quad (10.78)$$

Другими словами, два дополнительных суперзаряда, которые добавляются к суперзарядам (9.61), имеют тот же вид, что Q_1 с точностью до замены комплексной структуры I на структуры J, K . Все суперзаряды включают спиновую связность Леви-Чивиты $\omega_{AB,M}$ и универсальное бисмутово кручение C_{MKP} .

Интересны также явные выражения для комплексных суперзарядов [95],

$$S, \bar{S} = \frac{Q_0 \pm iQ_1}{2}, \quad R, \bar{R} = \frac{Q_2 \pm iQ_3}{2}. \quad (10.79)$$

Они принимают особенно красивый вид, если записать их в терминах импульсов π_m и $\pi_{\bar{m}}$, как в выражениях (9.6):

$$\begin{aligned} S &= \psi^m \left(\pi_m - \frac{i}{2} \partial_m h_{n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right), \\ \bar{S} &= \bar{\psi}^{\bar{m}} \left(\pi_{\bar{m}} + \frac{i}{2} \partial_{\bar{m}} h_{n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right), \\ R &= \psi^k (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{m}} \left(\pi_{\bar{m}} - \frac{i}{2} \partial_{\bar{m}} h_{n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right), \\ \bar{R} &= \bar{\psi}^{\bar{k}} (\mathcal{I}^-)_{\bar{k}}{}^m \left(\pi_m + \frac{i}{2} \partial_m h_{n\bar{p}} \psi^n \bar{\psi}^{\bar{p}} \right), \end{aligned} \quad (10.80)$$

где $\mathcal{I}^\pm = (J \pm iK)/2$ — матрицы гиперкомплексной структуры.

Первая пара суперзарядов в (10.80) совпадает с (9.6), что не удивительно: многообразия НКТ комплексны и модели НКТ принадлежат широкому классу $\mathcal{N} = 2$ моделей Дольбо (9.1). Во второй паре суперзарядов гиперкомплексная структура играет абсолютно ту же роль, что комплексная структура в выражении (10.11) для классических суперзарядов Кэлера—де Рама. Это тоже не должно вызывать удивления: как отмечалось в главе 3, многообразия НКТ соотносятся с гиперкомплексными многообразиями общего вида примерно так же, как кэлеровы многообразия соотносятся с комплексными многообразиями общего вида. Гиперкомплексная структура играет для многообразий НКТ ту же роль, что комплексная структура для кэлеровых многообразий.

Сделаем важное замечание. Вывод выражений для R и \bar{R} включал определённый нетривиальный шаг, который мы хотим пояснить. Помимо структур $\sim \psi\psi\bar{\psi}$ в R и $\sim \bar{\psi}\psi\bar{\psi}$ в \bar{R} , в суперзарядах возникают, на первый взгляд, также грассмановоголоморфные структуры: структура

$$\sim X = \frac{1}{2}\psi^k (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{m}} C_{\bar{m}pl} \psi^p \psi^l = (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{m}} (\partial_p h_{l\bar{m}}) \psi^k \psi^p \psi^l \quad (10.81)$$

в суперзаряде R и аналогичная структура $\sim \bar{\psi}\bar{\psi}\bar{\psi}$ в суперзаряде \bar{R} .

Теорема 10.4. *Для многообразий НКТ выражение X обращается в ноль тождественно.*

Доказательство. Перекинем на первом шаге производную, используя замкнутость формы (10.77) относительно ∂_I :

$$X = -[\partial_p (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{m}}] h_{l\bar{m}} \psi^k \psi^p \psi^l. \quad (10.82)$$

Комплексные структуры I, J и K ковариантно постоянны относительно одной и той же бисмутовой связности. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \partial_p (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{m}} &= h^{\bar{q}s} G_{\bar{q},p\bar{k}}^{(B)} (\mathcal{I}^+)_s{}^{\bar{m}} - h^{\bar{m}s} G_{s,p\bar{q}}^{(B)} (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{q}} = \\ &= h^{\bar{q}s} (\partial_k h_{p\bar{q}}) (\mathcal{I}^+)_s{}^{\bar{m}} + h^{\bar{m}s} (\partial_s h_{p\bar{q}} - \partial_p h_{s\bar{q}}) (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{q}}, \end{aligned} \quad (10.83)$$

где мы использовали (2.18) и (2.16). Тогда

$$\begin{aligned} X &= \psi^k \psi^p \psi^l [(\partial_p h_{l\bar{q}} - \partial_l h_{p\bar{q}}) (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{q}} + \partial_k h_{p\bar{q}} (\mathcal{I}^+)_l{}^{\bar{q}}] = \\ &= 3\psi^k \psi^p \psi^l \partial_p h_{l\bar{q}} (\mathcal{I}^+)_k{}^{\bar{q}}. \end{aligned} \quad (10.84)$$

Сравнив это с (10.81), мы выводим $X = 3X$, откуда следует $X = 0$. \square

Заметим, что это доказательство и выражения (10.80) для суперзарядов не зависят от предположения, что многообразие обата-плоское. Эти выражения справедливы для любого многообразия НКТ.

Квантовые суперзаряды, соответствующие классическим суперзарядам (10.78), имеют простую интерпретацию на языке дифференциальных форм:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_0 &\equiv \tilde{\partial}_I + \tilde{\partial}_I^\dagger = \tilde{\partial}_J + \tilde{\partial}_J^\dagger = \tilde{\partial}_K + \tilde{\partial}_K^\dagger, \\ \hat{Q}_1 &\equiv i(\tilde{\partial}_I^\dagger - \tilde{\partial}_I), \quad \hat{Q}_2 = i(\tilde{\partial}_J^\dagger - \tilde{\partial}_J), \quad \hat{Q}_3 = i(\tilde{\partial}_K^\dagger - \tilde{\partial}_K), \end{aligned} \quad (10.85)$$

где $\tilde{\partial}_{I,J,K}$ — твистованные операторы голоморфных внешних производных относительно комплексных структур I, J, K . Эти операторы были определены в уравнении (9.26), где следует в данном случае положить $W = 0$. Операторы $\tilde{\partial}_{I,J,K}^\dagger$ сопряжены к $\tilde{\partial}_{I,J,K}$ эрмитово.

И последнее замечание, касающееся НКТ. Модели НКТ можно деформировать, добавив калибровочное поле. Если мы хотим сохранить алгебру $\mathcal{N} = 4$, это калибровочное поле должно иметь специальный вид. Общее описание таких полей требует формализма гармонического суперпространства, и мы отложим его до главы 12.

10.3.1. Модели би-НКТ

Рассмотрим модель [72], включающую некоторое число обычных линейных $(4, 4, 0)$ мультиплетов $\mathcal{Z}_{k=1,\dots,d_1/2}^{A=1,2}$, на которые наложены связи $\bar{D}_j \mathcal{Z}_k^{A=1,2} = 0$ и (10.66), и некоторое число зеркальных мультиплетов $\mathcal{U}_{\alpha=1,\dots,d_2/2}^A$ ($d_{1,2}$ должны быть, естественно, чётными). На зеркальный мультиплет налагаются связи, полученные из связей для \mathcal{Z}_k^A заменой $D^2 = D_1 \leftrightarrow -\bar{D}_2$: $\bar{D}_1 \mathcal{U}_\alpha^A = D^2 \mathcal{U}_\alpha^A = 0$

и

$$\begin{aligned} \bar{D}_2 \mathcal{U}_\alpha^A + \varepsilon^{AB} \bar{D}_1 \bar{\mathcal{U}}_\alpha^B &= 0, \\ D^1 \mathcal{U}_\alpha^A - \varepsilon^{AB} D^2 \bar{\mathcal{U}}_\alpha^B &= 0. \end{aligned} \quad (10.86)$$

Эти связи можно разрешить, выразив каждое суперполе \mathcal{Z}_k^A через пару киральных мультиплетов Z_k^A , как в (7.68), и каждое су-

перполе \mathcal{U}_α^A через пару киральных мультиплетов U_α^A следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\alpha^A &= U_\alpha^A + \bar{\theta}^2 \varepsilon^{AB} \bar{D}_1 \bar{U}_\alpha^B + i\theta_2 \bar{\theta}^2 \dot{U}_\alpha^A, \\ \bar{\mathcal{U}}_\alpha^A &= \bar{U}_\alpha^A - \theta_2 \varepsilon^{AB} D^1 U_\alpha^B - i\theta_2 \bar{\theta}^2 \dot{\bar{U}}_\alpha^A. \end{aligned} \quad (10.87)$$

Инвариантное действие общего вида имеет вид

$$S = \frac{1}{8} \int d^2 \bar{\theta} d^2 \theta dt \mathcal{L}(z_k^A, \bar{z}_k^A; \mathcal{U}_\alpha^A, \bar{\mathcal{U}}_\alpha^A). \quad (10.88)$$

После интегрирования по $d\theta_2 d\bar{\theta}^2$ мы получаем

$$S = \frac{1}{4} \int d\theta_1 d\bar{\theta}^1 dt \mathcal{L}' \quad (10.89)$$

с суперполевым лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= (\Delta_{AB}^{kl} \mathcal{L}) D^1 Z_k^A \bar{D}_1 \bar{Z}_l^B - (\Delta_{AB}^{\alpha\beta} \mathcal{L}) D^1 U_\alpha^A \bar{D}_1 \bar{U}_\beta^B + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} [(\partial_{Bk} \partial_{D\alpha} \mathcal{L}) \bar{D}_1 \bar{Z}_k^A \bar{D}_1 \bar{U}_\alpha^C - (\partial_{\bar{B}k} \partial_{\bar{D}\alpha} \mathcal{L}) D^1 Z_k^A D^1 U_\alpha^C], \end{aligned} \quad (10.90)$$

где $\partial_{Bk} = \partial/\partial Z_k^B$ и т. д., $\Delta_{AB}^{kl} \mathcal{L}$ было определено в (10.69) и $\Delta_{AB}^{\alpha\beta} \mathcal{L}$ определяется аналогично. Лагранжиан (10.90) содержит члены $\sim DZ\bar{D}\bar{Z}$, $\sim DU\bar{D}\bar{U}$ и также члены $\sim DZDU$ и $\sim \bar{D}\bar{Z}\bar{D}\bar{U}$. Эта модель принадлежит к классу твистованных моделей Дольбо с дополнительными голоморфными кручениями, которые мы обсуждали в п. 9.1.1. Половина суперсимметрий действия (10.88) реализуется в этой формулировке явно, а другая половина «скрыта» и реализуется как симметрия относительно следующих преобразований суперполей $\mathcal{N} = 2$:

$$\begin{aligned} \delta Z_k^A &= \eta \varepsilon^{AB} \bar{D}_1 \bar{Z}_k^B, & \delta \bar{Z}_k^A &= -\bar{\eta} \varepsilon^{AB} D^1 Z_k^B, \\ \delta U_\alpha^A &= \bar{\eta} \varepsilon^{AB} \bar{D}_1 \bar{U}_\alpha^B, & \delta \bar{U}_\alpha^A &= -\eta \varepsilon^{AB} D^1 \bar{U}_\alpha^B. \end{aligned} \quad (10.91)$$

Выразив действие, исходно заданное в терминах суперполей $\mathcal{N} = 4$, через суперполя $\mathcal{N} = 2$, мы можем спуститься далее, на уровень компонент. Вторые производные препотенциала \mathcal{L} в первой строчке (10.90) дают метрику, и бозонная часть компонентного

лагранжиана имеет вид

$$L_{\text{боз}} = h_{Ak, \overline{Bl}} \dot{z}_k^A \dot{\bar{z}}_l^B + h_{A\alpha, \overline{B\beta}} \dot{u}_\alpha^A \dot{\bar{u}}_\beta^B \quad (10.92)$$

с метрикой

$$h_{Ak, \overline{Bl}} = \Delta_{AB}^{kl} \mathcal{L}, \quad h_{A\alpha, \overline{B\beta}} = -\Delta_{AB}^{\alpha\beta} \mathcal{L}, \quad (10.93)$$

где производные теперь берутся по бозонным переменным z_k^A , u_α^A . Вторая строчка в (10.90), содержащая голоморфные кручения, не даёт вклада в бозонное действие, но даёт вклад в фермионные члены типа (9.29). Полное выражение для компонентного лагранжиана выписано в работе [72].

Замечание. Читатель несомненно обратил внимание, что вся описанная здесь конструкция полностью параллельна построению бикэлеровой и бисимплектической моделей, обсуждавшихся выше. В частности, формулы (10.91) аналогичны (10.40), а выражения (10.93) для метрики аналогично выражениям (10.39) и (10.65). Это ни в коем случае не случайно. Фактически модели (4, 4, 0), (3, 4, 1) и (2, 4, 2) взаимосвязаны: две последние модели получаются из первой в результате *гамильтоновой редукции*¹⁴. Процедура гамильтоновой редукции будет подробно обсуждаться в главе 11.

Наша следующая задача — найти комплексные структуры, связанные с преобразованиями суперсимметрии нашей модели. Мы действуем так же, как действовали для моделей НКТ. Одна из комплексных структур связана с явной инвариантностью $\mathcal{N} = 2$ действия (10.89). Она имеет стандартную каноническую форму:

$$I = \text{diag}(J, \dots, J) \quad (10.94)$$

с матрицей J из (3.3). Чтобы найти две другие комплексные структуры, положим $\eta\sqrt{2} = i(\epsilon_2 + i\epsilon_3)$, подставим это в (10.91) и спустимся до компонент: вещественных координат x^M и их суперпартнёров Ψ^M . Тогда закон преобразований суперсимметрии имеет тот же вид, что в уравнении (10.75), со следующими

¹⁴Поэтому мультиплет (4, 4, 0) иногда называется *корневым* мультиплетом.

комплексными структурами:

$$J = \text{diag}(\underbrace{\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}}_{d_1/2}, \underbrace{-\mathcal{J}, \dots, -\mathcal{J}}_{d_2/2}), \quad (10.95)$$

$$K = \text{diag}(\mathcal{K}, \dots, \mathcal{K}).$$

В отличие от случая НКТ, тройка комплексных структур (10.94), (10.95) не кватернионна. С другой стороны, матрицы I, J, K по-прежнему удовлетворяют алгебре Клиффорда,

$$I^p I^q + I^q I^p = -2\delta^{pq} \mathbb{1}. \quad (10.96)$$

Вот почему модели этого типа были окрещены в работе [11] «клиффордовыми кэлеровыми моделями с кручением». Однако термин «модели би-НКТ» нам кажется более адекватным. В самом деле, алгебра матриц (10.94), (10.95) не замкнута относительно умножения, и известный математический факт (см. напр. [106]) состоит в том, что её замыкание представляет прямую сумму кватернионных алгебр $\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Подалгебры \mathcal{H}_+ и \mathcal{H}_- соответствуют в нашем случае обыкновенному и зеркальному секторам. Действительно, перемножая матрицы (10.94), (10.95), мы получаем матрицы

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{4n} &= \text{diag}(\mathbb{1}_4, \dots, \mathbb{1}_4), & \Delta &= \text{diag}(\underbrace{\mathbb{1}_4, \dots, \mathbb{1}_4}_{d_1/2}, \underbrace{-\mathbb{1}_4, \dots, -\mathbb{1}_4}_{d_2/2}), \\ I_1 &= \text{diag}(\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}), & I_2 &= \text{diag}(\underbrace{\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}}_{d_1/2}, \underbrace{-\mathcal{J}, \dots, -\mathcal{J}}_{d_2/2}), \\ J_1 &= \text{diag}(\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}), & J_2 &= \text{diag}(\underbrace{\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}}_{d_1/2}, \underbrace{-\mathcal{J}, \dots, -\mathcal{J}}_{d_2/2}), \\ K_1 &= \text{diag}(\mathcal{K}, \dots, \mathcal{K}), & K_2 &= \text{diag}(\underbrace{\mathcal{K}, \dots, \mathcal{K}}_{d_1/2}, \underbrace{-\mathcal{K}, \dots, -\mathcal{K}}_{d_2/2}). \end{aligned} \quad (10.97)$$

Рассмотрим линейные комбинации

$$\mathbb{1}_{4n}^\pm = \frac{\mathbb{1}_{4n} \pm \Delta}{2}, \quad I^\pm = \frac{I_1 \pm I_2}{2}, \quad J^\pm = \frac{J_1 \pm J_2}{2}, \quad K^\pm = \frac{K_1 \pm K_2}{2}. \quad (10.98)$$

Ясно, что матрицы «плюс» и матрицы «минус» образуют кватернионную алгебру и что произведение любой матрицы «плюс» на любую матрицу «минус» равно нулю.

Диагональная подалгебра алгебры $\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ включает стандартные кватернионные матрицы (3.2), которые можно выбрать в качестве комплексных структур не только в случае НКТ, но также в случае би-НКТ¹⁵. Это значит, что все многообразия би-НКТ гиперкомплексны. Однако

- эта кватернионная тройка не ассоциируется с какими-либо преобразованиями суперсимметрии, как в уравнении (10.75);
- внешняя производная $\delta_I \omega_{J+iK}$ в этом случае не обращается в ноль.

Ввиду теоремы 3.5 последнее утверждение означает, что, хотя многообразия би-НКТ гиперкомплексны, они не НКТ. Другие (значительно более сложные) примеры гиперкомплексных многообразий, не являющихся НКТ, были найдены в работе [29].

В работе [72] были даны явные выражения для сохраняющихся суперзарядов в моделях би-НКТ. Они, однако, не очень просты, и мы решили их здесь не приводить.

§ 10.4. Модели $\mathcal{N} = 8$

10.4.1. Гиперкэлэровы модели

Проще всего эти модели описываются на языке $\mathcal{N} = 2$ суперполей. Рассмотрим модель (8.6), включающую $4n$ таких суперполей X^M и потребуем, чтобы действие было инвариантно относительно трёх различных преобразований суперсимметрии,

$$\begin{aligned} \delta_1 X^M &= I_N^M (\epsilon_1 DX^N - \bar{\epsilon}_1 \bar{D}X^N), \\ \delta_2 X^M &= J_N^M (\epsilon_2 DX^N - \bar{\epsilon}_2 \bar{D}X^N), \\ \delta_3 X^M &= K_N^M (\epsilon_3 DX^N - \bar{\epsilon}_3 \bar{D}X^N), \end{aligned} \quad (10.99)$$

¹⁵Желая сохранить точность, напомним, что для гиперкэлэровых многообразий и многообразий НКТ общего вида только касательные проекции комплексных структур $(I, J, K)_{AB}$ имеют вид (3.2), в то время как тензоры $(I, J, K)_M^N$ выглядят сложнее. Однако для обата-плоских многообразий НКТ, которые мы только и изучаем в этой главе, $(I, J, K)_M^N$ также являются простыми постоянными матрицами (3.2). Модели НКТ общего вида с ненулевой кривизной Обаты будут изучаться в главе 12. Мы не знаем, существуют ли модели би-НКТ, которые не являются обата-плоскими.

с тремя различными грассмановыми параметрами $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Мы знаем из теоремы 10.1, что действие инвариантно относительно каждого такого преобразования тогда и только тогда, когда I, J, K являются интегрируемыми комплексными структурами, которые ковариантно постоянны с обыкновенными связностями Леви-Чивиты, т. е. когда многообразие кэлерово относительно каждой структуры. В модели имеется восемь суперзарядов:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_0 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^M D_M, & \hat{Q}_0^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2}}e_C^M \frac{\partial}{\partial\psi_C} D_M, \\ \hat{Q}_I &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^N I_N^M D_M, & \hat{Q}_I^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2}}e_C^N I_N^M \frac{\partial}{\partial\psi_C} D_M, \\ \hat{Q}_J &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^N J_N^M D_M, & \hat{Q}_J^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2}}e_C^N J_N^M \frac{\partial}{\partial\psi_C} D_M, \\ \hat{Q}_K &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^N K_N^M D_M, & \hat{Q}_K^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{2}}e_C^N K_N^M \frac{\partial}{\partial\psi_C} D_M\end{aligned}\quad (10.100)$$

со спинорной ковариантной производной D_M , определённой в (8.28) и (10.13). При переводе на язык дифференциальных форм суперзаряды $\hat{Q}_0, \hat{Q}_{I,J,K}$ принимают вид

$$\begin{aligned}\hat{Q}_0 &\rightarrow -\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_I + \bar{\partial}_I) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_J + \bar{\partial}_J) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_K + \bar{\partial}_K), \\ \hat{Q}_I &\rightarrow \frac{\bar{\partial}_I - \partial_I}{\sqrt{2}}, \quad \hat{Q}_J \rightarrow \frac{\bar{\partial}_J - \partial_J}{\sqrt{2}}, \quad \hat{Q}_K \rightarrow \frac{\bar{\partial}_K - \partial_K}{\sqrt{2}},\end{aligned}\quad (10.101)$$

где $\partial_{I,J,K}$ и $\bar{\partial}_{I,J,K}$ — внешние производные, голоморфные и антиголоморфные относительно соответствующих комплексных структур. Из анализа § 10.1 следует, что

$$\{\hat{Q}_0^\dagger, \hat{Q}_0\} = \{\hat{Q}_I^\dagger, \hat{Q}_I\} = \{\hat{Q}_J^\dagger, \hat{Q}_J\} = \{\hat{Q}_K^\dagger, \hat{Q}_K\} = \hat{H}, \quad (10.102)$$

а антикоммутируют

$$\{\hat{Q}_0, \hat{Q}_{I,J,K}\}, \{\hat{Q}_0^\dagger, \hat{Q}_{I,J,K}^\dagger\}, \{\hat{Q}_0^\dagger, \hat{Q}_{I,J,K}\} \text{ и } \{\hat{Q}_0, \hat{Q}_{I,J,K}^\dagger\} \quad (10.103)$$

обращаются в ноль.

Верна следующая теорема.

Теорема 10.5. Для обращения в ноль антикоммутирующих операторов, отвечающих разным комплексным структурам — $\{\hat{Q}_I, \hat{Q}_J\}, \{\hat{Q}_I, \hat{Q}_J^\dagger\}$ и т. д., что обеспечивает выполнение стандартной алгебры суперсимметрии $\mathcal{N} = 8$, необходимо и доста-

точно, чтобы тройка (I, J, K) ковариантно постоянных комплексных структур была кватернионной, т. е. чтобы многообразие было гиперкэлеровым.

Доказательство. Достаточность. Введём операторы

$$\hat{F}_I = I_M^N \psi^M \frac{\partial}{\partial \psi^N}, \quad \hat{F}_J = J_M^N \psi^M \frac{\partial}{\partial \psi^N}, \quad \hat{F}_K = K_M^N \psi^M \frac{\partial}{\partial \psi^N}. \quad (10.104)$$

При действии на волновую функцию, включающую p голоморфных и q антиголоморфных (относительно I) грассмановых факторов, оператор \hat{F}_I домножает её на $i(q - p)$. \hat{F}_I можно назвать оператором фермионного заряда, соответствующего структуре I . Операторы (10.104) коммутируют так же, как комплексные структуры:

$$[\hat{F}_I, \hat{F}_J] = 2\hat{F}_K, \quad [\hat{F}_J, \hat{F}_K] = 2\hat{F}_I, \quad [\hat{F}_K, \hat{F}_I] = 2\hat{F}_J. \quad (10.105)$$

Лемма 1. *Выполняются следующие тождества:*

$$\begin{aligned} [\hat{F}_{I,J,K}, \hat{Q}_0] &= \hat{Q}_{I,J,K}, \quad [\hat{F}_I, \hat{Q}_I] = [\hat{F}_J, \hat{Q}_J] = [\hat{F}_K, \hat{Q}_K] = -\hat{Q}_0, \\ [\hat{F}_I, \hat{Q}_J] &= -[\hat{F}_J, \hat{Q}_I] = \hat{Q}_K, \quad [\hat{F}_J, \hat{Q}_K] = -[\hat{F}_K, \hat{Q}_J] = \hat{Q}_I, \\ [\hat{F}_K, \hat{Q}_I] &= -[\hat{F}_I, \hat{Q}_K] = \hat{Q}_J \end{aligned} \quad (10.106)$$

и аналогичные тождества для $\hat{Q}_{I,J,K}^\dagger$.

Доказательство. Рассмотрим коммутатор

$$[\hat{F}_I, \hat{Q}_0] = \left[I_M^N \psi^M \frac{\partial}{\partial \psi^N}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^P D_P \right]. \quad (10.107)$$

Он включает член $\propto \partial \psi^P / \partial \psi^N = \delta_N^P$, что даёт \hat{Q}_I . Кроме того, мы видим вклад

$$\begin{aligned} \propto \psi^P I_{AB} \omega_{CD,P} \left[\psi_A \frac{\partial}{\partial \psi^B}, \psi_C \frac{\partial}{\partial \psi^D} \right] &= \\ &= \psi^P (I_{AB} \omega_{BD,P} - \omega_{AB,P} I_{BD}) \psi_A \frac{\partial}{\partial \psi^D}. \end{aligned} \quad (10.108)$$

Но коммутатор $[I, \omega_P]$ обращается в ноль на гиперкэлеровых многообразиях в силу теоремы 3.2 и уравнения 3.19.

Коммутатор

$$[\hat{F}_I, \hat{Q}_J] = \left[I_M^N \psi^M \frac{\partial}{\partial \psi^N}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^P J_P{}^Q D_Q \right] \quad (10.109)$$

преобразуется аналогично. Используя $IJ = K$, легко увидеть, что член $\propto \partial\psi^P / \partial\psi^N$ в коммутаторе даёт \hat{Q}_K , а опасный дополнительный вклад пропорционален $\psi^Q J_Q^P [I, \omega_P]$ и обращается в ноль. Все остальные коммутаторы в (10.106) вычисляются аналогично. \square

Используя эту лемму, легко доказать, что антикоммутаторы суперзарядов, отвечающих разным комплексным структурам, обращаются в ноль. Скажем, зануление $\{\hat{Q}_I, \hat{Q}_J\}$ следует из зануления антикоммутаторов в (10.103) и из тождества Якоби:

$$\begin{aligned} \{\hat{Q}_I, \hat{Q}_J\} &= \{\hat{Q}_I, [\hat{F}_J, \hat{Q}_0]\} = \\ &= [\hat{F}_J, \{\hat{Q}_I, \hat{Q}_0\}] - \{\hat{Q}_0, [\hat{F}_J, \hat{Q}_I]\} = 0 + \{\hat{Q}_0, \hat{Q}_K\} = 0. \end{aligned} \quad (10.110)$$

Необходимость. Рассмотрим скобку Ли $(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)X^M$. Она обращается в ноль, если обращаются в ноль антикоммутаторы $\{\hat{Q}_I, \hat{Q}_J\}$ и т. д. Вычисление даёт [ср. уравнение (9.43)]:

$$\begin{aligned} (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)X^M &= \epsilon_1\bar{\epsilon}_2[-i(IJ + JI)_P{}^M \dot{X}^P + \text{лин. незав. члены}] + \\ &+ \epsilon_2\bar{\epsilon}_1[\dots] + \epsilon_1\epsilon_2[\dots] + \bar{\epsilon}_1\bar{\epsilon}_2[\dots]. \end{aligned} \quad (10.111)$$

Выделим член $\propto \epsilon_1\bar{\epsilon}_2$. Если он обращается в ноль, должен также обратиться в ноль член $\propto \dot{X}^P$ в квадратной скобке. Это значит, что $IJ + JI = 0$.

Но многообразие, обладающее двумя антикоммутирующими ковариантно постоянными комплексными структурами, гиперкэлерово: третья структура, выбранная как $K = IJ$ также ковариантно постоянна, и вся тройка кватернионна (см. замечание на с. 69). \square

Утверждение, что гиперкэлорова геометрия влечёт суперсимметрию $\mathcal{N} = 8$ действия (8.6) и обратно, было впервые сделано в работе [94]. Простое доказательство этого факта, изложенное выше, представляет адаптацию на случай $\mathcal{N} = 8$ аналогичного доказательства того факта, что обата-плоская геометрия НКТ влечёт супералгебру $\mathcal{N} = 4$ для суперзарядов (10.78) и обратно, построенного в работе [92]. Похожее, но более математизированное доказательство, которое использует вместо операторов фермионного заряда (10.104) и коммутаторов (10.106) операторы Лёфшеца Λ, L и тождества Кодайры, было построено в [28].

10.4.2. Бикэлеровы $\mathcal{N} = 8$ модели

Мы доказали, что модель (8.6) с гиперкэлеровой метрикой g_{MN} обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$. Мы также доказали, что многообразие, которое является кэлеровым относительно каждой из трёх комплексных структур I, J, K и где сигма-модель (8.6) обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$, с необходимостью является гиперкэлеровым. Но, вообще говоря, гиперкэлеровость и даже кэлеровость не является необходимым требованием для возникновения суперсимметрии $\mathcal{N} = 8$. Существуют некэлеровы $\mathcal{N} = 8$ модели различных типов. Мы рассмотрим некоторые из них в заключительной части этой главы. Начнём с бикэлеровых $\mathcal{N} = 8$ моделей, построенных впервые в работе [71].

Рассмотрим систему (10.37) с равным числом обычных и зеркальных мультиплетов:

$$S = \frac{1}{4} \int d^2\bar{\theta} d^2\theta \mathcal{L}(Z_\alpha, \bar{Z}_\alpha; U_\alpha, \bar{U}_\alpha). \quad (10.112)$$

Рассмотрим следующие дополнительные преобразования суперсимметрии, перемешивающие суперполя $(Z_\alpha, \bar{Z}_\alpha)$ и $(U_\alpha, \bar{U}_\alpha)$:

$$\begin{aligned} \delta Z_\alpha &= \epsilon \bar{D}_1 \bar{U}_\alpha + \eta \bar{D}_2 U_\alpha &\Rightarrow \delta \bar{Z}_\alpha &= -\epsilon D^1 U_\alpha - \eta D^2 \bar{U}_\alpha, \\ \delta U_\alpha &= -\epsilon \bar{D}_1 \bar{Z}_\alpha + \eta D^2 Z_\alpha &\Rightarrow \delta \bar{U}_\alpha &= \epsilon D^1 Z_\alpha - \eta \bar{D}_2 \bar{Z}_\alpha, \end{aligned} \quad (10.113)$$

где ϵ и η — два различных комплексных грассмановых числа, так что мы имеем дело с четырьмя дополнительными вещественными суперсимметриями. Эти преобразования уважают условие $\bar{D}_j \delta Z_\alpha = 0$ и условие (10.36) для δU_α .

Преобразования (10.113) играют здесь ту же самую роль, что преобразования (9.37) для $\mathcal{N} = 2$ моделей Дольбо, выраженных в терминах суперполей $\mathcal{N} = 1$, или преобразования (10.3) для $\mathcal{N} = 4$ кэлеровых моделей, выраженных в терминах вещественных $\mathcal{N} = 2$ суперполей.

Теорема 10.6. Действие (10.112) инвариантно относительно преобразований (10.113) тогда и только тогда, когда для всех α, β выполняются условия

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_\alpha \partial \bar{Z}_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial U_\beta \partial \bar{U}_\alpha} \right) \mathcal{L} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Z_{[\alpha} \partial \bar{U}_{\beta]}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \bar{Z}_{[\alpha} \partial U_{\beta]}} = 0. \quad (10.114)$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим члены $\propto \epsilon$ в вариации $\delta \mathcal{L}$,

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \epsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{z}_\alpha} \bar{D}_1 \bar{u}_\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} \bar{D}_1 \bar{z}_\alpha \right). \quad (10.115)$$

Чтобы действие осталось тем же, эта вариация должна быть полной суперсимметричной ковариантной производной от некоторой комплексной функции R :

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \epsilon \bar{D}_1 R = \epsilon \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{z}_\alpha} \bar{D}_1 \bar{z}_\alpha + \frac{\partial R}{\partial u_\alpha} \bar{D}_1 u_\alpha \right). \quad (10.116)$$

Сравнив это с (10.115), мы получим систему дифференциальных уравнений для $R(z_\alpha, \bar{z}_\alpha; u_\alpha, \bar{u}_\alpha)$, имеющую смысл обобщённых условий Коши—Римана:

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{u}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{z}_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial \bar{z}_\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha}. \quad (10.117)$$

Продифференцировав первое уравнение по \bar{z}_β и выразив $\partial R / \partial \bar{z}_\beta$ из второго уравнения, мы приходим к первому условию (10.114). Продифференцировав первое уравнение по \bar{u}_β и второе по \bar{z}_β , мы получаем условия из второй строчки (10.114). Уравнения (10.114) являются условиями интегрируемости для системы (10.117).

Те же условия интегрируемости возникают при рассмотрении членов $\propto \bar{\epsilon}$, членов $\propto \eta$ или членов $\propto \bar{\eta}$ в $\delta \mathcal{L}$.

Достаточность. Условия (10.114) означают, что антиголоморфная форма

$$\omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_\alpha} d\bar{u}_\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} d\bar{z}_\alpha \quad (10.118)$$

замкнута. Но топология пространства $(\bar{z}_\alpha, \bar{u}_\alpha)$ тривиальна и, следовательно, согласно теореме 1.2 эта форма также точна. И это даст нам условия (10.117) и (10.116), откуда следует инвариантность действия. \square

Пара (z_α, u_α) представляет большой $\mathcal{N} = 8$ супермультиплет (4, 8, 4). Если система включает только один такой мультиплет, вторая строчка (10.114) выполняется тривиально, а первая строчка означает, что \mathcal{L} — четырёхмерная гармоническая функция.

Простейшая такая нетривиальная функция есть

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\bar{z}z + \bar{u}u}. \quad (10.119)$$

10.4.3. Би-НКТ $\mathcal{N} = 8$ модели

Такие же теоремы можно сформулировать и частично доказать для би-НКТ и бисимплектических моделей. Остановимся на моделях би-НКТ [105, 116]. Рассмотрим такую модель, включающую равное число обычных мультиплетов $z_{\alpha=1,\dots,n}^A$, на которые наложены связи (10.66), и зеркальных мультиплетов $u_{\alpha=1,\dots,n}^A$, на которые наложены связи (10.86). Действие (10.88) приобретает вид

$$S = \frac{1}{8} \int d^2\bar{\theta} d^2\theta dt \mathcal{L}(z_{\alpha}^A, \bar{z}_{\alpha}^A; u_{\alpha}^A, \bar{u}_{\alpha}^A). \quad (10.120)$$

В общем случае оно описывает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричную сигма-модель на некотором $8n$ -мерном многообразии. Но для определённых специальных лагранжианов \mathcal{L} симметрия расширяется до $\mathcal{N} = 8$. В этом случае два суперполя $(z_{\alpha}^A, u_{\alpha}^A)$ составляют один большой $\mathcal{N} = 8$ мультиплет $(\mathbf{8}, \mathbf{8}, \mathbf{0})$. Четыре дополнительные преобразования суперсимметрии можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta z_{\alpha}^A &= i\bar{D}_1(\eta_1 \bar{u}_{\alpha}^A + \eta_2 \varepsilon^{AB} \bar{u}_{\alpha}^B) + i\bar{D}_2(\eta_3 u_{\alpha}^A + \eta_4 \varepsilon^{AB} u_{\alpha}^B), \\ \delta \bar{z}_{\alpha}^A &= iD^1(\eta_1 u_{\alpha}^A + \eta_2 \varepsilon^{AB} u_{\alpha}^B) + iD^2(\eta_3 \bar{u}_{\alpha}^A + \eta_4 \varepsilon^{AB} \bar{u}_{\alpha}^B), \\ \delta u_{\alpha}^A &= -i\bar{D}_1(\eta_1 \bar{z}_{\alpha}^A + \eta_2 \varepsilon^{AB} \bar{z}_{\alpha}^B) - iD^2(\eta_3 z_{\alpha}^A + \eta_4 \varepsilon^{AB} z_{\alpha}^B), \\ \delta \bar{u}_{\alpha}^A &= -iD^1(\eta_1 z_{\alpha}^A + \eta_2 \varepsilon^{AB} z_{\alpha}^B) - i\bar{D}^2(\eta_3 \bar{z}_{\alpha}^A + \eta_4 \varepsilon^{AB} \bar{z}_{\alpha}^B) \end{aligned} \quad (10.121)$$

с вещественными грассмановыми $\eta_{1,2,3,4}$. Прямым вычислением можно убедиться, что вариации суперполей (10.121) согласованы со связями, которые мы наложили на z_{α}^A и u_{α}^A .

Верна следующая теорема.

Теорема 10.7. Для того чтобы действие (10.120) было инвариантно относительно преобразований (10.121), необходимо выполнение условий

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{\alpha}^A \partial \bar{z}_{\beta}^A} + \frac{\partial^2}{\partial u_{\beta}^A \partial \bar{u}_{\alpha}^A} \right) \mathcal{L} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z_{[\alpha}^A \partial \bar{u}_{\beta]}^A} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \bar{z}_{[\alpha}^A \partial u_{\beta]}^A} = 0 \quad (10.122)$$

для всех α, β .

Доказательство. Рассмотрим члены $\propto \eta_1$ в вариации лагранжиана:

$$\delta_1 \mathcal{L} = i\eta_1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}_\alpha^A} \bar{D}_1 \bar{z}_\alpha^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}_\alpha^A} D^1 z_\alpha^A - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{z}_\alpha^A} \bar{D}_1 \bar{u}_\alpha^A - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{z}_\alpha^A} D^1 u_\alpha^A \right). \quad (10.123)$$

Чтобы действие не изменилось, эта вариация должна быть полной производной:

$$\begin{aligned} \delta_1 \mathcal{L} &= i\eta_1 (\bar{D}_1 R + D^1 Q) = \\ &= i\eta_1 \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{z}_\alpha^A} \bar{D}_1 \bar{z}_\alpha^A + \frac{\partial R}{\partial \bar{u}_\alpha^A} \bar{D}_1 \bar{u}_\alpha^A + \frac{\partial Q}{\partial z_\alpha^A} D^1 z_\alpha^A + \frac{\partial Q}{\partial u_\alpha^A} D^1 u_\alpha^A \right) \end{aligned} \quad (10.124)$$

с некоторыми R, Q . Сравнивая (10.123) и (10.124), мы, в частности, выводим, что функция R должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{u}_\alpha^A} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{z}_\alpha^A}, \quad \frac{\partial R}{\partial \bar{z}_\alpha^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha^A}. \quad (10.125)$$

Дальнейшие рассуждения те же, что в бикэлеровом случае. Продифференцировав первое уравнение по \bar{z}_β^A и выразив $\partial R / \partial \bar{z}_\beta^A$ из второго уравнения, мы приходим к первому условию (10.122). Продифференцировав первое уравнение по \bar{u}_β^A и второе по \bar{z}_β^A , мы получаем условия из второй строчки (10.122). Аналогичная система уравнений для Q и системы уравнений, получающиеся при рассмотрении членов в вариации $\delta \mathcal{L}$, пропорциональных η_2, η_3 и η_4 , приводят к тем же условиям. \square

Можно предположить (и мы это делаем!), что условия (10.123) являются также *достаточными* условиями интегрируемости системы (10.125) и, следовательно, достаточными условиями для того, чтобы действие (10.120) было инвариантно относительно (10.121). Доказательство этого факта встречает, однако, определённые трудности.

Если в задаче имеется только одна пара мультиплетов (z^A, u^A) , второе условие (10.122) тривиализуется, а первое сводится к требованию 8-мерной гармоничности, $\Delta^{D=8} \mathcal{L} = 0$. И в этом случае анализ компонентного лагранжиана позволяет построить прямое доказательство достаточности этого требования для полной $\mathcal{N} = 8$ инвариантности действия [116]. Простейший нетривиаль-

ный $\mathcal{N} = 8$ суперсимметричный лагранжиан есть

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(\bar{\mathcal{Z}}^A \mathcal{Z}^A + \bar{\mathcal{U}}^{A\mathcal{U}A})^3}. \quad (10.126)$$

10.4.4. Симплектическая модель второго рода

Весь зверинец моделей $\mathcal{N} = 8$ систематически изучался в работе [107]. И не все его обитатели гиперкэлеровы или принадлежат к семейству «би». В качестве последнего примера рассмотрим модель, включающую два различных суперполя $\mathcal{N} = 4$: (3, 4, 1) суперполе (7.60) и киральное (2, 4, 2) суперполе (7.46). Напишем действие

$$S = \int d^2\bar{\theta} d^2\theta dt \mathcal{L}(\Phi_M, \bar{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z}) \quad (10.127)$$

с вещественным препотенциалом \mathcal{L} .

Потребуем инвариантности этого действия относительно следующих дополнительных суперсимметричных $\mathcal{N} = 4$ преобразований:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{Z} &= \frac{2i}{3} \bar{\epsilon}^j (\sigma_M)_j{}^k \bar{D}_k \Phi_M, & \delta\bar{\mathcal{Z}} &= \frac{2i}{3} (\sigma_M)_j{}^k \epsilon_k D^j \Phi_M, \\ \delta\Phi_M &= -i\bar{\epsilon}^j (\sigma_M)_j{}^k \bar{D}_k \bar{\mathcal{Z}} - i(\sigma_M)_j{}^k \epsilon_k D^j \mathcal{Z}. \end{aligned} \quad (10.128)$$

Можно показать, что с точностью до коэффициентов это единственные преобразования, которые смешивают Φ_M с $(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}})$ и уважают связи $\bar{D}_j \mathcal{Z} = D^j \bar{\mathcal{Z}} = 0$, $\bar{\Phi}_M = \Phi_M$ и (7.61).

Если инвариантность относительно (10.128) имеет место, два различных супермультиплетта $\mathcal{N} = 4$ объединяются в большой мультиплет $\mathcal{N} = 8$ типа (5, 8, 3).

Теорема 10.8 [108, 99]. Действие (10.127) инвариантно относительно (10.128) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \Phi_M \partial \Phi_M} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \bar{\mathcal{Z}} \partial \mathcal{Z}} = 0. \quad (10.129)$$

Доказательство. Вариация лагранжиана относительно преобразований (10.128) имеет вид

$$\delta\mathcal{L} = i\epsilon_k (\sigma_M)_j{}^k \left[\frac{2}{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\mathcal{Z}}} D^j \Phi_M - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_M} D^j \mathcal{Z} \right] + \text{компл. сопр.} \quad (10.130)$$

Мы действуем так же, как в предыдущих примерах. Вариация

действия исчезает, если вариация лагранжиана (10.130) есть полная производная,

$$(\sigma_M)_j{}^k \left[\frac{2}{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\mathcal{Z}}} D^j \Phi_M - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_M} D^j \mathcal{Z} \right] = D^k R + (\sigma_M)_j{}^k D^j L_M, \quad (10.131)$$

где R и L_M — некоторые комплексные функции Φ_M , \mathcal{Z} и $\bar{\mathcal{Z}}$. Принимая во внимание, что $\bar{D}_j \mathcal{Z} = D^j \bar{\mathcal{Z}} = 0$ и что $D^j \Phi_M = (\sigma_M)_p{}^j \bar{\mathcal{W}}^p$ с некоторым $\bar{\mathcal{W}}^p$ [см. уравнение (7.62)], мы можем написать

$$\begin{aligned} D^k R &= \frac{\partial R}{\partial \bar{\mathcal{Z}}} D^k \bar{\mathcal{Z}} + \frac{\partial R}{\partial \Phi_M} (\sigma_M)_p{}^k \bar{\mathcal{W}}^p, \\ D^j L_M &= \frac{\partial L_M}{\partial \mathcal{Z}} D^j \mathcal{Z} + \frac{\partial L_M}{\partial \Phi_N} (\sigma^N)_p{}^j \bar{\mathcal{W}}^p. \end{aligned} \quad (10.132)$$

Тогда, сравнив коэффициенты в левой и правой части (10.131), мы получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\mathcal{Z}}} - \frac{\partial L_M}{\partial \Phi_M} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_M} + \frac{\partial L_M}{\partial \mathcal{Z}} &= 0, \\ i \varepsilon_{MNP} \frac{\partial L_M}{\partial \Phi_N} + \frac{\partial R}{\partial \Phi_P} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \mathcal{Z}} &= 0. \end{aligned} \quad (10.133)$$

Продифференцировав первое уравнение по \mathcal{Z} , второе — по Φ_M и сложив получившееся, мы приходим к (10.129) как к условию интегрируемости системы (10.133). Это демонстрирует необходимость (10.129). Третье и четвёртое уравнения в (10.133) налагают некоторые условия на функции R и L_M , которые для нас особого интереса не представляют.

Заметим, что условие (10.129) есть не что иное, как условие 5-мерной гармоничности,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \check{\Phi}_M \partial \check{\Phi}_M} = 0, \quad (10.134)$$

где

$$\check{\Phi}_M = (\Phi_M, \sqrt{2} \operatorname{Re}(\mathcal{Z}), \sqrt{2} \operatorname{Im}(\mathcal{Z})). \quad (10.135)$$

Общее вещественное решение (10.134) — это линейная функция $\check{\Phi}_M$ плюс сумма сингулярных «кулоновских» функций типа

$$\frac{1}{(\check{\Phi}_M \check{\Phi}_M)^{3/2}} \quad (10.136)$$

и их производных. Для любого такого \mathcal{L} нетрудно написать выражение для гармонической функции Q , удовлетворяющей дополнительному требованию $-\partial Q/\partial \mathcal{Z} = \mathcal{L}$. Тогда одно из возможных решений системы (10.133), гарантирующее инвариантность действия относительно (10.128), имеет вид

$$R = 0, \quad L_M = \frac{\partial Q}{\partial \Phi_M}. \quad (10.137)$$

Это доказывает достаточность (10.129). \square

Система (10.127) с гармоническим \mathcal{L} имеет 4 комплексных суперзаряда. В полной аналогии с обычной симплектической системой (3, 4, 1), где суперзаряды лежали в фундаментальном представлении $Spin(3) \equiv Sp(1)$, в модели (10.127) суперзаряды лежат в фундаментальном представлении $Spin(5) \equiv Sp(2)$. Это оправдывает предложенный термин: симплектическая модель второго рода.

Мы описали эту модель в терминах суперполей $\mathcal{N} = 4$. Но можно также описать весь большой мультиплет (5, 8, 3) как одно суперполе $\mathcal{N} = 8$, живущее в гармоническом суперпространстве [99].

Как и в случае всех остальных моделей, рассмотренных в данном параграфе, существуют многомерные версии симплектических моделей второго рода. Возьмём произвольное число n мультиплетов (5, 8, 3) и напомним действие

$$S = \int d^2\bar{\theta} d^2\theta dt \mathcal{L}(\tilde{\Phi}_M^\alpha), \quad (10.138)$$

где $\alpha = 1, \dots, n$. Действуя так же, как раньше, можно доказать следующую теорему [108, 99].

Теорема 10.9. Действие (10.138) инвариантно относительно преобразований (10.128) для каждого супермультиплета (10.135) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \tilde{\Phi}_M^\alpha \partial \tilde{\Phi}_M^\beta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \tilde{\Phi}_M^{[\alpha} \partial \tilde{\Phi}_N^{\beta]}} = 0 \quad (10.139)$$

для всех α, β, M, N .

Глава 11

Укращение модельного зверинца

Читатель, только что окончивший читать предыдущую главу, может испытать чувство некоторой растерянности. Он ознакомился с ворохом различных моделей, и ему может показаться не полностью ясно, как эти модели связаны между собой, какова структура этого вороха. В данной главе мы попытаемся ответить на этот вопрос.

§ 11.1. Преобразования подобия

Возьмём суперсимметричную $\mathcal{N} = 2$ квантовомеханическую модель с алгеброй (5.1). Рассмотрим оператор

$$\hat{Q}' = e^{\hat{R}} \hat{Q} e^{-\hat{R}} \quad (11.1)$$

с произвольным \hat{R} . Из нильпотентности суперзаряда \hat{Q} следует нильпотентность нового суперзаряда \hat{Q}' . Эрмитово сопряжённый суперзаряд $\hat{Q}' \equiv \hat{Q}'^\dagger$ есть

$$\hat{Q}' = e^{-\hat{R}} \hat{Q} e^{\hat{R}}. \quad (11.2)$$

Рассмотрим новый гамильтониан

$$\hat{H}' = \{\hat{Q}', \hat{Q}'\}. \quad (11.3)$$

Если \hat{R} антиэрмитово, \hat{Q} и \hat{Q}' вращаются той же унитарной матрицей и то же относится к гамильтониану. Это просто унитарное преобразование, сводящееся к переопределению базиса. Но если $\hat{R} \neq -\hat{R}$, преобразования суперзарядов (11.1) и (11.2) дают другой гамильтониан (11.3) с другим спектром.

Теорема 11.1 [96]. Суперзаряд \hat{Q} в уравнении (8.27), отвечающий суперсимметричной сигма-модели де Рама общего вида, может быть получен из плоского суперзаряда,

$$\hat{Q}^{\text{плоск}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_A \hat{P}_A, \quad (11.4)$$

$\hat{P}_A = -i\partial/\partial x^A$, преобразованием подобия (11.1).

Доказательство. Ищем \hat{R} в виде

$$\hat{R} = \alpha_{AB} \psi_A \hat{\psi}_B, \quad (11.5)$$

$\hat{\psi}_B = \partial / \partial \psi_B$, с вещественным симметричным α_{AB} (антисимметричное α_{AB} привело бы к неинтересному унитарному преобразованию). Найдём $\hat{Q} = e^{\hat{R}} \hat{Q}_{\text{плоск}} e^{-\hat{R}}$. Мы используем формулу Адамара:

$$e^{\hat{R}} \hat{X} e^{-\hat{R}} = \hat{X} + [\hat{R}, \hat{X}] + \frac{1}{2} [\hat{R}, [\hat{R}, \hat{X}]] + \dots \quad (11.6)$$

В нашем случае это даёт

$$\begin{aligned} e^{\hat{R}} \psi_A e^{-\hat{R}} &= \psi_B (e^\alpha)_{BA}, \\ e^{\hat{R}} \partial_A e^{-\hat{R}} &= \partial_A + (e^\alpha \partial_A e^{-\alpha})_{CD} \psi_C \hat{\psi}_D \end{aligned} \quad (11.7)$$

и

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_B (e^\alpha)_{BA} [\hat{P}_A - i (e^\alpha \partial_A e^{-\alpha})_{CD} \psi_C \hat{\psi}_D]. \quad (11.8)$$

Введём фильбайны согласно

$$e_A^M = (e^\alpha)_{AM}, \quad e_{MA} = (e^{-\alpha})_{MA}, \quad (11.9)$$

что даёт метрику

$$g_{MN} = (e^{-2\alpha})_{MN}, \quad g^{MN} = (e^{2\alpha})_{MN}. \quad (11.10)$$

Можно показать прямым вычислением, что результат (11.8) можно представить в виде

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^M (\hat{P}_M - i \omega_{CD,M} \psi_C \hat{\psi}_D), \quad (11.11)$$

где $\omega_{CD,M}$ — стандартная спиновая связность Леви-Чивиты,

$$\omega_{CD,M} = e_{CN} (\partial_M e_D^N + \Gamma_{MP}^N e_D^P). \quad (11.12)$$

Выражение (11.11) для суперзаряда совпадает с (8.27). \square

Иными словами, сигма-модель, описывающая комплекс де Рама, «генетически» связана со свободной моделью, живущей на \mathbb{R}^D и содержащей D вещественных суперполей $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$. Добавив к \hat{R} простую функцию $-W(x)$, мы можем получить деформированный суперзаряд \hat{Q}_W из уравнения (8.43). Дополнительное преобразование подобия

$$\hat{Q} \rightarrow e^{\mathcal{B}_{MN} \psi^M \psi^N} \hat{Q} e^{-\mathcal{B}_{MN} \psi^M \psi^N} \quad (11.13)$$

даёт модели с квазикручениями, обсуждавшиеся в конце главы 8.

Другое семейство квантовомеханических сигма-моделей включает киральные мультиплеты $(2, 2, 0)$. Эти модели, обсуждавшиеся в главе 9, можно также получить преобразованием подобия из плоских моделей. Рассмотрим плоскую модель, живущую на \mathbb{C}^d с суперзарядами¹

$$\hat{Q}^{\text{плоск}} = \psi^a \hat{p}_a, \quad \hat{Q}^{\text{плоск}} = \hat{\psi}^{\bar{a}} \hat{p}_{\bar{a}} \quad (11.14)$$

($\hat{p}_a = -i\partial/\partial z^a$, $\hat{p}_{\bar{a}} = -i\partial/\partial \bar{z}^{\bar{a}}$, $\hat{\psi}^{\bar{a}} = \partial/\partial \psi^a$). Сделаем преобразование подобия с

$$\hat{R} = \beta_{a\bar{b}} \psi^a \hat{\psi}^{\bar{b}}, \quad (11.15)$$

такое что матрица $\beta_{a\bar{b}}$ эрмитова (антиэрмитово $\beta_{a\bar{b}}$ сводится к унитарному преобразованию).

Теорема 11.2. Преобразование подобия (11.1) суперзаряда $\hat{Q}^{\text{плоск}}$ из уравнения (11.14) с \hat{R} , записанным в (11.15), даёт суперзаряд (9.19) комплекса Дольбо с комплексными фильбайнами

$$e_a^m = (e^\beta)_{a\bar{m}} \equiv (e^\beta)_a{}^m \quad \text{и} \quad e_m^a = (e^{-\beta})_m{}^a. \quad (11.16)$$

Доказательство. Рассуждения те же, что в доказательстве предыдущей теоремы. Используя формулу Адамара, мы получаем преобразованный суперзаряд:

$$\hat{Q} = \psi^b (e^\beta)_b{}^a [\hat{p}_a - i(e^\beta \partial_a e^{-\beta})_c{}^d \psi^c \hat{\psi}^{\bar{d}}]. \quad (11.17)$$

Прямым вычислением можно проверить, что суперзаряд (11.17) можно представить в виде

$$\hat{Q} = \psi^m (\hat{p}_m - i\omega_{a\bar{b},m} \psi^a \hat{\psi}^{\bar{b}}), \quad (11.18)$$

где

$$\omega_{a\bar{b},m} = -\omega_{\bar{b}a,m} = -e^b (\partial_m e_a^p + \Gamma_{mk}^p e_a^k) \quad (11.19)$$

— релевантные компоненты спиновой связности Леви-Чивиты [первая строчка в определении (2.23)]. Результат (11.18) совпадает с суммой вкладов (9.11) и (9.13) с $W = (1/4) \ln \det h$. \square

¹Мы пишем теперь индексы на двух уровнях — см. примечание на с. 45.

Можно провести также дополнительное преобразование (дополнительную деформацию) (9.14). Это добавит в систему дополнительное калибровочное поле [или сократит поле, отвечающее $W = (1/4) \ln \det h$, которое включено в (11.18)]. Как отмечалось в главе 9 и будет более подробно обсуждаться в главе 13, функция $W(z, \bar{z})$ здесь не произвольна, поскольку топологический заряд соответствующего калибровочного поля должен быть целым.

Наконец, деформация

$$\hat{Q} \rightarrow e^{\mathcal{E}_{mn} \psi^m \psi^n} \hat{Q} e^{-\mathcal{E}_{mn} \psi^m \psi^n} \quad (11.20)$$

приводит к сдвигу (9.30), генерирующему комплекс Дольбо с голоморфными кручениями.

Преобразование подобия, применённое к плоской суперсимметричной $\mathcal{N} = 2$ модели, даёт $\mathcal{N} = 2$ модель. Но плоские модели часто обладают расширенной суперсимметрией. Например, в любой модели с суперзарядом (11.4), включающей чётное число переменных (x_A, ψ_A) , имеется также другой коммутирующий с гамильтонианом комплексный суперзаряд

$$\hat{S}_{\text{плоск}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_A I_{AB} \hat{P}_B, \quad (11.21)$$

где I_{AB} — комплексная структура: $I = -I^T$, $I^2 = -1$. Фактически можно написать много таких суперзарядов с различными комплексными структурами, но мы не можем взять их все: они не будут тогда взаимно антикоммутировать. Однако один дополнительный суперзаряд (11.21), который антикоммутирует с $\hat{Q}_{\text{плоск}}$ и $\hat{Q}_{\text{плоск}}$ и даёт тот же гамильтониан $\{\hat{Q}_{\text{плоск}}, \hat{Q}_{\text{плоск}}\}$, можно на \mathbb{R}^{2d} выбрать всегда. Это даёт суперсимметрию $\mathcal{N} = 4$. Подходящими вращениями можно всегда привести I к каноническому виду $I = \text{diag}(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon)$ [см. уравнение (2.49)].

Проделаем теперь преобразование подобия над суперзарядами $\hat{Q}_{\text{плоск}}$ и $\hat{S}_{\text{плоск}}$ с тем же эрмитовым оператором \hat{R} в (11.5). По построению преобразованные комплексные суперзаряды

$$\hat{Q} = e^{\hat{R}} \hat{Q}_{\text{плоск}} e^{-\hat{R}}, \quad \hat{S} = e^{\hat{R}} \hat{S}_{\text{плоск}} e^{-\hat{R}} \quad (11.22)$$

[они совпадают с выражениями для \hat{Q}_0 и \hat{Q}_1 в (10.12)] нильпотентны и антикоммутируют. Однако антикоммутаторы $\{\hat{Q}, \hat{Q}\}$

и $\{\hat{S}, \hat{S}\}$ не обязательно совпадают и антикоммутаторы $\{\hat{Q}, \hat{S}\}$ и $\{\hat{S}, \hat{Q}\}$ — не обязательно нули.

Но существуют некоторые специальные деформации, для которых эти свойства выполняются и суперзаряды (10.12) удовлетворяют супералгебре $\mathcal{N} = 4$. В этом случае комплексные структуры I_M^N оказываются ковариантно постоянны по отношению к связностям Леви-Чивиты, и мы приходим к кэлеровой геометрии.

Если размерность \mathbb{R}^D кратна четырём, можно написать три разных дополнительных комплексных суперзаряда:

$$\begin{aligned}\hat{S}_I^{\text{плоск}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_A I_{AB} \hat{P}_B, & \hat{S}_J^{\text{плоск}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_A J_{AB} \hat{P}_B, \\ \hat{S}_K^{\text{плоск}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_A K_{AB} \hat{P}_B,\end{aligned}\quad (11.23)$$

где три кватернионные комплексные структуры I, J, K можно привести к каноническому виду (3.2). Суперзаряды (11.4), (11.23) и их сопряжённые удовлетворяют алгебре $\mathcal{N} = 8$. Произвольное преобразование подобия с оператором (11.5) сохраняет суперсимметрию $\mathcal{N} = 2$, но не $\mathcal{N} = 8$. Однако, если метрика (11.10), полученная таким образом, оказывается гиперкэлеровой и все три комплексные структуры оказываются ковариантно постоянны, все антикоммутаторы $\{\hat{Q}, \hat{S}_{I,J,K}\}$, $\{\hat{Q}, \hat{S}_{I,J,K}\}$ и $\{\hat{S}_I, \hat{S}_{J \neq I}\}$ обращаются в ноль, все антикоммутаторы $\{\hat{Q}, \hat{Q}\}$, $\{\hat{S}_I, \hat{S}_I\}$ совпадают и деформированная модель обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$.

В качестве последнего в этом параграфе примера рассмотрим модель СКМ на $\mathbb{C}^{d=2k}$, включающую k супермультиплетов $(4, 4, 0)$. Эта модель содержит две пары комплексных суперзарядов, удовлетворяющих алгебре $\mathcal{N} = 4$:

$$\begin{aligned}\hat{Q}^{\text{плоск}} &= \psi^a \hat{p}_a, & \hat{Q}^{\text{плоск}} &= \hat{\psi}^{\bar{a}} \hat{p}_{\bar{a}}, \\ \hat{S}^{\text{плоск}} &= \psi^a (\mathcal{I}^+)_a{}^{\bar{b}} \hat{p}_{\bar{b}}, & \hat{S}^{\text{плоск}} &= \hat{\psi}^{\bar{a}} (\mathcal{I}^-)_{\bar{a}}{}^b \hat{p}_b,\end{aligned}\quad (11.24)$$

где $(\mathcal{I}^+)_a{}^{\bar{b}} = (J + iK)_a{}^{\bar{b}}/2$ и $(\mathcal{I}^-)_{\bar{a}}{}^b = (J - iK)_{\bar{a}}{}^b/2$ — плоские гиперкомплексные структуры, каждая из которых может быть выбрана в виде $\text{diag}(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon)$.

Прделаем теперь преобразование подобия (11.1) одновременно над $\hat{Q}^{\text{плоск}}$ и над $\hat{S}^{\text{плоск}}$ с матрицей $\hat{R} = \beta_{a\bar{b}} \psi^a \hat{\psi}^{\bar{b}}$. Для эрмитовой

матрицы β общего вида суперсимметрия $\mathcal{N} = 4$ плоской модели теряется. Но для некоторого специального β , такого что получающаяся метрика $h_{m\bar{n}} = (e^{-2\beta})_{m\bar{n}}$ оказывается гиперкэлеровой или метрикой НКТ, расширенная суперсимметрия сохраняется. В простейшем 4-мерном случае легко получить таким образом конформно-плоскую НКТ метрику (3.72).

§ 11.2. Гамильтонова редукция

Процедура гамильтоновой редукции, разработанная Дираком 90 лет назад, хорошо известна физикам. Она, в частности, необходима для аккуратной формулировки квантовых калибровочных теорий. Думая о нашем читателе-математике, мы решили обрисовать здесь её общие черты на простейшем примере, прежде чем перейти к обсуждению её геометрических аспектов, представляющих для нас в этой книге основной интерес.

11.2.1. Игрушечная модель

Рассмотрим квантовый гамильтониан

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (11.25)$$

описывающий двумерный осциллятор. В системе имеется интеграл движения $\hat{P}_\phi = x\hat{P}_y - y\hat{P}_x$: $[\hat{P}_\phi, \hat{H}] = 0$. Это не что иное, как угловой момент [ср. уравнение (4.24)]. Спектр гамильтониана (11.25) имеет вид

$$E_{n_r, m} = \omega(1 + 2n_r + |m|), \quad (11.26)$$

где целое m есть собственное значение \hat{P}_ϕ , а целое неотрицательное n_r — радиальное квантовое число. Предположим теперь, что нас интересует не полный спектр (11.26), но только его часть, включающая состояния Ψ с нулевым угловым моментом, $\hat{P}_\phi \Psi = 0$. Спектр гамильтониана на этом подпространстве полного гильбертова пространства,

$$E = \omega(1 + 2n_r), \quad (11.27)$$

совпадает с точностью до незначительного сдвига со спектром одномерного осциллятора, описывающим радиальное движение

по лучу $0 \leq r < \infty$. Соответствующие собственные функции не зависят от угловой переменной ϕ . Таким образом, мы спустились от системы с двумя динамическими переменными к системе с одной динамической переменной.

Слово «динамический» здесь существенно. На самом деле угловая переменная ϕ не исчезла полностью. Она стала *калибровочной степенью свободы*. Чтобы понять последнее утверждение и термин, рассмотрим классический гамильтониан, описывающий редуцированную систему. Он имеет вид

$$H = H_0 + \lambda P_\phi. \quad (11.28)$$

Уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = P_\phi = 0 \quad (11.29)$$

есть наша связь. Другие гамильтоновы уравнения движения (4.3) суть

$$\begin{aligned} \dot{P}_i + \omega^2 x_i + \lambda \varepsilon_{ij} P_j &= 0, \\ \dot{x}_i - P_i + \lambda \varepsilon_{ij} x_j &= 0. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Проделав стандартное преобразование Лежандра (4.8), мы выводим канонический лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_i + \lambda \varepsilon_{ij} x_j)^2 - \frac{\omega^2}{2} x_i^2. \quad (11.31)$$

Уравнения движения, следующие из (11.31), эквивалентны (11.30).

Теорема 11.3. *Лагранжиан (11.31) инвариантен относительно калибровочных преобразований*

$$x_i \rightarrow O_{ij} x_j, \quad \lambda \rightarrow \lambda + \dot{\chi}, \quad (11.32)$$

где

$$O = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix}. \quad (11.33)$$

Доказательство. Простейший способ это увидеть — рассмотреть инфинитезимальное преобразование

$$\delta x_i = -\chi \varepsilon_{ij} x_j, \quad \delta \lambda = \dot{\chi} \quad (11.34)$$

и показать, что вариация δL обращается в ноль. \square

Переменная $\lambda(t)$ может быть интерпретирована как зависящая от времени угловая скорость, с которой вращается система координат.

Отметим отличие от «жёстких» симметрий наподобие (4.19) или (5.49), где параметрами преобразований служили обыкновенные или грассмановы константы. Исходная система (11.25) также обладала жёсткой вращательной симметрией. Но параметр $\chi(t)$ преобразования (11.32), действующего на лагранжиан (11.31), зависит от времени². Теорема Нётер в данном случае неприменима. Фактически калибровочная симметрия — это не симметрия, а скорее отражение того факта, что система содержит в выбранном способе описания «лишние» нефизические переменные (в нашем случае — λ и ϕ). В описанной игрушечной модели мы можем очень просто *избавиться* от λ и ϕ (на гамильтоновом языке в системе со связью $\hat{P}_\phi = 0$ легко можно *зафиксировать калибровку*: положить $\phi = 0$) и описывать оставшееся незафиксированным радиальное движение системы гамильтонианом

$$H^{\text{рад}} = \frac{p_r^2}{2} + \frac{\omega^2 r^2}{2}. \quad (11.35)$$

Но во многих случаях (особенно в полевых теориях) избавиться подобным образом от нефизических калибровочных степеней свободы оказывается затруднительно и приходится работать с лагранжианами типа (11.31), где калибровочные степени свободы присутствуют.

В дальнейшем нам это не понадобится, но раз мы начали это обсуждать, я не могу удержаться и не дать здесь пример такой нетривиальной системы. Рассмотрим следующий квантовый гамильтониан, включающий 9 динамических переменных $A_{j=1,2,3}^{a=1,2,3}$ и соответствующие импульсы $\hat{E}_j^a = -i\partial/\partial A_j^a$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [(\hat{E}_j^a)^2 + (B_j^a)^2], \quad B_j^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{jkl} A_k^b A_l^c. \quad (11.36)$$

Этот гамильтониан взят не с потолка. Он описывает теорию Янга—Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ в квантовой механике.

²Слово «калибровочный» значит именно это — ситуацию, когда действие инвариантно относительно преобразований, чьи параметры зависят от времени. В полевых теориях — также от пространственных координат.

ческом пределе (когда векторные потенциалы A_j^a зависят только от времени, но не от пространственных координат). Наложим связи

$$\hat{G}^a \Psi = \varepsilon^{abc} A_j^b \hat{E}_j^c \Psi = 0. \quad (11.37)$$

Это возможно, поскольку:

- операторы \hat{G}^a коммутируют с гамильтонианом;
- алгебра связей замкнута:

$$[\hat{G}^a, \hat{G}^b] = i\varepsilon^{abc} \hat{G}^c, \quad (11.38)$$

так что требование $\hat{G}^a \Psi = 0$ самосогласовано.

Связи (11.37) убивают 3 из 9 динамических переменных. Для квантовомеханической системы (11.36) можно в принципе разрешить связи, т. е. избавиться от трёх калибровочных степеней свободы и написать гамильтониан, который зависит только от калибровочно-инвариантных переменных [110] (для исходной полевой теории Янга—Миллса это технически невозможно), но этот гамильтониан сложен и неудобен в обращении. Намного удобнее ввести три множителя Лагранжа $\lambda^a \equiv A_0^a$ и написать аналог (11.31) — лагранжиан, зависящий от $A_\mu^a = (A_0^a, A_j^a)$. Он выглядит весьма симпатично:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (11.39)$$

где ненулевые компоненты $F_{\mu\nu}^a$ суть

$$F_{jk}^a = -F_{kj}^a = \varepsilon^{abc} A_j^b A_k^c, \quad F_{0j}^a = -F_{j0}^a = \dot{A}_j^a + \varepsilon^{abc} A_0^b A_j^c \quad (11.40)$$

и индексы поднимаются и опускаются с метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ (родимое пятно полевого происхождения этой модели).

Этот лагранжиан инвариантен относительно определённых калибровочных преобразований. Инфинитезимально — относительно вариаций

$$\delta A_0^a = \dot{\chi}^a + \varepsilon^{abc} A_0^b \chi^c, \quad \delta A_j^a = \varepsilon^{abc} A_j^b \chi^c. \quad (11.41)$$

11.2.2. $(2, 2, 0) \rightarrow (1, 2, 1)$

Мы покажем, что два типа суперсимметричных сигма-моделей, обсуждавшихся выше — модели, включающие киральные супермультиплеты $(2, 2, 0)$ и модели с вещественными мультиплетами $(1, 2, 1)$ — близкие родственники: последние получают из первых в результате гамильтоновой редукции. Основная идея проста. Возьмём действие (9.1) с $W = 0$ и предположим, что метрика $h_{m\bar{n}}$ не зависит от мнимых частей комплексных координат z^m . Если ничто не зависит от $\text{Im}(z^m)$, мы можем от этих мнимых частей избавиться и получить модели, живущие на вещественных многообразиях с координатами $\text{Re}(z^m)$.

Что это за модели? Один из способов ответить на этот вопрос — спуститься на уровень компонент, к гамильтониану (9.8) (или скорее к его квантовой версии), заметить, что при предположении, что $h_{m\bar{n}}$ не зависит от $\text{Im}(z^m)$, гамильтониан коммутирует с $\text{Im}(\hat{p}_m)$, и наложить связь $\text{Im}(\hat{p}_m)\Psi = 0$. Фиксируя калибровку $\text{Im}(z^m) = 0$, мы приходим таким образом к гамильтониану, включающему только $\text{Re}(z^m)$ и соответствующие канонические импульсы. Заметив далее, что $\text{Im}(\hat{p}_m)$ коммутирует не только с гамильтонианом, но также с суперзарядами, мы выводим, что редуцированная модель обладает той же суперсимметрией $\mathcal{N} = 2$, что и исходная.

Однако эта процедура не позволяет определить суперпространственную и суперполевою структуру редуцированной модели. Чтобы это сделать, надо осуществить гамильтонову редукцию, используя лагранжев суперполевого формализм. Соответствующая техника была развита в работах [111].

Рассмотрим суперсимметричные преобразования (7.30) компонент кирального суперполя. Выделяя вещественную и мнимую части в $z = (x + iy)/\sqrt{2}$, мы получим

$$\begin{aligned} \delta x &= \epsilon\psi - \bar{\epsilon}\bar{\psi}, & \delta y &= -i(\epsilon\psi + \bar{\epsilon}\bar{\psi}), \\ \delta\psi &= \bar{\epsilon}(\dot{y} - i\dot{x}), & \delta\bar{\psi} &= \epsilon(\dot{y} + i\dot{x}). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Можно теперь заметить, что преобразования (11.42) совпадают с преобразованиями (7.26) для вещественного суперполя, если отождествить $\dot{y} \equiv F$.

Рассмотрим теперь лагранжиан

$$L = \frac{1}{4} \int d\bar{\theta} d\theta h_{m\bar{n}}(Z, \bar{Z}) \bar{D}\bar{Z}^{\bar{n}} DZ^m \quad (11.43)$$

и предположим, что метрика не зависит от y^m . Тогда и компонентный лагранжиан (9.2) не зависит от y^m , но только от \dot{y}^m . Предположим вначале, что метрика $h_{m\bar{n}}$ вещественна и симметрична. Нетрудно тогда убедиться, что, переименовав $h_{m\bar{n}} \rightarrow g_{MN}$ и $\dot{y}^m \rightarrow F^M$, мы воспроизводим компонентный лагранжиан (8.7) суперсимметричной сигма-модели де Рама. А суперполевая форма этого лагранжиана,

$$L = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta g_{MN}(X) \bar{D}X^M DX^N, \quad (11.44)$$

получается из (11.43) подстановкой $Z^m, \bar{Z}^{\bar{m}} \rightarrow \sqrt{2}X^M$ и $h \rightarrow g$.

Однако эрмитова метрика $h_{m\bar{n}}$ не обязательно вещественна. Она может содержать мнимую антисимметричную часть. Гамильтонова редукция общей модели (11.43) даёт квазикомплексную $\mathcal{N} = 2$ модель, обсуждавшуюся в предыдущей главе. На суперполевом языке её лагранжиан записывается как³

$$L = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta [g_{(MN)}(X) + ib_{[MN]}(X)] \bar{D}X^M DX^N \quad (11.45)$$

с вещественным симметричным тензором $g_{(MN)}$ и вещественным антисимметричным тензором $b_{[MN]}$. Бозонная часть компонентного лагранжиана (полный лагранжиан выписан в [84]) имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (g_{(MN)} + b_{[MP]}g^{(PQ)}b_{[QN]}) \dot{x}^M \dot{x}^N. \quad (11.46)$$

Другими словами, истинная метрика многообразия не есть $g_{(MN)}$, но, как мы уже отмечали ранее, зависит также от $b_{[MN]}$ — см. уравнение (10.35).

³Если добавить к этому лагранжиану также член с квазикручениями $\sim \int d\bar{\theta} d\theta (\mathcal{B}_{MN} DX^M DX^N + \text{компл. сопр.})$, получается модель, упомянутая в [26] — см. уравнение (3.10) в этой статье.

Сохраняющиеся суперзаряды этой модели имеют вид [ср. (8.14)]

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^M \left[\Pi_M - \frac{i}{2} \partial_M (g_{(NP)} + i b_{[NP]}) \psi^N \bar{\psi}^P \right], \\ \bar{Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^M \left[\Pi_M + \frac{i}{2} \partial_M (g_{(NP)} - i b_{[NP]}) \psi^N \bar{\psi}^P \right]. \end{aligned} \quad (11.47)$$

Замечательно, что те же квазикомплексные суперзаряды можно получить не только с помощью гамильтоновой редукции из комплексной модели Дольбо, но и преобразованием подобия из плоских квантовых суперзарядов в *вещественном* пространстве \mathbb{R}^D . Для этого надо взять суперзаряд (11.4) и преобразовать его согласно (11.1) с оператором (11.5), сняв при этом требование вещественности для матрицы α_{AB} . Произвольная эрмитова матрица α_{AB} приводит к нетривиальной деформации, не сводящейся к смене базиса, и анализ показывает [96], что результат такой деформации совпадает с квантовой версией суперзаряда Q из уравнения (11.47).

Иначе говоря, квазикомплексная сигма-модель может быть получена из исходной плоской комплексной модели последовательным применением двух операций: преобразованием подобия и гамильтоновой редукции, причём порядок этих преобразований может быть любым (см. рис. 11.1).



Рис. 11.1. Ромб сигма-моделей. Сплошные стрелки обозначают преобразование подобия, а пунктирные стрелки — гамильтонову редукцию

Говоря о редукции, мы предполагали до сих пор, что метрика не зависит от $\text{Im}(z^m)$. Но редукцию можно осуществить не только в этом случае, но и для любой метрики с изометрией.

Чтобы это проиллюстрировать, рассмотрим свободную модель, включающую одно киральное суперполе Z :

$$S = \frac{1}{4} \int d\bar{\theta} d\theta dt \bar{D}\bar{Z}DZ. \quad (11.48)$$

Плоская двумерная метрика имеет вращательную изометрию, $z \rightarrow ze^{i\phi}$. Так же как для игрушечной модели, разобранный в начале этого параграфа, мы можем наложить на волновые функции связь⁴ $\hat{p}_\phi \Psi = 0$.

Действие редуцированной модели имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int d\bar{\theta} d\theta dt \bar{D}RDR, \quad (11.49)$$

где R — вещественное суперполе $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, чья нижняя компонента есть $r = \sqrt{2}|z|$. Движение идёт в данном случае по лучу $[0, \infty)$ с граничным условием $\Psi(r=0) = 0$.

11.2.3. $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$

Рассмотрим обата-плоскую модель НКТ, описываемую действием (10.68). Предположим, что её метрика (10.69) зависит только от $z_k^{A=1}$, но не от $z_k^{A=2}$. Тогда квантовый гамильтониан и суперзаряды коммутируют с $\hat{p}_k^{A=2} = -i\partial/\partial z_k^{A=2}$ и возможна гамильтонова редукция, сохраняющая суперсимметрию $\mathcal{N} = 4$ исходной модели.

С точки зрения симметрии $\mathcal{N} = 2$ мультиплет $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ представляет пару мультиплетов $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$. Как мы только что выяснили, преобразования суперсимметрии в мультиплете $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ идентичны преобразованиям в мультиплете $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, если отождествить $\sqrt{2}\text{Im}(\dot{z}) \equiv F$. Редуцированная модель включает только вещественные части z , в то время как их мнимые части принимают роль вспомогательных переменных.

То же справедливо для большого мультиплета $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$. Прямое вычисление показывает, что можно выбрать в нём любые

⁴В этом случае можно также ввести переменную $w = \ln z$, так что угловая переменная ϕ становится мнимой частью w и мы приходим к обсуждённой выше ситуации. Но такая замена переменных возможна не всегда.

две вещественные координаты, отождествить их временные производные с двумя вещественными вспомогательными переменными мультиплетов (2, 4, 2) и что при таком отождествлении преобразования суперсимметрии в двух этих мультиплетках совпадают.

Редуцированная модель должна быть таким образом выражена в терминах мультиплетов (2, 4, 2) и представлять кэлерову модель. В общем случае — квазикомплексную кэлерову модель, действие (10.30) которой есть сумма стандартного кинетического члена (10.19) и дополнительной структуры (10.29). Единственный вопрос — это как кэлеров потенциал \mathcal{K} и функции \mathcal{A}_m , определяющие действие редуцированной модели, связаны с препотенциалом \mathcal{L} исходной модели НКТ.

Введём для удобства новые имена: $\mathcal{W}^k \equiv \mathcal{Z}_k^1$ и $\Xi^k \equiv \bar{\mathcal{Z}}_k^2$. Соответственно, бозонные компоненты этих суперполей будут называться w^k и ξ^k . Бозонная часть (10.70) компонентного лагранжиана НКТ примет в этих терминах вид

$$L_{\text{боз}}^{\text{НКТ}} = \kappa_{k\bar{l}} (\dot{w}^k \bar{\dot{w}}^{\bar{l}} + \dot{\xi}^k \bar{\dot{\xi}}^{\bar{l}}) + \mathcal{F}_{kl} \dot{w}^k \dot{\xi}^{\bar{l}} + \bar{\mathcal{F}}_{\bar{k}\bar{l}} \bar{\dot{w}}^{\bar{k}} \bar{\dot{\xi}}^{\bar{l}}, \quad (11.50)$$

где

$$\kappa_{k\bar{l}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial w^k \partial \bar{w}^{\bar{l}}} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^k \partial \bar{\xi}^{\bar{l}}} \right) \mathcal{L} \quad (11.51)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial w^k \partial \xi^{\bar{l}}} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^k \partial w^{\bar{l}}} \right) \mathcal{L}, \\ \bar{\mathcal{F}}_{\bar{k}\bar{l}} &= \overline{\mathcal{F}_{kl}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^{\bar{k}} \partial \bar{\xi}^{\bar{l}}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^{\bar{k}} \partial \bar{w}^{\bar{l}}} \right) \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Если $\kappa_{k\bar{l}}$ и \mathcal{F}_{kl} не зависят от ξ^p и $\bar{\xi}^{\bar{p}}$, возможна гамильтонова редукция. Каким условиям должен в этом случае удовлетворять препотенциал?

Теорема 11.4. *На одной из карт с тривиальной топологией, на которые разделено наше комплексное многообразие, препотенциал \mathcal{L} , удовлетворяющий требованиям*

$$\frac{\partial}{\partial \xi^p} \kappa_{k\bar{l}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^{\bar{p}}} \kappa_{k\bar{l}} = \frac{\partial}{\partial \xi^p} \mathcal{F}_{kl} = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^{\bar{p}}} \mathcal{F}_{kl} = 0, \quad (11.53)$$

может быть выбран в виде

$$\frac{\mathcal{L}}{2} = \mathcal{K}(W, \bar{W}) + \mathcal{A}_k(W) \Xi^k + \bar{\mathcal{A}}_{\bar{k}}(\bar{W}) \bar{\Xi}^{\bar{k}}, \quad (11.54)$$

где функции \mathcal{K} и \mathcal{A}_k таковы, что

$$\kappa_{k\bar{l}} = \partial_k \partial_{\bar{l}} \mathcal{K}, \quad \mathcal{F}_{kl} = \partial_k \mathcal{A}_l - \partial_l \mathcal{A}_k \quad (11.55)$$

($\partial_k \equiv \partial/\partial w^k$).

Доказательство. Докажем вначале следующую лемму.

Лемма. Формы $\kappa_{k\bar{l}} dw^k \wedge d\bar{w}^{\bar{l}}$, $\mathcal{F}_{kl} dw^k \wedge dw^l$ и $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{k}\bar{l}} d\bar{w}^{\bar{k}} \wedge d\bar{w}^{\bar{l}}$ замкнуты при выполнении условий (11.53).

Доказательство. Замкнутость форм $\mathcal{F}_{kl} dw^k \wedge dw^l$ и $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{k}\bar{l}} d\bar{w}^{\bar{k}} \wedge d\bar{w}^{\bar{l}}$ немедленно следует из определений (11.52). Рассмотрим теперь форму $\kappa_{k\bar{l}} dw^k \wedge d\bar{w}^{\bar{l}}$. Первый член в (11.51) даёт замкнутую форму, и единственный вопрос во втором члене. Разложим \mathcal{L} по ξ^p и $\bar{\xi}^{\bar{p}}$. «Опасный», не зависящий от ξ и $\bar{\xi}$ вклад в $\kappa_{k\bar{l}}$ может прийти из структуры

$$X = R_{m\bar{n}} \xi^m \bar{\xi}^{\bar{n}} \quad (11.56)$$

в препотенциале. Но она же даёт вклад $\propto (\partial_k R_{l\bar{n}} - \partial_l R_{k\bar{n}}) \bar{\xi}^{\bar{n}}$ в \mathcal{F}_{kl} . С учетом (11.53) этот вклад должен обратиться в ноль, и мы выводим $\partial_k R_{l\bar{n}} - \partial_l R_{k\bar{n}} = 0$. Рассмотрев вклад (11.56) в $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{k}\bar{l}}$, мы выводим, что $\partial_{\bar{k}} R_{m\bar{l}} - \partial_{\bar{l}} R_{m\bar{k}} = 0$. Отсюда следует, что форма $\propto R_{k\bar{l}} dw^k \wedge d\bar{w}^{\bar{l}}$ — вклад второго члена из (11.51) в форму $\kappa_{k\bar{l}} dw^k \wedge d\bar{w}^{\bar{l}}$ — замкнута. \square

Если формы замкнуты и топология карты тривиальна, то эти формы также точны в силу теоремы 1.2. И это значит, что $\kappa_{k\bar{l}}$ и \mathcal{F}_{kl} могут быть представлены в виде (11.55). \square

Замечание. Можно выбрать \mathcal{L} в виде (11.54), но \mathcal{L} не обязательно представимо в этом виде. Можно всегда добавить к \mathcal{L} структуры типа $\Delta\mathcal{L} = \mathcal{B}_{\bar{k}}(\mathcal{W}) \bar{\Xi}^{\bar{k}}$ с голоморфным $\mathcal{B}_{\bar{k}}(\mathcal{W})$ или $\Delta\mathcal{L} = Q(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}) - (\partial_k \partial_{\bar{l}} Q) \Xi^k \bar{\Xi}^{\bar{l}}$. Такие структуры не дают вклада в $\kappa_{k\bar{l}}$ и \mathcal{F}_{kl} , а именно эти последние тензоры определяют геометрию, и именно они нас интересуют в первую очередь. Подобные сдвиги лагранжиана аналогичны калибровочным преобразованиям электромагнитного вектор-потенциала, которые не влияют на наблюдаемую напряжённость поля.

Всё подготовлено для доказательства теоремы.

Теорема 11.5. Модель НКТ с препотенциалом (11.54) допускает гамильтонову редукцию. После редукции мы получаем квази-

комплексную кэлерову модель с действием

$$S = \frac{1}{4} \int d^2\bar{\theta} d^2\theta dt \mathcal{K}(W, \bar{W}) + \frac{1}{2} \left[\int d^2\theta dt_L \mathcal{A}_k(W) \dot{W}^k + \text{компл. сопр.} \right]. \quad (11.57)$$

Доказательство. Проще всего это доказать, сравнив бозонные члены в исходной модели НКТ и в модели (11.57) [они выписаны в уравнениях (11.50) и (10.31)] и убедившись, что они совпадают после отождествления $\xi \equiv F$. Все остальные члены в обоих моделях восстанавливаются по суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$. Они также должны совпадать, и можно проверить, что это действительно так. \square

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 11.6. *Препотенциал $\mathcal{L}(Z_k^A, \bar{Z}_k^A; U_\alpha^A, \bar{U}_\alpha^A)$ в допускающей редукцию би-НКТ модели (10.88) можно выбрать в виде*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{L} = & \mathcal{K}(W, \bar{W}; \mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}}) + [\mathcal{A}_k^{(1)}(W, \mathcal{V}) + \mathcal{A}_k^{(2)}(W, \bar{\mathcal{V}})] \Xi^k + \\ & + [\bar{\mathcal{A}}_k^{(1)}(\bar{W}, \bar{\mathcal{V}}) + \bar{\mathcal{A}}_k^{(2)}(\bar{W}, \mathcal{V})] \bar{\Xi}^{\bar{k}} + [\mathcal{B}_\alpha^{(1)}(\mathcal{V}, W) + \mathcal{B}_\alpha^{(2)}(\mathcal{V}, \bar{W})] \Sigma^\alpha + \\ & + [\bar{\mathcal{B}}_\alpha^{(1)}(\bar{\mathcal{V}}, \bar{W}) + \bar{\mathcal{B}}_\alpha^{(2)}(\bar{\mathcal{V}}, W)] \bar{\Sigma}^{\bar{\alpha}}, \quad (11.58) \end{aligned}$$

где $W^k = Z_k^{A=1}$, $\Xi^k = \bar{Z}_k^{A=2}$; $\mathcal{V}^\alpha = U_\alpha^{A=1}$, $\Sigma^\alpha = \bar{U}_\alpha^{A=2}$. После редукции получается квазикомплексная бикэлерова модель с действием

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{4} \int d^2\bar{\theta} d^2\theta dt \mathcal{K}(W, \bar{W}; \mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}}) - \\ & - \frac{i}{4} \left[\int d\theta_1 d\theta_2 dt_L \{ \bar{D}_2 [\mathcal{A}_k^{(1)}(W, \mathcal{V}) D^2 W^k] + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \bar{D}_1 [\mathcal{A}_k^{(2)}(W, \bar{\mathcal{V}}) D^1 W^k] \} + \right. \\ & + \int d\theta_1 d\bar{\theta}^2 d\tilde{t}_L \{ D^2 [\mathcal{B}_\alpha^{(1)}(\mathcal{V}, W) \bar{D}_2 \mathcal{V}^\alpha] + \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \bar{D}_1 [\mathcal{B}_\alpha^{(2)}(\mathcal{V}, \bar{W}) D^1 \mathcal{V}^\alpha] \} - \text{компл. сопр.} \right], \quad (11.59) \end{aligned}$$

где t_L и \tilde{t}_L определены в (10.44).

Доказательство. Вторая часть этой теоремы [что гамильтонова редукция (11.58) даёт (11.59)] была доказана в работе [72] точно тем же способом, что и теорема 11.5 — сравнением бозонных лагранжианов в двух моделях и отождествлением временных производных редуцируемых координат в лагранжиане би-НКТ и вспомогательных переменных в бикэлеровом лагранжиане. Мы отсылаем читателя к этой работе за дальнейшими деталями.

Первое утверждение [что выбор (11.58) всегда возможен] следует из того, что (11.59) даёт наиболее общее действие квазикомплексной бикэлеровой модели. Если исходное действие би-НКТ включает члены типа $\mathcal{A}_k \Xi^k$, $\mathcal{B}_k \Sigma^k$ и допускает редукцию (метрика не зависит от ξ и σ), редуцированная модель должна иметь вид (11.59). А это значит, что действие би-НКТ можно привести к виду (11.58) некоторым калибровочным преобразованием.

Въедливый читатель может поупражняться, построив более строгое доказательство этого факта в духе теоремы 11.4. \square

11.2.4. Симплектические и другие модели

До сих пор мы обсуждали в этом параграфе модели, где метрика не зависела от половины вещественных координат, но можно также рассмотреть ситуацию, где метрика имеет произвольное количество изометрий. После редукции мы можем получить большое число различных суперсимметричных сигма-моделей. Возьмём в качестве исходной редуцируемой модели модель НКТ, включающую некоторое количество *корневых* мультиплетов (4, 4, 0) и рассмотрим случай, когда метрика не зависит от *четверти* координат — по одной вещественной координате в каждом мультиплете. Естественно, что после редукции мы получим симплектическую модель, основанную на мультиплетях (3, 4, 1).

Или можно рассмотреть модель, где метрика не зависит от трёх четвертей координат и получить после редукции модель с мультиплетями (1, 4, 3), где у каждой динамической координаты имеется пара комплексных грассмановых суперпартнёров. Такие модели изучались, например, в работе [112].

Можно также стартовать с модели, включающей $\mathcal{N} = 8$ *корневой* мультиплет (8, 8, 0) и допускающей различные редукции.

Таким образом можно получить симплектическую модель второго рода, основанную на мультиплетах (5, 8, 3), и много других моделей.

Гамильтонова редукция не всегда связывает сигма-модели и соответствующие многообразия различного типа. В третьей главе (см. с. 76) мы обсудили многомерные гиперкэлеровы обобщения метрики Taub-NUT, описывающие динамику N магнитных монополей. Эти метрики имеют изометрии, связанные с групповыми преобразованиями $SU(N)$. Гамильтонова редукция по части этих изометрий даёт гиперкэлеровы многообразия меньшей размерности с оставшимися изометриями, связанными с различными подгруппами $SU(N)$ [20, 21, 22].

В заключение я хочу здесь упомянуть, не вдаваясь в детали, интересную связь между бикэлеровыми многообразиями специального типа и гиперкэлеровыми многообразиями. Речь идёт в этом случае не о гамильтоновой редукции, а о нетривиальных преобразованиях дуальности, связывающих эти метрики [20].

Глава 12

НК и НКТ через гармонические очки

В главе 10 мы обсуждали в числе прочих моделей с расширенной суперсимметрией гиперкэлеровы модели и модели НКТ, но общность и эффективность нашего обсуждения была ограничена.

- Гиперкэлерова модель была определена как модель, построенная из мультиплетов $\mathcal{N} = 2$ и обладающая тремя дополнительными комплексными суперсимметриями (10.99). Мы доказали, что метрика гиперкэлерова тогда и только тогда, когда комплексные структуры, фигурирующие в (10.99), кватернионны, но эти дополнительные симметрии имеют как бы внешнюю природу; они не связаны в этом подходе с симметрией суперпространства. Как следствие, мы не научились пока *строить* модели, которые обладают этими симметриями.
- Мы показали, что модели $\mathcal{N} = 4$ с суперпространственным действием (10.67) являются НКТ и что соответствующие метрики даются вторыми производными препотенциала, как в (10.70). Но все эти метрики принадлежат к весьма ограниченному классу *обата-плоских* метрик. Комплексные структуры $(I, J, K)_M^N$ являются в этом случае постоянными матрицами.

Как строить гиперкэлеровы метрики и метрики НКТ общего вида? Мы уже кратко коснулись этого вопроса в § 7.4. Мы написали действие (7.108), включающее $2n$ гармонических грасманово-аналитических псевдовещественных $\mathcal{N} = 8$ суперполей Q^{+a} , и сказали, что соответствующая геометрия гиперкэлерова. Мы сказали также, что модели, включающие $2n$ гармонических грасманово-аналитических псевдовещественных $\mathcal{N} = 4$ суперполей q^{+a} , на которые наложены нелинейные связи (7.98), описывают геометрию НКТ.

В этой главе мы докажем все эти утверждения и покажем, как, исходя из данного суперпространственного действия, можно определить соответствующую гиперкэлерову метрику или метрику НКТ.

Определить можно, но сделать это намного сложнее, чем, например, в случае кэлеровых многообразий, когда метрика просто равна второй производной кэлерова потенциала, $h_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} K$. Чтобы найти метрику для гиперкэлеровых многообразий и для многообразий НКТ с ненулевой кривизной Обаты, надо решить систему довольно сложных уравнений с гармоническими производными. Только в редких случаях удаётся найти решения этой системы в замкнутом аналитическом виде.

§ 12.1. Гиперкэлерова модель

Так как в задаче имеется суперсимметрия $\mathcal{N} = 8$, естественно описывать гиперкэлерову геометрию общего вида на языке гармонического суперпространства $\mathcal{N} = 8$. Соответствующая техника была разработана в работе [113] (см. также главу 5 книги [79]). Для удобства читателя мы напомним здесь некоторые определения из § 7.4.

Мы стартуем с обыкновенного суперпространства $\mathcal{N} = 8$, которое включает время, четыре комплексные нечётные координаты $\theta_{j\alpha}$ ($\alpha, j = 1, 2$) и их сопряжённые $\bar{\theta}^{j\alpha} = \overline{\theta_{j\alpha}}$. Мы его гармонизируем, введя

$$\theta_{\alpha}^{\pm} = \theta_{\alpha}^j u_j^{\pm}, \quad \bar{\theta}^{\pm\alpha} = \bar{\theta}^{j\alpha} u_j^{\pm}, \quad t_A = t + i(\theta_{\alpha}^+ \bar{\theta}^{-\alpha} + \theta_{\alpha}^- \bar{\theta}^{+\alpha}), \quad (12.1)$$

где t_A — грассмано-аналитическое время. Аналитическое подпространство $(\zeta, u) = (t_A, \theta_{\alpha}^+, \bar{\theta}^{+\alpha}; u_j^{\pm})$ большого гармонического суперпространства $(t; \theta_{\alpha}^+, \bar{\theta}^{+\alpha}, \theta_{\alpha}^-, \bar{\theta}^{-\alpha}; u_j^{\pm})$ инвариантно относительно суперпреобразований и относительно так называемого псевдосопряжения¹ (7.77).

¹Присутствие индекса α ничего принципиально не меняет. Нечётные координаты преобразуются согласно

$$\widetilde{\theta_{\alpha}^{\pm}} = \bar{\theta}^{+\alpha}, \quad \widetilde{\bar{\theta}^{+\alpha}} = -\theta_{\alpha}^+. \quad (12.2)$$

Мы берём далее $2n$ грассманово-аналитических суперполей

$$Q^{+a}(\zeta, u) = F^{+a}(t_A, u) + \theta_\alpha^+ \chi^{\alpha a}(t_A, u) + \\ + \bar{\theta}^{+\alpha} \kappa_\alpha^a(t_A, u) \theta_\alpha^+ \bar{\theta}^{+\alpha} A^{-a}(t_A, u) + \dots + (\theta_\alpha^+ \bar{\theta}^{+\alpha})^2 P^{-3a}(t_A, u), \\ a = 1, \dots, 2n \quad (12.3)$$

(в разложении выписаны только *некоторые* существенные для нас в дальнейшем члены). Верхние индексы типа «+», «-» или «-3» маркируют гармонический заряд: каждая компонентная переменная в разложении (12.3) является собственным состоянием оператора гармонического заряда D^0 , определённого в формуле (7.82). Представление супералгебры (12.3) приводимо. Чтобы сделать его неприводимым, мы накладываем условие псевдосоответственности,

$$\widetilde{Q}_a^+ = \Omega^{ab} Q_b^+ \equiv Q^{+a} \Rightarrow \widetilde{Q}^{+a} = -Q_a^+, \quad (12.4)$$

где $\Omega^{ab} = \Omega_{ab}$ — симплектическая матрица и широкая тильда — оператор псевдосопряжения.

Мы пишем следующее действие, представляющее интеграл по аналитическому гармоническому суперпространству:

$$S = \int dt_A du d^2\bar{\theta}^+ d^2\theta^+ \left[\frac{1}{8} Q_a^+ D^{++} Q^{+a} + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{+4}(Q^{+a}, u) \right], \quad (12.5)$$

где²

$$D^{++} = \partial^{++} + 2i\theta_\alpha^+ \bar{\theta}^{+\alpha} \frac{\partial}{\partial t_A}, \quad \partial^{++} = u^{+j} \frac{\partial}{\partial u_j^-}. \quad (12.6)$$

Из суперполевого действия следуют суперполевые уравнения движения

$$D^{++} Q^{+a} = \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial Q^{+b}}. \quad (12.7)$$

Подставив сюда (12.3), мы получаем систему уравнений для компонент. В частности, мы выводим

$$\partial^{++} F^{+a} = \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial F^{+b}} \quad (12.8)$$

²Мы переписали первую строчку в (7.96), добавив суммирование по α и опустив члены $\propto \partial/\partial\theta_\alpha^-, \partial/\partial\bar{\theta}^{-\alpha}$: они не дают вклад ввиду аналитичности Q^{+a} .

и

$$\partial^{++}A^{-a} - \Omega^{ab} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+4}}{\partial F^{+b} \partial F^{+c}} A^{-c} = -2i\dot{F}^{+a} + \text{ферм. члены.} \quad (12.9)$$

Рассмотрим уравнение (12.8). Если бы гармонический препотенциал \mathcal{L}^{+4} отсутствовал, линейное уравнение $\partial^{++}F^{+a} = 0$ имело бы простое решение,

$$F^{+a} \equiv F_0^{+a} = x^{ja} u_j^+, \quad (12.10)$$

где x^{ja} не зависят явно от гармоник и удовлетворяют условию псевдовещественности (3.13), которое следует из (12.4).

Заметим, что x^{ja} зависят здесь от аналитического времени t_A , которое включает также нечётные координаты, и точнее было бы сказать, что x^{ja} удовлетворяют условию $\widetilde{x}^{ja} = x_{ja}$. Однако, принимая во внимание инвариантность t_A относительно псевдосопряжения (которое в этом подходе играет роль обычного комплексного сопряжения), мы всё же можем написать условие (3.13) и работать с t_A как с обыкновенным вещественным временем t . В дальнейшем мы будем опускать индекс «A».

Если $\mathcal{L}^{+4} \neq 0$, поиск решения уравнения (12.8) — довольно непростая задача. В настоящее время оно было найдено в замкнутом аналитическом виде только для нескольких ненулевых препотенциалов \mathcal{L}^{+4} [79, 113, 114], включая препотенциал, описывающий многообразие Taub-NUT, которое будет обсуждаться ниже.

В общем случае решение (12.8) можно найти итерациями. Припишем множитель λ к \mathcal{L}^{+4} и представим решение как формальный ряд

$$F^{+a} = F_0^{+a} + \lambda F_1^{+a} + \lambda^2 F_2^{+a} + \dots \quad (12.11)$$

Мы получим цепочку уравнений:

$$\partial^{++}F_1^{+a} = \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial F_0^{+b}}, \quad \partial^{++}F_2^{+a} = \Omega^{ab} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+4}}{\partial F_0^{+b} \partial F_0^{+c}} F_1^{+c}, \quad \dots \quad (12.12)$$

Это по существу алгебраические уравнения, как становится ясно, если разложить их левые и правые части по гармоническому базису. Например, мы представляем

$$F_1^{+a} = A^{(ijk)a} u_i^+ u_j^+ u_k^- + B^{(ijklp)a} u_i^+ u_j^+ u_k^+ u_l^- u_p^- + \dots \quad (12.13)$$

(линейный член $\propto u_j^+$ приписывается к F_0^+ и отсутствует в поправках F_1^+ и т. д.) и

$$\Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial F_0^{+b}} = C^{(ijk)a} u_i^+ u_j^+ u_k^+ + D^{(ijklp)a} u_i^+ u_j^+ u_k^+ u_l^+ u_p^- + \dots \quad (12.14)$$

Тогда первое уравнение в (12.12) даёт $A = C$, $B = \frac{1}{2} D$ и т. д.

Мы решаем уравнение для F_1^{+a} , подставляем его решение в уравнение для F_2^{+a} , решаем его, подставляем решение в уравнение для F_3^{+a} и т. д. В результате $F^{+a}(t, u)$ выражается через не зависящие от гармоник объекты $x^{ja}(t)$, имеющие смысл *координат* на гиперкэлэровом многообразии, которое мы хотим описать.

Заметим, что из условия псевдовещественности (3.13) для x^{ja} следует вещественность векторов

$$x^M = \frac{i}{\sqrt{2}} (\Sigma^M)^{ja} x_{ja} \quad (12.15)$$

[с постоянными матрицами $\Sigma^M = \Sigma_M \equiv \Sigma_A$, определёнными в (3.8)]. Но возможен и любой другой выбор для $4n$ вещественных координат x^M .

Теперь обратимся к (12.9) и опустим там фермионные члены. Решение $\tilde{A}^{-a}(t, u)$ такого «обрезанного» уравнения тоже выражается через $x^{ja}(t)$. Мы получаем

$$\tilde{A}^{-a} = -2i\dot{x}^{ja} u_j^- + \text{нелинейные по гармоникам члены.} \quad (12.16)$$

Чтобы найти метрику многообразия, которое описывает наше действие, подставим полученные решения для $F^{+a}(t, u)$ и $\tilde{A}^{-a}(t, u)$ в бозонную часть действия (12.5). Выразив бозонное действие через компоненты, мы получим, используя уравнение движения (12.9), очень простое выражение

$$S = \frac{i}{2} \int dt du \tilde{A}_a^- \dot{F}^{+a}, \quad (12.17)$$

а другие бозонные компоненты суперполя (12.3) вклада не дают! Выразив далее \tilde{A}_a^- и F^{+a} через $x^{ja}(t)$, мы преобразуем действие (12.17) к виду

$$S = \frac{1}{2} \int dt g_{ja, kb} \dot{x}^{ja} \dot{x}^{kb}, \quad g_{ja, kb} = \varepsilon_{jk} \Omega_{ab} + O(\lambda). \quad (12.18)$$

Отметим следующее. Действие (12.18) было получено с использованием уравнений движения (12.8) и (12.9). Эти алгебраические по своей природе уравнения позволяют выразить множество вспомогательных переменных, присутствующих в разложении $F^{+a}(t, u)$ и $A^{-a}(t, u)$ через динамические переменные $x^{ja}(t)$. Но суперполевое уравнение движения (12.7) содержит также динамическое уравнение для $x^{ja}(t)$. Оно спрятано в ранее не обсуждавшемся компонентном уравнении

$$\partial^{++} P^{-3a} - \Omega^{ab} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+4}}{\partial F^{+b} \partial F^{+c}} P^{-3c} = -2i\dot{A}^{-a} + \text{ферм. члены.} \quad (12.19)$$

Подставив туда решение (12.16), мы получим в плоском случае $\mathcal{L}^{+4} = 0$ уравнение $\ddot{x}^{ja} = 0$, описывающее движение по прямой.

Аналогичную программу можно осуществить для фермионных компонент. В частности, сравнивая члены $\propto \theta_{\alpha}^{+}$ в обеих частях уравнения (12.7), мы выводим

$$D^{++} \chi^{aa} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^{++} \chi^{aa} - \Omega^{ab} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+4}}{\partial F^{+b} \partial F^{+c}} \chi^{ac} = 0. \quad (12.20)$$

Переменные κ_{α}^a удовлетворяют аналогичному уравнению. Они, впрочем, не независимы, а связаны с χ^{aa} ввиду (12.4):

$$\kappa_{aa} = \overline{\chi^{aa}}. \quad (12.21)$$

Общее решение (12.20) можно представить в виде³

$$\chi^{aa}(t, u) = (M^{-1})^a_{\underline{b}}(u) \psi^{ab}(t), \quad (12.22)$$

где матрица $(M^{-1})^a_{\underline{b}}$, удовлетворяющая уравнению

$$D^{++} (M^{-1})^a_{\underline{b}} \equiv \partial^{++} (M^{-1})^a_{\underline{b}} - \Omega^{ab} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+4}}{\partial F^{+b} \partial F^{+c}} (M^{-1})^c_{\underline{b}} = 0, \quad (12.23)$$

есть очень важный объект, называемый *мостом*. Мост связывает переменные, несущие мировой симплектический индекс a с переменными, несущими плоский касательный симплектический

³Возможно, более естественно было бы обозначить $M^{-1} \rightarrow M$, но мы следуем конвенциям работ [81, 90].

индекс⁴ (мы его будем отличать от мирового подчёркиванием) a . Обратная матрица M^b_a удовлетворяет уравнению

$$\partial^{++} M^b_a + \Omega^{cb} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+4}}{\partial F^{+a} \partial F^{+b}} M^b_c = 0. \quad (12.24)$$

Заметим, что объект $\psi^{ab}(t)$, через который выражается переменная χ^{aa} , не зависит от гармоник. Естественно интерпретировать его как фермионные переменные в касательном пространстве. Можно также определить не зависящие от гармоник фермионные переменные $\psi^{aa}(t)$, несущие мировые симплектические индексы. Мы это сделаем чуть позже.

Уравнения (12.23), (12.24) имеют бесконечное множество решений, связанных преобразованиями (имеющими смысл калибровочных преобразований)

$$M^b_a \rightarrow R^b_{\underline{c}} M^c_a \quad (12.25)$$

с произвольными не зависящими от гармоник матрицами $R^b_{\underline{c}}$. В § 12.3 и 12.4 мы сделаем конкретный удобный выбор для R и M (выберем конкретную удобную калибровку).

Можно показать, что все остальные компоненты Q^{+a} в разложении (12.3) являются вспомогательными переменными, которые алгебраически выражаются через x^{ja} и ψ^{aa} .

В задаче всего имеется $4n$ комплексных динамических фермионных переменных — одна комплексная фермионная переменная на каждую вещественную бозонную координату. В компонентном лагранжиане имеется билинейный фермионный вклад со структурой $\propto \bar{\psi}\psi$. Он происходит из члена $\propto Q_a^+ D^{++} Q^{+a}$ в суперполевоом действии (12.5), где следует удерживать в Q^{+a} фермионные члены разложения $\theta^+_a \chi^{aa} + \bar{\theta}^{+a} \kappa^a_a$. Переменные можно выбрать так, что коэффициенты в фермионном и бозонном кинетических членах даются одним и тем же метрическим тензором. В лагранжиане имеется также четырёхфермионный член, происходящий из разложения \mathcal{L}^{+4} .

Мы получаем таким образом действие суперсимметричной сигма-модели, частный случай общего лагранжиана (8.9). Однако наша модель обладает по построению расширенной суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$. В § 10.4 мы показали, что это возможно, только

⁴Дальнейшие детали читатель найдёт в [81].

если многообразие гиперкэлерово или бикэлерово специального типа.

Теорема 12.1. Действие (12.5) описывает гиперкэлерову суперсимметричную сигма-модель.

Доказательство. Достаточно изучить преобразования суперсимметрии координат (12.15) в этой модели и показать, что они совпадают с преобразованиями, следующими из (10.99),

$$\begin{aligned}\delta_1 x^M &= I_N^M (\epsilon_1 \psi^N - \bar{\epsilon}_1 \bar{\psi}^N), \\ \delta_2 x^M &= J_N^M (\epsilon_2 \psi^N - \bar{\epsilon}_2 \bar{\psi}^N), \\ \delta_3 x^M &= K_N^M (\epsilon_3 \psi^N - \bar{\epsilon}_3 \bar{\psi}^N),\end{aligned}\tag{12.26}$$

с кватернионными комплексными структурами и подходящим образом определёнными ψ^N . Это исключит возможность, что многообразие бикэлерово: мы видели, что в последнем случае преобразования суперсимметрии имеют более сложный вид [см. уравнение (10.40)].

На уровне компонент гармонического суперполя (12.3) преобразования суперсимметрии генерируются сдвигами $\delta \theta_\alpha^+ = \epsilon_\alpha^+$, $\delta \bar{\theta}^{+\alpha} = \bar{\epsilon}^{+\alpha}$. Мы получаем, принимая во внимание (12.21),

$$\delta F^{+\alpha} = \delta_\epsilon F^{+\alpha} + \delta_{\bar{\epsilon}} F^{+\alpha} = \epsilon_\alpha^+ \chi^{\alpha\alpha} - \bar{\epsilon}^{+\alpha} \bar{\kappa}_\alpha^{\bar{\alpha}}.\tag{12.27}$$

Сконцентрируемся на $\delta_\epsilon F^{+\alpha}$. Используя (12.22) и умножая обе части (12.27) на M^b_α , мы можем написать

$$M^b_\alpha (\partial_{kb} F^{+\alpha}) \delta_\epsilon x^{kb} = \epsilon_\alpha^+ \psi^{ab}(t),\tag{12.28}$$

где $\epsilon_\alpha^+ = \epsilon_{\bar{\alpha}k}^+ u_k^+$. Правая часть этого равенства пропорциональна u_k^+ — члены высшего порядка по u в гармоническом разложении отсутствуют. То же должно выполняться в левой части⁵. Мы можем таким образом написать

$$M^b_\alpha (\partial_{kb} F^{+\alpha}) = e_{kb}^{kb}(t) u_k^+.\tag{12.29}$$

Тогда закон преобразования (12.28) принимает вид

$$\delta_\epsilon x^{kb} = e_{kb}^{kb} \epsilon_\alpha^+ \psi^{ab},\tag{12.30}$$

⁵В работе [90] это свойство проверено явно.

где $e_{\underline{kb}}$ — матрица, обратная к $e_{\underline{kb}}^{kb}$. Позднее мы увидим, что при определённом выборе матрицы R в преобразовании (12.25) матрицы e приобретают смысл обычных фильбайнов.

Переименуем теперь немой индекс $\alpha \rightarrow j$, так что $\psi^{ab} \rightarrow \psi^{jb}$ и определим

$$\psi^{jc} = e_{\underline{jb}}^{jc} \psi^{jb}, \quad \epsilon_{\underline{j}}^k = \epsilon_0 \delta_{\underline{j}}^k + i \epsilon_p (\sigma_p)_{\underline{j}}^k, \quad (12.31)$$

где σ_p — матрицы Паули. Мы выводим

$$\delta_\epsilon x^{kb} = e_{\underline{jc}}^{jb} [\epsilon_0 \delta_{\underline{j}}^k + i \epsilon_p (\sigma_p)_{\underline{j}}^k] e_{\underline{kb}}^{kb} \psi^{jc}. \quad (12.32)$$

Теперь мы можем перейти к векторной нотации (12.15) и также

$$\psi^M = \frac{i}{\sqrt{2}} (\Sigma^M)^{ja} \psi_{ja} \quad (12.33)$$

и восстановить вариацию $\delta_\epsilon x^M$ из требования вещественности для x^M и δx^M . Это даст

$$\delta x^M = \epsilon_0 \psi^M + \epsilon_p (I^p)_N^M \psi^N - \bar{\epsilon}_0 \bar{\psi}^M - \bar{\epsilon}_p (I^p)_N^M \bar{\psi}^N \quad (12.34)$$

с комплексными структурами

$$(I^p)_N^M = -\frac{i}{2} (\Sigma_N)^{jc} e_{\underline{jc}}^{jb} (\sigma_p)_{\underline{j}}^k e_{\underline{kb}}^{kb} (\Sigma^M)_{kb} \quad (12.35)$$

(напомним, что $\Sigma^M = \Sigma_M$ — плоские матрицы). Можно убедиться, используя (3.14), что структуры (12.35) кватернионны. [Фактически это одетые фильбайнами плоские структуры (3.15).] Члены, пропорциональные ϵ_0 и $\bar{\epsilon}_0$, дадут стандартное $\mathcal{N} = 2$ суперпреобразование низшей компоненты суперполя X^M , а члены, пропорциональные ϵ_p и $\bar{\epsilon}_p$, совпадают с (12.26). \square

Мы показали, что модель (12.5) описывает гиперкэлэрову геометрию. Сделаем два замечания.

1. Можно задать правомочный вопрос: *любую ли гиперкэлэрову метрику можно вывести этим методом?* Ответ положительный. В работе [115] (см. также главу 11 в книге [79]) задача была решена другим способом — не используя суперсимметрию, но прямо разрешая связь $R_A^B \in sp(n)$ для формы кривизны (вспомним теорему 3.2). Было показано, что *общее* решение этой связи

зависит от произвольной гармонической функции $\mathcal{L}^{+4}(Q^{+a}, u)$ заряда 4 и что это решение совпадает с решением, следующим из (12.5).

2. Наше обсуждение носило локальный характер — мы описали гиперкэлерову метрику на данной карте с тривиальной топологией. Мы ничего не говорили о способе, которым склеены различные карты и, таким образом, не можем провести классификацию гиперкэлеровых многообразий.

Аналогично выражение $h_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} K$ даёт полную классификацию кэлеровых метрик на данной карте, но не даёт классификацию кэлеровых многообразий.

§12.2. Модель НКТ

Эта модель обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$, и для её описания надо рассмотреть суперпространство $\mathcal{N} = 4$, включающее время, дублет θ_j и дублет $\bar{\theta}^j$. Однако, как говорилось в начале главы, этого формализма оказывается недостаточно для описания многообразий НКТ общего вида — с ненулевой кривизной Обаты. Чтобы это сделать, нам необходимо гармонизовать $\mathcal{N} = 4$ суперпространство. Основные определения даны в главе 7. Они совпадают с определениями предыдущего параграфа, где нужно просто опустить во всех формулах индекс α .

Мы берём $2n$ грассманово-аналитических суперполей (7.93),

$$q^{+a}(\zeta, u) = f^{+a}(t, u) + \theta^+ \chi^a(t, u) + \bar{\theta}^+ \kappa^a(t, u) + \theta^+ \bar{\theta}^+ A^{-a}(t, u) \quad (12.36)$$

($t \equiv t_A$), удовлетворяющих условию псевдовещественности, $q_a^+ = q^{+a}$, и налагаем на них дополнительные нелинейные связи (7.98):

$$D^{++} q^{+a} = \mathcal{L}^{+3a}(q^{+b}, u) \quad (12.37)$$

с произвольными \mathcal{L}^{+3a} . Подставляя (12.36) в (12.37), мы находим условия для компонент:

$$\partial^{++} f^{+a} = \mathcal{L}^{+3a}(f^{+b}, u), \quad (12.38)$$

$$D^{++} \chi^a = D^{++} \kappa^a = 0, \quad (12.39)$$

$$D^{++} A^{-a} = -2i \dot{f}^{+a} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+3a}}{\partial f^{+b} \partial f^{+c}} \kappa^b \chi^c, \quad (12.40)$$

где действие ковариантной гармонической производной \mathcal{D}^{++} на произвольный симплектический вектор X^a определяется теперь как⁶

$$\mathcal{D}^{++} X^a = \partial^{++} X^a - \frac{\partial \mathcal{L}^{+3a}}{\partial f^{+b}} X^b. \quad (12.42)$$

Связи (12.37) выглядят похоже на суперполевые уравнения движения (12.8) из предыдущего параграфа, но их роль совершенно другая. Это именно связи, которые мы налагаем, чтобы сделать представление (12.36) неприводимым. А уравнения движения будут следовать из лагранжиана, который мы пока не писали, но скоро напишем.

Из псевдовещественности q^{+a} мы выводим, что

$$f^{+a}(t, u) = x^{ja} u_j^+ + \text{высшие гарм. члены} \quad (12.43)$$

с псевдовещественными x^{ja} , которые можно выразить, как в (12.15), в терминах $4n$ вещественных координат x^M .

В фермионном секторе мы получаем

$$\kappa_a(t, u_j^\pm) = \overline{\chi^a(t, u_j^\pm)}. \quad (12.44)$$

По тем же (теоретико-групповым) причинам, по которым мы определили $\overline{\theta_j} = \bar{\theta}^j$, удобно определить⁷

$$\overline{\chi_a} = \bar{\chi}^a \Rightarrow \overline{\bar{\chi}^a} = -\bar{\chi}_a, \quad (12.45)$$

так что фундаментальное представление $Sp(n)$ переходит при сопряжении в антифундаментальное и обратно. Таким образом, фермионные компоненты в q^{+a} принимают вид

$$(q^{+a})^{\text{ферм}} = \theta^+ \chi^a(t, u) - \bar{\theta}^+ \bar{\chi}^a(t, \tilde{u}). \quad (12.46)$$

Мы получаем $2n$ комплексных или $4n$ вещественных фермионных переменных — один вещественный суперпартнёр ψ^M к каждой вещественной координате. Что касается A^{-a} , они выражаются через x^M и ψ^M ввиду (12.40).

⁶В частном случае

$$\mathcal{L}^{+3a} = \Omega^{ac} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial f^{+c}} \quad (12.41)$$

оператор \mathcal{D}^{++} действует, как предписано в уравнении (12.20).

⁷Отметим, что в работах [81, 90] было принято отличающееся знаком определение $\overline{\bar{\chi}^a} = \bar{\chi}_a$.

Наиболее общее $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричное действие, включающее суперполя q^{+a} , имеет вид

$$S = S_0 + S_{\text{калибр}} = \int dt du d^2\theta^+ d^2\theta^- \mathcal{L}(q^{+a}, q^{-b}, u^\pm) + \\ + i \int dt_A du d^2\theta^+ \mathcal{L}^{++}(q^{+a}, u^\pm). \quad (12.47)$$

Вклад S_0 представляет интеграл по всему суперпространству. Подынтегральное выражение \mathcal{L} зависит от гармоник, от q^{+a} и также от $q^{-a} = D^{--}q^{+a}$. Из вещественности действия следует вещественность \mathcal{L} . Второй член представляет интеграл по аналитическому суперпространству. Чтобы обеспечить вещественность $S_{\text{калибр}}$, препотенциал \mathcal{L}^{++} должен менять знак при псевдосопряжении (7.77). (А всего наша модель имеет три препотенциала: \mathcal{L} , \mathcal{L}^{++} и \mathcal{L}^{+3a} .)

Мы можем теперь сформулировать центральное утверждение этого параграфа.

Действие S_0 в (12.47), где на псевдовещественные суперполя q^{+a} наложены связи (12.37), описывает геометрию НКТ. Второй член $S_{\text{калибр}}$ описывает калибровочные поля некоторого специального вида, живущие на этом многообразии.

Доказательство этого факта разбивается на несколько этапов.

Заметим прежде всего, что, как это только что было показано, динамические степени свободы в нашей модели включают $4n$ вещественных координат x^M и $4n$ их вещественных фермионных суперпартнёров. Это совпадает с числом степеней свободы в модели (9.34), включающей $D \mathcal{N} = 1$ суперполей \mathcal{X}^M с возможным дополнительным членом (9.64).

Подчеркнём, что действие

$$S = \int d\Theta dt \left[\frac{i}{2} g_{MN}(\mathcal{X}) \dot{\mathcal{X}}^M \mathcal{D}\mathcal{X}^N - \frac{1}{12} C_{KLM} \mathcal{D}\mathcal{X}^K \mathcal{D}\mathcal{X}^L \mathcal{D}\mathcal{X}^M - \right. \\ \left. - iA_M(\mathcal{X}) \mathcal{D}\mathcal{X}^M \right] \quad (12.48)$$

описывает наиболее общую модель $\mathcal{N} = 1$ без высших производных, включающую равное число бозонных и фермионных динамических переменных. Такая модель должна строиться исклю-

чительно в терминах суперполей $\chi^M = x^M + i\Theta\Psi^M$. Фермионные суперполя типа $\Phi = \phi + \Theta F$ не годятся: если мы хотим, чтобы ϕ входило в компонентный лагранжиан с одной производной, переменная F будет тогда с необходимостью вспомогательной, входящей в лагранжиан без производных (см. обсуждение на с. 199), и число бозонных и фермионных динамических переменных не будет совпадать.

Сконцентрируемся на первой строчке в (12.47) и докажем следующий факт.

Теорема 12.2. Действие S_0 может быть выражено через χ^M как в первой строчке (12.48): $A_M(\chi)$ равно в этом случае нулю.

Доказательство. Компонентный лагранжиан, отвечающий (9.34) [первая строчка в (12.48)] был выписан в уравнении (9.3). В отличие от лагранжиана, входящего в действие (9.65), которое следует из (9.64), он включает только члены $\propto \dot{x}^2$, но не члены $\propto \dot{x}$. Таким образом, нам достаточно показать, что выраженное в компонентах действие S_0 содержит только квадратичные по скоростям члены.

Используя разложение (12.36) и разложение

$$q^{-a} = D^{--}q^{+a} = \partial^{--}f^{+a} + 2i\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\dot{f}^{+a} + \theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial^{--}A^{-a} + (\theta^{-}\bar{\theta}^{+} + \theta^{+}\bar{\theta}^{-})A^{-a} + 2i\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\dot{A}^{-a} + \text{ферм. члены}, \quad (12.49)$$

мы выводим⁸

$$S_0^{\text{боз}} = 2i \int du dt \left[(\dot{f}^{+b}\tilde{A}^{-a} - \dot{f}^{+a}\tilde{A}^{-b}) \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial f^{+a}\partial f^{-b}} + \left(\dot{f}^{+a}\partial^{--}\tilde{A}^{-b} + \frac{i}{2}\tilde{A}^{-a}\tilde{A}^{-b} - \dot{f}^{-a}\tilde{A}^{-b} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial f^{-a}\partial f^{-b}} \right], \quad (12.50)$$

где мы определили $f^{-a} = \partial^{--}f^{+a}$, и \tilde{A}^{-a} есть решение *обрезанного* уравнения (12.40), где в правой части опущены фермионные

⁸Заметим, что выражение (12.36) было написано в *аналитическом* базисе и выражение (12.49), которое получается действием оператора D^{--} в форме (7.96) на (12.36), записано также в *аналитическом* базисе. Таким образом, при выводе (12.50) из суперполевого выражения (12.47) для S_0 , мы подразумевали интегрирование не по dt , а по dt_A . Но это не влияет на результат, поскольку суперякобиан преобразования $t \rightarrow t_A$ при фиксированных остальных переменных равен единице. После взятия интеграла индекс A можно снова опустить.

вклады, как мы их опускали в уравнении (12.9), чтобы получить (12.16).

Мы видим, что \tilde{A}^{-a} пропорционально \dot{f}^{+a} и в конечном счёте \dot{x}^{ja} . Это значит, что компонентный лагранжиан, следующий из S_0 , включает только члены $\propto \dot{x}^2$. \square

Проинтегрировав (12.50) по гармоникам, мы можем найти метрику. Мы сделаем это позже.

Из теоремы 9.4 и замечания в конце § 9.2 мы знаем, что если метрика g_{MN} , кручение C_{KLM} и калибровочный потенциал A_M удовлетворяют некоторым условиям, модель обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 2$. В такой модели одна из суперсимметрий перемешивает компоненты \mathcal{X}^M согласно (7.10), а другая суперсимметрия преобразует $\mathcal{N} = 1$ суперполя \mathcal{X}^M , как в (9.37).

Интересующая нас здесь модель обладает, однако, не одной, а тремя дополнительными суперсимметриями. Согласно теореме 9.4 каждая из них должна иметь вид (9.37) со своей комплексной структурой $(I^{p=1,2,3})_N^M$, удовлетворяющей стандартным условиям: $(I^p)^2 = -\mathbb{1}$, $(I^p)_{MN} = -(I^p)_{NM}$ и условию обращения в ноль соответствующего тензора Нейенхейса. Таким образом, действие должно быть инвариантно относительно преобразований

$$\begin{aligned}\delta_1 \mathcal{X}^M &= \epsilon_1 (I^1)_N^M \mathcal{D} \mathcal{X}^N, \\ \delta_2 \mathcal{X}^M &= \epsilon_2 (I^2)_N^M \mathcal{D} \mathcal{X}^N, \\ \delta_3 \mathcal{X}^M &= \epsilon_3 (I^3)_N^M \mathcal{D} \mathcal{X}^N.\end{aligned}\tag{12.51}$$

Теорема 12.3. *Чтобы выполнялась алгебра суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$, комплексные структуры I^p должны удовлетворять алгебре Клиффорда,*

$$I^p I^q + I^q I^p = -2\delta^{pq}.\tag{12.52}$$

Доказательство. Рассмотрим скобку Ли $(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \mathcal{X}^M$. Вычисление даёт

$$(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \mathcal{X}^M = -i \epsilon_1 \epsilon_2 (I^1 I^2 + I^2 I^1)_N^M \dot{\mathcal{X}}^N + \text{независимые члены}.$$

Чтобы суперзаряды Q_1 и Q_2 антикоммутировали, эта скобка Ли должна обращаться в ноль. Это даёт $\{I^1, I^2\} = 0$. Точно также мы выводим $\{I^1, I^3\} = \{I^2, I^3\} = 0$. \square

В главе 10 мы обсуждали $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные модели с таким, как у нас сейчас, набором переменных (вещественный фермион на каждую вещественную координату) и выяснили, что есть два типа таких моделей: НКТ и би-НКТ. В моделях НКТ, в отличие от моделей би-НКТ, комплексные структуры были кватернионны. В главе 10 обсуждались только обата-плоские модели, но это свойство выполняется также в общем случае.

Теорема 12.4. *Модель (9.34) с тремя дополнительными инвариантностями (12.51), в которой комплексные структуры кватернионны, описывает геометрию НКТ.*

Доказательство. Оно чисто геометрично. Инвариантность (12.51) и теорема 9.4 диктуют выполнение условия (9.40) для каждой комплексной структуры:

$$\nabla_L^{(B)}(I^P)_N{}^M + \nabla_N^{(B)}(I^P)_L{}^M = 0, \quad (12.53)$$

где $\nabla^{(B)}$ — ковариантная производная со связностью (2.17), одной и той же для всех трёх комплексных структур. Мы покажем, что в случае, когда комплексные структуры кватернионны, выполняется более сильное условие,

$$\nabla_N^{(B)}(I^P)_L{}^M = 0, \quad (12.54)$$

которое означает существование универсальной бисмутовой связности, так что многообразие является НКТ.

Интегрируемость позволяет нам определить комплексные координаты для каждой из комплексных структур. Сделаем это для $I^1 \equiv I$. Ненулевые компоненты тензора $I_N{}^M$ выписаны в (2.51):

$$I_m{}^n = -i\delta_m^n, \quad I_{\bar{m}}{}^{\bar{n}} = i\delta_{\bar{m}}^{\bar{n}}, \quad I_m{}^{\bar{n}} = I_{\bar{m}}{}^n = 0. \quad (12.55)$$

Рассмотрим тензоры⁹ $I^2 \pm iI^3 \equiv J \pm iK$. Как следует из теоремы 3.4 [а именно из тождеств (3.51)], их единственные ненулевые компоненты суть $(J + iK)_m{}^{\bar{n}} = 2J_m{}^{\bar{n}}$ и $(J - iK)_{\bar{m}}{}^n = 2J_{\bar{m}}{}^n$.

Заметим, что из (12.55) и из свойств $J^2 = K^2 = -\mathbb{1}$ и $JK = -KJ = I$ [кватернионная природа тройки (I, J, K) используется на этом шаге доказательства] следуют тождества

$$\begin{aligned} (J - iK)_{\bar{m}}{}^n (J + iK)_n{}^{\bar{l}} &= -4\delta_{\bar{m}}^{\bar{l}}, \\ (J + iK)_n{}^{\bar{l}} (J - iK)_{\bar{l}}{}^m &= -4\delta_n^m. \end{aligned} \quad (12.56)$$

⁹ $(J \pm iK)/2$ суть гиперкомплексные структуры \mathcal{I}^\pm , определённые на с. 81.

Рассматривая условие (12.53) для комплексной структуры I , мы вывели ранее (см. доказательство теоремы 9.5), что определённые компоненты связности (2.17) обращаются в ноль:

$$G_{l\bar{s}}^n = G_{l\bar{s}}^{\bar{n}} = 0. \quad (12.57)$$

Рассмотрим теперь условие (12.53) для $J + iK$:

$$\nabla_L^{(B)}(J + iK)_N^M + \nabla_N^{(B)}(J + iK)_L^M = 0. \quad (12.58)$$

Выберем $L = l$ и $M = m$, но не фиксируем (анти)голоморфность N . Используя тот факт, что ненулевые компоненты $J + iK$ имеют антиголоморфный верхний индекс, мы видим, что в этом случае большинство членов в (12.58) обращаются в ноль и мы выводим

$$G_{l\bar{s}}^m(J + iK)_N^{\bar{s}} + G_{N\bar{s}}^m(J + iK)_l^{\bar{s}} = 0. \quad (12.59)$$

Первый член в левой части этого равенства обращается в ноль ввиду (12.57), и мы приходим к $G_{N\bar{s}}^m(J + iK)_l^{\bar{s}} = 0$. Умножив это на $(J - iK)_F^l$ и использовав первое тождество в (12.56), мы приходим к равенству

$$G_{N\bar{f}}^m = 0 \quad (12.60)$$

для всех N — голоморфных и антиголоморфных. Равенство $G_{N\bar{s}}^{\bar{m}} = 0$ выводится аналогично с использованием условия (12.53) для структуры $J - iK$.

Рассмотрим теперь ковариантную производную I без симметризации,

$$\nabla_L^{(B)}I_N^M = G_{LN}^Q I_Q^M - G_{LQ}^M I_N^Q, \quad (12.61)$$

и выберем снова $M = m$ (случай $M = \bar{m}$ трактуется аналогично). Мы замечаем, что если $N = n$, правая часть (12.61) обращается в ноль ввиду сокращения двух членов, и если $N = \bar{n}$, мы получаем в правой части $-2iG_{L\bar{n}}^m$, что обращается в ноль ввиду (12.60).

Таким образом, $\nabla_L^{(B)}I_M^N = 0$.

Фактически мы одновременно доказали, что если комплексные структуры кватернионны, голоморфная и антиголоморфная части $C_{3,0}$ и $C_{0,3}$ в разложении (9.57) для формы $C = C_{MNP} dx^M \wedge dx^N \wedge dx^P$ равны нулю (теорема 9.5 утверждала только, что эти части замкнуты) и кручение C есть бисмутово кручение для

структуры I . Выбирая комплексные координаты, отвечающие структуре J или структуре K , мы можем повторить все аргументы и доказать, что $\nabla_L^{(B)} J_M^N = \nabla_L^{(B)} K_M^N = 0$.

Бисмутово кручение универсально. \square

Замечание. Термин «НКТ» в формулировке этой, а также следующей теоремы следует понимать в обобщённом смысле, которое включает также гиперкэлеровы многообразия с нулевым кручением, когда второй член в действии (9.34) отсутствует.

Теорема 12.5. Модель S_0 , включающая псевдовещественные суперполя q^{+a} , удовлетворяющие связям (12.37), есть НКТ.

Доказательство. Принимая во внимание предыдущую теорему, нам надо только доказать, что комплексные структуры кватернионны. Доказательство аналогично доказательству теоремы 12.1.

Суперпреобразования бозонных компонент f^{+a} суперполей q^{+a} генерируются сдвигами $\delta\theta^+ = \epsilon^+$ и $\delta\bar{\theta}^+ = \bar{\epsilon}^+$. Они имеют вид

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} f^{+a}(t, u) = \epsilon^+ \chi^a(t, u) - \bar{\epsilon}^+ \bar{\chi}^a(t, \tilde{u}). \quad (12.62)$$

В полной аналогии с (12.22) мы представляем решение уравнения (12.39) в виде

$$\chi^a(t, u) = (M^{-1})^a_{\underline{b}} \psi^{\underline{b}}(t), \quad \bar{\chi}^a(t, \tilde{u}) = (M^{-1})^a_{\underline{b}} \bar{\psi}^{\underline{b}}(t), \quad (12.63)$$

где мост M^{-1} удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}^{++} (M^{-1})^a_{\underline{b}} \equiv \partial^{++} (M^{-1})^a_{\underline{b}} - \frac{\partial \mathcal{L}^{+3a}}{\partial f^{+b}} (M^{-1})^b_{\underline{b}} = 0. \quad (12.64)$$

Тогда (12.62) можно переписать как [ср. уравнение (12.28)]

$$M^b_a (\partial_{kb} f^{+a}) \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} x^{kb}(t) = \epsilon^+ \psi^{\underline{b}}(t) - \bar{\epsilon}^+ \bar{\psi}^{\underline{b}}(t). \quad (12.65)$$

Правая, а значит и левая часть уравнения (12.65) включает только линейный член $\propto u_{\underline{k}}^+$ в разложении по гармоникам. Определяя фильбайны, как в (12.29),

$$M^b_a (\partial_{kb} f^{+a}) = e^{\underline{kb}}_{\underline{k}} u_{\underline{k}}^+, \quad (12.66)$$

мы получаем закон преобразования для не содержащих гармоник бозонных переменных:

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} x^{kb} = e^{\underline{kb}}_{\underline{k}} (\epsilon^{\underline{k}} \psi^{\underline{b}} - \bar{\epsilon}^{\underline{k}} \bar{\psi}^{\underline{b}}). \quad (12.67)$$

Переменные $\psi^{\underline{b}}$ и $\bar{\psi}^{\underline{b}}$ можно объединить в кватрет $\psi^{\underline{kb}}$ согласно

$$\psi^{\underline{1b}} \equiv \psi^{\underline{b}}, \quad \psi^{\underline{2b}} \equiv -\bar{\psi}^{\underline{b}}.$$

Определим также матрицу $\epsilon_{\underline{l}}^{\underline{k}}$ с компонентами

$$\epsilon_{\underline{1}}^{\underline{k}} \equiv \epsilon^{\underline{k}}, \quad \epsilon_{\underline{2}}^{\underline{k}} \equiv \bar{\epsilon}^{\underline{k}} \quad (12.68)$$

и представим её как

$$\epsilon_{\underline{l}}^{\underline{k}} = i\epsilon_0 \delta_{\underline{l}}^{\underline{k}} + \epsilon_p (\sigma^p)_{\underline{l}}^{\underline{k}} \quad (12.69)$$

с вещественными ϵ_0, ϵ_p . Матрица (12.69) удовлетворяет тождеству $(\epsilon_{\underline{l}}^{\underline{k}})^* = \epsilon_{\underline{ki}} \epsilon^{\underline{lj}} \epsilon_{\underline{j}}^{\underline{i}}$. В этих обозначениях закон преобразования (12.67) выражается в виде

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} x^{kb} = e_{\underline{kb}}^{\underline{kb}} \epsilon_{\underline{l}}^{\underline{k}} \psi^{\underline{lb}} = i\epsilon_0 e_{\underline{kb}}^{\underline{kb}} \psi^{\underline{kb}} + \epsilon_p e_{\underline{kb}}^{\underline{kb}} (\sigma^p)_{\underline{l}}^{\underline{k}} \psi^{\underline{lb}}. \quad (12.70)$$

Если мы определим

$$\psi^{\underline{kb}} \equiv e_{\underline{kb}}^{\underline{kb}} \psi^{\underline{kb}}, \quad (12.71)$$

первый член в (12.70) принимает простой вид $\delta_0 x^{kb} = i\epsilon_0 \psi^{\underline{kb}}$. Это преобразования суперсимметрии $\mathcal{N} = 1$, говорящие о том, что x^{kb} и $\psi^{\underline{kb}}$ являются суперпартнёрами, компонентами одного $\mathcal{N} = 1$ суперполя [ср. (9.36)].

Второй член в (12.70) можно выразить в виде

$$\delta_p x^{kb} = i\epsilon_p e_{\underline{lc}}^{\underline{lc}} (I^p)_{\underline{lc}}^{\underline{kb}} e_{\underline{kb}}^{\underline{kb}} \psi^{\underline{lc}} \equiv i\epsilon_p (I^p)_{\underline{lc}}^{\underline{kb}} \psi^{\underline{lc}}, \quad (12.72)$$

где

$$(I^p)_{\underline{lc}}^{\underline{kb}} = -i(\sigma^p)_{\underline{l}}^{\underline{k}} \delta_{\underline{c}}^{\underline{b}}. \quad (12.73)$$

Опуская индексы в (12.73), мы воспроизводим плоские кватернионные комплексные структуры (3.17). Комплексные структуры $(I^p)_N^M = e_{NA} (I^p)_{AB} e_B^M$ или, в спинорных обозначениях,

$$(I^p)_{\underline{lc}}^{\underline{kb}} = -ie_{\underline{lc}}^{\underline{lc}} (\sigma^p)_{\underline{l}}^{\underline{k}} e_{\underline{cb}}^{\underline{kb}}, \quad (12.74)$$

которые фигурируют в (12.72), также кватернионны. Следовательно, согласно теореме 12.4, наше многообразие есть НКТ. \square

Замечание. Из того факта, что наше действие может быть выражено в терминах суперполей $\mathcal{N}=1$, и из его инвариантности относительно преобразований (12.51) следует существование сохраняющегося суперзаряда Q_0 , связанного с преобразованиями внутри $\mathcal{N}=1$ мультиплетов, и ещё трёх сохраняющихся вещественных суперзарядов Q_p . Каждый из них зависит от соответствующей комплексной структуры, как в уравнениях (9.61). Мы приходим к выражениям (10.78) для суперзарядов, которые справедливы не только для обата-плоских моделей, обсуждавшихся в главе 10, но и в общем случае. Эти выражения особенно просты и красивы в гиперкэлеровом случае, когда кручение $C_{МКР}$ отсутствует.

§12.3. Метрика. Семейства Обаты. НКТ \rightarrow НК

Теоремы, доказанные в предыдущих параграфах, не имели бы большой ценности, если бы изложенный там гармонический формализм оказался бесполезен практически, если бы его нельзя было применить для конкретного вычисления метрик гиперкэлеровых многообразий и многообразий НКТ. В этом параграфе мы опишем позволяющий это сделать общий метод, а в следующем параграфе применим его для конкретных вычислений.

Рассмотрим модель НКТ общего вида и вернёмся к выражению (12.50) для бозонного лагранжиана. Чтобы найти метрику, мы должны подставить туда выражения для f^{+a} и \tilde{A}^{-a} , проинтегрировать по гармоникам и выразить результат через координаты x^{ja} .

Принимая во внимание (12.66), мы выводим

$$\dot{f}^{+a} = (\partial_{kb} f^{+a}) \dot{x}^{kb} = (M^{-1})^a_{\underline{a}} e_{kb}^{ja} \dot{x}^{kb} u_{\underline{j}}^+. \quad (12.75)$$

Решение «обрезанного» (без бифермионного члена в правой части) уравнения (12.40) имеет вид

$$\tilde{A}^{-a} = -2i(M^{-1})^a_{\underline{a}} e_{kb}^{ja} \dot{x}^{kb} u_{\underline{j}}^-, \quad (12.76)$$

как можно убедиться, используя тождества $D^{++}M^{-1}=0$ и $\partial^{++}u^- = u^+$.

Вычисление сильно упрощается для квадратичного \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}q^{+a}q_a^- = -\frac{1}{8}\Omega_{ab}q^{+a}q^{-b}. \quad (12.77)$$

Тогда член $\propto \partial_{-a}\partial_{-b}\mathcal{L}$ в (12.50) отсутствует, $\partial_{+a}\partial_{-b}\mathcal{L} = -\Omega_{ab}/8$, и мы получаем

$$S_0^{\text{боз}} = \frac{i}{2}\Omega_{ab} \int du dt \dot{f}^{+a} \tilde{A}^{-b}. \quad (12.78)$$

Подставляя сюда (12.75) и (12.76), мы выводим

$$L_0^{\text{боз}} = \dot{x}^{jc} \dot{x}^{kd} e_{jc}^{ja} e_{kd}^{kb} \Omega_{ab} \int du u_{\underline{j}}^+ u_{\underline{k}}^- (M^{-1})^a_{\underline{a}} (M^{-1})^b_{\underline{b}}. \quad (12.79)$$

Из симметричных соображений выражение $e_{jc}^{ja} e_{kd}^{kb} \Omega_{ab}$, множащее структуру $u_{\underline{j}}^+ u_{\underline{k}}^-$, антисимметрично относительно перестановки $\underline{j} \leftrightarrow \underline{k}$. Мы можем тогда заменить $u_{\underline{j}}^+ u_{\underline{k}}^- \rightarrow \varepsilon_{\underline{jk}}/2$ и получить

$$L_0^{\text{боз}} = \frac{1}{2}g_{jc,kb} \dot{x}^{jc} \dot{x}^{kb}, \quad (12.80)$$

где

$$g_{jc,kb} = e_{jc}^{ja} e_{kb}^{kb} \varepsilon_{\underline{jk}} \Omega_{ab} \int du (M^{-1})^a_{\underline{a}} (M^{-1})^b_{\underline{b}} \stackrel{\text{def}}{=} e_{jc}^{ja} e_{kb}^{kb} \varepsilon_{\underline{jk}} G_{\underline{ab}}. \quad (12.81)$$

Когда \mathcal{L}^{+3a} отсутствует, $(M^{-1})^a_{\underline{a}} = \delta_{\underline{a}}^a$, фильбайны могут быть выбраны в виде $e_{jc}^{ja} = \delta_j^c \delta_c^a$ и мы получаем плоскую метрику (3.14).

Для произвольного \mathcal{L} , немного поработав, можно вывести [81] результат для метрики, который имеет ту же структуру, что (12.81), но гармонический интеграл для $G_{\underline{bc}}$ содержит теперь в подынтегральном выражении дополнительный фактор:

$$G_{\underline{ab}} = \int du \mathcal{F}_{ab} (M^{-1})^a_{\underline{a}} (M^{-1})^b_{\underline{b}}, \quad (12.82)$$

где

$$\mathcal{F}_{ab} = -8 \left[\partial_{+[a} \partial_{-b]} - (M^{-1})^c_{\underline{c}} (\partial^{--} M^c_{[a} \partial_{-b]} \partial_{-c}] \right] \mathcal{L}. \quad (12.83)$$

Мы видим, что в общем случае метрика не представляет просто свёртку матриц e_{ja}^{ja} , но включает дополнительный фактор —

антисимметричную матрицу G_{ab} , несущую симплектические индексы. Однако можно привести G_{ab} к виду Ω_{ab} , используя калибровочную свободу (12.25) с не зависящей от гармоник матрицей R . Действительно, пусть $G_{ab}^{(0)} = \Omega_{ab}$ и $R^a_b = \delta^a_b + \lambda^a_b$ с малым $\lambda \ll 1$. Можно тогда написать

$$R^c_a R^d_b \Omega_{cd} = \Omega_{ab} + 2\lambda_{[ab]} + o(\lambda). \quad (12.84)$$

Ясно, что конечная версия этого преобразования может дать произвольную антисимметричную матрицу G_{ab} , а значит, произвольную матрицу G_{ab} можно привести калибровочным преобразованием к каноническому виду Ω_{ab} .

Заметьте, что метрика (12.81) инвариантна относительно калибровочных вращений с матрицами R^a_b , определённых в (12.25). Это немедленно следует из определения (12.29): объекты e^{ja}_{ja} вращаются матрицей R так же, как M^a_a , в то время как мосты M^{-1} вращаются матрицей R^{-1} . Если выбрать калибровку $G_{ab} = \Omega_{ab}$, e^{ja}_{ja} приобретают смысл истинных фильбайнов и метрика даётся стандартным выражением

$$g_{ja,kb} = e^{ja}_{ja} e^{kb}_{kb} \varepsilon_{jk} \Omega_{ab}. \quad (12.85)$$

Это просто знакомое тождество $g_{MN} = e_{AM} e_{AN}$, записанное в спинорно-симплектических обозначениях. В произвольной калибровке, когда фактор G_{ab} в выражении (12.81) для метрики не совпадает с Ω_{ab} , можно назвать e^{ja}_{ja} квазифильбайнами.

Мы показали, как вычислить метрику в общем случае, исходя из двух гармонических препотенциалов \mathcal{L}^{+3a} и \mathcal{L} . Она описывает многообразие НКТ. Мы доказали это в теореме 12.5 с помощью рассуждений, а в работе [81] читатель может найти явные вычисления комплексных структур, фильбайнов и связностей. Имея в руках эти выражения, можно непосредственно проверить, что бисмутовы связности для трёх комплексных структур совпадают и что метрика есть НКТ. Эти явные вычисления, однако, весьма непросты.

Можно задать естественный и важный вопрос: верно ли, что любая метрика НКТ может быть получена этим способом? Мы предполагаем, что да, может, но, в отличие от гиперкэлерава слу-

чая, доказательства этого факта на сегодняшний день не построено.

Другое замечание состоит в том, что наше описание весьма избыточно. Можно сделать замену переменных

$$q^{+a} \rightarrow q_1^{+a}(q^{+a}, u) \quad (12.86)$$

и получить другую пару препотенциалов $(\mathcal{L}_1^{+3a}, \mathcal{L}_1)$, которые описывают ту же геометрию.

Давайте это докажем.

Теорема 12.6. Метрика (12.85) инвариантна относительно преобразований (12.86).

Доказательство. Преобразования (12.86) индуцируют преобразования бозонных компонент q^{+a} . Инфинитезимально:

$$\delta f^{+a} = \lambda^{+a}(f, u) \ll f^{+a}. \quad (12.87)$$

Компоненты f^{+a} удовлетворяют уравнению

$$\partial^{++} f^{+a} = \mathcal{L}^{+3a}(f).$$

После преобразования (12.87) \mathcal{L}^{+3a} сдвигается:

$$\delta_\lambda \mathcal{L}^{+3a} = \partial^{++} \lambda^{+a} = \mathcal{L}^{+3b} (\partial_{+b} \lambda^{+a}) + \hat{\partial}^{++} \lambda^{+a}, \quad (12.88)$$

где $\partial_{+a} = \partial/\partial f^{+a}$, а $\hat{\partial}^{++}$ — часть полной гармонической производной ∂^{++} , связанная с явной зависимостью дифференцируемого выражения от гармоник:

$$\partial^{++} = \hat{\partial}^{++} + \mathcal{L}^{+3b} \partial_{+b} \quad (12.89)$$

(мы использовали равенство $\partial^{++} f^{+b} = \mathcal{L}^{+3b}$).

Рассмотрим теперь уравнение (12.64) для моста $(M^{-1})^a_b$ и определим, как меняется его решение после преобразования (12.87). Для этого надо вначале найти закон преобразования для структуры

$$E^{+2a}_b = \frac{\partial \mathcal{L}^{+3a}}{\partial f^{+b}}.$$

Исходя из (12.87), (12.88) и (12.89), мы выводим¹⁰

$$\delta_\lambda E^{+2a}_b = -E^{+2a}_c (\partial_{+b} \lambda^{+c}) + (\partial_{+c} \lambda^{+a}) E^{+2c}_b + \partial^{++} (\partial_{+b} \lambda^{+a}). \quad (12.90)$$

Чтобы $D^{++}M^{-1}$, определённое в (12.64), оставалось нулём после преобразования, мост должен преобразоваться как

$$\delta_\lambda (M^{-1})^a_c = (\partial_{+b} \lambda^{+a}) (M^{-1})^b_c \quad (12.91)$$

[при выводе мы приняли во внимание (12.90)]. Отсюда матрица M преобразуется согласно

$$\delta_\lambda M^c_a = -(\partial_{+a} \lambda^{+b}) M^c_b. \quad (12.92)$$

Другими словами, в отличие от E^{+2a}_b , мосты M^{-1} и M преобразуются как контравариантные и ковариантные векторы при сдвиге аналитических гармонических координат¹¹.

То же справедливо для структуры $\partial_{kb} f^{+a}$ — она преобразуется как контравариантный вектор:

$$\delta_\lambda (\partial_{kb} f^{+a}) = \partial_{kb} \lambda^{+a} = (\partial_{+c} \lambda^{+a}) (\partial_{kb} \lambda^{+c}). \quad (12.93)$$

Заметьте, что индекс « b » в пространственной производной ∂_{kb} не «чувствует» аналитический сдвиг (12.87)!

Отсюда следует, что левая часть уравнения (12.66) является скаляром по отношению к (12.87), и то же относится к фильбайнам в его правой части. Метрика тоже инвариантна. \square

Рассмотрим теперь множество моделей, характеризуемых тем же препотенциалом \mathcal{L}^{+3a} и, следовательно, теми же гармоническими связями (12.37), но различными действиями S_0 .

¹⁰Последний член в (12.90) приходит от производной второго члена $\hat{\partial}^{++} \lambda^{+a}$ в вариации (12.88) и также от производной фактора $\partial_{+b} \lambda^{+a}$ в первом члене этой вариации. Эти два вклада складываются и дают полную гармоническую производную ∂^{++} .

¹¹Что касается E^{+2a}_b , этот объект играет роль *связности*, ассоциированной с аналитическим диффеоморфизмом (12.87). Её закон преобразования включает помимо первых двух тензорных членов дополнительный член с гармоническим градиентом в полной аналогии с законом преобразования $\delta A_M = \partial_M \chi$ для абелева калибровочного потенциала или со вторым членом в законе преобразования (1.11) для обыкновенной афинной связности.

Различные \mathcal{L} приводят к различным \mathcal{F}_{ab} в (12.83), которые влияют на $G_{\underline{ab}}$. Как мы видели, эта модификация может быть скомпенсирована подходящим калибровочным вращением мостов и, соответственно, фильбайнов. Мы получаем таким образом семейство моделей, фильбайны которых связаны преобразованиями

$$\tilde{e}_{ja}^{ia} = R^a_{\underline{b}} e_{ja}^{ib}, \quad (12.94)$$

где вся зависимость от \mathcal{L} кодируется матрицей R . Чтобы фильбайны e_{AM} оставались вещественными, матрица $R^a_{\underline{b}}$ должна удовлетворять условию псевдовещественности, как в уравнении (3.13). Она включает тогда $(2n) \times (2n)/2 = 2n^2$ комплексных, или $4n^2$ вещественных параметров. Из этого числа $2n^2 + n$ параметров отвечают действию группы $Sp(n)$, которое не влияет на метрику (12.85). Остаётся $2n^2 - n$ существенных параметров. Для 4-мерных многообразий $n = 1$, и остаётся всего один параметр, отвечающий умножению метрики на конформный фактор.

Примечательно то, что комплексные структуры во всех этих моделях совпадают. В самом деле, посмотрим на выражение (12.74). Оно инвариантно относительно калибровочных вращений, поскольку верхний индекс \underline{c} в (12.74) вращается матрицей R , в то время как нижний индекс \underline{c} (с которым сворачивается верхний) вращается обратной матрицей R^{-1} . Таким образом,

$$(\tilde{I}^P)_{lc}^{kb} = (I^P)_{lc}^{kb}. \quad (12.95)$$

В частности, во всех моделях, выражаемых в терминах линейных мультиплетов $(4, 4, 0)$ с нулевым препотенциалом \mathcal{L}^{+3a} и различными \mathcal{L} , комплексные структуры сохраняют плоский вид (3.15).

Важное следствие этого наблюдения — следующая теорема.

Теорема 12.7. *Скалярные инварианты тензора кривизны Обаты для семейства метрик, отвечающих моделям с одинаковыми нелинейными связями (12.37), но различными действиями S_0 , совпадают¹².*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 3.7, которая утверждает, что существует базис, где все компоненты связности Обаты выражаются через комплексные структуры

¹²Назовём такое семейство семейством Обаты.

и того факта, что эти структуры не зависят от \mathcal{L} . Тогда эта связность тоже не зависит от \mathcal{L} в выбранном базисе, и то же относится к инвариантам тензора кривизны. \square

Отсюда, в частности, следует, что все модели, основанные на линейных мультиплетях $(4, 4, 0)$, обата-плоские.

В этом и предыдущем параграфе мы обсуждали до сих пор модели НКТ общего вида с произвольными \mathcal{L}^{+3a} и \mathcal{L} . Но есть важный частный случай.

Теорема 12.8. *Рассмотрим класс моделей, в которых препотенциал \mathcal{L}^{+3a} представим в виде*

$$\mathcal{L}^{+3a} = \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial q^{+b}}, \quad (12.96)$$

как в (12.41), а препотенциал \mathcal{L} квадратичен, $\mathcal{L} = Aq^{+a}q_a^-$. В этом случае метрика гиперкэлера.

Доказательство. Дело в том, что бозонная метрика, следующая из квадратичного действия со связью (12.37), куда входит препотенциал (12.96), в точности совпадает с метрикой, следующей из уравнений движения (12.7) для модели (12.5), включающей «большой» мультиплет (12.3). А мы знаем из теоремы 12.1, что такая модель обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$ и описывает многообразия с гиперкэлеравой метрикой.

Чтобы доказать, что метрики этих двух моделей и в самом деле совпадают, сравним их бозонные действия. Они даются выражениями (12.17) и (12.78), которые выглядят одинаково с точностью до замены $F^{+a} \leftrightarrow f^{+a}$. Но если выполнено условие (12.96), F^{+a} и f^{+a} удовлетворяют тем же самым уравнениям (12.8) \equiv (12.38). Следовательно, они выражаются через координаты x^{ja} точно так же. То же справедливо для \tilde{A}^{-a} : если выполняется условие (12.96), уравнения (12.9) и (12.40) совпадают. Таким образом, бозонные действия и, следовательно, метрики в двух моделях совпадают. \square

Заметим, что теорема 12.8 даёт только достаточные условия гиперкэлеравости метрики, которые не являются необходимыми. Как обсуждалось выше, наше описание имеет высокую степень избыточности. Мы можем взять квадратичный \mathcal{L} и \mathcal{L}^{+3a} , удовлетворяющий (12.96), и осуществить затем замену переменных. После этого \mathcal{L} перестанет быть квадратичным, а \mathcal{L}^{+3a} пе-

рестанет быть представимым в виде ротора (12.96). Но метрика останется гиперкэлеровой.

С другой стороны, для квадратичного \mathcal{L} условие (12.96) является необходимым условием гиперкэлеровости метрики. Аргументация следующая. Пусть $\mathcal{L} = q^{+a}q_a^-$, и предположим, что (12.96) не выполняется, но метрика остаётся гиперкэлеровой. Мы знаем, однако, из результатов работы [115], что любая гиперкэлерова метрика может быть выведена из некоторого препотенциала \mathcal{L}^{+4} , который входит в лагранжиан (7.108) с суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$. А как мы только что убедились, та же метрика выводится из $\mathcal{N} = 4$ модели (12.47) с квадратичным \mathcal{L} и со связью, включающей

$$\tilde{\mathcal{L}}^{+3a} = \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial q^{+b}}. \quad (12.97)$$

Но трудно представить себе, что при квадратичном \mathcal{L} , дающем выражение (12.78) для бозонного действия, одна и та же метрика следует из двух разных препотенциалов $\tilde{\mathcal{L}}^{+3a} \neq \mathcal{L}^{+3a}$. Из анализа предыдущего параграфа ясно, что мост M и, следовательно, выражения для f^{+a} и A^{-a} через координаты x^{ja} [которые следует подставить в (12.78)] существенно зависят от препотенциала.

Этот эвристический аргумент подтверждается явными вычислениями из работы [81]. Анализ явных приведённых там формул показывает, что при квадратичном \mathcal{L} спиновая связность Леви-Чивиты $\omega_{AB,M} dx^M$ лежит в $sp(n)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathcal{L}}^{+3a}$ представимо в виде (12.96). А это, согласно теореме 3.2, есть необходимое и достаточное условие гиперкэлеровости метрики.

Оставим \mathcal{L} квадратичным, но пусть теперь \mathcal{L}^{+3a} произвольно. Отметим следующий интересный факт.

Теорема 12.9. *Форма кручения для моделей НКТ с $\mathcal{L} = Aq^{+a}q_a^-$ всегда замкнута, $dC = 0$.*

Другими словами, мы имеем дело в этом случае с так называемой сильной геометрией НКТ [25, 26].

Доказательство. Компонентный лагранжиан $\mathcal{N} = 4$ общего вида даётся выражением (9.3) и содержит четырёхфермионный член. Этот член пропадает тогда и только тогда, когда форма кручения замкнута. То есть нам достаточно показать, что полное компонентное действие модели НКТ с квадратичным \mathcal{L} не содержит этого члена.

Подставим в $\mathcal{L} = -q^{+a}q_a^-/8$ разложения (12.36) и (12.49), где мы учтём на этот раз фермионные члены. Их явный вид в разложении (12.49) есть

$$\begin{aligned}
 (q_a^-)_{\text{ферм}} = & \theta^- \chi_a - \bar{\theta}^- \bar{\chi}_a + \theta^+ \partial^- \chi_a - \bar{\theta}^+ \partial^- \bar{\chi}_a + \\
 & + 2i\theta^- \bar{\theta}^- (\theta^+ \dot{\chi}_a - \bar{\theta}^+ \dot{\bar{\chi}}_a), \quad (12.98)
 \end{aligned}$$

но нам не нужны особые детали; единственное, что надо принять во внимание — это тот факт, что как q^{+a} , так и q^{-a} включают в этом случае только линейные по фермионным переменным члены. Тогда квадратичное суперполе \mathcal{L} содержит на компонентном уровне только бифермионные члены¹³, в то время как 4-фермионные члены отсутствуют. \square

Если \mathcal{L} неквадратично, форма кривизны в большинстве случаев незамкнута. Но она может оказаться и замкнутой. Например, в обата-плоском случае, когда $\mathcal{L}^{+3a} = 0$, метрика совпадает при $n = 1$ с 4-мерной плоской метрикой, умноженной на некоторый конформный фактор $G(x)$ [см. уравнение (10.71)]; мы обсуждали эту геометрию в главе 3 на с. 86]. Форма кручения равна в этом случае [116]

$$C \sim \varepsilon_{MNPQ} \partial_Q G(x) dx^M \wedge dx^N \wedge dx^P. \quad (12.99)$$

Если $\partial_Q \partial_Q G(x) = 0$, эта форма замкнута.

Изложенные результаты проиллюстрированы в таблице 12.1.

Таблица 12.1. Геометрии НК и НКТ

	$\mathcal{L} = Aq^{+a}q_a^-$	$\mathcal{L} \neq Aq^{+a}q_a^-$
$\mathcal{L}^{+3a} = \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial q^{+b}}$	НК $C = 0$	В общем случае слабое НКТ, $dC \neq 0$
$\mathcal{L}^{+3a} \neq \Omega^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}^{+4}}{\partial q^{+b}}$	сильное НКТ, $dC = 0$	

¹³Заметьте, однако, что они эффективно присутствуют не только в произведении линейных фермионных членов в q^{+a} и q^{-a} , но также в произведении $\sim \dot{f}^{+a} A_a^-$, куда надо подставить вместо $A_a^-(t, u)$ решение «необрезанного» уравнения (12.40).

Метрики НКТ можно разделить на два класса: *приводимые* метрики, т. е. метрики, принадлежащие семейству Обаты, содержащему в качестве одного из членов гиперкэлэрову метрику и *неприводимые* метрики, которые принадлежат семействам, в которых нет гиперкэлэрова члена.

Теорема 12.10. *Неприводимые метрики существуют.*

Это утверждение нетривиально ввиду отмеченной выше избыточности описания. Метрика определяется парой $\{\mathcal{L}^{+3a}, \mathcal{L}\}$, но эти пары (бесконечное их множество) эквивалентны относительно аналитической замены переменных (12.86). В результате одна и та же метрика может принадлежать бесконечному числу, как кажется, разных, но на самом деле эквивалентных семейств Обаты. Даже если «корневой» член данного семейства Обаты с квадратичным \mathcal{L} имеет нетривиальный \mathcal{L}^{+3a} , не представимый в виде (12.96), и соответствующее многообразие не гиперкэлэрово, может оказаться, что препотенциал \mathcal{L}^{+3a} может быть приведён к виду (12.96) преобразованием (12.86) (после чего \mathcal{L} перестанет быть квадратичным). Такая модель приводима: она принадлежит семейству Обаты, другим выделенным членом которого является модель с тем же самым \mathcal{L}^{+3a} , квадратичным \mathcal{L} и гиперкэлэровой метрикой. Имеется таким образом много метрик, которые только кажутся неприводимыми, но на самом деле приводимы (см. рис. 12.1).

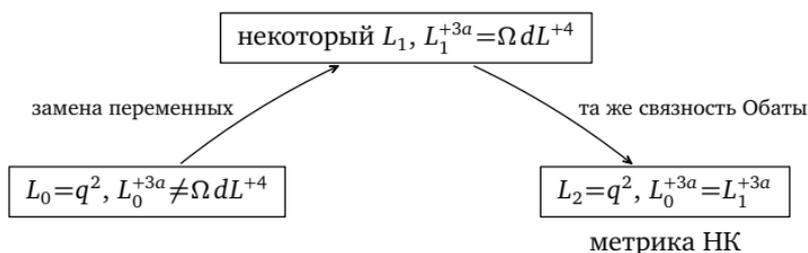


Рис. 12.1. Приводимая метрика НКТ, играющая в прятки с аналитическими базисами

Чтобы доказать теорему, надо дать по крайней мере один пример метрики НКТ, которая не приводима, несмотря на все ухищрения. Мы сделаем это в следующем параграфе.

§12.4. Примеры

12.4.1. Метрика Taub-NUT

Чтобы показать, как описанная в предыдущем параграфе процедура работает на практике, мы дадим здесь подробный гармонический вывод известной гиперкэлеровой метрики Taub-NUT [16], обсуждавшейся нами ранее в первой геометрической части книги.

Рассмотрим модель $\mathcal{N} = 4$, включающую два аналитических гармонических поля $q^{+(a=1,2)}$ с гиперкэлеровым препотенциалом \mathcal{L}^{+4} , выбранном в виде

$$\mathcal{L}^{+4} = -\frac{1}{2} (q^{+1})^2 (q^{+2})^2. \quad (12.100)$$

Отсюда выводится препотенциал $\mathcal{L}^{+3a} = \varepsilon^{ab} \partial_{+b} \mathcal{L}^{+4}$.

В этом случае связи (12.38)–(12.40) можно разрешить аналитически. Начнём с уравнений (12.38) для f^{+a} . Они принимают вид¹⁴

$$\partial^{++} f^{+1} = (f^{+1})^2 f^{+2}, \quad \partial^{++} f^{+2} = -f^{+1} (f^{+2})^2. \quad (12.101)$$

Решение этих уравнений есть

$$f^{+1} = \exp\{J\} x^{+1}, \quad f^{+2} = \exp\{-J\} x^{+2}, \quad (12.102)$$

где $x^{\pm a} = x^{ia} u_i^{\pm}$ с не зависящими от гармоник псевдовещественными переменными x^{ia} и

$$J = \frac{1}{2} (x^{+1} x^{-2} + x^{-1} x^{+2}). \quad (12.103)$$

Если выключить нелинейность, J обращается в ноль и $f^{+a} \rightarrow x^{+a}$.

Чтобы вычислить метрику, мы должны сначала найти мост M как решение однородного уравнения (12.24). Как отмечалось выше, аналитическая связность

$$E^{+2a}{}_b = \Omega^{ac} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{+4}}{\partial f^{+b} \partial f^{+c}},$$

которая входит в это уравнение, лежит в алгебре $sp(n)$, и, следовательно, уравнение (12.24) для моста имеет решения, принадлежащие группе $Sp(n)$. В нашем случае — группе $Sp(1) \equiv SU(2)$.

¹⁴Напомним, что в нашей конвенции $\varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = -1$.

Даже после того, как мы наложили условие, что мост M лежит в $SU(2)$, остаётся свобода выбора M , связанная с умножением на постоянную матрицу $SU(2)$. Мы выбираем решение, которое сводится к единичной матрице при выключении нелинейности, связанной с \mathcal{L}^{+4} . Оно имеет вид

$$M^{\underline{b}}_a = \frac{1}{\sqrt{1+x^1 \cdot x^2}} \begin{pmatrix} e^{-J}(1-x^{-1}x^{+2}) & -e^J x^{-1}x^{+1} \\ e^{-J}x^{-2}x^{+2} & e^J(1+x^{-2}x^{+1}) \end{pmatrix}, \quad (12.104)$$

где $x^1 \cdot x^2 = -x^2 \cdot x^1 = x^{j1}x_j^2$. Индекс \underline{b} маркирует строчки матрицы, а индекс a — столбцы.

Фильбайны можно найти из решений (12.102), (12.104) и из определения (12.66). Они даются выражениями¹⁵

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^1 \cdot x^2} e_{i1}^{k1} &= -\frac{1}{2}x_i^1 x^{k2} + \delta_i^k \left(1 + \frac{1}{2}x^1 \cdot x^2\right), \\ \sqrt{1+x^1 \cdot x^2} e_{i2}^{k1} &= -\frac{1}{2}x_i^1 x^{k1}, \quad \sqrt{1+x^1 \cdot x^2} e_{i1}^{k2} = \frac{1}{2}x_i^2 x^{k2}, \\ \sqrt{1+x^1 \cdot x^2} e_{i2}^{k2} &= \frac{1}{2}x_i^2 x^{k1} + \delta_i^k \left(1 + \frac{1}{2}x^1 \cdot x^2\right), \end{aligned} \quad (12.106)$$

где мировой индекс k для координатных компонент в правой части принимает те же значения, что и касательный индекс \underline{k} в левой части.

Общее выражение для метрики НКТ, приведённое в уравнении (12.81), включает дополнительный фактор $G_{\underline{ab}}$. Таким образом, в общем случае объекты e_{ia}^{kb} , найденные из определения (12.66) — не вполне фильбайны. Это квазифильбайны, и нужно повернуть их матрицей R , как в уравнении (12.94), чтобы получить истинные фильбайны. Но в гиперкэлеровом случае, когда $M, M^{-1} \in Sp(n)$ и $\mathcal{L} = -q^{+a}q_a^-/8$, мы получаем $\mathcal{F}_{ab} = \Omega_{ab}$ и $G_{\underline{ab}} = \Omega_{\underline{ab}}$. Тогда e_{ia}^{kb} являются истинными фильбайнами, из которых метрика строится стандартным образом по формуле (12.85).

¹⁵Высшие члены в гармоническом разложении левой части уравнения (12.66) сокращаются, как им и положено. Мы приглашаем читателя проверить это явно, воспользовавшись тождеством

$$u_m^+ u_n^+ u_k^- = u_{(m}^+ u_n^+ u_{k)}^- + \frac{1}{3}(\varepsilon_{mk} u_n^+ + \varepsilon_{nk} u_m^+). \quad (12.105)$$

В нашем случае компоненты метрики имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{i1,j1} &= x_i^2 x_j^2 \frac{1 + \frac{1}{2}x^1 \cdot x^2}{1 + x^1 \cdot x^2}, & g_{i2,j2} &= x_i^1 x_j^1 \frac{1 + \frac{1}{2}x^1 \cdot x^2}{1 + x^1 \cdot x^2}, \\ g_{i1,j2} &= g_{j2,i1} = \varepsilon_{ij} (1 + x^1 \cdot x^2) + x_i^2 x_j^1 \frac{1 + \frac{1}{2}x^1 \cdot x^2}{1 + x^1 \cdot x^2}. \end{aligned} \quad (12.107)$$

Метрика (12.107) эквивалентна метрике Taub-NUT, записанной в более известном виде в уравнении (3.37), которое мы здесь перепишем:

$$ds^2 = V^{-1}(r) (d\Psi + Ad\mathbf{X})^2 + V(r) d\mathbf{X} d\mathbf{X}, \quad (12.108)$$

где $\Psi \in (0, 2\pi)$,

$$V(r) = \frac{1}{r} + \lambda \quad (12.109)$$

($r = |\mathbf{X}|$) и

$$A^1 = \frac{X^2}{r(r+X^3)}, \quad A^2 = -\frac{X^1}{r(r+X^3)}, \quad A^3 = 0. \quad (12.110)$$

Соответствие устанавливается, если положить в (12.109) $\lambda = 1$ и сделать замену переменных¹⁶:

$$\begin{aligned} X^1 &= x^{21}x^{22} - x^{11}x^{12}, & X^2 &= i(x^{11}x^{12} + x^{21}x^{22}), \\ X^3 &= x^{11}x^{22} + x^{21}x^{12}, & \Psi &= i \ln \frac{x^{22}}{x^{11}}. \end{aligned} \quad (12.111)$$

Верны соотношения¹⁷

$$\begin{aligned} r &= x^1 \cdot x^2, & d\Psi + Ad\mathbf{X} &= \frac{i}{x^1 \cdot x^2} (x^2 \cdot dx^1 + x^1 \cdot dx^2), \\ (d\mathbf{X})^2 &= (x^1 \cdot dx^2)^2 + (x^2 \cdot dx^1)^2 + 2(x^1 \cdot dx^1)(x^2 \cdot dx^2) + \\ &+ 2(x^1 \cdot x^2)(dx^1 \cdot dx^2). \end{aligned} \quad (12.112)$$

Подставляя (12.109), (12.110) и (12.111) в (12.108), мы получаем

$$ds^2 = \frac{2 + x^1 \cdot x^2}{1 + x^1 \cdot x^2} (x^2 \cdot dx^1 + x^1 \cdot dx^2)^2 + 4(1 + x^1 \cdot x^2) dx^1 \cdot dx^2, \quad (12.113)$$

что совпадает с точностью до двойки с метрикой (12.107).

¹⁶Первую строчку в (12.111) можно записать в более компактной форме: $X^p = -(\sigma^p)_{ij} x^{i1} x^{j2}$, где $(\sigma^p)_{ij}$ определены в (3.16).

¹⁷Отметим, что переменная r , определенная в (12.112), вещественна и неотрицательна ввиду псевдовещественности x^{ia} .

Другой интересный случай, когда можно разрешить связи и найти метрику в явном виде, это 4-мерная модель с препотенциалом

$$\mathcal{L}^{+4} = \frac{(\xi^{jk} u_j^+ u_k^+)^2}{(q^{+a} u_a^-)^2}, \quad (12.114)$$

где ξ^{jk} — произвольный симметричный тензор. Осуществив обрисованную выше программу и выбрав подходящие координаты, можно отсюда получить [114, 79] гиперкэлерову метрику Эгучи—Хансона (3.46).

12.4.2. Метрика Дельдука—Валента

Рассмотрим 4-мерную модель ($n = 1$) с лагранжианом $\mathcal{L} = q^{+a} q_a^-$ и связями [33]

$$\begin{aligned} D^{++} q^{+1} &\equiv \mathcal{L}^{(+3)1} = (q^{+1})^2 q^{+2} (\lambda + i\rho), \\ D^{++} q^{+2} &\equiv \mathcal{L}^{(+3)2} = -q^{+1} (q^{+2})^2 (\lambda - i\rho), \end{aligned} \quad (12.115)$$

где λ, ρ — вещественные параметры. В случае $\rho = 0$ мы возвращаемся к гиперкэлеровой модели Taub-NUT, но если $\rho \neq 0$, «дивергенция» $\partial_a \mathcal{L}^{+3a}$ отлична от нуля, связи (12.115) не представимы в виде (12.96) и мы имеем дело с нетривиальным многообразием НКТ. Используя развитую на предшествующих страницах технику, мы можем найти его метрику¹⁸:

$$4d\tau^2 = V^{-1}(s)(d\Psi + \omega)^2 + V(s)\Gamma, \quad (12.116)$$

где

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{1}{s} + \lambda, \quad \omega = \cos \theta d\phi - \frac{\rho(1 + \lambda s)}{1 + \rho^2 s^2} ds, \\ \Gamma &= \frac{ds^2}{(1 + \rho^2 s^2)^2} + \frac{s^2}{1 + \rho^2 s^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (12.117)$$

В пределе $\rho \rightarrow 0$ эта метрика переходит в метрику Taub-NUT (12.108). При $\rho \neq 0$ бисмутова связность этой модели включает нетривиальное кручение. Явное выражение для формы кручения есть

$$C = \frac{\rho s(1 + \lambda s)}{(1 + \rho^2 s^2)^2} ds \wedge \sin \theta d\theta \wedge d\phi. \quad (12.118)$$

Эта форма замкнута в согласии с теоремой 12.9.

¹⁸Мы цитируем уравнение (24) из работы [33], где мы положили $\gamma_0 = 1$.

Покажем теперь, что эта метрика *неприводима* и докажем тем самым теорему 12.10.

Доказательство. Если бы метрика (12.116) была приводима, существовало бы некоторое конформное преобразование [см. замечание после уравнения (12.94)]

$$d\tilde{\tau}^2 = G(s, \Psi, \theta, \phi)d\tau^2 \quad (12.119)$$

к гиперкэлеровой метрике $d\tilde{\tau}^2$. Тогда фильбайны тоже получались бы конформным преобразованием гиперкэлеровых фильбайнов с вещественным конформным фактором \sqrt{G} . Тогда стандартные ковариантные производные комплексных структур [они не изменяются при таких конформных преобразованиях — см. замечание после уравнения (12.95)] с символами Кристоффеля, вычисленными по метрике (12.119), должны обращаться в ноль:

$$\nabla_M I_N^P = \nabla_M J_N^P = \nabla_M K_N^P = 0. \quad (12.120)$$

Эти условия можно разрешить, чтобы определить конформный фактор G [117], но оказывается¹⁹, что в конкретном случае метрики Дельдука—Валента (12.116) решение этих уравнений для $G(s, \Psi, \theta, \phi)$ *комплексно*, что приводит к комплексной «гиперкэлеровой метрике». Вещественные решения условий (12.120) отсутствуют. \square

12.4.3. Восемь измерений

Разобранные до сих пор примеры были четырёхмерными. Известен на сегодняшний день один пример, когда гармоническая техника позволила определить метрику 8-мерного гиперкэлерова многообразия [120]. Возьмём 4 аналитических поля q^{+a} и препотенциал

$$L^{+4} = -q^{+1}q^{+2}q^{+3}q^{+4}. \quad (12.121)$$

Чтобы вычислить фильбайны и потом метрику, нам надо вначале решить уравнения (12.38) для f^{+a} (нижних компонент q^{+a}) и потом решить уравнения (12.24) для моста. Фильбайны тогда найдутся из определения (12.66).

¹⁹Мы отсылаем читателя за деталями к статьям [118, 119].

Уравнения для f^{+a} имеют в данном случае довольно простой вид:

$$\begin{aligned} \partial^{++} f^{+1} &= f^{+1} f^{+3} f^{+4}, & \partial^{++} f^{+2} &= -f^{+2} f^{+3} f^{+4}, \\ \partial^{++} f^{+3} &= f^{+3} f^{+1} f^{+2}, & \partial^{++} f^{+4} &= -f^{+4} f^{+1} f^{+2}. \end{aligned} \quad (12.122)$$

Они имеют следующие решения:

$$f^{+1} = x^{+1} e^{\mathcal{K}}, \quad f^{+2} = x^{+2} e^{-\mathcal{K}}, \quad f^{+3} = x^{+3} e^{\mathcal{J}}, \quad f^{+4} = x^{+4} e^{-\mathcal{J}}, \quad (12.123)$$

где

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}(x^{+1} x^{-2} + x^{-1} x^{+2}), \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2}(x^{+3} x^{-4} + x^{-3} x^{+4}). \quad (12.124)$$

А вот решение уравнений для моста (наиболее удобное решение, которое лежит в группе $Sp(4)$ и становится единичной матрицей при выключении взаимодействия):

$$\begin{aligned} \Delta^{1/4} M^b_a &= \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\mathcal{K}} & 0 & -x^{-1} x^{+4} e^{-\mathcal{J}} & -x^{-1} x^{+3} e^{\mathcal{J}} \\ 0 & e^{\mathcal{K}} & x^{-2} x^{+4} e^{-\mathcal{J}} & x^{-2} x^{+3} e^{\mathcal{J}} \\ -x^{-3} x^{+2} e^{-\mathcal{K}} & -x^{-3} x^{+1} e^{\mathcal{K}} & e^{-\mathcal{J}} & 0 \\ x^{-4} x^{+2} e^{-\mathcal{K}} & x^{-4} x^{+1} e^{\mathcal{K}} & 0 & e^{\mathcal{J}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12.125)$$

где, как и в (12.104), индекс \underline{b} маркирует строчки, а индекс a — столбцы, $(a \cdot b) \equiv a^j b_j$ и

$$\Delta = 1 - (x^1 \cdot x^2)(x^3 \cdot x^4). \quad (12.126)$$

Мы не будем выписывать получающиеся выражения для фильбайнов и метрики. Они весьма громоздки, и читатель может их найти в статье [120].

Мы предполагаем, однако, что получающаяся метрика эквивалентна метрике (3.44), которая описывает «гиперкэлэровский ориентифолд» — 8-мерное обобщение метрики Taub-NUT, основанное на группе $SO(5) \simeq Sp(4)$, т. е. одна метрика должна получаться из другой заменой координат. В этом нас убеждают сходные симметрии обеих метрик. В частности, препотенциал (12.121) явно «дружит» с группой $Sp(4)$, на которой основана и

метрика (3.44). Обе эти метрики имеют также сходные дискретные изометрии \mathbb{Z}_2 : перестановка $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$ в метрике (3.44) и одновременная перестановка $x^1 \leftrightarrow x^3, x^2 \leftrightarrow x^4$ в невыписанной метрике, следующей из (12.123) и (12.125).

Интересно было бы, конечно, найти доказательство этого предположения.

§12.5. Калибровочные поля

В четырёх предыдущих параграфах мы обсуждали и анализировали только первый член в общем $\mathcal{N} = 4$ действии (12.47). Обратим теперь внимание на второй член,

$$S_{\text{калибр}} = i \int dt_A du d^2\theta^+ \mathcal{L}^{++}(q^{+a}, u^\pm). \quad (12.127)$$

Подставим сюда компонентное разложение (12.36) и проинтегрируем по $d^2\theta^+ = d\bar{\theta}^+ d\theta^+$. Бозонный член в действии имеет вид

$$S_{\text{калибр}}^{\text{боз}} = i \int dt du \frac{\partial \mathcal{L}^{++}(f^{+b}, u)}{\partial f^{+a}} \tilde{A}^{-a}, \quad (12.128)$$

где \tilde{A}^{-a} выражается через \dot{x}^{kb} согласно (12.76). Мы получаем

$$S_{\text{калибр}}^{\text{боз}} = - \int dt A_{kb} \dot{x}^{kb} \quad (12.129)$$

с абелевым калибровочным потенциалом (который не имеет ничего общего с \tilde{A}^{-a})

$$A_{kb}(t) = -2e_{kb}^{ja} \int du (\partial_{+a} \mathcal{L}^{++})(M^{-1})^a_{\underline{a}} u_{\underline{a}}^-. \quad (12.130)$$

Полное компонентное выражение для $S_{\text{калибр}}$ даётся формулой (9.65), которую мы здесь воспроизводим:

$$S_A = \int dt \left[-A_M \dot{x}^M + \frac{i}{2} F_{MN} \psi^M \psi^N \right] \quad (12.131)$$

($A_M = i(\Sigma_M)^{kb} A_{kb} / \sqrt{2}$ и $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$).

Теорема 12.11. Действие (12.131) обладает суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$ тогда и только тогда, когда напряжённость поля $F_{AB} = e_A^M e_B^N F_{MN}$ лежит в алгебре $sp(n)$.

Доказательство. Доказав теорему 9.6, мы установили, что действие (12.131) обладает дополнительной суперсимметрией (9.37) в том и только том случае, когда тензор напряжённости поля коммутирует с комплексной структурой. А чтобы обладать тремя дополнительными суперсимметриями, он должен коммутировать со всеми тремя комплексными структурами:

$$F_{AC} I_{CB}^P - I_{AC}^P F_{CB} = 0. \quad (12.132)$$

Это условие имеет точно такой же вид, что условие (3.19), и мы можем воспользоваться результатом теоремы 3.2: любая матрица, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид (3.24) и лежит в $sp(n)$. \square

Этот факт подтверждается прямыми вычислениями [81]. Проиллюстрируем, что происходит на примере 4-мерной плоской модели с $\mathcal{L}^{+3a} = 0$ и $\mathcal{L} \propto q^{+a} q_a^-$. В этом случае (12.130) сводится к

$$A_{kb} = -2 \int du (\partial_{+b} \mathcal{L}^{++}) u_k^-.$$

Имеем

$$F_{ja, kb} = \partial_{ja} A_{kb} - \partial_{kb} A_{ja} = -2 \int du \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{++}}{\partial f^{+a} \partial f^{+b}} \right) u_j^+ u_k^- - (ja \leftrightarrow kb). \quad (12.133)$$

Принимая во внимание симметрию $\partial^2 \mathcal{L}^{++} / (\partial f^{+a} \partial f^{+b})$, выводим, что напряжённость поля пропорциональна $u_j^+ u_k^- - u_k^+ u_j^- = \varepsilon_{jk}$ и имеет, действительно, вид (3.24).

Если $n = 1$, $F_{AB} \in su(2)$. Это значит, что F_{AB} антисамодуально,

$$F_{AB} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ABCD} F_{CD},$$

если комплексные структуры (с которыми коммутирует F_{AB}) выбраны самодуальными, как в (3.3). Естественно, можно также выбрать антисамодуальную тройку комплексных структур, и тогда для поддержания суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$ поле F_{AB} должно быть самодуальным.

Тот факт, что для поддержания суперсимметрии $\mathcal{N}=4$ в 4-мерной модели НКТ после включения калибровочных полей эти поля должны быть (анти-)самодуальны, был замечен в работах [80, 121].

Глава 13

Калибровочные поля на многообразиях

То, что физики называют *калибровочными полями*, известно математикам под именем *связностей главных расслоений*. Мы дали математическое определение этого понятия в § 1.3. На страницах этой книги (в частности, в главах 5, 6, 9, 12) мы уже обсуждали системы с калибровочными полями. Мы отметили одну существенную черту таких систем: калибровочные поля не являются произвольными функциями координат; некоторые интегралы, зависящие от напряжённостей полей, например магнитный поток (6.67), могут принимать только определённые дискретные значения. Однако мы не обсуждали это замечательное свойство (квантование топологического заряда) детально. Настало время это сделать.

Калибровочные поля могут жить как на компактных, так и на некомпактных многообразиях. Например, проблема Ландау, обсуждавшаяся в главе 5, была определена на \mathbb{R}^2 (и даже на \mathbb{R}^3 , если принять во внимание свободное движение вдоль направления магнитного поля). В этой и следующей главе мы будем говорить в основном о компактных многообразиях, где математика проще и красивее.

§ 13.1. Спиноры. Оператор Дирака

В § 1.4 мы ввели объект $\omega_{AB,M}$ и назвали его *спиновой связностью*. Но «этимология» этого термина в тот момент оставалась неясной. Сейчас мы её проясним.

Рассмотрим вначале плоское D -мерное пространство. Группа $SO(D)$ [точнее говоря, её двулистное накрытие $Spin(D)$ — см. ниже] содержит спинорные представления. Для нечётных D имеется всего одно неприводимое спинорное представление, но, имея в виду суперсимметричные приложения, мы будем интересоваться только чётными D с двумя разными неприводимыми представлениями S_L и S_R , описывающими левые и правые спиноры.

Рассмотрим множество комплексных функций $\Phi_\alpha(x)$, принадлежащих прямой сумме $S_L \oplus S_R$. Назовём это представление биспинорным¹. Индекс α принимает

$$N_D = 2^{D/2}$$

различных значений.

Введём теперь следующий удобный объект.

Определение 13.1. Эрмитовы матрицы $\gamma^{A=1,\dots,D}$ размерности $N_D \times N_D$, которые удовлетворяют алгебре Клиффорда

$$\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2\delta^{AB}, \quad (13.1)$$

называются евклидовыми многомерными *гамма-матрицами* или *матрицами Дирака*².

Закон инфинитезимальных глобальных вращений биспиноров приобретает на этом языке симпатичный вид:

$$\delta\Phi_\alpha = \frac{1}{8}\theta_{AB}(\gamma^A\gamma^B - \gamma^B\gamma^A)_{\alpha\beta}\Phi_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i\theta^{AB}}{2}(t^{AB})_{\alpha\beta}\Phi_\beta, \quad (13.2)$$

где $\theta_{AB} = -\theta_{BA}$ — маленький угол поворота в плоскости $[AB]$. Читатель может убедиться, что генераторы t^{AB} коммутируют согласно алгебре $so(D)$,

$$[t^{AB}, t^{CD}] = i(\delta^{AC}t^{BD} - \delta^{BC}t^{AD} + \delta^{BD}t^{AC} - \delta^{AD}t^{BC}), \quad (13.3)$$

и что норма $\bar{\Phi}_\alpha\Phi_\alpha$ инвариантна относительно вращений (13.2). Можно также заметить, что матрица

$$\exp\left\{\frac{\pi}{2}(\gamma^A\gamma^B - \gamma^B\gamma^A)\right\}$$

¹Этот термин используется физиками в случае $D = 4$, но нам будет удобно распространить его на произвольную чётную размерность. Мы напомним также, что, используя физическую терминологию, мы называем «представлением» то, что математики называют «пространством представления».

²Они были впервые введены Дираком 90 лет назад в 4-мерном пространстве Минковского. В этом случае матрицы Дирака удовлетворяют условию $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} = 2\text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Нас будут интересовать только евклидовы чётномерные многообразия, но гамма-матрицы можно определить и для нечётных D . В этом случае их размерность равна $N_D = 2^{(D-1)/2}$.

конечного вращения на угол 2π в плоскости $[AB]$ (или в любой другой плоскости) совпадает с -1 . Вот почему математики называют группу, содержащую спинорные представления, не $SO(D)$, а $Spin(D)$ — она является двулистным накрытием над $SO(D)$.

Рассмотрим выражение

$$(\mathcal{D}\Phi)_\alpha = (\gamma^M)_{\alpha\beta} \partial_M \Phi_\beta. \quad (13.4)$$

Предполагая, что γ^M преобразуется при вращениях как вектор — так же, как оператор градиента ∂_M — легко увидеть, что $(\mathcal{D}\Phi)_\alpha$ преобразуется так же, как Φ_α , т. е. представляет биспинор.

Оператор (13.4) называется *оператором Дирака* в плоском пространстве при отсутствии калибровочных полей.

Калибровочное поле описывается векторным потенциалом (для математиков — связностью главного расслоения) $A_M(x)$. Оно может быть абелевым (математики называют соответствующее расслоение *линейным*) или неабелевым. В последнем случае оно представляет эрмитову матрицу, элемент алгебры Ли \mathfrak{g} , в то время как биспинорное поле лежит в фундаментальном представлении \mathcal{G} и несёт дополнительный групповой индекс, $\Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha^a$. Оператор Дирака приобретает дополнительный член:

$$\mathcal{D} = \gamma^M (\partial_M + iA_M). \quad (13.5)$$

Как было объяснено в § 1.3, $[(\partial_M + iA_M)\Phi]^a$ и, значит, $(\mathcal{D}\Phi)^a$ преобразуются так же, как Φ^a , при калибровочных вращениях.

Определим теперь оператор Дирака на кривом многообразии при наличии калибровочного поля. В этом определении появляется спиновая связность:

$$\mathcal{D} = e_A^M \gamma^A \left(\partial_M + \frac{1}{4} \omega_{BC,M} \gamma^B \gamma^C + iA_M \right). \quad (13.6)$$

Тогда $(\mathcal{D}\Phi)_\alpha^a$ преобразуется таким же образом, как Φ_α^a — как относительно калибровочных вращений, так и относительно ортогональных вращений в касательной плоскости с параметрами, зависящими от координат многообразия x ,

$$\delta\Phi = \frac{1}{4} \theta_{BC}(x) \gamma^B \gamma^C \Phi \Rightarrow \delta(\mathcal{D}\Phi) = \frac{1}{4} \theta_{BC}(x) \gamma^B \gamma^C \mathcal{D}\Phi. \quad (13.7)$$

В самом деле, можно убедиться, что член $\sim \partial_M \theta_{BC}$ в $\mathcal{D}\delta\Phi$, связанный с вариацией Φ , точно сокращает член такого же вида, происходящий от вариации $\delta\omega_{BC,M}$ в \mathcal{D} [см. формулу (1.52)].

Понятие спиновой связности было впервые введено физиками, столкнувшимися с необходимостью описывать спинорные поля в общей теории относительности.

Выражение (13.6) для оператора Дирака локально. Нетривиальный вопрос — можно ли определить оператор Дирака глобально на всём многообразии. Чтобы это сделать, надо определить *спинорное расслоение*, т. е. представить многообразие как объединение карт и определить биспинорное поле на каждой карте так, что в областях перекрытия биспинорные поля на двух картах U_α и U_β были бы связаны преобразованием $\Omega_{\alpha\beta} \in Spin(D)$. Если непустая область тройного пересечения $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ существует, функции $\Omega_{\alpha\beta}$ должны удовлетворять условию согласованности $\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\beta\gamma} = \Omega_{\alpha\gamma}$.

Рассмотрим «чисто гравитационный» оператор Дирака (13.6) с $A_M = 0$ и предположим, что на каждой карте биспинорное поле представляет собственную функцию \mathcal{P} . Предположим далее, что в областях перекрытия наборы фильбайнов e_A^M , определённых на каждой карте, связаны вращениями $SO(D)$, соответствующими $\Omega_{\alpha\beta}$.

Определение 13.2. Говорят, что многообразия, на которых можно определить спинорные расслоения, удовлетворяющие приведённым выше условиям, допускают *спинорную структуру*.

Не все многообразия обладают этим свойством. Например, $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2k}$ не допускают спинорной структуры и оператор Дирака, не включающий дополнительное калибровочное поле, там глобально не определён. Однако мы увидим скоро, что спинорную структуру и оператор Дирака можно там определить, если включить дополнительное абелево калибровочное поле специального вида. В этом случае биспинорные поля из перекрывающихся карт связаны преобразованиями из $\Omega_{\alpha\beta} \in Spin(D) \times U(1)$.

13.1.1. Оператор Дирака и суперзаряды

Мы уже встречали плоский двумерный оператор Дирака (13.5) в главах 5 и 6. Мы показали там, что двумерная задача с гамильтонианом, равным квадрату оператора (13.5), суперсимметрична. Теперь мы покажем, что это верно и в более общем случае.

Теорема 13.1. Рассмотрим оператор Дирака (13.6), определённый на чётномерном многообразии с абелевым или неабеле-

вым калибровочным полем $A_M(x)$. Тогда операторы

$$\hat{Q} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\mathcal{D}(1 - \gamma^{D+1}), \quad \hat{Q}^\dagger = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\mathcal{D}(1 + \gamma^{D+1}), \quad (13.8)$$

где

$$\gamma^{D+1} = \frac{(-i)^{D/2}}{D!} \varepsilon_{A_1, \dots, A_D} \gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_D}, \quad (13.9)$$

удовлетворяют алгебре суперсимметрии (5.1) с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hat{\mathcal{D}}^2}{2}. \quad (13.10)$$

Доказательство. Это немедленно следует из того факта, что γ^{D+1} антикоммутирует со всеми γ^{A_j} и что $(\gamma^{D+1})^2 = \mathbb{1}$. \square

Замечания. 1. Требование чётности D существенно. Если D нечётно, правая часть выражения (13.9) не дала бы нетривиальную матрицу, антикоммутирующую с γ^{A_j} . Она была бы пропорциональна единичной матрице $\mathbb{1}$.

2. Из того, что $(\gamma^{D+1})^2 = \mathbb{1}$, следует, что γ^{D+1} можно диагонализировать с собственными значениями ± 1 . Фактически половина этих собственных значений равна $+1$ и другая половина равна -1 .

Определение 13.3. Биспинор, удовлетворяющий условию $\gamma^{D+1}\Psi = \Psi$ называется *правым спинором*, а биспинор, удовлетворяющий условию $\gamma^{D+1}\Psi = -\Psi$ называется *левым спинором*.

Так как (13.9) коммутирует с гамильтонианом (13.10), собственные состояния последнего можно разделить на два класса: правые и левые спиноры. Они лежат в неприводимых представлениях $Spin(D)$.

В оставшейся части этого и в двух последующих параграфах (13.2 и 13.3) мы сконцентрируем внимание на абелевых калибровочных полях, отложив обсуждение неабелева случая до второй части главы.

Гильбертово пространство, где действуют суперзаряды (13.8) и гамильтониан (13.10), включает биспиноры $\Phi_\alpha(x)$. Попробуем трактовать эту систему так же, как мы это делали с другими суперсимметричными системами, рассмотренными ранее в книге: введём голоморфные грассманы переменные, определим гильбертово пространство со скалярными функциями, зависящими

от координат многообразия и от этих голоморфных переменных, и отображим тройку \hat{Q} , \hat{Q}^\dagger , \hat{H} на операторы, действующие в этом новом пространстве.

Мы хотели бы также вывести выражения для классических суперзарядов и гамильтониана.

На первый взгляд, последнее кажется возможным. Гамма-матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда (13.1), можно представить как квантовые операторы $\hat{\Psi}^A \sqrt{2}$, удовлетворяющие той же алгебре. В классической задаче им соответствуют нильпотентные грасмановы числа $\Psi^A \sqrt{2}$, как в уравнении (9.61)³.

В том, что касается оператора Дирака, нет действительно никаких проблем, и для него легко написать классический аналог — классический вещественный суперзаряд. Например, в плоском пространстве и в отсутствии калибровочного поля мы можем написать

$$Q^{\text{клас}} = \Psi^M P_M. \quad (13.11)$$

С естественным определением грасмановой скобки Пуассона, $\{\Psi^M, \Psi^N\}_P = i\delta^{MN}$ [ср. первую строчку в (4.58)], мы получаем классическую алгебру $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии: $\{Q^{\text{клас}}, Q^{\text{клас}}\}_P = 2iH^{\text{клас}}$, как в (5.44).

Сложно, однако, найти классическую версию нелинейного оператора (13.9) и классическую версию второго эрмитова суперзаряда $\hat{Q}^* = i\mathcal{D}\gamma^{D+1}/\sqrt{2}$. Для чётномерного многообразия общего вида это невозможно [56]. Мы имеем здесь дело с классической аномалией суперсимметрии [55]: суперсимметрию $\mathcal{N} = 2$ нашей квантовой системы невозможно поддержать на классическом уровне!

Дела обстоят лучше, если многообразие кэлерово. В этом случае классическая версия существует не только у оператора Дирака, но и у второго квантового суперзаряда. Мы отображаем $\gamma^A \rightarrow \sqrt{2}\hat{\Psi}^A$ и записываем оператор Дирака в виде

$$\mathcal{D} = \sqrt{2} e_A^M \hat{\Psi}^A \left(\partial_M + \frac{1}{2} \omega_{BC,M} \hat{\Psi}^B \hat{\Psi}^C + iA_M \right). \quad (13.12)$$

³Как было отмечено на с. 119, «грасманово» становится «клиффордовым» после квантования. Соответственно, «клиффордово» становится «грасмановым», когда мы переходим от квантовой задачи к классической.

Выделим теперь голоморфные и антиголоморфные фермионные компоненты, $\hat{\Psi}^A \equiv (\psi^a, \hat{\psi}^{\bar{a}})$, где $\hat{\psi}^{\bar{a}} = \partial/\partial\psi^a$. Подставив это в (13.12), мы получаем оператор, который действует на волновые функции $\Phi(x^M, \psi^a)$. Эти волновые функции имеют $2^{D/2}$ компонент — то же число, что число компонент у биспинора $\Phi_\alpha(x)$, и между двумя гильбертовыми пространствами устанавливается таким образом взаимно однозначное соответствие.

Теорема 13.2. *Это соответствие можно установить так, что правые спиноры переходят в бозонные состояния, а левые спиноры — в фермионные состояния. При этом*

$$\gamma^{D+1} \leftrightarrow (-1)^{\hat{F}}. \quad (13.13)$$

Доказательство. Это немедленно следует из отмеченного ранее факта, что половина собственных значений γ^{D+1} , отвечающих правым спинорам, равна $+1$, а другая половина равна -1 . \square

Замечание. Очевидно, что соответствие можно также установить так, что в бозонные состояния переходят левые спиноры, а правые спиноры переходят в состояния фермионные. Именно такое соответствие было установлено в главе 5 для задачи Ландау о движении в магнитном поле. Мы увидим в следующей главе (см. примечание на с. 374 и абзац в конце п. 14.3.1), что удобный исторически обусловленный способ определить это соответствие есть

$$\gamma^{D+1} \leftrightarrow (-1)^{D/2} (-1)^{\hat{F}}, \quad (13.14)$$

где D — размерность многообразия.

Используя тот факт, что на кэлеровых многообразиях компоненты $\omega_{bc,M}$ и $\omega_{\bar{b}\bar{c},M}$ обращаются в ноль [см. уравнение (2.29)], мы можем представить

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\text{гол}} - (\mathcal{P}^{\text{гол}})^\dagger, \quad (13.15)$$

где

$$\mathcal{P}^{\text{гол}} = \sqrt{2} e_a^m \psi^a \left[\partial_m + \frac{1}{2} \omega_{\bar{b}c,m} (\hat{\psi}^{\bar{b}} \psi^c - \psi^c \hat{\psi}^{\bar{b}}) + iA_m \right] \quad (13.16)$$

и

$$(\mathcal{P}^{\text{гол}})^\dagger = -\sqrt{2} e_{\bar{a}}^{\bar{m}} \hat{\psi}^{\bar{a}} \left[\partial_{\bar{m}} + \frac{1}{2} \omega_{b\bar{c},\bar{m}} (\psi^b \hat{\psi}^{\bar{c}} - \hat{\psi}^{\bar{c}} \psi^b) + iA_{\bar{m}} \right]. \quad (13.17)$$

Теорема 13.3. На кэлеровых многообразиях голоморфная и антиголоморфная части оператора Дирака (13.16), (13.17) с $A_m = A_{\bar{m}} = 0$ совпадают с точностью до множителя $i\sqrt{2}$ с ковариантными квантовыми суперзарядами (9.11) для системы (9.1) с $W = 0$.

Доказательство. Чтобы сравнить $\mathcal{D}^{\text{гол}}$ с \hat{Q} в уравнении (9.11), перенесём направо оператор $\hat{\psi}^{\bar{b}}$ в выражении (13.16). Это даст дополнительный член $\propto \omega_{\bar{b}b,m}$. Для кэлеровых многообразий, когда

$$\omega_{\bar{b}c,m} = e_{\bar{b}}^{\bar{n}} \partial_m e_{\bar{n}}^{\bar{c}}, \quad \omega_{b\bar{c},\bar{m}} = e_b^n \partial_{\bar{m}} e_n^c$$

[см. уравнение (2.29)], мы выводим

$$\omega_{\bar{b}b,m} = \partial_m \ln \det \bar{e}. \quad (13.18)$$

Аналогичное преобразование для $(\mathcal{D}^{\text{гол}})^{\dagger}$ даст нам дополнительный член $\propto \omega_{b\bar{b},\bar{m}} = \partial_{\bar{m}} \ln \det e$. Эти вклады точно совпадают со структурами, фигурирующими в (9.11). (Напомним, что выражение (9.11) было выведено при упрощающем предположении $\det e = \det \bar{e} = \sqrt{\det h}$.) \square

Предположим теперь наличие абелева калибровочного поля. В частном случае, когда оно имеет вид (9.15),

$$A_M = (i\partial_m W, -i\partial_{\bar{m}} W), \quad (13.19)$$

дополнительные вклады в (13.16) и (13.17) совпадают с точностью до множителя $i\sqrt{2}$ со сдвигами (9.13) суперзарядов (9.11).

В главе 9 (см. теорему 9.2) мы установили, что суперзаряды (9.11) со сдвигом (9.13) отображаются на оператор внешней голоморфной производной твистованного комплекса Дольбо,

$$\partial_W = \partial - \partial \left(W - \frac{1}{4} \ln \det h \right) \wedge, \quad (13.20)$$

и эрмитово сопряжённый оператор. Их можно также отобразить на оператор внешней антиголоморфной производной твистованного комплекса анти-Дольбо,

$$\bar{\partial}_W = \bar{\partial} + \bar{\partial} \left(W + \frac{1}{4} \ln \det h \right) \wedge, \quad (13.21)$$

и его сопряжённый. Приняв всё это во внимание, мы приходим к следующему результату.

Теорема 13.4. Для кэлеровых многообразий оператор Дирака (13.6) с калибровочным полем (13.19) может быть разложен на голоморфную и антиголоморфную части, как в уравнении (13.15). Голоморфную часть можно отобразить на внешнюю голоморфную производную (13.20) твистованного комплекса Дольбо. Антиголоморфную часть можно отобразить на внешнюю антиголоморфную производную (13.21) твистованного комплекса анти-Дольбо.

Тот факт, что комплекс Дольбо отображается на комплекс Дирака и что сумма $\hat{Q}_W + \hat{Q}_W^\dagger$ изоморфна оператору Дирака, был отмечен ранее (см. абзац после теоремы 9.2). В главе 9 мы не доказали этот факт, обещали сделать это в главе 13 и сейчас исполняем своё обещание. Однако формулировка теоремы 13.4 содержит важное ограничение: эквивалентность была доказана только для кэлеровых многообразий.

Возникает естественный вопрос: а какова ситуация для общих комплексных, не обязательно кэлеровых многообразий? Мы покажем сейчас, что подобная эквивалентность (её обобщённая версия) может быть установлена также и в этом случае.

Вышеприведённое доказательство основывалось на разложении (13.15). В общем комплексном случае оно не выполняется для обыкновенного оператора Дирака, ввиду присутствия компонент $\omega_{ab,\bar{m}}$ и $\omega_{\bar{a}\bar{b},m}$ в спиновой связности. Мы можем определить, однако, деформированный оператор Дирака, который включает не только спиновую связность, но и кручения,

$$\mathcal{D}^{\text{круч}} = e_A^M \gamma^A \left(\partial_M + \frac{1}{4} \omega_{BC,M} \gamma^B \gamma^C - \frac{1}{24} C_{MKP} \gamma^K \gamma^P + iA_M \right), \quad (13.22)$$

где конкретный вид C_{MKP} даётся формулой (2.16). Выражение (13.22) есть не что иное, как квантовая версия классического суперзаряда \mathcal{Q}_0 в уравнении (9.61), куда мы также добавили член с калибровочным полем. Как было отмечено в абзаце после (9.61), члены с кручением сокращают неудобные вклады, содержащиеся $\omega_{ab,\bar{m}}$ и $\omega_{\bar{a}\bar{b},m}$ в выражении для $\mathcal{D}^{\text{круч}}$. Оператор $\mathcal{D}^{\text{круч}}$ допускает разложение (13.15), и мы можем утверждать следующее.

Теорема 13.5. Для общего комплекса Дольбо, включающего твистованную внешнюю голоморфную производную (13.20), оператор $\partial_W + \partial_W^\dagger$, где ∂_W^\dagger эрмитово сопряжено к ∂_W , отображается

в деформированный, содержащий кручения оператор Дирака (13.22) с калибровочным полем (13.19).

Таким образом, для комплексного многообразия общего вида можно определить две разные суперсимметричные квантовые задачи.

1. Дираковскую задачу, включающую эрмитовы суперзаряды $-i\mathcal{D}/\sqrt{2}$ и $i\mathcal{D}\gamma^{D+1}/\sqrt{2}$.

2. Задачу Дольбо, включающую эрмитовы суперзаряды, один из которых — деформированный оператор Дирака $-i\mathcal{D}^{\text{Круч}}/\sqrt{2}$, а другой представляет квантовую версию классического суперзаряда \mathcal{Q} в (9.61), переведённую при желании на спинорный язык.

В общем случае гамильтонианы этих двух квантовых задач не одинаковы, хотя для кэлеровых многообразий (и, очевидно, в плоском пространстве) они совпадают.

Напомним на всякий случай, что дираковская суперсимметричная задача определена на любом чётномерном, не обязательно комплексном многообразии, в то время как задача Дольбо обычно рассматривается только на комплексных многообразиях⁴.

§13.2. Магнитное поле на S^2

Мы детально разберём в этом параграфе простейший нетривиальный пример — абелево калибровочное поле на двумерной сфере S^2 . На математическом языке мы имеем здесь дело с частным случаем главного расслоения (см. § 1.3) — линейным расслоением над S^2 .

Важный атрибут главного расслоения — его связность (калибровочное поле). *Напомним:* на каждой карте атласа, описывающего наше многообразие, калибровочное поле есть векторная функция $A_M(x)$, компоненты которой лежат в алгебре Ли, представленной эрмитовыми матрицами. В области перекрытия двух

⁴Мы сказали «обычно», потому что мы видели в § 9.3, что существуют некомплексные многообразия, где комплекс Дольбо может быть определён. К таким многообразиям относится S^4 , которое становится комплексным после выкалывания одной точки. Гамильтониан Дольбо на S^4 действует в гильбертовом пространстве, включающем квадратично интегрируемые волновые функции. Он суперсимметричен.

карт мы должны потребовать, чтобы $A_M^{(\beta)}$ и $A_M^{(\alpha)}$ были связаны калибровочным преобразованием (1.43) (может так случиться, что пройдёт и более жёсткое требование $A_M^{(\beta)} = A_M^{(\alpha)}$, но в общем случае это не так). Для линейных расслоений с группой $U(1)$, когда $g(x) = e^{i\chi(x)}$ и $A_M(x)$ — обыкновенные векторные функции, преобразование (1.42) сводится к

$$A'_M = A_M - \partial_M \chi(x). \quad (13.23)$$

Абелева напряжённость поля $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ (для математиков — кривизна расслоения) инвариантна относительно (13.23).

Сферу S^2 можно покрыть всего двумя картами — северным и южным полушарием, пересекающимися на экваторе, где мы накладываем условие (13.23). Важное замечание состоит в том, что символ $\chi(x)$, фигурирующий в (13.23), не является обязательно однозначно определенной функцией. Групповой элемент $g(x) = e^{i\chi(x)}$ определён однозначно, а $\chi(x)$ — вообще говоря, нет. Мы можем допустить, что при обходе экватора фаза $\chi(x)$ сдвигается на $2\pi q$ с целым q , которое есть топологический инвариант отображения $U(1)$ на экватор сферы.

Рассмотрим теперь интеграл $\int_{S^2} F = \int_{S^2} dA$, где $A = A_M dx^M$. Это интеграл от полной производной, и по теореме Стокса он должен на первый взгляд исчезать, поскольку у сферы нет границы. Однако надо принять в расчёт тот факт, что A_M в северном и южном полушариях могут отличаться, будучи связаны условием (13.23). Вычисляя отдельно интегралы для двух полушарий, используя теорему Стокса и условие (13.23), мы выводим

$$\int_{S^2} F = \oint_{\text{экватор}} \partial_M \chi(x) dx^M = 2\pi q. \quad (13.24)$$

Мы доказали следующую теорему⁵.

Теорема 13.6. Поток магнитного поля $\Phi = \int F$, отвечающего линейному расслоению на S^2 , квантуется согласно (13.24).

Весьма схожий факт был установлен в главе 6: индекс Виттена (6.67) для суперсимметричной системы (6.65), описывающей

⁵Есть некоторый нюанс в её формулировке, который будет прояснён в начале следующего параграфа — см. абзац перед уравнением (13.55).

двумерное движение в магнитном поле, равен $\Phi/(2\pi)$, а так как индекс Виттена есть по определению целое число, поток должен квантоваться.

Но есть и некоторая разница. В главах 5 и 6 мы обсуждали движение на плоскости, а результат (13.24) относится к кривой двумерной сфере. Если говорить о физической интерпретации, мы имеем здесь дело с движением в поле магнитного монополя, помещённого в центр координат в \mathbb{R}^3 (для «круглой» сферы с постоянной напряжённостью поля $F_{MN} \varepsilon^{MN} = \text{const}$). В этом случае радиальная компонента 3-мерного вектор-потенциала равна нулю, электрон, движущийся вдоль магнитного поля, его не чувствует и только угловое движение, движение по S^2 , нетривиально. Квантование магнитного потока означает квантование магнитного заряда m ,

$$em = \frac{q\hbar c}{2}, \quad (13.25)$$

где мы восстановили физические константы e , c , \hbar , входящие в гамильтониан Паули (5.14). Условие квантования (13.25) было выведено 90 лет назад Дираком [122].

Найдём спектр гамильтониана $H = -\mathcal{P}^2/2$, описывающий угловое движение заряженной частицы в поле магнитного монополя. Вместо того, чтобы представить сферу как объединение двух полусфер и налагать условие (13.23) на экваторе, удобно выбрать в качестве одной из карт всю сферу за вычетом северного полюса. Второй картой будет в этом случае служить малая окрестность полюса. На первой карте мы выбираем комплексные стереографические координаты,

$$z = (x + iy)/\sqrt{2}, \quad \bar{z} = (x - iy)/\sqrt{2},$$

и пишем метрику, как в формуле (2.5):

$$ds^2 = \frac{2 dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}. \quad (13.26)$$

Площадь сферы равна

$$A = \int \frac{dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} = 2\pi, \quad (13.27)$$

что соответствует радиусу $R = \sqrt{2}/2$.

Рассмотрим систему СКМ с действием

$$S = \int d\bar{\theta} d\theta dt \left[\frac{\bar{D}\bar{Z}DZ}{4(1+\bar{Z}Z)^2} + W(Z, \bar{Z}) \right]. \quad (13.28)$$

Согласно теореме 13.4 эта задача эквивалентна дираковской задаче на S^2 с калибровочным полем (13.19). Удобен выбор

$$W(Z, \bar{Z}) = -\frac{q}{2} \ln(1 + \bar{Z}Z). \quad (13.29)$$

В этом случае форма

$$F = dA = -2i (\partial\bar{\partial}W) dz \wedge d\bar{z} = \frac{iq dz \wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} \quad (13.30)$$

пропорциональна 2-форме площади $ih dz \wedge d\bar{z} = \sqrt{g} dx \wedge dy$ с коэффициентом q , что есть не что иное, как напряжённость магнитного поля B — одна и та же во всех точках сферы. Интегрируя F по S^2 , учитывая (13.27) и вспоминая теорему 13.6, мы выводим целочисленность q .

К такому же выводу можно прийти, если выразить калибровочное поле (13.19) в декартовых координатах (x, y) . Можно легко убедиться, что циркуляция $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ по маленькому контуру, окружающему северный полюс, равна⁶ $\pm 2\pi B$. На карте, представляющей малую окрестность полюса, калибровочное поле равно нулю, что соответствует условию (13.23), связывающему поля на двух картах с однозначной функцией $g(x) = e^{i\chi}$.

В физической литературе можно встретить и другое объяснение условия квантования (13.25). Сам Дирак не покрывал сферу двумя картами, но рассматривал трехмерную задачу, где калибровочное поле сингулярно на луче, идущем от начала координат на бесконечность. Ненулевая циркуляция $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ на малом контуре, окружающем этот луч, интерпретируется как ненулевой магнитный поток вдоль этого луча (*нити Дирака*). Чтобы эту нить нельзя было экспериментально обнаружить, поток вдоль неё должен составлять целое кратное 2π , а для этого магнитный заряд, помещённый в центре, должен квантоваться.

⁶Со знаком, который зависит от направления циркуляции и с которым нам лень разбираться.

Система (13.28), (13.29) настолько проста, что спектр соответствующего гамильтониана и его собственные функции можно найти аналитически. Квантовые суперзаряды, даваемые суммой (9.11) и (9.13), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= -i(1 + \bar{z}z)\psi \left[\partial - \frac{\bar{z}(1-q)}{2(1+\bar{z}z)} \right], \\ \hat{\bar{Q}} &= -i(1 + \bar{z}z)\hat{\psi} \left[\bar{\partial} - \frac{z(1+q)}{2(1+\bar{z}z)} \right].\end{aligned}\quad (13.31)$$

Они действуют на двухкомпонентные волновые функции⁷

$$\Psi^{\text{КОВ}} = \Psi_{F=0}(\bar{z}, z) + \psi \Psi_{F=1}(\bar{z}, z), \quad (13.32)$$

нормированные с ковариантной мерой

$$d\mu = \sqrt{g} d\bar{z} dz = \frac{d\bar{z} dz}{(1 + \bar{z}z)^2}. \quad (13.33)$$

Операторы \hat{Q} и $\hat{\bar{Q}}$ эрмитово сопряжены с мерой (13.33). Гамильтониан есть, как всегда, $\hat{H} = \{\hat{Q}, \hat{\bar{Q}}\}$. В секторе $F = 0$ он имеет вид

$$\hat{H}_{F=0} = -(1 + \bar{z}z)^2 \partial \bar{\partial} - \gamma(1 + z\bar{z})(\bar{z}\bar{\partial} - z\partial) + \gamma^2 \bar{z}z - \gamma, \quad (13.34)$$

где

$$\gamma = \frac{q-1}{2}. \quad (13.35)$$

Выражение для $\hat{H}_{F=1}$ выглядит аналогично, нужно только поменять местами z и \bar{z} и обратить знак q .

Найдём сначала вакуумные состояния с нулевой энергией. Они должны исчезать под действием как \hat{Q} , так и $\hat{\bar{Q}}$. Пусть q отлично от нуля и положительно. Тогда вакуумные состояния должны иметь нулевой фермионный заряд. В самом деле, если $F = 1$, то $\hat{Q}\Psi$ есть тождественный ноль, в то время как условие $\hat{\bar{Q}}\Psi = 0$ даёт уравнение

$$\left[\bar{\partial} - \frac{z(1+q)}{2(1+\bar{z}z)} \right] \Psi_{F=1}^{(0)}(\bar{z}, z) = 0, \quad (13.36)$$

которое не имеет нормируемых решений.

⁷Здесь F не форма напряжённости поля, а фермионный заряд — собственное значение оператора $\psi \hat{\psi} = \psi \frac{\partial}{\partial \psi}$.

Состояния в секторе $F = 0$ обращаются тождественно в ноль под действием \hat{Q} . Действие \hat{Q} нетривиально, оно даёт уравнение

$$\left[\partial + \frac{\gamma \bar{z}}{1 + \bar{z}z} \right] \Psi_{F=0}^{(0)}(\bar{z}, z) = 0. \quad (13.37)$$

У этого уравнения имеется в точности q независимых нормированных решений:

$$\Psi_{F=0}^{(0)} = (1 + \bar{z}z)^{-\gamma}, \bar{z}(1 + \bar{z}z)^{-\gamma}, \dots, \bar{z}^{q-1}(1 + \bar{z}z)^{-\gamma} \quad (13.38)$$

(мы не обращаем внимания на нормировочные коэффициенты). Индекс Виттена этой системы равен q .

Рассмотрим теперь ненулевые отрицательные q . Можно повторить вышеприведённое рассуждение с единственной разницей, что в этом случае нет состояний с нулевой энергией в секторе $F = 0$, но имеется $|q|$ независимых вакуумных состояний в секторе $F = 1$. Индекс Виттена равен $-q$.

Наконец, если $q = 0$, состояния с нулевой энергией в спектре отсутствуют и⁸ $I_W = 0$.

Волновые функции (13.38) (и также волновые функции возбуждённых состояний, которые мы будем обсуждать чуть позже) определены на карте, покрывающей всю сферу за исключением полюса. Фактически если говорить о функциях $(1 + \bar{z}z)^{-\gamma}, \dots, \bar{z}^{q-2}(1 + \bar{z}z)^{-\gamma}$, в область их определения можно включить точку $z = \infty$, где эти функции обращаются в ноль. Но функция $\bar{z}^{q-1}(1 + \bar{z}z)^{-\gamma}$ в ноль не обращается и не стремится при $z \rightarrow \infty$ к определённому значению.

Впрочем, это само по себе не так страшно. Вспомним о второй карте в нашем атласе и о том, что мы имеем дело с расщеплением. Северный полюс лежит на второй карте. Волновые функции на разных картах могут различаться, но они должны быть связаны калибровочным преобразованием, $\Psi' = e^{i\chi} \Psi$, с тем же самым $\chi(x)$, которое входит в закон преобразования (13.23) для калибровочного потенциала. Тогда ковариантные производные $(\partial_M + iA_M)\Psi$ на двух картах связаны тем же самым фазовым фактором $e^{i\chi}$, что и Ψ .

⁸Заметим в скобках, что то же утверждение следует из так называемой формулы Лихнеровича.

В нашем случае волновые функции на двух картах связаны условием

$$\Psi_{\text{полюс}}(\bar{z}, z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\gamma} \Psi_{\text{неполюс}}(\bar{z}, z), \quad (13.39)$$

и можно убедиться, что левая часть (13.39) несингулярна при $z = \infty$ для всех функций спектра.

Полный спектр был найден в работе [123]. Рассмотрим сперва сектор $F = 0$. Гамильтониан (13.34) коммутирует с оператором углового момента $\hat{m} = \bar{z}\bar{\partial} - z\partial$, и собственные состояния характеризуются главным квантовым числом $n = 0, 1, \dots$ и целыми значениями момента:

$$\begin{aligned} m &= -n, \dots, n + 2\gamma, & \text{если } q \geq 1, \\ m &= -n + 2\gamma, \dots, n, & \text{если } q \leq 1. \end{aligned} \quad (13.40)$$

Энергии не зависят⁹ от m :

$$\begin{aligned} E_n^{(q)F=0} &= n(n+q), & \text{если } q \geq 1, \\ E_n^{(q)F=0} &= (n+1)(n+1-q), & \text{если } q \leq 1. \end{aligned} \quad (13.41)$$

В качестве иллюстрации мы изобразили на рис. 13.1 спектр гамильтониана (13.34) для $q = 3$.

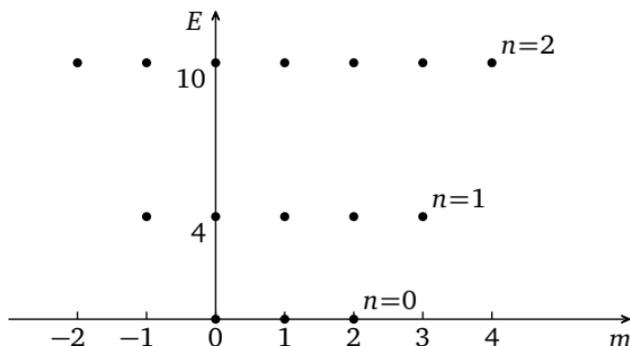


Рис. 13.1. Спектр гамильтониана (13.34) для магнитного заряда $q = 3$ в секторе $F = 0$. Он содержит три основных состояния с нулевой энергией

Отметим равенство

$$E_n^{2-q} = E_n^q + q - 1, \quad (13.42)$$

⁹Это вырождение следует из сферической симметрии — вспомните хорошо известное вырождение уровней по m при данном l в кулоновской задаче.

которое естественно следует из (13.34) (переставьте там местами z и \bar{z} и поменяйте знак γ). Собственные функции (окрещённые монополярными гармониками [124, 125]) имеют вид¹⁰

$$\begin{aligned}\Psi_{mn}^{(q \geq 1) F=0} &= e^{im\phi} (1-t)^{m/2} (1+t)^{\gamma-m/2} P_n^{m, 2\gamma-m}(t), \\ \Psi_{mn}^{(q \leq 1) F=0} &= e^{im\phi} (1-t)^{-m/2} (1+t)^{m/2-\gamma} P_n^{-m, m-2\gamma}(t),\end{aligned}\quad (13.43)$$

где

$$t = \cos \theta = \frac{1 - \bar{z}z}{1 + \bar{z}z}, \quad e^{i\phi} = \sqrt{\bar{z}/z} \quad (13.44)$$

и $P_n^{\alpha, \beta}(t)$ — полиномы Якоби¹¹:

$$P_n^{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (t+1)^k (t-1)^{n-k}. \quad (13.45)$$

Собственные функции и собственные значения в секторе $F=1$ даются теми же выражениями с заменой $q \rightarrow -q$, $m \rightarrow -m$, $z \leftrightarrow \bar{z}$ (разумеется, они содержат также дополнительный грасманов фактор ψ). Когда $E \neq 0$, они получаются из функций (13.43) действием суперзаряда \hat{Q} . Обратное, собственные функции возбуждённых состояний в секторе $F=0$ можно получить из состояний в секторе $F=1$ действием \hat{Q} .

Если выбрать $q=1$ в секторе $F=0$ или $q=-1$ в секторе $F=1$, выражения упрощаются. В этом случае $\gamma=0$ и гамильтониан сводится к обыкновенному лапласиану, а собственные

¹⁰Фактически первая строчка в уравнении (13.43) описывает также состояния с $q < 1$, как можно убедиться, используя тождества [125]

$$\begin{aligned}P_{n+\alpha}^{-\alpha, \beta}(t) &= 2^{-\alpha} (t-1)^\alpha \frac{n!(n+\alpha+\beta)!}{(n+\alpha)!(n+\beta)!} P_n^{\alpha, \beta}(t), \\ P_{n+\beta}^{\alpha, -\beta}(t) &= 2^{-\beta} (t+1)^\beta \frac{n!(n+\alpha+\beta)!}{(n+\alpha)!(n+\beta)!} P_n^{\alpha, \beta}(t),\end{aligned}$$

справедливые для целых α, β . Мы предпочли привести две формулы, для $q \geq 1$ и для $q < 1$, чтобы в обоих случаях целые n пробегали значения от нуля до бесконечности.

¹¹Выпишем явные выражения для первых трёх полиномов:

$$\begin{aligned}P_0^{\alpha, \beta}(t) &= 1, \quad P_1^{\alpha, \beta}(t) = \alpha + 1 + \frac{\alpha + \beta + 2}{2}(t-1), \\ P_2^{\alpha, \beta}(t) &= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} + \frac{(\alpha+2)(\alpha+\beta+3)}{2}(t-1) + \frac{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)}{8}(t-1)^2.\end{aligned}$$

функции сводятся к обыкновенным сферическим гармоникам. Спектр (13.41) принимает тогда привычный вид $E = n(n + 1)$.

13.2.1. Дробный магнитный заряд

Мы обсуждали до сих пор в этом параграфе линейное расслоение на S^2 , и в таком случае магнитный заряд должен быть целым. То же в какой-то степени относится к обыкновенной шрёдингеровской задаче с гамильтонианом Паули (13.10), куда входит поле магнитного монополя: при нецелом q волновая функция становится сингулярной по крайней мере в одной точке. Сингулярность остаётся, даже если мы позволим волновым функциям не совпадать на разных картах, но быть связанными калибровочным преобразованием с однозначно определённым $g(x) = e^{i\chi(x)}$. Используя физический язык, мы можем сказать, что при нецелом q дираковская нить, связанная с сингулярностью $A_M(x)$, становится наблюдаемой!

Это выглядит странновато, и вот почему дробные заряды обычно не рассматриваются, но мы хотим подчеркнуть: эти странности ещё *не означают*, что осмысленную спектральную задачу нельзя в этом случае определить. Вспомните § 9.3, где мы показали, что, несмотря на то, что многообразие S^4 не комплексно, можно прекрасно определить комплекс Дольбо на многообразии $S^4 \setminus \{\cdot\}$ и соответствующая спектральная задача суперсимметрична.

Верно ли то же для дираковской задачи с дробным зарядом на S^2 ? Можно ли определить её на $S^2 \setminus \{\cdot\}$ так, чтобы гамильтониан был по-прежнему суперсимметричен? Ответы на два эти вопроса различны [126].

Теорема 13.7. 1. *Осмысленную спектральную задачу можно определить, даже если магнитный заряд нецелый.*

2. *Эта задача не суперсимметрична.*

Доказательство. Чтобы определить спектральную задачу, мы должны определить гильбертово пространство. Попытаемся определить его так же, как мы это сделали в § 9.3 для S^4 и включить в него все квадратично интегрируемые функции с мерой (13.33). Приняв это условие, рассмотрим спектр гамильтониана (13.34), не считая более q целым. Мы получим два семейства

формальных решений уравнения Шрёдингера:

$$\Psi_{nm} = \bar{z}^m (1+t)^\gamma P_n^{m, 2\gamma-m}(t) \quad (13.46)$$

с энергиями $E_n = n(n+1+2\gamma)$ и

$$\tilde{\Psi}_{nm} = \bar{z}^m (1+t)^{m-\gamma} P_n^{m, m-2\gamma}(t) \quad (13.47)$$

с энергиями $E_n = (n+m+1)(n+m-2\gamma)$. Целые n, m принимают *a priori* значения $n=0, 1, \dots; m=0, \pm 1, \dots$, но мы должны оставить в спектре только нормируемые функции.

Для целых q нормируемые волновые функции в (13.47) и (13.46) совпадают между собой и с функциями (13.43). Например, три состояния с нулевой энергией при $q=3$, фигурирующие на рис. 13.1,

$$\Psi_{1,2,3} = \frac{1}{1+\bar{z}z}, \quad \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}z}, \quad \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}z}, \quad (13.48)$$

описываются уравнением (13.46), если там выбрать $n=0, m=0, 1, 2$, и также уравнением (13.47), если там выбрать $n=2, m=0; n=m=1$ и $n=0, m=2$.

Но для дробных зарядов возникает проблема. Волновые функции (13.46) и (13.47) в этом случае не совпадают. И дело не только в этом. Положим, например, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{4}$ и $n=m=0$ в обоих уравнениях. Мы получим две собственные функции:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= (1+t)^{-1/4} \propto \frac{1}{(1+\bar{z}z)^{1/4}} \quad \text{с энергией } E=0 \text{ и} \\ |2\rangle &= (1+t)^{1/4} \propto (1+\bar{z}z)^{1/4} \quad \text{с энергией } E=\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (13.49)$$

Функция $|1\rangle$ сингулярна на северном полюсе $t=-1$, но квадратично интегрируема. Энергии состояний (13.49) различны, но эти состояния не взаимно ортогональны. А это значит, что гамильтониан неэрмитов! Это можно также увидеть, если сравнить матричные элементы $\langle 1|\hat{H}|2\rangle$ и $\langle 2|\hat{H}|1\rangle$. Они различаются на интегралы от полных производных, которые в данном случае нулю не равны:

$$\begin{aligned} \langle 1|\hat{H}|2\rangle - \langle 2|\hat{H}|1\rangle &\sim \int \partial \left[\frac{z}{1+\bar{z}z} \right] dz d\bar{z} + \int \bar{\partial} \left[\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}z} \right] dz d\bar{z} \sim \\ &\sim \int d^2x \partial_i \left[\frac{x_i}{r^2} \right] \neq 0. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Если посмотреть внимательно на главную причину этого рассогласования, можно увидеть, что она состоит в том, что мы включили в гильбертово пространство сингулярные функции. Чтобы устранить рассогласование, *переопределим* гильбертово пространство и включим в него только несингулярные на S^2 функции. Состояние $|1\rangle$ в такое редуцированное пространство не входит. У нас нет тогда проблем с эрмитовостью, и спектральная проблема становится хорошо определённой. Она определена в секторе $F = 0$ и также в секторе $F = 1$.

Однако эта спектральная проблема не суперсимметрична. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим действие суперзаряда \hat{Q} в уравнении (13.31) на регулярную, принадлежащую нашему гильбертову пространству функцию $|2\rangle$. Мы получаем

$$\hat{Q}|2\rangle \sim \psi(1 + \bar{z}z) \left[\partial - \frac{\bar{z}}{4(1 + \bar{z}z)} \right] \frac{1}{(1 + \bar{z}z)^{1/4}} \sim \frac{\psi\bar{z}}{(1 + \bar{z}z)^{1/4}}. \quad (13.51)$$

Но *эта* функция сингулярна при $z = \infty$! Другими словами, гильбертово пространство регулярных функций, где мы определили наш гамильтониан, не суперсимметрично: результаты действия суперзаряда \hat{Q} на функции из этого пространства в самом этом пространстве могут не лежать. Как следствие, некоторые собственные состояния гамильтониана (например, состояние $|2\rangle$) не имеют суперпартнёров и суперсимметрия нарушается. \square

Похожее явление (потеря кажущейся суперсимметрии ввиду того, что суперпартнёры некоторых спектральных состояний из спектра выпадают) известно и в других системах. Простейший пример [127] — это, видимо, виттеновский суперсимметричный квантовомеханический гамильтониан (5.28),

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2 + [W'(x)]^2}{2} + \frac{1}{2}W''(x)(\psi\hat{\psi} - \hat{\psi}\psi), \quad (13.52)$$

с суперпотенциалом $W(x) = \frac{\omega x^2}{2} - \ln x$, определённый на луче $x \geq 0$. В этом случае гамильтониан бозонного сектора $F = 0$ есть

$$\hat{H}_B = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} - \frac{3\omega}{2}. \quad (13.53)$$

Основное состояние $\Psi_0 \propto \exp\{-\omega^2 x^2/2\}$ имеет отрицательную энергию $E_0 = -\omega$, что, очевидно, не совместимо с суперсимметрией. Парадокс разрешается, если заметить, что, в отличие

от Ψ_0 , функция $\hat{Q}\Psi_0$ не принадлежит исходному гильбертовому пространству: она сингулярна и не интегрируема квадратично. Чтобы сделать спектр суперсимметричным, мы должны в этом случае наложить дополнительное условие на волновые функции и включить в гильбертово пространство только функции, обращающиеся в ноль при $x = 0$. Тогда низшее состояние спектра, $\tilde{\Psi}_0(x) = x\Psi_0(x)$, имеет нулевую энергию.

Но для магнитного поля с нецелым потоком нет способа сделать гамильтониан Паули суперсимметричным. Мы показали только что, что гильбертово пространство несингулярных волновых функций на S^2 не суперсимметрично, но то же относится к любому другому расширенному или редуцированному пространству. Мы отсылаем читателя к статье [126] за дальнейшими деталями.

§ 13.3. Линейные расслоения на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Другое имя для двумерной сферы — $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. В предыдущем параграфе мы показали, что модель (13.28), (13.29) сохраняет суперсимметрию при квантовании в том и только том случае, когда топологический заряд q есть целое число. При этом неважно, «круглая» сфера или «мятая», однородно магнитное поле или нет. Действительно, мы знаем из теоремы 9.2, что для кэлеровых многообразий (а $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ — кэлерово) комплекс Дирака с калибровочным полем (13.19) отображается на твистованный комплекс Дольбо со «сдвинутым» калибровочным полем

$$\tilde{A}_M = \left[i\partial_m \left(W - \frac{1}{4} \ln \det h \right), -i\bar{\partial}_{\bar{m}} \left(W - \frac{1}{4} \ln \det h \right) \right]. \quad (13.54)$$

На комплексных многообразиях «чистый» гамильтониан Дольбо, $\hat{H}^D = \{\partial, \partial^\dagger\}$, хорошо определён и эрмитов. То же относится к твистованному гамильтониану Дольбо с калибровочным полем (13.54), если \tilde{A}_M есть глобально определённая связность расслоения и можно свободно переходить от карты к карте. Тогда согласно теореме 13.6 поток $\int_{S^2} \tilde{F}$ квантуется.

Стоит подчеркнуть, что истинная связность линейного расслоения на S^2 , для которой сформулирована и доказана теорема 13.6 — это скорее именно \tilde{A}_M , а не A_M : мы стартуем с чистого

комплекса Дольбо, хорошо определённого на всех комплексных многообразиях, и твистуем его. Но в данном случае это неважно, поскольку чистый «гравитационный» комплекс Дирака тоже хорошо определён на S^2 , а потоки полей F и \tilde{F} связаны соотношением

$$\int_{S^2} F = \int_{S^2} \tilde{F} + 2\pi. \quad (13.55)$$

Если квантуется один, квантуется и другой.

Перейдём теперь к $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n>1}$. Каждое такое многообразие может быть склеено из $n + 1$ дисков комплексной размерности n (см. стр. 62). На каждой такой карте метрику можно выбрать в виде (2.80) (метрика Фубини—Штуди):

$$h_{m\bar{p}} = \frac{1}{1 + \bar{z}^k z^k} \left(\delta_{m\bar{p}} - \frac{z^p \bar{z}^{\bar{m}}}{1 + \bar{z}^k z^k} \right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (13.56)$$

Включим теперь калибровочное поле с препотенциалом

$$W = \frac{q}{2(n+1)} \ln \det h. \quad (13.57)$$

Покажем, что параметр q не произволен, но квантуется. В этом параграфе мы докажем это чисто геометрическими рассуждениями, а в следующей главе мы наденем наши очки и выведем квантование q , используя суперсимметрию.

Теорема 13.8. *Чтобы поле (13.54) с W , записанным в уравнении (13.57), представляло хорошо определённое линейное расслоение (так что твистованный комплекс Дольбо тоже хорошо определён), q должно быть целым, если n нечётно, и полуцелым, если n чётно.*

Доказательство. Из уравнения (13.56) следует, что

$$\det h = \frac{1}{(1 + \bar{z}^k z^k)^{n+1}}. \quad (13.58)$$

Тогда уравнение (13.54) даёт

$$\tilde{A}_m = i \left(\frac{n+1}{4} - \frac{q}{2} \right) \frac{\bar{z}^m}{1 + \bar{z}^k z^k} \quad (13.59)$$

и комплексно сопряжённое выражение для $\tilde{A}_{\bar{m}}$. Это поле определено на карте C_0 , включающей начало координат $z^k = 0$, но не

включающей точки $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, где одно из z^k обращается в бесконечность. Чтобы описать всё многообразие, требуется ещё n дополнительных карт с координатами $C_1: (u^1 = 1/z^1, u^{2,\dots,n} = z^{2,\dots,n}/z^1)$, $C_2: (v^2 = 1/z^2, v^{1,3,\dots,n} = z^{1,3,\dots,n}/z^2)$ и т. д. Мы хотим продолжить \tilde{A}_M на эти карты, осуществив калибровочные преобразования (13.23) в областях перекрытия карт таким образом, что преобразованные поля на C_1, C_2, \dots не будут сингулярны.

В пределе $z^1 \rightarrow \infty$ калибровочное поле (13.59) ведёт себя как

$$\tilde{A}_1 \sim \frac{i\alpha}{z^1}, \quad \tilde{A}_2 \sim \frac{i\alpha z^2}{z^1 z^1}, \quad \tilde{A}_3 \sim \frac{i\alpha z^3}{z^1 z^1}, \quad \dots, \quad (13.60)$$

где $\alpha = (n+1)/4 - q/2$.

На первый взгляд оно не сингулярно и дополнительных калибровочных преобразований не требуется, но необходимо вспомнить, что \tilde{A}_M — ковариантный вектор, который преобразуется при замене переменных согласно (1.4). Мы видим тогда, что $\tilde{A}_{2,3,\dots}(u^k)$ регулярны в точке $u^1 = 0$, но $\tilde{A}_1(u^k) \sim -i\alpha/u^1$ сингулярно и калибровочное преобразование (13.23), убирающее эту сингулярность, необходимо.

Прделаем это в области $C_0 \cap C_1$ с топологией $S^1 \times \mathbb{C}^{n-1}$. Функция $g(x^M) = e^{i\chi(x^M)}$ определяет отображение $S^1 \times \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow U(1)$, которое имеет те же топологические классы, что отображение $S^1 \rightarrow U(1)$, которое было релевантно для $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Допустимы только определённые дискретные значения α . Чтобы их найти, вспомним нашу конвенцию

$$u^1 = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{A}_1 = \frac{\tilde{A}_x - i\tilde{A}_y}{\sqrt{2}}. \quad (13.61)$$

Тогда сингулярная часть \tilde{A} есть

$$\tilde{A}_x = -\frac{2\alpha y}{x^2 + y^2}, \quad \tilde{A}_y = \frac{2\alpha x}{x^2 + y^2}. \quad (13.62)$$

От сингулярности можно избавиться, проделав калибровочное преобразование (13.23) с $\chi(x^M) = -2\alpha \arctg(x/y)$. И чтобы $e^{i\chi(x^M)}$ было однозначно определено, 2α должно быть целым. Другими словами,

$$q - \frac{n+1}{2} = \text{целое число}, \quad (13.63)$$

откуда следует утверждение теоремы. \square

Замечание. Из этой теоремы следует отмеченный ранее факт: $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ с чётным n не допускает спинорную структуру: «чисто гравитационный» оператор Дирака (13.6) с $A_M = 0$ (что означает $q = 0$) плохо определён на этом многообразии — для этого имеется топологическое препятствие. Если n нечётно, значение $q = 0$ допустимо.

§13.4. Неабелевы поля. Инстантоны на S^4

13.4.1. Неабелевы расслоения

В главах 9, 12 и в первой части этой главы мы в основном обсуждали абелевы калибровочные поля — линейные расслоения на математическом языке. Но существуют также неабелевы главные расслоения. Связность $A_M(x)$ лежит тогда в алгебре Ли произвольной калибровочной группы \mathcal{G} . Связности на различных картах \mathcal{C}_j связаны¹² калибровочным преобразованием (1.42), где $g(x)$ — элементы \mathcal{G} , однозначно определённые в области перекрытия карт $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k$. Интересная математика (и физика) возникает, когда отображения $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k \rightarrow \mathcal{G}$ нетривиальны. Для простой неабелевой \mathcal{G} это обычно происходит, когда размерность многообразия есть $D = 4$ или больше. Если $D = 4$ (наиболее интересный случай для физических приложений), области перекрытия могут иметь топологию S^3 . Топологически нетривиальные отображения отвечают тогда нетривиальным элементам $\pi_3(\mathcal{G})$.

Отметим, что нетривиальная топология неабелевых расслоений может возникать и в других ситуациях. Элементы центра $Z_{\mathcal{G}}$ группы \mathcal{G} не преобразуют поля, лежащие в присоединённом представлении. И если в теории наличествуют только такие поля, мы фактически имеем дело не с \mathcal{G} , а с $\mathcal{G}/Z_{\mathcal{G}}$. Фундаментальная группа $\mathcal{G}/Z_{\mathcal{G}}$ может быть нетривиальной. Например, для унитарных групп $\pi_1[SU(N)/\mathbb{Z}_N] = \mathbb{Z}_N$. Это приводит к нетривиальным неабелевым расслоениям также на двумерных многообразиях. С ними связана интересная физика, относящаяся к двумерным неабелевым калибровочным теориям, где фермионы лежат в присоединённом представлении, как и калибровочные поля [128]. Но подобные сложности лежат за пределами нашей книги.

¹²На то они и связности.

Мы рассмотрим здесь только простейшее неабелево расслоение с базой S^4 и калибровочной группой $\mathcal{G} = SU(2)$.

Сфера S^4 покрывается двумя картами — северным и южным полушариями. Область перекрытия имеет топологию S^3 . Топологически нетривиальные расслоения характеризуются целым числом — элементом $\pi_3[SU(2)] = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Существует красивое алгебраическое представление для этого топологического инварианта, аналог выражения

$$q = -\frac{i}{2\pi} \int_{S^1} g^{-1} dg, \quad g \in U(1) \quad (13.64)$$

для отображения $S^1 \rightarrow U(1)$ [ср. (13.24)].

Теорема 13.9. *Топологический инвариант отображения $S^3 \rightarrow SU(2)$ даётся выражением*

$$q = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr} \{g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg\}, \quad g \in SU(2). \quad (13.65)$$

Доказательство. Рассмотрим сперва подобный интеграл по самой группе $SU(2)$:

$$q_{SU(2)} = \frac{1}{24\pi^2} \int_{SU(2)} \text{Tr} \{g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg\}. \quad (13.66)$$

Подынтегральное выражение в (13.66) является 3-формой $d\mu$, инвариантной относительно групповых вращений,

$$d\mu(g\alpha) = d\mu(\alpha g) = d\mu(g), \quad (13.67)$$

где α — произвольная постоянная матрица $SU(2)$. С точностью до коэффициента имеется всего одна такая 3-форма — форма *инвариантного объёма*. Коэффициент $1/(24\pi^2)$ был выбран так, чтобы интеграл (13.66) был равен единице.

Так как интеграл не зависит от параметризации, чтобы убедиться, что и в самом деле $q_{SU(2)} = 1$, можно вычислить его явно в любой удобной параметризации. В качестве таковой можно, например, взять $g(\xi) = \xi_4 + i\sigma_j \xi_j$ с условием $\xi_4^2 + \xi^2 = 1$. Мы оставляем это вычисление читателю¹³.

¹³Удобно проинтегрировать только по половине группы, положив $\xi_4 = \sqrt{1 - \xi^2}$, и умножить потом результат на 2.

Вернёмся к интегралу (13.65) и сделаем там замену переменных от координат \mathbf{x} , параметризующих S^3 , к координатам ξ , параметризующих $SU(2)$. Подынтегральное выражение приобретает фактор $|\partial\mathbf{x}/\partial\xi|$ — якобиан этого преобразования. А сам интеграл умножается на целое число — степень отображения $S^3 \rightarrow SU(2)$. Степень отображения может быть положительной, отрицательной (например, при $\mathbf{x} = -\xi$) или нулём. \square

Мы можем доказать теперь следующую важную теорему.

Теорема 13.10. *Рассмотрим главное расслоение на S^4 с калибровочной группой $SU(2)$. Тогда интеграл*

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{Tr}\{F \wedge F\}, \quad (13.68)$$

где $F = dA + iA \wedge A$ есть 2-форма напряжённости поля [см. уравнение (1.47)], является целым числом.

Инвариант (13.68) называется числом Понтрягина. Он представляет интеграл от второго класса Чженя $\text{Tr}\{F \wedge F\}/(8\pi^2)$ (а 2-форма $F/(2\pi)$, пропорциональная напряжённости магнитного поля, интеграл от которой по компактному 2-мерному многообразию является целым числом, называется первым классом Чженя)¹⁴.

Доказательство. Справедливо тождество¹⁵

$$F \wedge F = dK, \quad (13.69)$$

где $K = A \wedge dA + \frac{2i}{3} A \wedge A \wedge A$.

¹⁴Мы изучаем здесь калибровочные поля на односвязном многообразии S^4 , где индекс Понтрягина (13.68) является, как мы доказали, целым. Но если фундаментальная группа 4-мерного многообразия и фундаментальная группа области перекрытия карт нетривиальны (например, в случае T^4), допустимы конфигурации с дробным числом Понтрягина. Такие конфигурации (*тороны*) были впервые обнаружены 'т Хофтом [129].

¹⁵Член $\propto A \wedge A \wedge A \wedge A$ в $F \wedge F$ обращается в ноль ввиду $t^a t^b t^c t^d = 0$. Последнее свойство очевидно для $SU(2)$, где имеется всего три генератора, а для произвольной компактной группы оно следует из тождества Якоби для структурных констант:

$$f^{abe} f^{cde} + f^{ace} f^{dbe} + f^{ade} f^{bce} = 0.$$

По теореме Стокса интеграл (13.68) пропорционален интегралу $\int \text{Tr}\{K\}$ по границе. У S^4 нет границы, и кажется, что (13.68) обращается в ноль. Вспомним, однако, что наша сфера S^4 описывается как объединение северного и южного полушария, граничащих по экватору S^3 , и что калибровочные поля на двух этих картах не совпадают, но связаны калибровочным преобразованием

$$A' = (gA + i dg)g^{-1}. \quad (13.70)$$

Тогда интеграл (13.68) по всей сфере S^4 равен разности двух интегралов (инвариантов Чженя—Саймонса),

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}\{K'\} - \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}\{K\}. \quad (13.71)$$

Короткое вычисление даёт

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr} \left[-id(dg \wedge Ag^{-1}) - \frac{1}{3} dg \cdot g^{-1} \wedge dg \cdot g^{-1} \wedge dg \cdot g^{-1} \right]. \quad (13.72)$$

Здесь первый член представляет интеграл от полной производной, который обращается в ноль (мы сейчас находимся на одной из карт, где A определено однозначно), а второй член совпадает с точностью до знака с инвариантом (13.65). Это целое число. \square

13.4.2. Самодуальные поля. Полудинамические переменные

Особенно интересный класс топологически нетривиальных полей на S^4 представляют самодуальные и антисамодуальные поля, удовлетворяющие условиям

$$F_{MN} = \pm \tilde{F}_{MN} = \pm \frac{1}{2} E_{MNPQ} F^{PQ} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g} \varepsilon_{MNPQ} F^{PQ}. \quad (13.73)$$

Они интересны как с физической, так и с математической точки зрения. Физический интерес проистекает из следующего примечательного факта.

Теорема 13.11. (Анти)самодуальные калибровочные поля реализуют минимум евклидова функционала действия¹⁶

$$S = \frac{1}{2} \int \text{Tr} \{F_{MN} F^{MN}\} \sqrt{g} d^4x \quad (13.74)$$

в данном топологическом классе.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$A = \int \text{Tr} \{(F_{MN} - \tilde{F}_{MN})(F^{MN} - \tilde{F}^{MN})\} \sqrt{g} d^4x. \quad (13.75)$$

Функционал A положительно определен, и, следовательно,

$$S \geq \frac{1}{2} \int \text{Tr} \{F_{MN} \tilde{F}^{MN}\} \sqrt{g} d^4x. \quad (13.76)$$

Интеграл в правой части — не что иное, как число Понтрягина q в (13.68), умноженное на $8\pi^2$. Очевидно, что, если $F_{MN} = \tilde{F}_{MN}$ и q положительно, неравенство в (13.76) становится равенством и действие принимает свое минимальное значение.

Если $q < 0$, надо рассмотреть функционал

$$B = \int \text{Tr} \{(F_{MN} + \tilde{F}_{MN})(F^{MN} + \tilde{F}^{MN})\} \sqrt{g} d^4x, \quad (13.77)$$

откуда следует, что $S \geq 8\pi^2|q|$. Минимум действия реализуется для антисамодуальных полей, $F = -\tilde{F}$. \square

Если полевая конфигурация реализует минимум действия, она является решением классических уравнений движения. И та-

¹⁶В главе 4 мы обсуждали только функционалы действия типа (4.15), которые возникают в классической механике. Функционал (13.74) описывает действие 4-мерной полевой теории, так называемой теории Янга—Миллса. Теории, включающие 4-мерные неабелевы калибровочные поля, исключительно важны для физики: динамика этих полей составляет главное содержание стандартной модели — теории сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Множитель $1/2$ в (13.74) (который, конечно, не влияет на содержание теоремы) есть обычная физическая нормировка, хорошо знакомая читателю-физику. А читатель-математик может просто проигнорировать эту теорему и примечание к ней.

кие решения, очевидно, представляют большой физический интерес¹⁷.

Математический интерес (анти)самодуальных конфигураций состоит в том, что соответствующие сигма-модели обладают расширенной суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$. В самом деле, если мы выколем на S^4 одну точку, мы получаем конформно-плоское 4-мерное многообразие, которое есть НКТ (см. § 9.3), и мы знаем из теоремы 12.11, что включение самодуального поля не портит суперсимметрию $\mathcal{N} = 4$ определённой на нём сигма-модели.

Внимательный читатель может здесь запротестовать: теорема 12.11 была доказана только для абелевых полей, а сейчас мы обсуждаем неабелев случай! Однако существует неабелевое обобщение этой теоремы. В частности, верно следующее наблюдение [121].

Теорема 13.12. *Рассмотрим конформно-плоское 4-мерное многообразие с метрикой*

$$ds^2 = \frac{dx^M dx^M}{f^2(x)}, \quad (13.78)$$

где, следуя плохой привычке, приобретённой в § 9.3, мы не различаем ковариантные и контравариантные индексы. Рассмотрим матричные квантовые суперзаряды

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \hat{Q}^a &= (\psi \sigma_M^\dagger)^a (\hat{P}_M + A_M) f + i \partial_M f (\psi \sigma_M^\dagger)^a \psi_k \hat{\psi}^k, \\ \sqrt{2} \hat{Q}_a &= f (\sigma_M \hat{\psi})_a (\hat{P}_M + A_M) - i \psi_k \hat{\psi}^k (\sigma_M \hat{\psi})_a \partial_M f, \end{aligned} \quad (13.79)$$

где $\hat{P}_M = -i \partial_M$, A_M — эрмитовы матрицы, лежащие в какой-либо простой или полупростой алгебре Ли \mathfrak{g} , и $(\sigma_M)_{aj} = (\sigma, i)_{aj}$, $(\sigma_M^\dagger)^{ja} = (\sigma, -i)^{ja}$, как в формуле (3.9). Утверждение состоит в том, что эти суперзаряды удовлетворяют алгебре расширенной суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$ в том и только том случае, когда напряжённость поля $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + i[A_M, A_N]$ самодуальна.

Можно написать аналогичную суперсимметричную $\mathcal{N} = 4$ систему, включающую антисамодуальное F_{MN} . Суперзаряды такой

¹⁷Правда, мы живём не в евклидовом рассматриваемом здесь пространстве, а в пространстве Минковского, но и знание евклидовых решений весьма полезно для вычисления конкретных наблюдаемых физических эффектов. Специалисты по физике высоких энергий это знают...

системы отличаются от суперзарядов (13.79) перестановкой σ_M и σ_M^\dagger . Это эквивалентно перестановке двух спинорных представлений в $SO(4)$.

Доказательство. Это наблюдение можно проверить прямым вычислением¹⁸, но оно является частным случаем более общей теоремы 13.13, которая будет доказана в конце главы. \square

Сделаем следующие замечания.

- Гамильтониан, соответствующий суперзарядам (13.79), имеет вид¹⁹

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2}f(\hat{P}_M + A_M)^2 f - \frac{i}{4}f^2 F_{MN} \psi \sigma_M^\dagger \sigma_N \bar{\psi} - \\ & - \frac{i}{2}f \partial_M f (\hat{P}_N + A_N) \psi [\sigma_M^\dagger, \sigma_N] \bar{\psi} + \\ & + f \partial^2 f \left[\psi_j \hat{\psi}^j - \frac{1}{2}(\psi_j \hat{\psi}^j)^2 \right]. \end{aligned} \quad (13.81)$$

- При $f = 1 + x_M^2/2$ метрика (13.78) совпадает с точностью до множителя с метрикой (13.26) и описывает S^4 . Если калибровочное поле отсутствует, суперзаряды (13.79) эквивалентны квантовой версии суперзарядов (9.81), (9.82).
- При $A_M = 0$ гамильтониан (13.81) совпадает с точностью до множителя с квадратом оператора Дирака (13.22), куда включены ненулевые кручения.

¹⁸Для этой цели удобно использовать тождества

$$\begin{aligned} \sigma_{(M} \sigma_{N)}^\dagger = \delta_{MN}, \quad \sigma_{[M} \sigma_{N]}^\dagger = i \bar{\eta}_{MN}^p \sigma_p, \quad \sigma_{[M}^\dagger \sigma_{N]} = i \eta_{MN}^p \sigma_p, \\ (\sigma_{[M}^\dagger)^{ja} (\sigma_{N]}^{\dagger})_{bk} = \frac{1}{2} (\sigma_{[M}^\dagger \sigma_{N]}^{\dagger})^j_k \delta_b^a + \frac{1}{2} (\sigma_{[N}^\dagger \sigma_{M]}^{\dagger})_b^a \delta_k^j, \end{aligned}$$

где η_{MN}^p и $\bar{\eta}_{MN}^p$ — символы 'т Хофта, с которыми мы уже встречались в главе 3:

$$\eta_{m4}^p = -\eta_{4m}^p = \delta_{mp}, \quad \eta_{mn}^p = \varepsilon_{mnp} \quad (13.80)$$

и $\bar{\eta}_{MN}^p$ отличаются от η_{MN}^p знаком компонент η_{m4}^p и η_{4m}^p . Тензор η_{MN}^p самодуален, а тензор $\bar{\eta}_{MN}^p$ антисамодуален.

¹⁹*Внимание:* в первом члене во второй строчке уравнения (20) работы [121] фигурировал лишний множитель 1/2. Обратите также внимание на другое по сравнению с [121] соглашение о знаке A_M .

- Если $A_M = 0$ и $f(x^M)$ зависит только от трёх координат из четырёх, можно провести гамильтонову редукцию по процедуре, изложенной в главе 11, и получить гамильтониан (10.50) симплектической сигма-модели.

Лагранжиан модели с абелевым калибровочным полем легко выводится с использованием суперпространственного формализма главы 10 или преобразованием Лежандра классического гамильтониана. Зависящая от поля часть лагранжиана имеет вид

$$L_A = -\dot{x}^M A_M + \frac{i}{4} f^2 F_{MN} \psi \sigma_M^\dagger \sigma_N \bar{\psi}. \quad (13.82)$$

При выводе лагранжиана, описывающего систему с неабелевым полем, мы встречаем некоторые трудности. Обыкновенное преобразование Лежандра здесь применить нельзя: гамильтониан (13.81) лежит в алгебре \mathfrak{g} и имеет матричную природу, в то время как действие и лагранжиан должны быть скалярами. Лагранжиан этой модели всё же можно записать с использованием техники так называемых *полудинамических* переменных.

Основная идея — ввести дополнительные переменные φ_α и комплексно-сопряжённые переменные $\bar{\varphi}^\alpha$, лежащие в фундаментальном и антифундаментальном представлениях калибровочной группы, и заменить эрмитовы генераторы $t^P \in \mathfrak{g}$ в (13.81) ($A_M \equiv A_M^P t^P$) структурой

$$T^P = \varphi_\alpha (t^P)^\alpha_\beta \bar{\varphi}^\beta. \quad (13.83)$$

Переменные φ_α могут быть обыкновенными или грассмановыми. Грассмановы переменные несколько более популярны в этой роли, идея ввести их восходит к классической работе [46], где для описания *классической* спиновой динамики был введён триплет грассмановых переменных. Но ту же идею можно реализовать и с бозонными переменными [130]. В интересующем нас здесь контексте суперсимметричной $\mathcal{N} = 4$ квантовой механики такие дополнительные бозонные переменные обсуждались в [131].

Итак, мы вводим обыкновенные комплексные переменные φ_α и добавляем вместо (13.82) в лагранжиан следующее выра-

жение [132]:

$$L_A^{\text{неаб}} = -i\bar{\varphi}^\alpha \dot{\varphi}_\alpha + B(\varphi_\alpha \bar{\varphi}^\alpha - 1) - \dot{x}^M A_M^P T^P + \frac{i}{4} f^2 F_{MN}^P T^P \psi \sigma_M^\dagger \sigma_N \bar{\psi} \quad (13.84)$$

с только что определёнными в уравнении (13.83) структурами T^P .

Здесь B — нединамическая вспомогательная переменная (он же лагранжев множитель). Вариация по B даёт связь

$$\varphi_\alpha \bar{\varphi}^\alpha = 1. \quad (13.85)$$

Переменные φ_α входят в лагранжиан с временными производными, но в лагранжиане присутствуют только линейные по обобщённым скоростям $\dot{\varphi}_\alpha$ члены. Квадратичные члены, привычные для обычных бозонных динамических переменных типа x^M , отсутствуют. Вот почему переменные этого типа были названы «полудинамическими»²⁰. Канонические импульсы, соответствующие голоморфным координатам φ_α , суть $-i\bar{\varphi}^\alpha$. При квантовании $\bar{\varphi}^\alpha$ переходит в $\partial/\partial\varphi_\alpha$. Классическая связь (13.85) даст следующее дифференциальное условие, которому должна удовлетворять волновая функция:

$$\varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha} \Phi(\varphi_\alpha, x^M, \psi_j) = \Phi(\varphi_\alpha, x^M, \psi_j). \quad (13.87)$$

Уравнение (13.87) имеет простое решение:

$$\Phi(\varphi^\alpha, x^M, \psi_j) = A^\alpha(x^M, \psi_j) \varphi_\alpha. \quad (13.88)$$

И это хорошо соответствует матричному гамильтонову описанию, где волновые функции зависят только от x^M и ψ_j , но не скаляры, а принадлежат фундаментальному представлению калибровочной группы.

Квантовая версия структуры (13.83) — это оператор

$$\hat{T}^P = \varphi_\alpha (t^P)^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial\varphi_\beta}. \quad (13.89)$$

²⁰Похожие полудинамические переменные возникают также в некоторых полевых теориях, изучаемых физиками. Я имею в виду прежде всего 3-мерную теорию Чжэня—Саймонса с действием

$$S \propto \varepsilon_{ijk} \int d^3x \text{Tr} \{A_i \partial_j A_k\}. \quad (13.86)$$

Легко видеть, что \hat{T}^P удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и генераторы t^P . А оператор $\hat{T}^P \hat{T}^P$ сводится, принимая во внимание (13.88), к умножению на инвариант Казимира $t^P t^P$ в фундаментальном групповом представлении.

Полный лагранжиан, включающий член (13.84) и другие, не зависящие от калибровочных полей вклады, инвариантен относительно преобразований суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$. Явный вид лагранжиана можно найти в работе [132]. Для калибровочной группы $SU(2)$ инвариантность $\mathcal{N} = 4$ соответствующего действия может быть явно проиллюстрирована в формализме гармонического суперпространства с введением полудинамических гармонических суперполей. И в этом случае мы отсылаем за деталями читателя к работе [132].

13.4.3. Самодуальная конкретика

Монополь Янга. В §13.2 мы подробно обсудили топологически нетривиальное линейное расслоение над S^2 с постоянной напряжённостью поля — поля дираковского монополя. Прямым неабелевым аналогом этой полевой конфигурации является *монополь Янга* [133]. Монополь Янга — это самодуальное поле, лежащее в $su(2)$ и живущее на S^4 , с постоянным значением инварианта $\text{Tr}\{F_{MN}F^{MN}\}$ [с постоянной плотностью действия (13.74)] во всех точках сферы.

Метрика 4-мерной сферы радиуса R выражается в стереографических координатах как

$$ds^2 = \frac{16R^4}{(x^2 + 4R^2)^2} (dx^M)^2. \quad (13.90)$$

В определённой удобно выбранной калибровке решение Янга принимает простой вид

$$A_M^P = \frac{2\eta_{MN}^P x^N}{x^2 + 4R^2}, \quad F_{MN}^P = \tilde{F}_{MN}^P = -\frac{16R^2 \eta_{MN}^P}{(x^2 + 4R^2)^2}, \quad (13.91)$$

где η_{MN}^P — символы 'т Хофта, определённые в (13.80). Тогда

$$\frac{1}{2} \text{Tr}\{F_{MN}F^{MN}\} = \frac{3}{R^4} \quad (13.92)$$

и действие (13.74) есть

$$S = \frac{3}{R^4} V_{S^4} = \frac{3}{R^4} \frac{8\pi^2 R^4}{3} = 8\pi^2, \quad (13.93)$$

как и должно быть для самодуальной конфигурации с единичным топологическим зарядом.

Инстантоны. Существуют также самодуальные топологически нетривиальные конфигурации с непостоянным $\text{Tr}\{F_{MN}F^{MN}\}$. Конфигурации, где интеграл действия набирается в малой области характерного размера $\rho \ll R$, представляют особый физический интерес. В этом случае мы фактически имеем дело с самодуальными конфигурациями на \mathbb{R}^4 , чьё поле F_{MN} исчезает на бесконечности. Эти конфигурации были открыты в работе [134] и называются *инстантонами*²¹. Они выглядят похоже на монополь Янга,

$$A_M^p = \frac{2\eta_{MN}^p x^N}{x^2 + \rho^2}, \quad F_{MN}^p = \tilde{F}_{MN}^p = -\frac{4\rho^2 \eta_{MN}^p}{(x^2 + \rho^2)^2}, \quad (13.94)$$

но параметр ρ имеет теперь смысл инстантонного характерного размера, а радиус R отправлен в бесконечность. При $x^2 \gg \rho^2$ напряжённость поля падает $\propto 1/x^4$, в то время как потенциал стремится к конфигурации

$$\hat{A}_M = i(\partial_M g)g^{-1}, \quad \text{где } g = \frac{x_4 - ix_j \sigma_j}{\sqrt{x^2}}, \quad (13.95)$$

— к «чистой калибровке» на физическом жаргоне. Конфигурация (13.94) несёт единичный топологический заряд. Легко написать также антисамодуальную антиинстантонную конфигурацию с топологическим зарядом -1 :

$$A_M^p = \frac{2\bar{\eta}_{MN}^p x^N}{x^2 + \rho^2}, \quad (13.96)$$

где $\bar{\eta}_{MN}^p$ — дуальный символ 'т Хофта.

Общие (анти-)самодуальные конфигурации с произвольным топологическим зарядом q выглядят значительно сложнее. Они были построены в работе [135] (см. также [136]).

²¹Этот термин может показаться странным, но чтобы объяснить его этимологию, нам пришлось бы погрузиться довольно глубоко в физику неабелевых калибровочных полей, что не является здесь нашей целью.

§ 13.5. Теорема КЛВ и её НКТ обобщение

В теореме 12.11 мы показали, что сигма-модели НКТ общего вида позволяют включить в лагранжиан члены, описывающие абелево калибровочное поле с касательной проекцией $F_{AB} = e_A^M e_B^N F_{MN}$ тензора напряжённости F_{MN} , лежащей в подалгебре $sp(n)$ алгебры $so(4n)$, таким образом, что суперсимметрия $\mathcal{N} = 4$ сохраняется. В теореме 13.12 мы показали, что этот результат можно обобщить на неабелев случай, но сделали это только для ограниченного класса обата-плоских 4-мерных многообразий НКТ с конформно-плоской метрикой. Естественно задать вопрос — существует ли неабелево обобщение этих теорем для произвольной геометрии НКТ?

Ответ положителен.

Теорема 13.13. *Расширенная суперсимметрия $\mathcal{N} = 4$ сигма-модели НКТ сохраняется также в присутствии неабелева калибровочного поля в том и только том случае, когда F_{AB} лежит в подалгебре $sp(n)$ алгебры $so(4n)$ (и, разумеется, также в алгебре Ли \mathfrak{g}).*

В гиперкэлеровом случае прямое операторное доказательство этой теоремы было дано Кирхбергом, Ланге и Випфом [137]. Другой вариант такого доказательства (которое похоже на доказательство теоремы 10.5, утверждающей, что сигма-модели с мультиплетами $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, живущие на гиперкэлеровых многообразиях, обладают суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$) и его обобщение на многообразия НКТ был предложен в работе [92]. Однако в случае НКТ предложенный там метод хорошо работает только для 4-мерных многообразий. В высших размерностях он встречает определённые трудности.

Но существует простой способ доказательства этой теоремы, основанный на результате теоремы 12.11, доказанной в предыдущей главе.

Доказательство. Мы выяснили ранее, что в отсутствии калибровочного поля классические и также квантовые суперзаряды НКТ даются выражениями (10.78). Нетрудно включить в эти квантовые выражения калибровочное поле, нужно только сделать замену $\hat{P}_M \rightarrow \hat{P}_M + A_M$. Коммутаторы суперзарядов включают много различных членов, и большинство из них имеют

одинаковый вид в абелевой и в неабелевой моделях. Единственная специфика неабелевого случая — это члены с коммутаторами $[A_M, A_N]$. Они происходят от структур

$$[\hat{P}_M + A_M, \hat{P}_N + A_N] = -i(\partial_M A_N - \partial_N A_M) + [A_M, A_N] = -iF_{MN}. \quad (13.97)$$

Коммутаторы добавляются к производным $\sim \partial_M A_N$, дополняя их до неабелевых напряжённостей.

Таким образом, единственная новая черта неабелевых систем по сравнению с абелевыми — это наличие коммутаторного члена в напряжённости поля (13.97). И если F_{MN} коммутирует со всеми тремя комплексными структурами [так что F_{AB} лежит в $sp(n)$], суперзаряды удовлетворяют супералгебре $\mathcal{N} = 4$ так же, как они ей удовлетворяют (мы это знаем из теоремы 12.11) в абелевом случае. Квантовый гамильтониан системы получается из квантового гамильтониана системы без поля заменой $\hat{P}_M \rightarrow \hat{P}_M + A_M$ и добавлением дополнительного члена

$$\delta_f \hat{H} = -\frac{i}{2} F_{MN} \hat{\Psi}^M \hat{\Psi}^N. \quad (13.98)$$

□

Чтобы лучше понять, как этот член появляется в практическом вычислении и почему алгебра $\mathcal{N} = 4$ сохраняется при включении поля, сравним зависящие от поля члены в квадратах эрмитовых суперзарядов \hat{Q}_0 и \hat{Q}_1 из (10.78), модифицированных присутствием поля. Представим суперзаряды в виде

$$\begin{aligned} \hat{Q}_0 &= \hat{\Psi}^M (\hat{P}_M + A_M) + \dots, \\ \hat{Q}_1 &= \hat{\Psi}^N I_N{}^R (\hat{P}_R + A_R) + \dots, \end{aligned} \quad (13.99)$$

где многоточия кодируют несущественные, не зависящие от A_M вклады. Зависящая от поля часть в $(\hat{Q}_1)^2$ есть

$$\frac{1}{2} \hat{\Psi}^M \hat{\Psi}^N I_M{}^S I_N{}^R [\hat{P}_S + A_S, \hat{P}_R + A_R] = -\frac{i}{2} \hat{\Psi}^M \hat{\Psi}^N I_M{}^S I_N{}^R F_{SR}, \quad (13.100)$$

где мы опустили калибровочно-неинвариантные куски, включающие производные комплексных структур. Они выглядят так же, как в абелевом случае, и в итоге сократятся. Используя коммутацию F и I , мы можем привести (13.100) к виду (13.98) — структуре, которая возникает также в $(\hat{Q}_0)^2$.

Антикоммутатор $\{\hat{Q}_0, \hat{Q}_1\}$ даёт структуру $\sim \hat{\Psi}^M \hat{\Psi}^N I_{[N} {}^R F_{RM]}$, которая обращается в ноль ввиду антисимметрии I_{NR} и F_{RM} и свойства $[F, I] = 0$. Антикоммутатор $\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\}$ даёт структуру $\sim IFJ + JFI$, которая обращается в ноль ввиду $IJ = -JI = K$ и $[F, I] = [F, J] = [F, K] = 0$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что все собственные состояния с ненулевыми собственными значениями в спектре оператора Дирака на инстантонном фоновом поле двукратно вырождены и, следовательно, возбуждённые состояния в спектре гамильтониана Дирака $\hat{H} = -\mathcal{P}^2/2$ четырехкратно вырождены — давнишнее наблюдение Джекива и Ребби [138].

Глава 14

Теорема Атьи—Зингера

§14.1. Формулировка и интерпретация

Теорема Атьи—Зингера — это весьма общее утверждение, касающееся свойств эллиптических дифференциальных операторов определённого типа. Отдельные частные случаи этой теоремы (например, теорема Римана—Роха) были известны математикам с XIX века, но общее утверждение было впервые сформулировано в качестве гипотезы Гельфандом в 1960 году [139]. Оно было анонсировано в качестве теоремы Атьёй и Зингером в 1963 г., которые опубликовали её полное доказательство в серии статей в 1968 г. [58].

Мы покажем в этой главе, что формулировка и доказательство этой теоремы имеют на самом деле весьма прозрачную суперсимметричную интерпретацию. Но давайте сначала объясним, о чём эта теорема. Чтобы угодить нашему читателю-математику, мы сформулируем её главное утверждение на абстрактном математическом языке — так же, как это было сделано в оригинальных статьях. Но читатель-физик не должен волноваться: сразу после этого мы объясним его смысл, разобрав простой пример.

Пусть X — компактное замкнутое многообразие¹. Пусть E и F — два векторных расслоения над X , пусть $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$ — пространства гладких сечений этих расслоений и пусть \hat{D} — эллиптический дифференциальный оператор, действующий на сечения в $\Gamma(E)$ таким образом, что результаты этого действия лежат в $\Gamma(F)$, а действие \hat{D} на любое сечение в $\Gamma(F)$ даёт ноль. Соответственно, сопряжённый оператор \hat{D}^\dagger переводит сечения из $\Gamma(F)$ в сечения из $\Gamma(E)$ и даёт ноль при действии на последние. Очевидно, что и \hat{D} и \hat{D}^\dagger нильпотентны.

¹Существует также обобщение этой теоремы на многообразия с границей [141], но мы не будем его обсуждать.

Определение 14.1. Индекс оператора \hat{D} есть разность между числом независимых решений уравнения $\hat{D}f = 0$ и числом независимых решений уравнения $\hat{D}^\dagger g = 0$, где $f \in \Gamma(E)$ и $g \in \Gamma(F)$.

Используя математическую нотацию,

$$I = \dim \ker \hat{D} - \dim \ker \hat{D}^\dagger. \quad (14.1)$$

Теорема АЗ говорит, что *этот индекс определяется топологией многообразия и связанных с ним структур*. Какой именно топологией и какими именно структурами — зависит от \hat{D} .

Обещанный простой пример оператора \hat{D} — это чётномерный оператор Дирака \mathcal{D} , действующий на биспиноры. Более точно, \hat{D} — это оператор $\mathcal{D}(1 + \gamma^{D+1})$, который нетривиально действует на правые спиноры Ψ_R , удовлетворяющие условию $\gamma^{D+1}\Psi_R = \Psi_R$ (см. определение 13.3), и делает из них спиноры левые. Левые спиноры оператор $\mathcal{D}(1 + \gamma^{D+1})$ аннигилирует. Сопряжённый оператор $\hat{D}^\dagger = \mathcal{D}(1 - \gamma^{D+1})$ действует на левые спиноры, делая из них правые, и даёт ноль при действии на правые спиноры. Отождествив пространства правых и левых спиноров со слоями в расслоениях E и F , мы видим, что операторы \hat{D} и \hat{D}^\dagger действуют на сечения этих расслоений именно так, как прописано в условиях теоремы.

Индекс Атьи—Зингера совпадает в этом случае с

$$I_{\mathcal{D}} = n_+^{(0)} - n_-^{(0)}, \quad (14.2)$$

где $n_+^{(0)}$ — число нулевых мод \mathcal{D} с положительной киральностью и $n_-^{(0)}$ — число нулевых мод \mathcal{D} с отрицательной киральностью.

Читатель уже несомненно узнал в операторах

$$\hat{D} = \mathcal{D}(1 + \gamma^{D+1}), \quad \hat{D}^\dagger = \mathcal{D}(1 - \gamma^{D+1}) \quad (14.3)$$

суперзаряды (13.8): \hat{D} отвечает² \hat{Q}^\dagger и \hat{D}^\dagger отвечает \hat{Q} .

²Главным виновником того, что в левой и правой частях этого соответствия кресты расставлены по-разному, можно назвать Бенджамина Франклина, который два с половиной столетия назад определил знак электрического заряда так, что заряд электрона (о существовании которого Франклин не подозревал) оказался отрицательным. В результате основные состояния гамильтониана Ландау для электрона в магнитном поле, направленном вверх по оси z , имеют *отрицательную* киральность. И когда мы давали суперсимметричную интерпретацию

Операторы \hat{D} и \hat{D}^\dagger , удовлетворяющие условиям теоремы, могут быть интерпретированы как суперзаряды и в самом общем случае. Действительно, будучи нильпотентными, они удовлетворяют алгебре (5.1), где оператор $\{\hat{D}, \hat{D}^\dagger\}$ играет роль гамильтониана. А тогда определённый выше индекс \hat{D} есть с точностью до знака не что иное как индекс Виттена (6.54)!

Таблица 14.1. Суперсимметричная интерпретация теоремы АЗ: словарь соответствий. Бозонная или фермионная атрибуция сечений из $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$ зависит от соглашения

теорема АЗ	суперсимметрия
$\Gamma(E)$	бозонные (или фермионные) состояния
$\Gamma(F)$	фермионные (или бозонные) состояния
\hat{D}, \hat{D}^\dagger	суперзаряды
$\{\hat{D}, \hat{D}^\dagger\}$	гамильтониан
индекс Атьи—Зингера	индекс Виттена

Иначе говоря, теорема Атьи—Зингера есть фактически утверждение о характере спектра суперсимметричных гамильтонианов, известное нам из главы 5. В главе 6 мы отметили, что индекс Виттена инвариантен относительно гладких деформаций параметров модели. Но это эквивалентно утверждению, что индекс имеет топологическую природу. Как г-н Журден из пьесы Мольера и как д-р Ландау в 1930 г., проф. Атья и проф. Зингер говорили в 1963 г. суперсимметричной прозой, не подозревая об этом!

Чтобы сделать это для читателя абсолютно ясным, мы поместили в таблице 14.1 небольшой словарь соответствий.

Нетривиальный вопрос — как вычислять индекс. В главе 6 мы описали общий метод такого вычисления, разработанный в работах [64]. Используя тот факт, что все возбуждённые состояния спектра суперсимметричного гамильтониана двукратно вырождены, мы можем заменить индекс (6.54) суперсимметричной статсуммой (6.50). Эту статсумму можно представить в виде (6.49), где евклидов оператор эволюции $\mathcal{K}(q_j, \psi_\alpha; q_j, \bar{\psi}_\alpha; -i\beta)$ вы-

задачи Ландау в главе 5, для нас было удобно приписать этим состояниям нулевое фермионное число и обозначить как \hat{Q} оператор, который увеличивает фермионное число на единицу.

ражается через континуальный интеграл (6.47). Сумма (6.50) не зависит от β , и чтобы вычислить интеграл, удобно выбрать β малым. Следуя [64], мы сделали это, заменив сложный интеграл (6.47) его приближением (6.46). Тогда (6.49) даёт вычислимым конечномерным интегралом (6.55).

В главе 6 мы вычислили индекс Виттена для простейших суперсимметричных систем, описывающих одномерное движение (виттеновскую механику) и двумерное движение в магнитном поле. А сейчас нас интересуют более сложные системы, изучавшиеся в предыдущих главах и связанные с геометрией многообразий. Как вычислять индексы Виттена для таких моделей?

Пример такого вычисления был уже дан в главе 8. Мы вычислили там индекс Виттена для суперсимметричной системы (8.6), описывающей комплекс де Рама, и показали, что он даёт интегралом (8.39) и совпадает с эйлеровой характеристикой многообразия.

Есть, однако, задачи, где вычисление индекса не столь просто и метод Чекотти—Жирарделло в его простейшей форме не работает. Перейдём к их обсуждению.

§ 14.2. Сигнатура Хирцебруха

Как и эйлерова характеристика, сигнатура Хирцебруха является топологическим инвариантом, характеризующим комплекс де Рама.

Рассмотрим комплекс де Рама на многообразии размерности $D = 4k$. Рассмотрим оператор дуальности Ходжа (1.24). Согласно (1.25) квадрат этого оператора равен иногда $+1$, а иногда -1 , что неудобно для дальнейшего. Но замечательно то, что при $D = 4k$ можно определить оператор *сигнатуры*, композицию³

$$\hat{\tau} = (-1)^{p(p+1)/2} \circ \star, \quad (14.5)$$

квадрат которой есть единица и которая антикоммутирует с оператором $\hat{R} = d + d^\dagger$ (и следовательно, коммутирует с оператором Лапласа—де Рама $\Delta = -dd^\dagger - d^\dagger d = -\hat{R}^2$). Отсюда следует, что соб-

³Это фактически означает

$$\hat{\tau} \alpha_p = (-1)^{(4k-p)(4k-p+1)/2} \star \alpha_p = (-1)^{p(p-1)/2} \star \alpha_p. \quad (14.4)$$

ственные значения $\hat{\tau}$ равны $+1$ и -1 . Таким образом, всё множество p -форм можно разбить в этом случае на два подмножества: подмножество S_+ форм α , для которых $\hat{\tau}\alpha = \alpha$ (формы с положительной сигнатурой), и подмножество S_- форм с отрицательной сигнатурой. Свойство $\{\hat{R}, \hat{\tau}\} = 0$ означает, что действие оператора \hat{R} на состояния с положительной сигнатурой даёт состояния с отрицательной сигнатурой, и наоборот.

Иными словами, оператор \hat{R} играет здесь ту же самую роль, что оператор Дирака в комплексе Дирака, а оператор $\hat{\tau}$ играет роль оператора киральности γ^{D+1} . В полной аналогии с (14.3) операторы $\hat{R}(1 \pm \hat{\tau})$ нильпотентны, эрмитово сопряжены друг к другу и играют роль суперзарядов.

Отметим, что хотя суперзаряды Хирцебруха не совпадают с суперзарядами де Рама, их антикоммутатор с точностью до коэффициента даёт *тот же* гамильтониан, что в комплексе де Рама. Отметим также, что алгебра суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$ здесь не выполняется: антикоммутаторы $\{\hat{R}(1 \pm \tau), d\}$ и $\{\hat{R}(1 \pm \tau), d^\dagger\}$ в ноль не обращаются.

Определение 14.2. Сигнатура Хирцебруха $4k$ -мерного многообразия определяется согласно

$$\text{sign} = b_+ - b_-, \quad (14.6)$$

где b_\pm — количества замкнутых, но не точных линейно независимых форм, принадлежащих S_+ и S_- .

Замечания. 1. Терминология здесь несколько расплывчата, но мы надеемся, что читатель будет различать два разных понятия: сигнатуру формы (собственное значение $\hat{\tau}$) и сигнатуру Хирцебруха многообразия.

2. Не надо путать сигнатуру Хирцебруха с эйлеровой характеристикой (8.34), которая тоже записывается в виде (14.6), но числа b_+ и b_- имеют там совершенно другой смысл, представляя суммы чисел Бетти b_p с чётными и нечётными p .

3. Фактически в (14.6) дают вклад только формы степени $p = D/2 = 2k$. В самом деле, оператор дуальности переводит p -формы в $(D - p)$ -формы. То же верно для $\hat{\tau}$. Следовательно, для любой формы $\alpha_{p \neq D/2}$ форма $\alpha_p + \hat{\tau}\alpha_p$ принадлежит S_+ , а форма $\alpha_p - \hat{\tau}\alpha_p$ принадлежит S_- . Первая форма даёт вклад в b_+ , а вторая форма — в b_- . В разности (14.6) эти вклады сокращаются.

4. Сигнатура Хирцебруха есть частный случай индекса Атьи—Зингера и является топологическим инвариантом.

Переходя от геометрии к динамике, мы имеем дело с обсуждавшимся прежде гамильтонианом (8.29) на многообразии с размерностью, кратной четырём.

Теорема 14.1. *Оператор (14.5) имеет на этом языке красивое представление:*

$$\hat{\tau} = \prod_{M=1}^{4k} \left(\frac{\partial}{\partial \psi^M} - \psi^M \right). \quad (14.7)$$

Доказательство. Оператор (14.7) представим в виде произведения k блоков:

$$\hat{\tau} = \prod_{M=1}^4 \left(\frac{\partial}{\partial \psi^M} - \psi^M \right) \times \prod_{M=5}^8 \left(\frac{\partial}{\partial \psi^M} - \psi^M \right) \times \dots \quad (14.8)$$

Каждый блок коммутирует с «чужими» фермионными переменными (например, первый блок коммутирует с $\psi^{M=5, \dots, 4k}$). Мы оставляем читателю проверку того, что действие, например, первого блока на переменные $\psi^{M=1,2,3,4}$ и их различные произведения такое же, как прописано в (14.4). \square

Сигнатура Хирцебруха есть

$$\text{sign} = \text{Tr}^* \{ \hat{\tau} e^{-\beta \hat{H}} \}, \quad (14.9)$$

где символ Tr^* означает операторный след в гильбертовом пространстве.

В главе 6 мы обсуждали обыкновенную статсумму $Z = \text{Tr}^* e^{-\beta \hat{H}}$ и суперсимметричную статсумму $\tilde{Z} = \text{Tr}^* \{ (-1)^F e^{-\beta \hat{H}} \}$. Мы установили, что обе эти статсуммы допускают представление в виде континуального интеграла. То же справедливо для выражения (14.9). Соответствующий континуальный интеграл можно вычислить. Мы не будем здесь этого делать, а только приведём результат.

Теорема 14.2. *Сигнатура Хирцебруха даётся интегралом*

$$\text{sign} = \int \det^{-1/2} \left[\frac{\text{tg} \frac{\mathcal{R}}{2\pi}}{\frac{\mathcal{R}}{2\pi}} \right], \quad (14.10)$$

где \mathcal{R} — матричная 2-форма, связанная с Римановым тензором кривизны:

$$\mathcal{R}^{AB} = \frac{1}{2} R^{AB}{}_{MN} dx^M \wedge dx^N. \quad (14.11)$$

Доказательство. Оно состоит в не столь простом конкретном вычислении соответствующего континуального интеграла. Мы отсылаем читателя к оригинальным статьям [59]. \square

Подынтегральное выражение в (14.10) следует понимать, как ряд Тейлора,

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\text{tg} \frac{\mathcal{R}}{2\pi}}{\frac{\mathcal{R}}{2\pi}} \right] = 1 - \frac{1}{24\pi^2} \text{Tr} \{ \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \} + \text{высшие члены}. \quad (14.12)$$

Ряд обрывается на члене $\sim \overbrace{\mathcal{R} \wedge \dots \wedge \mathcal{R}}^{D/2}$, пропорциональном форме объёма. Только этот член даёт вклад в интеграл. Для 4-мерных многообразий

$$\text{sign} = -\frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \{ \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \}. \quad (14.13)$$

Простейший нетривиальный пример — $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Это многообразие 4-мерно. Его числа Бетти суть $b_0 = b_2 = b_4 = 1, b_1 = b_3 = 0$. Собственное значение \hat{c} для единственной замкнутой, но неточной 2-формы равно +1, и сигнатура Хирцебруха равна +1. Интеграл (14.13) тоже даёт это значение.

§ 14.3. Индекс Дирака

14.3.1. Кэлеровы многообразия

Приступим теперь к вычислению индекса оператора Дирака,

$$I_D = \text{Tr}^* \{ \gamma^{D+1} e^{\beta \not{D}/2} \}, \quad (14.14)$$

на кривых многообразиях. Начнём обсуждение с более простого случая, когда геометрия кэлерова, а калибровочное поле абелево. Как мы знаем из теоремы 13.4, комплекс Дирака эквивалентен в этом случае твистованному комплексу Дольбо, который описывается сигма-моделью (9.1). Попытаемся вычислить индекс Витена в этой модели, следуя рецепту (6.55). Для этого нам нужно знать классический гамильтониан. Для общего комплексного многообразия он был выписан в уравнении (9.17). В кэлеровом случае 4-фермионный член в гамильтониане отсутствует и бисмутова спиновая связность (9.10) совпадает со связностью Леви-

Чивиты. Принимая также во внимание, что компоненты $\omega_{ab,K}$ и $\omega_{\bar{a}\bar{b},K}$ в кэлеровом случае отсутствуют, мы выводим

$$H_W^{\text{кэлер}} = h^{\bar{k}j} (P_j - i\omega_{\bar{a}\bar{b},j} \psi^a \psi^{\bar{b}} + i\partial_j W) (\bar{P}_{\bar{k}} - i\omega_{c\bar{d},\bar{k}} \psi^c \psi^{\bar{d}} - i\partial_{\bar{k}} W) - 2\partial_j \partial_{\bar{k}} W \psi^j \psi^{\bar{k}}. \quad (14.15)$$

Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L_W^{\text{кэлер}} = h_{j\bar{k}} \dot{z}^j \dot{\bar{z}}^{\bar{k}} + \frac{i}{2} (\psi^a \dot{\psi}^{\bar{a}} - \dot{\psi}^a \bar{\psi}^{\bar{a}}) + i(\dot{\bar{z}}^{\bar{k}} \omega_{\bar{a}\bar{b},\bar{k}} + \dot{z}^j \omega_{\bar{a}\bar{b},j}) \psi^a \bar{\psi}^{\bar{b}} + i(\dot{\bar{z}}^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}} W - \dot{z}^j \partial_j W) + 2\partial_j \partial_{\bar{k}} W \psi^j \bar{\psi}^{\bar{k}}. \quad (14.16)$$

Вычислим интеграл (6.55) для $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Выберем

$$W = \frac{q}{2(n+1)} \ln \det h = -\frac{q}{2} \ln(1 + \bar{z}^k z^k), \quad (14.17)$$

как в уравнении (13.57), подставим это в (14.15) и вычислим интеграл

$$I_W = \int \prod_{k=1}^n \frac{dP_k d\bar{P}_{\bar{k}} dz^k d\bar{z}^{\bar{k}}}{(2\pi)^2} \prod_{a=1}^n d\psi^a d\bar{\psi}^{\bar{a}} \exp\{-\beta H_W^{\text{кэлер}}\}. \quad (14.18)$$

Мы получим

$$I_W = \left(\frac{q}{2\pi}\right)^n \int \frac{1}{(1 + \bar{z}^l z^l)^{n+1}} \prod_k (dz^k d\bar{z}^{\bar{k}}) = \frac{q^n}{n!}. \quad (14.19)$$

В свете теоремы 13.8, которая утверждает, что в случае, когда калибровочное поле представляет хорошо определённое линейное расслоение, q должно быть целым при нечётных n и полуцелым при чётных n , результат (14.19) выглядит странно. При $n = 1$, когда мы имеем дело с $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$, выражение (14.19) сводится к целому значению $I_W = q$, и это верно. Но для всех $n \geq 2$ мы получаем для индекса дробный, не имеющий смысла результат. Это означает, что наше вычисление было неправильным. Где-то мы должны были совершить ошибку.

Мы действительно совершили ошибку, но ошибка эта не была тривиальной. Оказывается, что, сколь бы малым не было β , мы не имеем права в этом конкретном случае заменять функциональный интеграл (6.47) для евклидова оператора эволюции его

инфинитезимальным выражением и считать, что в лагранжевом функциональном интеграле типа (6.51) переменные $z^k(\tau)$, $\psi^a(\tau)$ и их комплексно-сопряжённые не зависят от⁴ τ . Вместо этого мы должны сделать следующее.

- Наложить периодические граничные условия

$$z^k(\beta) = z^k(0), \quad \psi^a(\beta) = \psi^a(0); \quad (14.20)$$

- разложить все переменные в ряды Фурье:

$$z^k(\tau) = z_{(0)}^k + \sum_{m \neq 0} z_{(m)}^k e^{2\pi i m \tau / \beta} \quad \text{и то же для } \psi^a(\tau); \quad (14.21)$$

- подставить это в (6.51);
- проинтегрировать по всем ненулевым фурье-модам в гауссовом приближении. Мы покажем позднее, что гауссовое приближение достаточно для нашей цели — нам не нужно принимать в расчёт также квартичные члены и члены более высокого порядка. Используя физический жаргон, в этом случае недостаточно вычислить функциональный интеграл в *древесном* приближении, но *однопетлевое* приближение достаточно и даёт правильный ответ.

Фактическое вычисление функционального интеграла — не слишком простая задача. В оригинальных статьях [59], посвящённых суперсимметричному доказательству теоремы АЗ, детали вычислений не приводились. Больше деталей (но не все детали) можно найти в работах [142]. Мы дадим все необходимые детали этого вычисления в следующем параграфе. Но прежде, чем в них погрузиться, мы напишем *результат* вычислений и обсудим его.

Индекс Виттена модели (9.1) для кэлерова многообразия равен

$$I_W = \int e^{\mathcal{F}/2\pi} \det^{1/2} \left[\frac{\mathcal{R}}{4\pi} \right], \quad (14.22)$$

⁴Мы надеемся, что читатель не перепутает евклидово время τ и оператор $\hat{\tau}$, определённый в (14.5). Увы, и латинский, и греческий алфавиты имеют конечную длину.

где \mathcal{F} — 2-форма напряжённости поля,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{MN} dx^M \wedge dx^N = -2i \partial_j \partial_{\bar{k}} W dz^j \wedge d\bar{z}^{\bar{k}}, \quad (14.23)$$

а \mathcal{R} определялось в (14.11). Символ $e^{\mathcal{F}/2\pi}$ расшифровывается как

$$e^{\mathcal{F}/2\pi} = 1 + \frac{\mathcal{F}}{2\pi} + \frac{\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}}{8\pi^2} + \dots, \quad (14.24)$$

а детерминантный фактор — как

$$\det^{1/2} \left[\frac{\frac{\mathcal{R}}{4\pi}}{\sin \frac{\mathcal{R}}{4\pi}} \right] = 1 + \frac{1}{192\pi^2} \int \text{Tr} \{ \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \} + \dots \quad (14.25)$$

Фактор $e^{\mathcal{F}/2\pi}$ подынтегральном выражении связан с древесным вкладом (14.18) в индекс, в то время как детерминантный фактор возникает после гауссова интегрирования по ненулевым гармоникам. В интеграл вносят вклад только те члены в разложениях $e^{\mathcal{F}/2\pi}$ и $\mathcal{R}/[4\pi \sin(\mathcal{R}/4\pi)]$, произведение которых является $2n$ -формой.

Рассмотрим вначале $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. В этом простейшем случае детерминантный фактор отсутствует, в разложении (14.24) остаётся всего один член, и индекс Виттена просто равен с точностью до множителя $1/2\pi$ магнитному потоку. Это согласуется с результатом (5.25).

Для $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ индекс представляет сумму двух членов:

$$I_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = \frac{1}{8\pi^2} \int \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} + \frac{1}{192\pi^2} \int \text{Tr} \{ \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \}. \quad (14.26)$$

В первом члене (14.26) мы узнаём абелеву версию числа Понтрягина (13.68), а второй член совпадает с сигнатурой Хирцебруха $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ из уравнения (14.13), умноженной на $-1/8$. Для высших n индекс даётся суммой многих разных топологических инвариантов.

Оценку (14.19) для индекса можно воспроизвести, если проигнорировать зависящий от кривизны детерминантный фактор. Если принять его во внимание и вспомнить, что $\text{sign}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 1$, мы получим:

$$I_W(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = \frac{q^2}{2} - \frac{1}{8}. \quad (14.27)$$

Это выражение целое для полуцелых q :

$$I_W(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, q=\pm 1/2)=0, \quad I_W(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, q=\pm 3/2)=1, \quad I_W(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, q=\pm 5/2)=3$$

и т. д. Для того чтобы выразить результат для высших n , введём $s = |q| - \frac{n+1}{2}$. Из (13.63) следует, что s — целое число. Если $s \geq 0$, индекс даётся биномиальным коэффициентом

$$I_W = \binom{n+s}{n}, \quad (14.28)$$

если q положительно, и включает дополнительный фактор $(-1)^n$, если q отрицательно. И если $s < 0$, т. е. если $|q| < (n+1)/2$, индекс обращается в ноль⁵.

Окончательный результат (14.28) для индекса многообразия $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ можно в принципе вывести из (14.22) так же, как мы это сделали для $I_W(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ — суммированием релевантных топологических инвариантов. Но это непросто, и я даже не знаю, сделал ли это кто-то или нет. Существует значительно более простой и прямой способ вычисления индекса, который заключается в подсчёте числа независимых основных состояний в спектре [137] (см. также [145]), т. е. подсчёте числа независимых нормированных решений уравнений

$$\hat{Q}^{\text{КОВ}} \Phi_0 = \hat{Q}^{\text{КОВ}} \Phi_0 = 0, \quad (14.29)$$

где ковариантные квантовые суперзаряды были выписаны в уравнениях (9.11), (9.13):

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{\text{КОВ}} &= -i\psi^k \left[\frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{1}{2} \left(q - \frac{n+1}{2} \right) \frac{\bar{z}^k}{1 + \bar{z}^l z^l} + \psi^a \hat{\psi}^{\bar{b}} \omega_{a\bar{b},k} \right], \\ \hat{Q}^{\text{КОВ}} &= -i\hat{\psi}^{\bar{k}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} - \frac{1}{2} \left(q + \frac{n+1}{2} \right) \frac{z^k}{1 + \bar{z}^l z^l} + \psi^a \hat{\psi}^{\bar{b}} \omega_{a\bar{b},\bar{k}} \right]. \end{aligned} \quad (14.30)$$

Под «нормированными» мы подразумеваем функции, нормированные с ковариантной мерой:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 + \bar{z}^l z^l)^{n+1}} \prod_k (dz^k d\bar{z}^k) \prod_a d\psi^a d\bar{\psi}^a e^{-\psi^b \bar{\psi}^b} \times \\ \times \bar{\Phi}_0(z^k, \bar{z}^k, \bar{\psi}^a) \Phi_0(z^k, \bar{z}^k, \psi^a) = 1. \end{aligned} \quad (14.31)$$

⁵Между прочим, индекс (14.28) тесно связан с индексом Виттена в 3-мерной суперсимметричной полевой теории Янга—Миллса—Чжэня—Саймонса [143]. См. работу [144] с детальным обсуждением этого вопроса.

Анализ показывает, что решения (14.29) могут существовать только в секторе с нулевым фермионным зарядом F или в секторе с фермионным зарядом n . Рассмотрим вначале случай положительного q . Тогда нормированные решения (14.29) могут существовать только в секторе с нулевым фермионным зарядом. Действительно, в секторе $F = n$ уравнение $\hat{Q}^{\text{КОВ}} \Phi_0 = 0$ удовлетворяется автоматически, в то время как уравнение $\hat{Q}^{\text{КОВ}} \Phi_0 = 0$ даёт условие

$$\partial_{\bar{k}} \Phi_0 = c \frac{z^k}{1 + \bar{z}z} \Phi_0$$

с положительным c . Это уравнение не имеет нормированных решений.

Рассмотрим сектор $F = 0$. В этом случае уравнение $\hat{Q}^{\text{КОВ}} \Phi_0 = 0$ удовлетворяется автоматически, в то время как уравнение $\hat{Q}^{\text{КОВ}} \Phi_0 = 0$ даёт условие

$$\partial_k \Phi_0 = -\frac{s \bar{z}^k}{2(1 + \bar{z}^l z^l)} \Phi_0 = 0. \quad (14.32)$$

Нормированные решения (14.32) существуют только при положительных s . Они имеют вид

$$\Phi_0 = (1 + \bar{z}^l z^l)^{-s/2} P(\bar{z}), \quad (14.33)$$

где $P(\bar{z})$ — полином по \bar{z}^k , чья степень не превышает s . Размерность векторного пространства таких полиномов в точности совпадает с (14.28).

Для отрицательных q вакуумные состояния присутствуют только в секторе $F = n$. Их число также даёт уравнением (14.28). При нечётном n вакуумные состояния фермионны, отсюда фактор $(-1)^n$ в индексе.

Сделаем следующее важное замечание. Уравнение (14.22) даёт результат для индекса Виттена модели (9.1) с гамильтонианом (9.17). Этот индекс не совпадает в точности с индексом Дирака, определённым в уравнении (14.14) — I_W и I_D могут различаться знаком (см. примечание на с. 374). В самом деле, мы видели, что при $B > 0$ основное состояние в задаче Ландау бозонно, так что индекс Виттена положителен, но на матричном языке основное состояние имеет отрицательную киральность, так что индекс Дирака отрицателен.

Это рассогласование не так удивительно: знаки обоих индексов зависят от соглашения. Для индекса Виттена знак зависит от того, какие состояния считаются бозонными, а какие — фермионными; знак можно обратить, изменив конвенцию $\psi \leftrightarrow \bar{\psi}$. А знак индекса Дирака зависит от того, что мы называем левым, а что правым. Мы увидим немного позже, что индекс Дирака (14.14) чётномерного многообразия (кэлерова или некэлерова) даётся почти той же формулой, что (14.22), но с отрицательным знаком перед \mathcal{F} в показателе экспоненты:

$$I_D = \int e^{-\mathcal{F}/2\pi} \det^{1/2} \left[\frac{\mathcal{R}}{\sin \frac{\mathcal{R}}{4\pi}} \right]. \quad (14.34)$$

Другими словами, $I_D = I_W$ для $4k$ -мерных многообразий и $I_D = -I_W$ для $(4k + 2)$ -мерных многообразий.

14.3.2. Некэлеровы многообразия

Рассмотрим теперь комплексное, но не обязательно кэлерово многообразие. Как мы знаем из предыдущей главы, в этом случае мы можем определить два различных комплекса: (i) комплекс Дольбо, который описывается сигма-моделью (9.1) и который согласно теореме 13.5 эквивалентен комплексу Дирака, деформированному наличием кручений, и (ii) стандартный комплекс Дирака.

Теорема 14.3. *Кручения не влияют на дираковский индекс.*

Доказательство. Это просто следует из того факта, что оператор Дирака на чётномерном многообразии, допускающем спинорную структуру, обладает суперсимметрией, связанной с парой эрмитовых суперзарядов $-i\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}\gamma^{D+1}$, независимо от того, присутствуют кручения или нет. Суперсимметрия сохраняется при произвольной непрерывной деформации тензора кручений C_{MNL} . Таким образом, кручения всегда можно непрерывно «открутить» к нулю и индекс, принимающий дискретные значения, при этом измениться не может⁶. \square

⁶Более детальное обсуждение читатель может найти в работе [146]. Отметим принципиальное отличие от ситуации с калибровочным полем. Если последнее представляет топологически нетривиальное расслоение, его нельзя непрерывно открутить без потери суперсимметрии на промежуточном этапе.

Как вычислить индекс Дольбо при наличии кручений? Первая приходящая в голову мысль — рассмотреть общую сигма-модель (9.1) и попытаться вычислить её индекс. Однако такое вычисление встречает серьёзные трудности ввиду присутствия в гамильтониане (9.8) 4-фермионного члена. Как мы видели выше, приближение (6.55), где в $z^j(\tau)$ и $\psi^a(\tau)$ оставляются только нулевые фурье-моды, для комплекса Дольбо не работает и необходимо вычислять интеграл по ненулевым гармоникам. В кэлеровом случае это можно сделать в рамках гауссового приближения: мы это докажем в следующем параграфе, когда будем обсуждать явное вычисление континуального интеграла для индекса. И там же мы покажем, что гауссово однопетлевое приближение оказывается недостаточным для общего гамильтониана (9.8), где надо учесть вклады всех петель. Очевидно, что это невозможно.

Мы поступим по-другому и, используя результат предыдущей теоремы, вычислим континуальный интеграл для *дираковского* индекса с открученными кручениями, что можно сделать в однопетлевом приближении. Соответствующая этой задаче квантовомеханическая система обсуждалась в конце § 9.2. Её лагранжиан имеет вид

$$L = i \int d\theta \left(\frac{1}{2} g_{MN} \dot{\chi}^N - A_M(\mathcal{X}) \right) \mathcal{D}\mathcal{X}^M = \frac{1}{2} g_{MN}(x) \dot{x}^M \dot{x}^N + \\ + \frac{i}{2} \Psi^A (\dot{\Psi}^A + \omega_{AB,M} \dot{x}^M \Psi^B) - A_M \dot{x}^M + \frac{i}{2} F_{AB} \Psi^A \Psi^B. \quad (14.35)$$

В общем некэлеровом случае имеется всего один классический сохраняющийся вещественный суперзаряд:

$$Q_0 = e_C^M \Psi^C \left(P_M - \frac{i}{2} \omega_{AB,M} \Psi^A \Psi^B + A_M \right). \quad (14.36)$$

Соответствующий эрмитов квантовый суперзаряд есть $\hat{Q}_0 = -i\mathcal{P}$, где \mathcal{P} — стандартный дираковский оператор. Нас интересуют комплексные многообразия, где всё можно выразить в комплексной нотации: $M = \{m, \bar{m}\}$, $A = \{a, \bar{a}\}$. Если геометрия некэлерова, компоненты связности $\omega_{ab,M}$ и $\omega_{\bar{a}\bar{b},M}$ отличны от нуля. Как следствие, оператор Дирака $i\hat{Q}_0$ и гамильтониан $\hat{H} = \hat{Q}_0^2/2$ не коммутируют с оператором фермионного заряда $\hat{F} = \psi^a \hat{\psi}^a$, как они

коммутировали в кэлеровом случае. Но они по-прежнему коммутируют с оператором $(-1)^{\hat{F}}$. А это значит, что по-прежнему можно определить отображение биспинорного гильбертова пространства на пространство голоморфных волновых функций $\Phi(x^M, \psi^a)$ в духе теоремы 13.2, так что γ^{D+1} отображается в $(-1)^{\hat{F}+D/2}$. Тогда второй эрмитов квантовый суперзаряд можно определить как $\mathcal{P}\gamma^{D+1}$, а индекс (14.34) оператора Дирака можно отождествить с точностью до возможной смены знака с индексом Виттена.

Индекс Виттена можно потом определить из вычисления функционального интеграла от $\exp\{-\int_0^\beta L_E(\tau)\}$ с евклидовой версией лагранжиана (14.35) и периодическими граничными условиями для бозонных и фермионных переменных. В следующем параграфе мы увидим, что результат этого вычисления не зависит от того, кэлерово или нет наше многообразие, и совпадает с точностью до зависящего от конвенций знака с выражением (14.34).

Заметьте, что ни лагранжиан (14.35), ни результат (14.34) не зависят от предположения, что многообразие комплексно. Всё, что нам нужно для вычисления — это наличие отображения (13.14) (это необходимо, чтобы выразить индекс в виде континуального интеграла, где на фермионные поля наложены периодические граничные условия). Чтобы установить это отображение, мы должны определить гильбертово пространство волновых функций $\Phi(x^M, \psi^a)$, которые зависят от голоморфных фермионных переменных ψ^a . Но в касательном пространстве такие переменные можно определить для любого чётномерного многообразия: локально каждое такое многообразие комплексно. Единственное условие — это чтобы многообразие допускало спинорную структуру, чтобы само понятие индекса Дирака было осмысленным.

§ 14.4. Вычисление функционального интеграла

Индекс Виттена любой суперсимметричной системы даётся интегралом (6.49). До сих пор мы вычисляли его в приближении, где ядро оператора эволюции \mathcal{K} бралось в инфинитезимальной

форме (6.46). Как отмечалось выше, это приближение не работает для интересующей нас задачи и мы должны вычислять функциональный интеграл (6.47) при малом, но конечном β .

В нашем случае удобно вначале провести гауссово интегрирование по $\prod_{\tau} dP_M(\tau)$ в гамильтоновом континуальном интеграле для нашей системы [представляющем обобщение интеграла (6.18), где интегрирование проводится также по грассмановым переменным] и представить этот интеграл в лагранжевой форме⁷:

$$I_W = C \int \prod_{\tau} \sqrt{g[x^M(\tau)]} \prod_M dx^M(\tau) \prod_A d\Psi^A(\tau) \exp \left\{ - \int_0^{\beta} L_E(\tau) d\tau \right\} \quad (14.37)$$

с евклидовым лагранжианом⁸

$$L_E = \frac{1}{2} g_{MN}(x) \dot{x}^M \dot{x}^N + \frac{1}{2} \Psi^A (\dot{\Psi}^A + \omega_{AB,M} \dot{x}^M \Psi^B) + i A_M \dot{x}^M - \frac{i}{2} F_{AB} \Psi^A \Psi^B. \quad (14.38)$$

Пусть вначале многообразие плоское. В этом случае работает метод Чекотти—Жирарделло и мы можем свести континуальный интеграл (14.37) для индекса к обыкновенному интегралу:

$$I_W^{\text{плоск}} = \left(\frac{i}{2\pi\beta} \right)^{D/2} \int d^D x \prod_C d\Psi^C \exp \left\{ \frac{i\beta}{2} F_{AB}(x) \Psi^A \Psi^B \right\}, \quad (14.39)$$

где фактор $(2\pi\beta)^{-D/2}$ приходит от интегрирования по импульсам в исходном гамильтоновом континуальном интеграле [эта

⁷ Действуя совсем аккуратно, мы можем вначале записать гамильтонов интеграл в приближении с конечным числом промежуточных точек, проинтегрировать по импульсам в этом интеграле, что даст приближение лагранжева континуального интеграла, и устремить затем число точек к бесконечности. Таким способом можно фиксировать точный численный коэффициент в интеграле для индекса. Мы не будем здесь этого делать, отсылая читателя к статье [98], где такое вычисление было аккуратно проведено в кэлеровом случае.

⁸ Стоит заметить, что в отличие от минковского лагранжиана (14.16), лагранжиан (14.38) не является вещественным. Такого требования нет. С другой стороны, евклидов функциональный интеграл для индекса, естественно, вещественен.

процедура позволяет зафиксировать коэффициент C в (14.37)], а фактор $i^{D/2}$ появляется ввиду соотношения

$$\prod_c^{D/2} d\psi^c d\bar{\psi}^c = i^{D/2} \prod_{C=1}^D d\Psi^C \quad (14.40)$$

между мерой $\prod_C d\Psi^C$ и канонической фермионной мерой, выраженной через голоморфные переменные $\psi^c, \bar{\psi}^c$, которую мы использовали в главе 7 и в уравнении⁹ (14.18).

Работает только член порядка $D/2$ в разложении экспоненты в (14.39). Используя

$$\int \left(\prod_{B=1}^D d\Psi^B \right) \Psi^{A_1} \dots \Psi^{A_D} = (-1)^{D/2} \varepsilon_{A_1 \dots A_D}, \quad (14.41)$$

мы получаем

$$I_W^{\text{плоск}} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (D/2)!} \varepsilon_{A_1 \dots A_D} \int d^D x F_{A_1 A_2} \dots F_{A_{D-1} A_D}. \quad (14.42)$$

Интеграл (14.42) отвечает интегралу $\int e^{F/2\pi}$ на языке форм¹⁰. Таким образом, мы воспроизвели результат (14.22) для индекса Виттена в случае, когда многообразии плоское и второй фактор в подынтегральном выражении отсутствует. При $D = 2$ формула (14.42) сводится к (6.67).

На кривом многообразии детерминантный фактор нетривиален. Как говорилось выше, для его определения мы должны выйти за пределы приближения (6.55), разложить поля в ряды Фурье и вычислить интеграл по ненулевым гармоникам в гауссовом приближении. Подставим разложение

$$\begin{aligned} x^M(\tau) &= x_{(0)}^M + \sum'_m x_{(m)}^M e^{i\Omega_m \tau}, & x_{(-m)}^M &= \overline{x_{(m)}^M}, \\ \Psi^A(\tau) &= \Psi_{(0)}^A + \sum'_m \Psi_{(m)}^A e^{i\Omega_m \tau}, & \Psi_{(-m)}^A &= \overline{\Psi_{(m)}^A}, \end{aligned} \quad (14.43)$$

где $\sum'_m \equiv \sum_{m \neq 0}$ и $\Omega_m = 2\pi m/\beta$, в правую часть (14.37). Чтобы вычислить интеграл в гауссовом приближении (мы удостоверим-

⁹Напомним, что в нашей конвенции $\psi^1 = (\Psi^1 + i\Psi^2)/\sqrt{2}$, $\psi^2 = (\Psi^3 + i\Psi^4)/\sqrt{2}$, ..., откуда следует $d\psi^1 = (d\Psi^1 - id\Psi^2)/\sqrt{2}$ и т. д.

¹⁰Не забывайте про множитель $1/2$ в определении (14.23).

ся в его справедливости ближе к концу параграфа), мы оставляем в экспоненте только квадратичные члены по $x_{(m)}^M, \Psi_{(m)}^A$ и интегрируем по $d\tau$. Квадратичная часть существенных членов в лагранжиане (мы можем больше не обращать внимания на вторую строчку в (14.38), содержащую калибровочные поля — с ней мы уже разобрались раньше) даёт

$$\begin{aligned} \int_0^\beta L_E^{(2)} d\tau = & \frac{\beta}{2} \sum'_m \Omega_m^2 g_{MN}^{(0)} x_{(-m)}^M x_{(m)}^N + \frac{i\beta}{2} \sum'_m \Omega_m \Psi_{(-m)}^A \Psi_{(m)}^A + \\ & + \frac{i\beta}{4} \Psi_{(0)}^A \Psi_{(0)}^B (\partial_M \omega_{AB,N}^{(0)} - \partial_N \omega_{AB,M}^{(0)}) \sum'_m \Omega_m x_{(-m)}^M x_{(m)}^N - \\ & - i\beta \Psi_{(0)}^A \omega_{AB,M}^{(0)} \sum'_m \Omega_m x_{(-m)}^M \Psi_{(m)}^B. \end{aligned} \quad (14.44)$$

Теперь мы диагонализуем сумму в (14.44) с помощью подстановки

$$\Psi_{(m)}^A \Rightarrow \Psi_{(m)}^A - \omega_{AB,R}^{(0)} \Psi_{(0)}^B x_{(m)}^R. \quad (14.45)$$

Замена переменных (14.45) приводит (14.44) к простому виду

$$\int_0^\beta L_E^{(2)} d\tau = \sum'_m A_{mAB} \Psi_{(-m)}^A \Psi_{(m)}^B + \sum'_m D_{mMN} x_{(-m)}^M x_{(m)}^N, \quad (14.46)$$

где

$$A_{mAB} = \frac{i\beta}{2} \Omega_m \delta_{AB}, \quad D_{mMN} = \frac{\beta}{2} \left(\Omega_m^2 g_{MN}^{(0)} + \frac{i}{2} \Omega_m R_{MN,AB}^{(0)} \Psi_{(0)}^A \Psi_{(0)}^B \right) \quad (14.47)$$

и $R_{MN,AB}$ — тензор Римана (1.60). Заметим, что матрица частных производных, отвечающая замене (14.45), треугольна, что даёт единичный суперякобиан.

Результат интегрирования экспоненты от (14.46) по ненулевым гармоникам представляет произведение большого (в пределе — бесконечного) числа конечномерных детерминантов, что может быть символически записано как

$$\text{грав. фактор} \propto \prod'_m \det^{1/2} \|A_m\| \cdot \det^{-1/2} \|D_m\|. \quad (14.48)$$

Коэффициент фиксируется из требования, что в плоском пределе детерминантный фактор обращается в единицу и из требования

общей ковариантности. Мы выводим

$$\text{грав. фактор} = \sqrt{g^{(0)}} \prod'_m \det^{-1/2} \left\| \delta_{AB} + \frac{i\beta}{2\pi m} R_{AB} \right\|, \quad (14.49)$$

где $R_{AB} = R_{AB,CD}^{(0)} \Psi_{(0)}^C \Psi_{(0)}^D / 2$.

Бесконечное произведение по m можно здесь вычислить, если представить входящие туда детерминанты как произведения их собственных значений. Все собственные значения антисимметричной матрицы R_{AB} мнимы. Они расщепляются на $D/2$ пар $\{i\lambda_1, -i\lambda_1\}$, $\{i\lambda_2, -i\lambda_2\}$ и т. д. Ортогональными вращениями мы можем привести iR_{AB} к каноническому виду

$$iR_{AB} = \text{diag} \left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right]. \quad (14.50)$$

Каждый блок с данным λ_α даёт вклад

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2\pi m)^2}{(2\pi m)^2 + (\beta\lambda_\alpha)^2} = \frac{\beta\lambda_\alpha/2}{\text{sh}(\beta\lambda_\alpha/2)} \quad (14.51)$$

в правую часть уравнения (14.49). Используем теперь следующий простой математический факт.

Пусть Q — вещественная антисимметричная матрица, приведённая к каноническому виду (14.50), и пусть $f(Q)$ — чётная функция Q . Тогда

$$\det^{1/2} [f(Q)] = \prod_\alpha |f(i\lambda_\alpha)|. \quad (14.52)$$

Прочитав это тождество справа налево, мы в итоге получаем:

$$\text{грав. фактор} = \sqrt{g^{(0)}} \det^{-1/2} \left\| \frac{\text{sh}(\beta R/2)}{\beta R/2} \right\|. \quad (14.53)$$

Чтобы найти индекс, фактор (14.53) в подынтегральном выражении следует умножить на фактор $\exp\{i\beta F_{AB} \Psi_{(0)}^A \Psi_{(0)}^B / 2\}$, на фактор $(i/2\pi\beta)^{D/2}$ и проинтегрировать по нулевым фурье-модам $\prod_M dx_{(0)}^M \prod_A d\Psi_{(0)}^A$. В интеграл даёт вклад только член $\sim \prod_{A=1}^D \Psi_{(0)}^A$ в разложении подынтегрального выражения. Включив фактор $i/(2\pi\beta)$ в аргумент $f(R)$ и переведя результат на геометрический язык форм [не забыв знаковый фактор в (14.41)], мы воспроизводим результат (14.22).

Мы можем понять теперь, почему нам потребовалось ввести однопетлевой гравитационный фактор в древесный интеграл (14.18) для индекса. Формально фактор (14.49) стремится к 1 в пределе малых β , и, на первый взгляд, поправки, пропорциональные β и его высшим степеням, учитывать не надо. Мы видим, однако, что каждое β умножается в разложении на квадратичную по фермионам структуру, как это также имело место в разложении подынтегрального выражения в (14.39). Чтобы фермионный интеграл дал не ноль, мы должны собрать члены $\sim (\beta\Psi_{(0)}^2)^{D/2}$ в разложении как экспоненты $\exp\{i\beta F_{AB} \Psi_{(0)}^A \Psi_{(0)}^B / 2\}$, так и однопетлевого фактора (14.53) — они играют абсолютно одинаковую роль.

С другой стороны, если мы попытаемся вычислить континуальный интеграл точнее, приняв во внимание кубические и более высокие по гармоникам $x_{(m)}^M$ и $\Psi_{(m)}^A$ члены в разложении $\int_0^\beta L_E d\tau$, соответствующие поправки включали бы больше степеней β , чем степеней $\Psi_{(0)}^2$ и были бы подавлены в пределе малых β . Это оправдывает наше пренебрежение многопетлевыми эффектами.

Мы можем также объяснить, почему мы оставили мысль вычислить непосредственно индекс гамильтониана Дольбо (9.8), который включает 4-фермионный член. Разложение экспоненты, включающей этот член, дало бы большие вклады $\sim (\beta\Psi_{(0)}^4)^k \sim \beta^{-k}$ в интеграл (6.55). Эти вклады кажутся даже расходящимися в пределе $\beta \rightarrow 0$. Конечно, такой расходимости на самом деле нет. Например, для многообразия вещественной размерности 4 опасный вклад пропорционален

$$\sim \int d^4x \varepsilon^{MNPQ} \partial_M C_{NPQ}.$$

И он обращается в ноль, будучи интегралом от полной производной. Но в высших измерениях большие члены, приходящие от разложения $e^{-\beta H}$, могут умножаться на другие (сами по себе малые) многопетлевые поправки, и увидеть в явном вычислении, как весь этот мусор сгорает в окончательном ответе, трудно, если не невозможно.

§ 14.5. Неабелев индекс Дирака

Евклидов суперсимметричный лагранжиан (14.38) включает абелево калибровочное поле, и в предыдущем параграфе мы вычисляли индекс абелева оператора Дирака. Но дираковский индекс можно вычислить и при наличии неабелевого калибровочного фона. Чтобы написать соответствующий суперсимметричный лагранжиан, надо ввести помимо x^M и Ψ^A дополнительные бозонные или фермионные переменные, лежащие в фундаментальном представлении калибровочной группы (см. обсуждение на стр. 365). Но если нас интересует только индекс, удобнее работать с матричным гамильтонианом, включающим матричные калибровочные поля.

Рассмотрим суперсимметричную задачу (13.8)–(13.10), где оператор Дирака имеет вид (13.5), но с неабелевым матричным калибровочным полем $A_M^{\text{неаб}} = A_M^a t^a$. Для простоты мы ограничимся случаем плоской геометрии — «гравитационный» вклад в интеграл для индекса был вычислен раньше. Этот вклад «перепутан» с вкладом от абелева калибровочного поля, и эти два вклада надо рассматривать, как мы видели, вместе, но они не зависят от присутствия или отсутствия дополнительного неабелевого фонового поля.

Вклад от калибровочного (как абелева, так и неабелева) поля в подынтегральное выражение для интеграла, определяющего индекс Виттена, может быть вычислен в древесном приближении. В плоском неабелевом случае интеграл (6.61) приобретает вид¹¹

$$\begin{aligned}
 I_W &= \int \prod_M \frac{dP_M dx^M}{2\pi} \text{Tr} \left\{ (-1)^{D/2} \gamma^{D+1} e^{-\beta \hat{H}} \right\} = \\
 &= (-1)^{D/2} \frac{1}{(2\pi\beta)^{D/2}} \int d^D x \text{Tr} \left\{ \gamma^{D+1} e^{i\beta F_{AB} \gamma^A \gamma^B / 4} \right\} = \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (D/2)!} \varepsilon_{A_1 \dots A_D} \int d^D x \text{Tr} \{ F_{A_1 A_2} \dots F_{A_{D-1} A_D} \}, \quad (14.54)
 \end{aligned}$$

¹¹Читатель это легко сообразит, но на всякий случай укажем, что в первых двух строчках (14.54) под следом стоит матрица, несущая как биспинорные, так и групповые индексы, а в третьей строчке индексы только групповые.

что есть очевидное обобщение (14.42). Индекс Дирака даётся таким же выражением с дополнительным множителем $(-1)^{D/2}$.

Индекс зависит от представления, в котором лежат калибровочное поле, суперзаряды и гамильтониан. Для локализованного в \mathbb{R}^4 поля, лежащего в фундаментальном представлении $su(2)$, индекс совпадает с числом Понтрягина (13.68). В частности, для поля инстантона (13.94) индекс равен единице. Это значит, что в поле инстантона КХД в спектре безмассового кваркового оператора Дирака имеется одна нулевая мода с положительной киральностью [14].

Литература

- [1] *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // *J. Diff. Geom.* 1982. V. 17, no. 4. P. 661–692.
- [2] *Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.* Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P -инвариантности // *Письма в ЖЭТФ.* 1971. Т. 13, вып. 8. С. 452–455.
- [3] *Eguchi T., Gilkey P., Hanson A.* Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry // *Physics Reports.* 1980. V. 66. P. 213–393.
- [4] *Candelas P.* Lectures on complex manifolds // *Superstrings '87. Proceedings of the Trieste Spring School.* World Scientific, 1987. P. 1–88.
- [5] *Mavromatos N. E.* A note on the Atiyah–Singer index theorem for manifolds with totally antisymmetric H -torsion // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1988. A. 21, no. 10. P. 2279–2290.
- [6] *Bismut, J.-M.* A local index theorem for non-Kähler manifolds // *Math. Ann.* 1989. V. 284, no. 4. P. 681–699.
- [7] *Newlander, A., Nirenberg, L.* Complex analytic coordinates in almost complex manifolds // *Ann. of Math.* 1957. V. 65, no. 2. P. 391–404. См. также: *Nirenberg L.* Lectures on linear partial differential equations. Amer. Math. Soc., 1973.
- [8] *Clebsch, A.* Über die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen // *J. Reine Angew. Math.* 1866. V. 65. P. 257–268; *Frobenius, G.* Über das Pfaffsche Problem // *J. Reine Angew. Math.* 1877. V. 82. P. 230–315.
- [9] *Smilga A. V.* Comments on the Newlander–Nirenberg theorem // 13th International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics (Jun 2019, Varna, Bulgaria). Singapore:

- Springer, 2000. P. 167–183. (Springer Proc. Math. Stat., V. 335). arXiv:1902.08549 [math-ph].
- [10] *Opfermann A., Papadopoulos G.* Homogeneous HKT and QKT manifolds. Preprint arXiv:math-ph/9807026.
- [11] *Hull C. M.* The geometry of supersymmetric quantum mechanics. Preprint arXiv:hep-th/9910028.
- [12] *Hopf H.* Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten // Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948. New York: Interscience Publishers, 1948. P. 167–185.
- [13] *Calabi E.* Métriques kählériennes et fibrés holomorphes // Ann. Sci. Écol. Norm. Sup., Serie 4. 1979. V. 12, no. 2. P. 269–294.
- [14] *'t Hooft G.* Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle // Phys. Rev. D. 1976. V. 14, no. 12. P. 3432–3450.
- [15] *Фок В. А.* Собственное время в классической и квантовой механике // Изв. АН СССР, Сер. физ. 1937. № 4–5. С. 551–568; *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. V. 82, no. 5. P. 664–679.
- [16] *Taub A. H.* Empty space-times admitting a three parameter group of motion // Reprint of Ann. of Math., 2nd Series. 1951. V. 53, no. 3. P. 472–490; *Newman E., Tamburino L., Unti T.* Empty-space generalization of the Schwarzschild metric // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 915–923.
- [17] *Gibbons G. W., Manton N. S.* Classical and quantum dynamics of BPS monopoles // Nucl. Phys. B. 1986. V. 274, no. 1. P. 183–224.
- [18] *Atiyah M. F., Hitchin N. J.* Low energy scattering of non-Abelian monopoles // Phys. Lett. A. 1985. V. 107, no. 1. P. 21–25.
- [19] *Gibbons G. W., Manton N. S.* The moduli space metric for well separated BPS monopoles // Phys. Lett. B. 1995. V. 356, no. 1. P.

- 32–38. arXiv:hep-th/9506052; *Chalmers G., Hanany A.* Three-dimensional gauge theories and monopoles // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 489, no. 1–2. P. 223–244. arXiv:hep-th/9608105.
- [20] *Hitchin N.J., Karlhede A., Lindström U., Roček M.* Hyperkähler metrics and supersymmetry // *Commun. Math. Phys.* 1987. V. 108. P. 535–589.
- [21] *Gibbons G. W., Rychenkova P., Goto R.* Hyperkähler quotient construction of BPS monopole moduli spaces // *Commun. Math. Phys.* 1997. V. 186. P. 581–599. arXiv:hep-th/9608085.
- [22] *Selivanov K. G., Smilga A. V.* Effective Lagrangian for 3d $\mathcal{N} = 4$ SYM theories for any gauge group and monopole moduli spaces // *JHEP.* 2003. V. 12. no. 027. arXiv:hep-th/0301230.
- [23] *Eguchi T., Hanson A.J.* Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 74, no. 3. P. 249–251.
- [24] *Smilga A. V.* Vacuum structure in quantum gravity // *Nucl. Phys. B.* 1984. V. 234, no. 2. P. 402–412.
- [25] *Howe P. S., Papadopoulos G.* Twistor spaces for hyper-Kähler manifolds with torsion // *Phys. Lett. B,* 1996. V. 379, no. 1–4. P. 80–86. arXiv:hep-th/9602108.
- [26] *Gibbons G. W., Papadopoulos G., Stelle K. S.* HKT and OKT geometries on soliton black hole moduli spaces // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 508, no. 3. P. 623–658. arXiv:hep-th/9706207.
- [27] *Grantcharov G., Poon Y. S.* Geometry of hyper-Kähler connections with torsion // *Commun. Math. Phys.* 2000. V. 213. P. 19–37. arXiv:math/9908015.
- [28] *Verbitsky M.* Hyperkähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory // *Asian J. Math.* 2002. V. 6, no. 4. P. 679–712. arXiv:math/0112215.
- [29] *Fino A., Grantcharov G.* Properties of manifolds with skew-symmetric torsion and special holonomy // *Adv. Math.* 2004. V. 189, no. 2. P. 439–450. arXiv:math.DG/0302358.

- [30] *Obata M.* Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structures // Japan J. Math. 1956. V. 26. P. 43–77.
- [31] *Soldatenkov A.* Holonomy of the Obata connection in $SU(3)$ // Int. Math. Res. Not. 2012. V. 15. P. 3483–3497 arXiv:1104.2085 [math.DG].
- [32] *Yano K., Ako M.* Integrability conditions for almost quaternion structures // Hokkaido Math. J. 1972. V. 1. P. 63–86.
- [33] *Delduc F., Valent G.* New geometry from heterotic supersymmetry // Class. Quant. Grav. 1993. V. 10, no. 7. P. 1201–1215.
- [34] *Spindel P., Sevrin A., Troost W., Van Proeyen A.* Supersymmetric σ -models on group manifolds // Nucl. Phys. B. 1988. V. 308, no. 2–3. P. 662–698.
- [35] *Joyce D.* Compact hypercomplex and quaternionic manifolds // J. Diff. Geom. 1992. V. 35, no. 3. P. 743–761.
- [36] *Samelson H.* A class of complex-analytic manifolds // Portugal. Math. 1953. V. 12. P. 129–132.
- [37] *Smilga A. V.* Group manifolds and homogeneous spaces with HKT geometry: The role of automorphisms // Nucl. Phys. B. 2020. V. 957, Article 115052. arXiv:2002.06356 [math-ph].
- [38] *Delduc F., Ivanov E.* $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric $d = 1$ sigma models on group manifolds // Nucl. Phys. B. 2019. V. 949, Article 114806. arXiv:1907.09518 [hep-th].
- [39] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973.
- [40] *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Klasse. 1918. V. 2. P. 235–257.
- [41] *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957; *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. URSS, 2017.

- [42] *Grönewold H. J.* On the principles of elementary quantum mechanics // *Physica*. 1946. V. 12, no. 7. P. 405–460; *Moyal J. E.* Quantum mechanics as a statistical theory // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1949. V. 45, no. 1. P. 99–124.
- [43] *Smilga A. V.* How to quantize supersymmetric theories // *Nucl. Phys. B*. 1987. V. 292, P. 363–380.
- [44] *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [45] *Casalbuoni R.* The classical mechanics for Bose–Fermi systems // *Nuovo Cim. A*. 1976. V. 33. P. 389–431.
- [46] *Berezin F. A., Marinov M. S.* Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics // *Ann. Phys.* 1977. V. 104, no. 2. P. 336–362.
- [47] *Fierz M.* Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigen Spin // *Helv. Phys. Acta*. 1939. V. 12. P. 3–37; *Pauli W.* The connection between spin and statistics // *Phys. Rev.*, 1940. V. 58, no. 8. P. 716–722.
- [48] По этому вопросу есть обширная литература. Недавно вышел большой сборник обзоров: *Bender C. M. et al.* PT symmetry in quantum and classical physics. World Scientific, 2019.
- [49] *Robert D., Smilga A. V.* Supersymmetry vs. ghosts // *J. Math. Phys.*, 2008. V. 49, no. 4, Article 042104. arXiv: hep-th/0407231.
- [50] *Nicolai H.* Supersymmetry and spin systems // *J. Phys. A*. 1976. V. 9, no. 9. P. 1497–1506.
- [51] *Смилга А. В.* Квантовая теория поля на обед. М.: МЦНМО, 2019.
- [52] *Landau L. D.* Paramagnetism of metals // *Z. Phys.* 1930. V. 64. P. 629–637.
- [53] *Witten E.* Dynamical breaking of supersymmetry // *Nucl. Phys. B*. 1981. V. 188, no. 3. P. 513–554.

- [54] *Belluci S., Nersessian A.* (Super)oscillator on CP^N and constant magnetic field // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67, no. 6, Article 065013. arXiv:hep-th/0211070; *Smilga A. V.* Weak supersymmetry // *Phys. Lett. B.* 2004. V. 585, no. 1–2. P. 173–179. arXiv:hep-th/0311023.
- [55] *Smilga A. V.* SUSY anomaly in quantum mechanical systems // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 199, no. 4. P. 516–518.
- [56] *van Holten J. W., Rietdijk R. H.* Symmetries and motions in manifolds // *J. Geom. Phys.* 1993. V. 11, no. 1–4. P. 559–574. arXiv:hep-th/9205074.
- [57] *De Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Roncadelli M.* Operator ordering and supersymmetry // *Nucl. Phys. B.* 1988. V. 296, no. 2. P. 402–430.
- [58] *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators // *Ann. Math.* 1968. V. 87, no. 3. P. 484–530, 546–604; 1971. V. 93, no. 1. P. 119–138, 139–149.
- [59] *Alvarez-Gaumé L.* Supersymmetry and the Atiyah–Singer index theorem // *Commun. Math. Phys.* 1983. V. 90. P. 161–173; *Friedan D., Windey O.* Supersymmetric derivation of the Atiyah–Singer index and the chiral anomaly // *Nucl. Phys. B.* 1984. V. 235, no. 3. P. 395–416.
- [60] *Фейнман Р. П., Хибс А.Р.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
- [61] *Березин Ф. А.* Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве // *УФН.* 1980. Т. 132, вып. 3. С. 497–548.
- [62] *Blinnikov S. I., Nikitin N. V.* Approximations to path integrals and spectra of quantum systems. Preprint arXiv:physics/0309060.
- [63] *Witten E.* Constraints on supersymmetry breaking // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 202, no. 2. P. 253–316.
- [64] *Cecotti S., Girardello L.* Functional measure, topology and dynamical supersymmetry breaking // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 110,

- no. 1. P. 39–43; *Girardello L., Imbimbo C., Mukhi S.* On constant configurations and the evaluation of the Witten index // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 132, no. 1–3. P. 69–74.
- [65] См., напр.: *Kac V. G., Smilga A. V.* Normalized vacuum states in $N = 4$ supersymmetric Yang–Mills quantum mechanics with any gauge group // *Nucl. Phys. B.* 2000, V. 571, no. 3. P. 515–554. arXiv:hep-th/9908096.
- [66] *Salam A., Strathdee J.* Supergauge transformations // *Nucl. Phys. B.* 1974. V. 76, no. 3. P. 477–482.
- [67] *Brink L., Deser S., Zumino B., Di Vecchia P., Howe P.* Local supersymmetry for spinning particles // *Phys. Lett. B.* 1976. V. 64, no. 4. P. 435–438.
- [68] *Pashnev A., Toppan F.* On the classification of N -extended supersymmetric quantum mechanical systems // *J. Math. Phys.* 2001. V. 42. P. 5257–5271. arXiv:hep-th/0010135.
- [69] *Wess J., Bagger J.* Supersymmetry and supergravity. Princeton University Press, 1992.
- [70] *Wess J., Zumino B.* Supergauge transformations in four dimensions // *Nucl. Phys. B.* 1974. V. 70, no. 1. P. 39–50.
- [71] *Gates S. J., Hull C. M., Roček M.* Twisted multiplets and new supersymmetric non-linear σ -models // *Nucl. Phys. B.* 1984. V. 248, no. 1. P. 157–186.
- [72] *Fedoruk S. A., Smilga A. V.* Bi-HKT and bi-Kähler supersymmetric sigma models // *J. Math. Phys.* 2016. V. 57, no. 4, Article 042103. arXiv:1512.07923 [hep-th].
- [73] *Smilga A. V.* Perturbative corrections to effective zero-mode Hamiltonian in supersymmetric QED // *Nucl. Phys. B.* 1987. V. 291. P. 241–255.
- [74] *Ivanov E. A., Smilga A. V.* Supersymmetric gauge quantum mechanics: superfield description // *Phys. Lett. B.* 1991. V. 257, no. 1–2. P. 79–82; *Berezovoj V. P., Pashnev A. I.* Three-dimensional $\mathcal{N} = 4$ extended supersymmetrical quantum mechanics // *Class. Quant. Grav.* 1991. V. 8, no. 12. P. 2141–2148.

- [75] *Smilga A. V.* Low-dimensional sisters of Seiberg–Witten effective theory // From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics. Vol. 1 / M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler (eds.). World Scientific, 2005. P. 523–558. arXiv:hep-th/0403294.
- [76] *Gates S. J., Grisaru M. T., Roček M., Siegel W.* Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry // Front. Phys. 1983. V. 58. P. 1–548. arXiv:hep-th/0108200.
- [77] *Набоков В.* Прозрачные вещи / Перевод С. Ильина. СПб.: Симпозиум, 1997.
- [78] *Coles R. A., Papadopoulos G.* The geometry of the one-dimensional supersymmetric non-linear sigma models // Class. Quant. Grav. 1990. V. 7, no. 3. P. 427–438.
- [79] *Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S.* Harmonic superspace. Cambridge Univ. Press, 2001.
- [80] *Ivanov E. A., Lechtenfeld O.* $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric mechanics in harmonic superspace // JHEP. 2003. V. 09, Article 073. arXiv: hep-th/0307111.
- [81] *Delduc F., Ivanov E.* $\mathcal{N} = 4$ mechanics of general $(4, 4, 0)$ multiplets // Nucl. Phys. B. 2012. V. 855, no. 3. P. 815–853. arXiv:1104.1429 [hep-th].
- [82] *Davis A. C., Macfarlane A. J., Popat P. C., van Holten J. W.* The quantum mechanics of the supersymmetric nonlinear sigma model // J. Phys. A. 1984. V. 17, no. 15. P. 2945–2954; *Claudson M., Halpern M. B.* Supersymmetric ground state wave functions // Nucl. Phys. B. 1985. V. 250. P. 689–715.
- [83] *Fedoruk S. A., Ivanov E. A., Smilga A. V.* Real and complex supersymmetric $d = 1$ sigma models with torsion // Int. J. Mod. Phys. A. 2012, V. 27, no. 25, Article 1250146. arXiv:1302.2902 [hep-th].
- [84] *Ivanov E. A., Smilga A. V.* Quasicomplex $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ supersymmetric sigma models // SIGMA, 2013. V. 9, Article 069. arXiv:1204.4105 [hep-th].

- [85] Chern S. S. On the curvatura integra in a Riemannian manifold // Ann. Math. 1945. V. 46, no. 4. P. 674–684.
- [86] Braden H. Supersymmetry with torsion // Phys. Lett. B. 1985. V. 163, no. 1–4. P. 171–175.
- [87] Kimura T. Index theorems of torsional geometries // JHEP. 2007. V. 08, Article 048. arXiv:0704.2111 [hep-th].
- [88] Nicolaescu L. I. Notes on Seiberg–Witten theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Graduate Studies in Math., V. 28).
- [89] Ray D. B., Singer I. M. Analytic torsion for complex manifolds // Ann. Math. (2). 1973. V. 98, no. 1. P. 154–177; Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles // Commun. Math. Phys. 1988. V. 115, no. 1. P. 49–78; Mathai V., Wu S. Analytic torsion of \mathbb{Z}_2 -graded elliptic complexes // Noncommutative Geometry and Global Analysis. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. P. 199–212. (Contemp. Math. V. 546). arXiv:1001.3212 [math.DG].
- [90] Fedoruk S. A., Ivanov E. A., Smilga A. V. Generic HKT geometries in the harmonic superspace approach // J. Math. Phys., 2018. V. 59, no. 8, Article 083501. arXiv: 1802.09675 [hep-th].
- [91] Braden H. Sigma-models with torsion // Ann. Phys. 1986. V. 171, no. 2. P. 433–462.
- [92] Smilga A. V. Supercharges in the hyper-Kähler with torsion supersymmetric sigma models // J. Math. Phys. 2012. V. 53, Article 122105. arXiv:1209.0539 [math-ph].
- [93] Smilga A. V. Dolbeault complex on $S^4 \setminus \{\cdot\}$ and $S^6 \setminus \{\cdot\}$ through supersymmetric glasses // SIGMA. 2011. V. 7, Article 105. arXiv:1005.3935 [math-ph].
- [94] Alvarez-Gaumé L., Freedman D. Z. Geometrical structure and ultraviolet finiteness of the supersymmetric σ -model // Commun. Math. Phys. 1981. V. 80. P. 443–451.
- [95] Fedoruk S. A., Smilga A. V. Comments on HKT supersymmetric sigma models and their Hamiltonian reduction // J. Phys. A. 2015. V. 48, no. 21, Article 215401. arXiv:1408.1538 [hep-th].

- [96] *Smilga A. V.* Taming the zoo of supersymmetric quantum mechanical models // JHEP. 2013. V. 05, Article 119. arXiv:1301.7438 [math-ph]
- [97] *Zumino B.* Supersymmetry and Kähler manifolds // Phys. Lett. B. 1979. V. 87, no. 3. P. 203–206.
- [98] *Ivanov E. A., Smilga A. V.* Dirac operator on complex manifolds and supersymmetric quantum mechanics // Int. J. Mod. Phys. A. 2012. V. 27, no. 25, Article 1230024. arXiv:1012.2069 [hep-th].
- [99] *Ivanov E. A., Smilga A. V.* Symplectic sigma models in superspace // Nucl. Phys. B. 2004. V. 694, no. 3. P. 473–492. arXiv:hep-th/0402041.
- [100] *Smilga A. V.* Born–Oppenheimer corrections to the effective zero-mode Hamiltonian in SYM theory // JHEP. 2002. V. 04, Article 054. arXiv:hep-th/0201048.
- [101] *Maloney A., Spradlin M., Strominger A.* Superconformal multi-black hole moduli spaces in four dimensions // JHEP. 2002. V. 04, Article 003. arXiv:hep-th/9911001.
- [102] *de Crombrugghe M., Rittenberg V.* Supersymmetric quantum mechanics // Ann. Phys. 1983. V. 151, no. 1. P. 99–126.
- [103] *Смилга А. В.* Структура вакуума в киральной суперсимметричной квантовой электродинамике // ЖЭТФ, 1986. Т. 91, вып. 1. С. 14–24.
- [104] *Blok B. Yu., Smilga A. V.* Effective zero-mode Hamiltonian in supersymmetric chiral non-Abelian gauge theories // Nucl. Phys. B. 1987. V. 287. P. 589–600.
- [105] *Ivanov E., Lechtenfeld O., Sutulin A.* Hierarchy of $N=8$ mechanics models // Nucl. Phys. B. 2008. V. 790, no. 3. P. 493–523. arXiv:0705.3064 [hep-th].
- [106] См., напр.: *Lawson H. B., Michelson M. L.* Spin geometry. Princeton University Press, 1989. (Princeton Math. Ser., V. 20).

- [107] *Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S., Lechtenfeld O.* ABC of $\mathcal{N} = 8$, $d = 1$ supermultiplets // Nucl. Phys. B. 2004. V. 699, no. 1–2. P. 226–252. arXiv:hep-th/0406015.
- [108] *Diaconescu D.-E., Entin R.* A non-renormalization theorem for the $d = 1$, $\mathcal{N} = 8$ vector multiplet // Phys. Rev. D. 1997. V. 56, Article 8045. arXiv:hep-th/97060059.
- [109] *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
- [110] *Asatrian G. M., Savvidy G.K.* Configuration manifold of Yang–Mills classical mechanics // Phys. Lett. A. 1983. V. 99, no. 6–7. P. 290–292; *Симонов Ю. А.* Гамильтониан КХД в полярном представлении // Яд. физ. 1985. Т. 41. С. 1311–1323.
- [111] *Gates S. J., Rana L.* Ultramultiplets: a new representation of rigid 2d $\mathcal{N} = 8$ supersymmetry // Phys. Lett. B. 1995. V. 342, no. 1–4. P. 132–137. arXiv:hep-th/9410150; *Bellucci S., Krivonos S., Marrani A., Orazi E.* “Root” action for $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric mechanics theories // Phys. Rev. D. 2006. V. 73, Article 025011. arXiv:hep-th/0511249; *Delduc F., Ivanov E.* Gauging $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric mechanics // Nucl. Phys. B. 2006. V. 753. P. 211–241. arXiv:hep-th/0605211.
- [112] *Kozyrev N., Krivonos S., Lechtenfeld O., Nersessian A., Sutulin A.* $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric mechanics on curved spaces // Phys. Rev. D. 2018. V. 97, Article 085015. arXiv:1711.08734 [hep-th].
- [113] *Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S.* Hyper-Kähler metrics and harmonic superspace // Commun. Math. Phys. 1986. V. 103, no. 3. P. 515–526.
- [114] *Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Townsend P. K.* Eguchi–Hanson type metrics from harmonic superspace // Class. Quant. Grav. 1986. V. 3, no. 4. P. 625–634.
- [115] *Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S.* Gauge field geometry from complex and harmonic analyticities II. Hyper-Kähler case // Ann. Phys. 1988. V. 185, no. 1. P. 22–45.

- [116] *Fedoruk S. A., Ivanov E. A., Smilga A. V.* $\mathcal{N} = 4$ mechanics with diverse $(4, 4, 0)$ multiplets: explicit examples of hyper-Kähler with torsion, Clifford Kähler with torsion, and octonionic Kähler with torsion geometries // *J. Math. Phys.* 2014. V. 55, no. 5, Article 052302. arXiv:1309.7253 [hep-th].
- [117] *Callan C. G., Harvey J. A., Strominger A.* World sheet approach to heterotic instantons and solitons // *Nucl. Phys. B.* 1991. V. 359. P. 611–634.
- [118] *Bonneau G., Valent G.* Local heterotic geometry in holomorphic coordinates // *Class. Quant. Grav.* 1994. V. 11, no. 5. P. 1133–1154. arXiv:hep-th/9401003.
- [119] *Papadopolous G.* Elliptic monopoles and $(4, 0)$ -supersymmetric sigma models with torsion // *Phys. Lett. B.* 1995. V. 356, no. 2–3. P. 249–255. arXiv:hep-th/9505119.
- [120] *Smilga A. V.* An 8-dimensional Taub-NUT-like hyper-Kähler metric in harmonic superspace formalism // *J. Math. Phys.* 2020. V. 61, Article 112301. arXiv:2006.11782 [hep-th].
- [121] *Konyushikhin M. A., Smilga A. V.* Self-duality and supersymmetry // *Phys. Lett. B.* 2010. V. 689, no. 2–3. P. 95–100. arXiv:0910.5162 [hep-th].
- [122] *Dirac P. A. M.* Quantised singularities in the electromagnetic Field // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1931. V. 133, no. 821. P. 60–72.
- [123] *Kim S., Lee C.* Supersymmetry-based approach to quantum particle dynamics on a curved surface with non-zero magnetic field // *Ann. Phys.* 2002. V. 296, no. 2. P. 390–405. arXiv:hep-th/0112120.
- [124] *Tamm I.* Die verallgemeinerten Kugelfunktionen und die Wellenfunktionen eines Elektrons im Felde eines Magnetpoles // *Z. Phys.* 1931. V. 71, no. 3–4. P. 141–150.
- [125] *Wu T. T., Yang C. N.* Dirac monopole without strings: monopole harmonics // *Nucl. Phys. B.* 1976. V. 107, no. 3. P. 365–380.

- [126] *Smilga A. V.* Non-integer flux: why it does not work // *J. Math. Phys.* 2012. V. 53, Article 042103. arXiv:1104.3986 [math-ph].
- [127] *Shifman M. A., Smilga A. V., Vainshtein A. I.* On the Hilbert space of supersymmetric quantum systems // *Nucl. Phys. B.* 1988. V. 299, no. 1. P. 79–90.
- [128] *Smilga A. V.* Instantons and fermion condensate in adjoint two-dimensional QCD // *Phys. Rev. D.* 1994. V. 49, P. 6836–6848. arXiv:hep-th/9402066; *Gross D. J., Klebanov I. R., Matytsin A. V., Smilga A. V.* Screening versus confinement in 1 + 1 dimensions // *Nucl. Phys. B,* 1996. V. 461, no. 1–2. P. 109–130. arXiv:hep-th/9511104.
- [129] 't Hooft *G.* Some twisted self-dual solutions for the Yang–Mills equations on a hypertorus // *Commun. Math. Phys.,* 1981. V. 81. P. 267–275.
- [130] *Balachandran A. P., Borchard S., Stern A.* Lagrangian and Hamiltonian descriptions of Yang–Mills particles // *Phys. Rev. D.* 1978. V. 17, no. 12. P. 3247–3256; *Balachandran A. P., Marmo G., Skagerstam B.-S., Stern A.* Gauge symmetries and fibre bundles. Berlin: Springer, 1984. (Lecture Notes in Physics, V. 188).
- [131] *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* Supersymmetric Calogero model by gauging // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 79, no. 10, Article 105015. arXiv:0812.4276 [hep-th]; *Bellucci S., Krivonos S., Sutulin A.* Three dimensional $\mathcal{N}=4$ supersymmetric mechanics with Wu–Yang monopole // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81, no. 10, Article 105026. arXiv:0911.3257 [hep-th].
- [132] *Ivanov E. A., Konyushikhin M. A., Smilga A. V.* SQM with non-Abelian self-dual fields: harmonic superspace description // *JHEP.* 2010. V. 05, Article 33. arXiv:0912.3289 [hep-th].
- [133] *Yang C. N.* Generalization of Dirac’s monopole to SU_2 gauge fields // *J. Math. Phys.* 1978. V. 19, P. 320–328.
- [134] *Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.* Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations // *Phys. Lett. B.* 1975. V. 59, no. 1. P. 85–87.

- [135] *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I.* Construction of instantons // *Phys. Lett. A.* 1978. V. 65, no. 3. P. 185–187.
- [136] *Corrigan E., Fairlie D. B., Templeton S., Goddard P.* A Green function for the general self-dual gauge field // *Nucl. Phys. B.* 1978. V. 140, no. 1. P. 31–44.
- [137] *Kirschberg A., Länge J. D., Wipf A.* Extended supersymmetries and the Dirac operator // *Ann. Phys.*, 2005. V. 315, no. 2. P. 467–487. arXiv:hep-th/0401134.
- [138] *Jackiw R., Rebbi C.* Conformal properties of a Yang–Mills pseudoparticle // *Phys. Rev. D.* 1976. V. 14, no. 2. P. 517–523.
- [139] *Гельфанд И. М.* Об эллиптических уравнениях // *УМН.* 1960. Т. 15. вып. 3. С. 121–132.
- [140] *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators on compact manifolds // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1963. V. 69, no. 3. P. 422–433.
- [141] *Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1975–1976. V. 77, no. 1. P. 43–69; V. 78, no. 3. P. 405–432; V. 79, no. 1. P. 71–99.
- [142] *Windey P.* Supersymmetric quantum mechanics and the Atiyah–Singer index theorem // *Acta Phys. Polon. B.* 1984. V. 15, no. 5. P. 435–451; *Mostafazadeh A.* Supersymmetry and the Atiyah–Singer index theorem. 1: Peierls brackets, Green’s functions, and a proof of the index theorem via Gaussian superdeterminants // *J. Math. Phys.* 1994. V. 35, no. 5. P. 1095–1124. arXiv:hep-th/9309060.
- [143] *Witten E.* Supersymmetric index of three-dimensional gauge theory // *The many faces of the superworld / Shifman M. A. (ed.).* World Scientific, 2000. P. 156–184. arXiv:hep-th/9903005.
- [144] *Смилга А. В.* Структура вакуума в трёхмерных суперсимметричных калибровочных теориях // *УФН.* 2014. Т. 184, вып. 2. С. 163–176. arXiv:1312.1804 [hep-th].

- [145] *Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P. K.* Fuzzy $CP^{(n|m)}$ as a quantum superspace // Symmetries in gravity and field theory. Ediciones Univ. Salamanca, 2004. P. 385. arXiv:hep-th/0311159.
- [146] *Smilga A. V.* Supersymmetric proof of the Hirzebruch–Riemann–Roch theorem for non-Kähler manifolds // SIGMA. 2012. V. 8, Article 003. arXiv:1109.2867 [math-ph].

Предметный указатель

- p - q символ 152
 R -симметрия 135, 184
- Адамара формула 93, 280, 281
аналитическое суперпространство
и суперполя 188
аномалия киральная 139, 255
— конформная 139
— суперсимметрии 161, 340
- Березина интеграл 115, 148–151, 155, 167
Бетти числа 206–207, 377, 379
биспиноры 336
— левые и правые 339
бозонная и фермионная
компоненты суперполя 166
- вейлевский символ см.
упорядочение вейлевское
Весса—Зумино калибровка 181
— модель 179
Винера мера 146, 147
Витена модель 131–134, 137, 158,
159, 175, 176, 354, 376
внешний дифференциал формы 10, 29
волновая функция 11, 110
— — от грассмановых переменных
11, 28
— — спинорная см. спиноры
время аналитическое 188
— голоморфное (левое и правое) 172
вспомогательные переменные 176,
182, 183, 193, 194, 199, 213,
246–249, 291, 295, 302, 366
- гамильтониан квантовый 11, 119
— — криптоэрмитовый 122
- гамильтониан классический 100
гамильтонова редукция 14, 76, 266,
284–296, 365
гамильтонова система 100
гармонический заряд 187–189,
191–193, 257, 299
— мост 302–304, 313, 315–316, 319,
320, 322, 325–326
Гаусса—Бонне формула 208, 209
генераторы алгебры Ли 70, 88–93
— грассмановой алгебры 115
— преобразований супер-
симметрии см. суперзаряды
гиперкомплексная структура 80,
261–263, 283, 311
голономии группа 47
- де Рама когомологии 32, 206
действия функционал 103, 362
— — в суперпространстве 168
Дирака гамильтониан 339
— матрицы 336
— нить 74, 160, 347
— оператор 37, 139, 224, 335, 337,
338, 340, 342, 343, 358, 374, 377,
379, 385, 393
— — с кручениями 343, 344, 364,
385
Дольбо гамильтониан 49, 50, 245,
355, 386
— — твистованный 355
— лапласиан см.
Дольбо гамильтониан
духи 122
- индекс Атьи—Зингера 374

- индекс Виттена 13, 145, 152–162, 207, 208, 349, 375, 387
- Дирака 379–394
- инстантон 239, 368, 394
- интеграл движения 101, 105, 109, 118, 284
- калибровочная степень свободы 285
- калибровочное поле 33
- калибровочные полевые теории 254–256, 286
- преобразования 33, 293, 295, 303, 345, 349, 352, 357, 361
- канонические координаты и импульсы 100
- Картана структурное уравнение 38
- касательное пространство 35
- квазифильбайны 317
- Клиффорда алгебра 119, 234, 267, 310, 336, 340
- ковариантная производная в римановой геометрии 22, 23, 37
- — гармоническая 186, 190, 299
- — с калибровочным полем 33
- — суперсимметричная 168, 169, 186
- ковариантные и контравариантные векторы 20
- Кодайры тождества 271
- комплекс анти-Дольбо 50, 223, 225
- де Рама 7, 10, 30
- Дирака 239, 355, 377, 379, 385
- Дольбо 13, 49, 221, 223, 240, 282, 386
- — твистованный 223, 225, 232, 379
- Кэлера—де Рама 244
- корневой мультиплет 266, 295
- корни (алгебры Ли) 89–95
- кривизна гауссова 26
- Обаты 87
- риманова 26
- Кристоффеля символы 23, см. связность Леви-Чивиты
- кручение 24
- голоморфное 224–225, 234, 235, 265, 266, 282
- кэлеров потенциал 47, 61, 292, 298
- Ландау гамильтониан (для электрона в магнитном поле) 13, 127–131
- диамагнетизм 128
- Лапласа—Бельтрами оператор 10, 30, 204
- Лапласа—де Рама оператор 30, 376
- Лежандра преобразование 102, 137
- Лефшеца операторы 271
- Лихнеровича формула 349
- Лоренца сила 127
- магнитный заряд 130, 159, 345–355
- — дробный 14, 352–355
- момент электрона 127
- монополь 74, 255, 346, 352, 367
- поток см. магнитный заряд
- метрика НКТ — приводимая и неприводимая 324, 329
- Taub-NUT 73–74, 325–327
- Атьи—Хитчина 75
- Дельдука—Валента 87, 328–329
- Фубини—Штуди 62, 356
- Эгучи—Хансона 328
- эрмитова 41
- многообразие НКТ 12
- — обата-плоское 184, 260, 268, 271, 297, 298, 369
- би-НКТ 14
- бикэлерово 14
- биспинорное 14, 258
- гиперкомплексное 65
- гиперкэлерово 12, 69
- квазикомплексное 13, 249
- комплексное 41
- кэлерово 12, 47
- ориентируемое 20
- почти комплексное 52, 62
- риманово 21
- спинорное 13, 254
- Хопфа 61, 86
- монополярные гармоники 351
- Морса теория 7, 13, 209–213

- напряжённости поля тензор 35
 Нейенхейса тензор 56, 63, 88, 90, 227, 310
 нормальный символ см.
 упорядочение нормальное
- Обаты семейства 320, 324
 однородные пространства 95
 октонионы 63
 оператор эволюции 122, 142–154, 375, 380
 — —, ядро 142
 — —, ядро для грассмановых переменных 148–153
 осциллятор ангармонический 146
 — гармонический 129, 143, 148, 284
 — — в голоморфных переменных 117, 124
 — грассманов 116–120, 125, 131, 148–150, 153
 — суперсимметричный 124–126
 отображения склейки 20, 41, 43, 236, 357
- Паули гамильтониан 126, 165, 220, 346, 352
 — матрицы 68, 126, 305
 — — в четырёх измерениях 67
 Планка постоянная 111
 полудинамические переменные 365–367
 Понтрягина число 360, 382
 препотенциал в бикэлеровой модели 250
 — в бисимплектической модели 258
 — в модели НКТ 259, 265, 292, 293, 297
 — в модели би-НКТ 294
 — в симплектической модели 253, 254, 276
 — гармонический НКТ 14, 191, 259, 318, 322
 — — гиперкэлеров 14, 193, 322, 325
 — — симплектический 257
 — для калибровочного поля в модели Дольбо 221, 356
- приближение гауссово 145, 381, 386, 389
 — древесное 381
 — однопетлевое 381
 принцип Гюйгенса—Френеля 143
 — наименьшего действия 104, 146
 произведение форм внешнее 28
 — — внутреннее 28
 — — скалярное 28
 псевдовещественность 68, 180, 191–193, 299–301, 306, 307, 320, 327
 псевдосопряжение 185, 189, 298–300, 308
- расслоение 32, 349, 355
 — векторное 32, 373
 — главное 14, 32, 34, 36, 358, 360
 — касательное 36
 — линейное 337, 344, 352
 — — каноническое 221
 — спинорное 338
 Римана тензор 26
 Риччи тензор 26, 72
- самодуальность 66, 72, 74, 77, 239, 332, 333, 361–363, 367, 368
 связность аффинная 9, 22
 — Бисмута 45
 — в главном расслоении см. калибровочное поле
 — Леви-Чивиты 23
 — Обаты 38, 84, 86, 184, 260, 268, 271, 291, 321
 — спиновая 37, 38
 сигма-модель $\mathcal{N} = 1$ 197, 386, 388
 — $\mathcal{N} = 2$ де Рама 198–209
 — — — квазикомплексная 215, 249, 289
 — — — с квазикручениями 213
 — — — с потенциалом 209
 — — Дольбо 217–240, 379
 — — — с калибровочным полем 234

- сигма-модель $\mathcal{N} = 4$ НКТ 259–264,
 291, 292, 294, 295, 306–333, 369
 — — — с калибровочным полем
 331–333
 — — би-НКТ 79, 166, 264–268, 294,
 295, 311
 — — бикэлерова 250–252, 266,
 294–295
 — — бисимплектическая 258, 266
 — — кэлерова 242–248, 283
 — — — квазикомплексная 248–250,
 292, 293
 — — симплектическая 252–257, 278,
 295, 365
 — — — с калибровочным полем
 254–257
 — $\mathcal{N} = 8$ би-НКТ 274–276
 — — бикэлерова 272–274
 — — гиперкэлерова 268–271, 283,
 298–306, 321
 — — симплектическая 276–278
 — несуперсимметричная 197
 симплектические обозначения
 (для векторов и комплексных
 структур) 67
 системы с высшими
 производными 107, 200
 скобка Груневолда—Мояля 113
 — — для грассмановых
 переменных 140
 — Ли 108–110, 242, 271, 310
 — Пуассона 101
 — — для грассмановых
 переменных 118, 340
 спинорная структура 338, 358, 385, 387
 спиноры 120, 127, 335–338
 спонтанное нарушение
 суперсимметрии 131, 134, 157, 159
 стандартная модель 362
 стереографические координаты 41,
 346, 367
 супервремя 13
 супергруппа 164
 суперзаряды 11, 121
 супермногообразии 99
 суперполе $\mathcal{N} = 1$ 166
 — $\mathcal{N} = 2$ вещественное 170
 — — киральное 171
 — $\mathcal{N} = 4$ (3, 4, 1) 180
 — — (4, 4, 0) 183
 — — гармоническое
 (q^+ линейное) 190
 — — — (q^+ нелинейное) 191
 — — — (V^{++}) 192
 — — киральное 178
 — $\mathcal{N} = 8$ гармоническое 193
 — грассманово 199, 247
 — зеркальное 179, 180, 183, 250, 251,
 258, 259, 264, 272, 274
 суперпотенциал 132, 134, 179, 209,
 247, 248, 354
 суперпреобразования
 динамических переменных 137,
 138, 166, 171, 172, 200, 226, 241,
 260, 261, 288, 304, 305, 313, 314
 — координат суперпространства
 164, 169, 177, 186, 189
 — суперполей 175, 226, 241, 251, 260,
 265, 272, 274, 276, 310
 суперсвязность 181
 суперякобиан 309, 390
 теорема Атьи—Зингера 14, 141, 209,
 373–394
 — КЛВ 369–371
 — Нётер 104–109, 137, 165, 200, 214,
 218, 243, 286
 — Ньюландера—Ниренберга 13, 55,
 173, 230
 — Римана—Роха 373
 — Самельсона 87
 — Стокса 31, 345, 361
 — Фробениуса 57
 тепловое ядро 148
 тороны 360
 'т Хофта символы 67, 73, 367, 368
 упорядочение вейлевское 112, 139,
 160, 161, 202, 219

- упорядочение, неоднозначность 111
- нормальное 150, 162
- уравнение Гамильтона 100
- геодезической 99
- Лагранжа 102
- — для грассмановых переменных 117
- Максвелла 127
- Шрёдингера 110, 111, 353

- фазовое пространство 100
- — для грассмановых переменных 117, 136
- фермионный заряд 156, 204, 207, 213, 214, 222, 270, 271, 348, 384
- Фока—Швингера калибровка 71
- форма гармоническая 31
- замкнутая 30, 207
- инвариантного объёма 28
- кэлерова 51
- Маурера—Картана 73

- форма точная 31, 207
- фундаментальное решение 142, 148

- Хирцебруха сигнатура 376–379, 382
- Ходжа дуальность 27
- — для комплексных многообразий 48
- разложение 205
- ромб 51

- Чжэня класс 14, 360
- Чжэня—Саймонса инвариант 361
- теория 366

- эйлерова характеристика 205–209, 211, 215, 376, 377

- Якоби полиномы 351
- тождества 101, 109, 118, 137, 271
- Янга монополюс 367, 368
- Янга—Миллса теория 362