(1) (a) Вычислите $\mathrm{H}\mathbb{Q}^*(\mathrm{KU})$.
(b) Докажите, что $\mathrm{KU}_{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}\mathbb{Q}[2n]$, где $\mathrm{KU}_{\mathbb{Q}}$ – рационализация спектра KU, т.е. спектр, представляющий теорию когомологий $\mathrm{KU}^*(-)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.
(c) Докажите, что $\mathrm{KU} \ncong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}\mathbb{Z}[2n]$ в стабильной гомотопической категории.

(2) (a) Проверьте, что $\mathrm{H}\mathbb{Z}^1(\mathrm{KU})$ не равно 0.
(b) Постройте фантомный морфизм $\mathrm{KU} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}\wedge \mathrm{S}^1$, т.е. ненулевой морфизм в стабильной гомотопической категории, который для любого топологического пространства с отмеченной точка X индуцирует нулевое отображение $\mathrm{KU}^*(X) \to \mathrm{H}\mathbb{Z}^{*+1}(X)$ на ассоциированных теориях когомологий.

(3) Докажите, что $\mathrm{KU}\wedge \mathrm{H}\mathbb{Z}/2 = 0$.

(4) (a) Пусть спектры A, B таковы, что $\pi_i(A) = \pi_i(B) = 0$ при $i < 0$. Докажите, что $\pi_i(A\wedge B) = 0$ при $i < 0$.
(b) Пусть для спектра A и некоторого $N \in \mathbb{Z}$ выполняется $\pi_i(A) = 0$ при $i < N$. Докажите, что тогда естественный морфизм $\pi_N(A) \to \pi_N(A\wedge\mathrm{H}\mathbb{Z})$, индуцированный единичным морфизмом $\mathbb{S} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}$, – изоморфизм.
(c) Пусть для спектров A, B и некоторого $N \in \mathbb{Z}$ выполняется $\pi_i(A) = \pi_i(B) = 0$ при $i < N$ и пусть $f\colon A \to B$ – морфизм, индуцирующий изоморфизмы $\pi_i(A\wedge\mathrm{H}\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \pi_i(B\wedge\mathrm{H}\mathbb{Z})$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Докажите, что f – изоморфизм в стабильной гомотопической категории.
(d) Приведите пример морфизма $f\colon A \to B$ в стабильной гомотопической категории, индуцирующего изоморфизмы $\pi_i(A\wedge\mathrm{H}\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \pi_i(B\wedge\mathrm{H}\mathbb{Z})$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, но не являющегося изоморфизмом.

(5) Докажите, что если $f\colon X \to Y$ – морфизм между связными односвязными топологическими пространствами с отмеченной точкой такой, что $\Sigma^\infty f$ – изоморфизм в стабильной гомотопической категории, то f – слабая гомотопическая эквивалентность. Верно ли это утверждение без условия односвязности?

(6) Докажите, что любой спектр изоморфен в стабильной гомотопической категории спектру, состоящему из
(a) связных пространств,
(b) CW-комплексов конечной размерности.
Можно ли добиться (a) или (b), если потребовать, чтобы получающийся спектр был Ω-спектром?

(7) Пусть A – коммутативный кольцевой спектр, X – топологическое пространство.
(a) Проверьте, что кольцо $A^*(X_+)$ градуированно-коммутативно, т.е. для $\alpha \in A^p(X_+)$, $\beta \in A^q(X_+)$ выполняется $\alpha\cdot\beta = (-1)^{pq}\beta\cdot\alpha$.
(b) Для замкнутого подмножества $V \subseteq X$ определите структуру $A^*(X_+)$-модулей на $A^*(V_+)$, $A^*(X/V)$, $A_*(V_+)$, $A_*(X/V)$ и проверьте, что если $V \subseteq X$ – вложение под CW-комплекса, то морфизмы в длинных точных последовательностях гомологий и когомологий
$$\ldots \to A^*(X/V) \to A^*(X_+) \to A^*(V_+) \to A^{*+1}(X/V) \to \ldots$$
$$\ldots \to A_*(V_+) \to A_*(X_+) \to A_*(X/V) \to A_{*-1}(V_+) \to \ldots$$
являются гомоморфизмами $A^*(X_+)$-модулей.

(8) (a) Проверьте, что $\pi_i(\mathrm{MSO}) = 0$ при $i < 0$ и $\pi_0(\mathrm{MSO}) \cong \mathbb{Z}$.
(b) Постройте морфизм $\mathrm{MSO} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}$, индуцирующий изоморфизм на π_0.
(c) По ориентированному вещественному векторному расслоению E ранга n над CW-комплексом X постройте тавтологический морфизм $\Sigma^\infty\mathrm{Th}(E) \to \mathrm{MSO}[n]$, соответствующий морфизму $X \to \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(n,\infty)$, классифицирующему E, и определите таким образом (применяя предыдущий пункт) класс $th(E) \in \mathrm{H}^n(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z})$.
(d) Проверьте, что для ориентированного вещественного векторного расслоения E ранга n над CW-комплексом X морфизм
$$\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^{*+n}(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z}), \quad \alpha \mapsto \alpha\cdot th(E),$$
является изоморфизмом (проверьте это сначала для тривиального расслоения, а затем воспользуйтесь последовательностью Майера-Виеториса).

В задачах про (ко-)гомологии спектра KU можно пользоваться вычислениями, связанными с характеристическими классами. А именно, для комплексного векторного расслоения E ранга n над CW-комплексом X могут быть определены классы Черна $c_i(E) \in \mathrm{H}^{2i}(X;\mathbb{Z})$, $i = 1,\ldots,n$, такие, что

(1) для морфизма $f\colon Y \to X$ имеют место равенства $f^*(c_i(E)) = c_i(f^*E)$,
(2) для комплексных векторных расслоений E, E' рангов n и m над X имеет место равенство $c_t(E_1\oplus E_2) = c_t(E_1)c_t(E_2)$, где $c_t(E)$ – полный класс Черна, задаваемый равенством $c_t(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \ldots$,
(3) для комплексных Грассманнианов $\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,m)$ имеют место изоморфизмы колец
$$\mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n, c_1', c_2', \ldots, c_{m-n}'] \big/ \big((1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n)(1 + c_1' + c_2' + \ldots + c_{m-n}') - 1\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^*(\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,m);\mathbb{Z}),$$
$$c_i \mapsto c_i(\tau_n), \quad c_i' \mapsto c_i(\tau_n'),$$
где τ_n – тавтологическое расслоение ранга n, а τ_n' – тавтологическое расслоение ранга $m-n$ (его слой над точкой $V \le \mathbb{C}^m$ – пространство $\mathbb{C}^m/V$).

Кроме того, имеет место принцип расщепления: для комплексного векторного расслоения E ранга n над CW-комплексом X найдётся отображение CW-комплексов $f\colon Y \to X$ и линейные расслоения $L_1,\ldots,L_n$ над Y такие, что (1) $\mathrm{H}^*(Y;\mathbb{Z})$ – свободный модуль над $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$; в частности, отображение $f^*\colon \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(Y;\mathbb{Z})$ инъективно, (2) $f^*E \cong L_1\oplus\ldots\oplus L_n$; в частности, $f^*c_i(E) = \sigma_i(c_1(L_1),\ldots,c_1(L_n))$ – элементарные симметрические многочлены от первых классов Черна линейных расслоений $L_1,\ldots,L_n$.