

Семинар про цикломодули Роста

Дорогие друзья и коллеги, я хочу организовать учебный семинар, посвящённый единой теме, про которую я ничего не знаю, но в которой хотел бы разобраться.

Я выбрал цикломодули, потому что можно начать с элементарных определений, не требующих никаких пререквизитов от слушателей. В то же время, категория цикломодулей является сердцем (не эффективной версией) категории мотивов $DM(k)$, это результат Деглиза (возможно, k предполагается совершенным, по крайней мере, это так в оригинальной статье [2]). Более того, Фельд, ученик Деглиза и Фазеля, построил цикломодули Милнора–Витта [4], и показал, что такая категория является сердцем стабильной гомотопической категории $SH(k)$ [5]. В действительности, последний результат сравнивает цикломодули Милнора–Витта с гомотопическими модулями Мореля, то есть, строго гомотопически инвариантными пучками Нисневича градуированных абелевых групп на $Sm(k)$, снабжёнными изоморфизмами десуспензии (раз-надстройки?).

Я хотел бы организовать семинар таким образом, чтобы в начале была только К-теория Милнора, и постепенно появились группы Чжоу, мотивные когомологии, и в конце категория $SH(k)$. Я надеюсь, что благодаря этому, с одной стороны, в семинаре будет комфортно участвовать людям, которые никогда не работали с $SH(k)$ (например, мне), а, с другой стороны, людям, которые с ней работают, не придётся скучать на обзорных докладах. Для этого я хочу рассмотреть в рамках семинара следующие три темы:

- конструкция групп Чжоу с коэффициентами (по оригинальной статье Роста [11] и книжке Карпенко–Меркурьева–Элмана [3]);
- доказательство Мореля гипотезы Милнора про квадратичные формы (теоремы Вишика–Воеводского–Орлова) [8];
- статьи Фельда про цикломодули Милнора–Витта [4, 5].

Я напишу чуть подробнее об этих темах и о плане семинара.

Насколько я понимаю историю вопроса, сначала, Рост, Меркурьев и др. вычисляли группы Чжоу, и придумали придумали спектралки, которые стартуют с чего-то вроде групп Чжоу с коэффициентами в локальной системе [1, 11]. Цикломодули Роста — это в точности и есть аксиоматизация понятия локальной системы для групп Чжоу.

Как приложение цикломодулей к группам Чжоу, Рост отмечает не только возможность вычисления последних при помощи спектралки, но

и то, что *определение* кольца Чжоу становится проще в терминах цикломодулей. А именно, удобно, что точную последовательность локализации можно продолжать влево, и значительно проще построить пуллбэк вдоль замкнутого вложения.

Мне кажется очень естественным начать с конкретного цикломодуля K_*^M , то есть, посмотреть на конструкцию групп Чжоу (без коэффициентов), которую предлагает Рост. Я предлагаю просто сделать несколько подробных докладов по книжке Карпенко–Меркурьева–Элмана [3], где эта конструкция приводится с деталями. В частности, хотелось бы посмотреть на построение пуллбэка, и, может быть, сравнить его с рассуждением из Фултона [6].

После этого я предлагаю перейти к оригинальной статье Роста [11], ввести, собственно, определение цикломодуля, привести примеры (когомологии Галуа, К-теория Квиллена), и посмотреть на спектральную последовательность.

Далее мне хотелось бы попробовать научиться работать с цикломодулями, и для этого я предлагаю разобрать статью Мореля [8] с доказательством теоремы Вишика–Воеводского–Орлова [9], то есть гипотезы Милнора о квадратичных формах. Нужно отметить, что я имею в виду не рассуждение [7], возможно, до сих пор остающееся только наброском, а другой результат. Рассуждение Мореля опирается на решение Воеводским гипотезы Милнора (об этальных когомологиях), но не использует точных треугольников, в которые входит мотив Роста, или операций Милнора Q_i . Вместо этого, оно использует цикломодули Роста, статью Оянгурена–Панина [10], и некоторые результаты статьи Воеводского–Суслина [12].

Наконец, уже немного войдя в контекст математики, развитой в связи с гипотезой Милнора, я бы хотел перейти к гомотопическим модулям и цикломодулям Милнора–Витта. Я надеюсь, что некоторые детали конструкции Фельда из его первой статьи [4] к этому моменту нам будут уже хорошо понятны, и на них не нужно будет останавливаться подробно, но зато нам будет интересна его вторая статья [5], где он строит цикломодуль Милнора–Витта по гомотопическому модулю, и наоборот.

Доклады

Ниже я привожу предполагаемые темы нескольких первых докладов.

Дата: 27.10.2020, докладчик: Андрей Лавренов. В докладе предполагается напомнить, как устроены гомоморфизмы вычетов и норменное отображение Като для К-теории Милнора, и дать определение комплекса Роста $C_*(X)$.

Дата: 3.11.2020, докладчик: Павел Сечин. Предполагается построить пушфорвард и пуллбэк на уровне комплексов, доказать, что $d^2 = 0$. См. [3, §§ 49.A–49.D] или [11, § 3].

Дата: 10.11.2020, докладчик: Сергей Синчук. Предполагается продолжить разговор о комплексе Роста, в частности, обсудить граничное отображение, внешнее произведение, гомоморфизм деформации (специализации). См. [3, §§ 49.E, 50, 51] или [11, §§ 3.10, 4].

Дата: 17.11.2020, докладчик: ТВА. Предполагается дать определение групп когомологий с коэффициентами в К-теории Милнора, доказать теорему о проективизированном расслоении, определить классы Черна. См. [3, §§ 52–54] или [11].

Дата: 24.11.2020, докладчик: ТВА. Предполагается построить пуллбэк вдоль замкнутого вложения, определить кольцевую структуру в случае гладкого многообразия, и сравнить результаты с обычным подходом к группам Чжоу. См. [3, §§ 55–57] или [11, §§ 5, 10–14].

Дата: 1.12.2020, докладчик: ТВА. Предполагается обсудить определение цикломодулей, разобрать примеры и альтернативное (упрощённое) определение в случае совершенного базового поля [11, §§ 1–2].

Дата: 8.12.2020, докладчик: ТВА. Предполагается обсудить спектральную последовательность, начинающуюся с Чжоу с коэффициентами в цикломодулях [11, §§ 7–8].

Дата: 15.12.2020, докладчик: ТВА. Предполагается разобрать план доказательства статьи Мореля [8, § 1], ввести основные определения [8, § 2] и посвятить время необходимым пререквизитам из статьи Воеводского–Суслина [12].

...

- [1] Н. Карпенко, А. Меркурьев, “Группы Чжоу проективных квадрик”, *Алгебра и анализ* **2:3** (1990) 218–235 (ссылка).
- [2] F. Dèglise, “Modules Homotopiques”, *Documenta Mathematica* **16** (2011) 411–455 (ссылка).
- [3] R. Elman, N. Karpenko, A. Merkurjev, “The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms” *Colloquium Publications* **56** (2008) 1–435 (ссылка).
- [4] N. Feld, “Milnor–Witt Cycle Modules”, *arXiv preprint* (2018) 1–39 (ссылка).

- [5] N. Feld, “Morel Homotopy Modules and Milnor-Witt Cycle Modules”, *arXiv preprint* (2019) 1–28 (ССЫЛКА).
- [6] W. Fulton, “Interseccion Theory”, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer Science & Business Media (2012) 1–470 (ССЫЛКА).
- [7] F. Morel, “Suite spectrale d’Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques” *C. R. Acad. Sci. Paris* **328**:11 (1999) 963–968 (ССЫЛКА).
- [8] F. Morel, “Milnor’s conjecture on quadratic forms and mod 2 motivic complexes”, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **114** (2005) 63–101 (ССЫЛКА).
- [9] D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky, “An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms”, *Annals of Mathematics* **165** (2007) 1–13 (ССЫЛКА).
- [10] M. Ojanguren, I. Panin, “A purity theorem for the Witt group”, *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure* **31**:1 (1999) 71–86 (ССЫЛКА).
- [11] M. Rost, “Chow groups with coefficients”, *Documenta Mathematica* **1** (1996) 319–393 (ССЫЛКА).
- [12] A. Suslin, V. Voevodsky, “Bloch–Kato Conjecture and Motivic Cohomology with Finite Coefficients”, in: Gordon B.B., Lewis J.D., Müller-Stach S., Saito S., Yui N. (eds) “The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles”, *NATO Science Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences)* **548**, Springer (2000) 1–73 (ССЫЛКА).