Паросочетания и факторы. Глава 1. Структура максимального паросочетания

Д. В. Карпов

09.2021

Определение

• Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется *паросочетанием*, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество рёбер в максимальном паросочетании графа G.

• Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ *покрывает* вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v.

• Паросочетание M графа G называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа.

Условие и теорема Холла

Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2.

Теорема Холла

(P. Hall, 1935.) *В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли $V_1(G)$ тогда и только тогда, когда для любого множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \le |\mathrm{N}_G(U)|$.*

• Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы будем называть *условием Холла* для доли V_1.

• Если для любого множества $U \subset V_1(G)$ выполняется $|U| < |\mathrm{N}_G(U)|$, то будем говорить, что условие Холла для доли V_1 *выполнено с избытком*, или что доля V_1 *имеет запас*.

Условие и теорема Татта о совершенном паросочетании

Определение

Обозначим через $o(G)$ количество нечётных компонент связности графа G (то есть, компонент связности, содержащих нечётное число вершин).

Теорема Татта

(W. T. Tutte, 1947.) *В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G - S) \leq |S|$.*

• Условие на количество нечётных компонент связности $o(G - S) \leq |S|$ называют *условием Татта*.

• Для доказательства существования в графе совершенного паросочетания достаточно проверить условие Татта для всех множеств $S \subset V(G)$.

Множество Татта. Дефицит графа

• А что делать в случае, когда в графе нет совершенного паросочетания?

Определение

Пусть $S \subset V(G)$ таково, что $o(G - S) > |S|$. Мы будем называть S *множеством Татта* графа G.

• По теореме Татта, если в графе G нет совершенного паросочетания, то в нём есть хотя бы одно множество Татта.

Определение

Дефицитом графа G мы будем называть величину $\mathrm{def}(G) = v(G) - 2\alpha'(G)$.

• Дефицит графа G — это количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием графа G.

• Очевидно, $\mathrm{def}(G) = 0$ тогда и только тогда, когда в графе G есть совершенное паросочетание.

• Определение дефицита можно переписать в виде формулы для вычисления размера максимального паросочетания:

$$\alpha'(G) = \frac{v(G) - \mathrm{def}(G)}{2}.$$

Формула Бержа

Теорема 1

(C. Berge, 1958.) *Для любого графа G выполняется равенство*

$$\mathrm{def}(G) = \max_{S \subset V(G)} o(G-S) - |S|.$$

Доказательство. $\geq$. • Пусть M — максимальное паросочетание графа G, $S \subset V(G)$, $n = o(G-S)$, а $U_1, \dots, U_n$ — все нечётные компоненты связности графа $G-S$.

• В каждой нечётной компоненте U_i существует хотя бы одна вершина u_i, которая не покрыта ребром M или покрыта ребром $e_i = u_i x_i \in M$, где $x_i \in S$.

• Следовательно, не менее, чем $n - |S|$ из вершин $u_1, \dots, u_n$ не покрыты паросочетанием M, откуда следует неравенство $\mathrm{def}(G) \geq o(G-S) - |S|$.

$\leq$. • Пусть

$$k = \max_{S \subset V(G)} o(G - S) - |S|.$$

• Если $k = 0$, по Теореме Татта в графе G есть совершенное паросочетание и $\mathrm{def}(G) = 0$, этот случай тривиален.

• Пусть $k > 0$, W — множество из k новых вершин ($W \cap V(G) = \varnothing$), а граф H получен присоединением к G вершин множества W, причём каждая из вершин множества W будет смежна со всеми остальными вершинами графа H.

• Покажем, что для графа H выполняется условие Татта. Понятно, что $k \equiv v(G) \pmod 2$, поэтому $v(H) = v(G) + k$ чётно. Таким образом, достаточно проверить условие для непустых множеств $T \subset V(H)$.

• Если $T \not\supset W$, то граф $H - T$ связен и $o(H - T) \leq 1 \leq |T|$.

• Если $T = W \cup S$, где $S \subset V(G)$, то $o(H - T) = o(G - S) \leq k + |S| = |T|$.

• В обоих случаях условие Татта выполняется и по теореме Татта в графе H есть совершенное паросочетание N.

• Тогда в графе G существует такое паросочетание M, что $|M| \ge |N| - k$, следовательно, $\alpha'(G) \ge |M| \ge \frac{v(G)+k}{2} - k = \frac{v(G)-k}{2}$, откуда немедленно следует доказываемое неравенство. $\square$

Фактор-критические графы

Определение

• Граф G называется *фактор-критическим*, если для любой вершины $u \in V(G)$ у графа $G - u$ есть совершенное паросочетание.

• Паросочетание M в графе G называется *почти совершенным*, если M покрывает все вершины графа G, кроме одной.

• Очевидно, фактор-критический граф не имеет совершенного паросочетания, количество вершин фактор-критического графа нечётно.

• Если граф G фактор-критический, то $\mathrm{def}(G) = 1$.

• Граф G является фактор-критическим тогда и только тогда, когда для любой его вершины $u \in V(G)$ существует почти совершенное паросочетание M_u, не покрывающее u.

• Легко видеть, что для фактор-критического графа G и любой вершины $u \in V(G)$ выполняется равенство $\alpha'(G-u) = \alpha'(G)$. Гораздо интереснее, что это условие заставляет граф быть фактор-критическим. Это доказывается в следующей теореме, которую часто называют *леммой Галлаи*.

Теорема 2

(T. Gallai, 1963.) *Пусть связный граф G таков, что для любой вершины $u \in V(G)$ выполняется равенство $\alpha'(G-u) = \alpha'(G)$. Тогда G — фактор-критический граф.*

Доказательство. • Рассмотрим множество Татта S. Тогда $o(G-S) - |S| = \mathrm{def}(G) = k$.

• Предположим, что $S \neq \varnothing$. Пусть $v \in S$, $G' = G - v$. Положим $S' = S \setminus \{v\}$.

• Очевидно, $G' - S' = G - S$, откуда следует, что

$$\mathrm{def}(G-v) = \mathrm{def}(G') \geq o(G'-S') - |S'| = (o(G-S) - |S|) + 1 = \mathrm{def}(G) + 1.$$

• Тогда ввиду формулы $\alpha'(G) \geq \alpha'(G-v) + 1$, что невозможно.

• Следовательно, $S = \varnothing$ и, так как граф G связен, мы имеем $\mathrm{def}(G) = o(G) \le 1$.

• Из условия теоремы очевидно, что у графа G нет совершенного паросочетания, следовательно, $\mathrm{def}(G) = 1$ и граф G является фактор-критическим. □

Следствие 1

Пусть G — фактор-критический граф. Тогда $\varnothing$ — единственное множество Татта графа G.

Доказательство. • Для любой вершины u фактор-критического графа G выполняется равенство $\alpha'(G-u) = \alpha'(G)$.

• Поэтому можно применить рассуждения из доказательства Теоремы 2 и получить, что максимум $o(G-S) - |S|$ достигается только при $S = \varnothing$, причём этот максимум равен 1.

• Поскольку $o(G-S) - |S| \ge 1$ для любого множества Татта S, то непустых множеств Татта у фактор-критического графа нет. □

Stability lemma

- В этом разделе мы докажем теорему о структуре максимального паросочетания в графе. Для графа G введём следующие обозначения:
- $D(G)$ — множество из всех вершин $u \in V(G)$, для каждой из которых существует максимальное паросочетание M_u графа G, не покрывающее u;
- $A(G)$ — множество всех вершин графа G, не входящих в $D(G)$, но смежных хотя бы с одной вершиной из $D(G)$;
- $C(G) := V(G) \setminus (A(G) \cup D(G))$.
- Следующее утверждение носит название *Stability lemma*.

Лемма 1

Пусть $a \in A(G)$. Тогда

- $D(G - a) = D(G)$,
- $A(G - a) = A(G) \setminus \{a\}$,
- $C(G - a) = C(G)$,
- $\alpha'(G - a) = \alpha'(G) - 1$.

Доказательство. • Очевидно, достаточно доказать, что $D(G - a) = D(G)$.

$\supset$. • Пусть $u \in D(G)$. Тогда существует максимальное паросочетание M_u графа G, не покрывающее u.

• Поскольку любое максимальное паросочетание графа G покрывает a, то $\alpha'(G-a) = \alpha'(G) - 1$ и более того, если $ax \in M_u$, то $M_u \setminus \{ax\}$ — максимальное паросочетание графа $G-a$, не покрывающее u.

• Таким образом, $u \in D(G-a)$.

$\subset$. Предположим, что существует максимальное паросочетание M' графа $G-a$, не покрывающее вершину $v \notin D(G)$.

• Пусть $w \in D(G)$ — смежная с $a \in A(G)$ вершина, а M_w — максимальное паросочетание графа G, не покрывающее w.

• Так как $v \notin D(G)$, максимальное паросочетание M_w покрывает вершину v.

• Рассмотрим граф $H = G(M_w \cup M')$ — очевидно, он является объединением нескольких путей и чётных циклов.

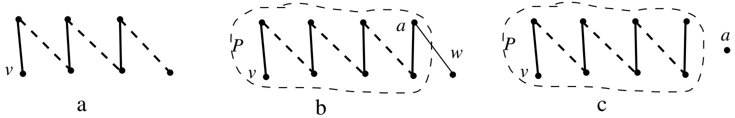
• Пусть P — компонента графа H, содержащая v. Так как $d_P(v) = 1$, то P — путь с началом в вершине v. В пути P чередуются рёбра из M_w и M', начиная с ребра из M_w.

• Так как $d_H(a) = 1$, то либо $a \notin P$, либо a — конец P (в этом случае последнее ребро пути принадлежит M_w).

- Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Путь P кончается ребром из M' (рис. a).

- Рассмотрим паросочетание $M_v = M_w \triangle E(P)$. Очевидно, M_v — максимальное паросочетание графа G, не покрывающее v, поэтому $v \in D(G)$, противоречие.



Случай 2. Путь P кончается ребром из M_w, вершина a — конец пути P (рис. b).

- Рассмотрим паросочетание $M_v^* = (M_w \triangle E(P)) \cup \{aw\}$. Тогда M_v^* — максимальное паросочетание графа G, не покрывающее v, поэтому $v \in D(G)$, противоречие.

Случай 3. Путь P кончается ребром из M_w, $a \notin V(P)$ (рис. c). Рассмотрим паросочетание $M'' = M' \triangle E(P)$. Тогда $|M''| = |M'| + 1$, причём $M'' \subset E(G - a)$. Противоречие с максимальностью паросочетания M'.

- Таким образом, наше предположение невозможно и $D(G - a) \subset D(G)$.

Задача 1

а) Пусть $a \in C(G)$. *Докажите, что* $D(G-a) \supset D(G)$, $A(G-a) \supset A(G)$, $C(G-a) \subset C(G)$, $\alpha'(G-a) = \alpha'(G) - 1$.

б) Пусть $a \in D(G)$. *Докажите, что* $D(G-a) \subset D(G) \setminus \{a\}$, $A(G-a) \subset A(G) \setminus \{a\}$, $C(G-a) \supset C(G)$, $\alpha'(G-a) = \alpha'(G)$.

Структурная теорема Галлаи-Эдмондса

Теорема 3

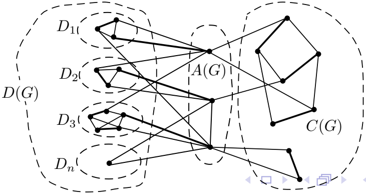
(T. Gallai, 1964; J. Edmonds, 1965.) *Пусть G — граф, $U_1, \dots, U_n$ — компоненты связности графа $G(D(G))$, $D_i = G(U_i)$, $C = G(C(G))$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф C имеет совершенное паросочетание.*

2) *Графы $D_1, \dots, D_n$ — фактор-критические.*

3) *Любое максимальное паросочетание M графа G состоит из совершенного паросочетания графа C, почти совершенных паросочетаний графов $D_1, \dots, D_n$ и покрывает все вершины множества $A(G)$ рёбрами с концами в различных компонентах связности $U_1, \dots, U_n$*

4) $\mathrm{def}(G) = n - |A(G)|$, $\alpha'(G) = \frac{v(G)+|A(G)|-n}{2}$.



Доказательство. 1) • Последовательно удаляя вершины множества $A = A(G)$, по Лемме 1 мы получим
$D(G - A) = D(G)$, $\quad A(G - A) = \varnothing$, $\quad C(G - A) = C(G)$,

$$\alpha'(G - A) = \alpha'(G) - |A|. \qquad (*)$$

• Это означает, что $E_{G-A}(C(G - A), D(G - A)) = \varnothing$.

• Каждое максимальное паросочетание M' графа $G - A$ покрывает все вершины множества $C(G)$, поэтому M' содержит совершенное паросочетание графа C.

2) Понятно, что $U_1, \dots, U_n$ — компоненты связности графа $G - A$.

• Для любой вершины $u \in U_i$ существует максимальное паросочетание M_u графа $G - A$, не содержащее u.

• Так как U_i — компонента связности графа $G - A$, паросочетание M_u содержит максимальное паросочетание графа D_i (разумеется, не покрывающее вершину u).

• Следовательно, $\alpha'(D_i) = \alpha'(D_i - u)$ и по Теореме 2 мы получаем, что граф D_i — фактор-критический.

3) • Пусть M — максимальное паросочетание графа G, а M' получено из M удалением всех рёбер, инцидентных вершинам множества A.

• Тогда $|M'| \geq |M| - |A|$ и по формуле $(*)$ понятно, что M' — максимальное паросочетание графа $G - A$.

• Более того, из $\alpha'(G - A) = \alpha'(G) - |A|$ следует $|M'| = |M| - |A|$, а значит, все вершины множества A покрыты в M различными рёбрами.

• Так как M' — максимальное паросочетание графа $G - A$, по пунктам 1 и 2 очевидно, что M' содержит совершенное паросочетание графа C и почти совершенные паросочетания фактор-критических графов $D_1, \dots, D_n$. Значит, рёбра паросочетания M соединяют вершины A с непокрытыми M' вершинами различных компонент связности из $U_1, \dots, U_n$.

4) Из пункта 3 сразу же следуют оба равенства пункта 4.

$\square$

Следствие 2

Пусть G — граф, $U_1, \dots, U_n$ — компоненты связности графа $G(D(G))$, $D_c(G) = \{U_1, \dots, U_n\}$. Пусть D_G — двудольный граф с долями $A(G)$ и $D_c(G)$, причем $a \in A(G)$ и $U_i \in D_c(G)$ смежны тогда и только тогда, когда в графе G вершина a смежна хотя бы с одной вершиной из U_i. Тогда доля $A(G)$ имеет запас в графе D_G.

Доказательство. • Нам нужно доказать, что в графе $D_G - U_i$ выполняется условие Холла для доли $A(G)$, для чего по Теореме Холла достаточно показать, что в этом графе есть паросочетание, покрывающее долю $A(G)$.

• Пусть $u \in U_i$, а M — максимальное паросочетание графа G, не покрывающее u.

• По Теореме 3 M должно покрывать все вершины множества $A(G)$ рёбрами с концами в различных компонентах $U_1, \dots, U_n$ и содержать почти совершенное паросочетание графа $D_i = G(U_i)$, следовательно, все вершины из $U_i \setminus \{u\}$ разбиты на пары соединённых рёбрами из M.

• Таким образом, M не содержит рёбер, соединяющих $A(G)$ и U_i, следовательно, в графе $D_G - U_i$ есть максимальное паросочетание, покрывающее $A(G)$.

Следствие 3

Пусть $e \in E(G)$.

1) *Если ребро e инцидентно вершине из $D(G)$, то существует максимальное паросочетание графа G, содержащее e.*

2) *Если ребро e соединяет две вершины из $A(G)$ или вершину из $A(G)$ с вершиной из $C(G)$, то не существует максимального паросочетания графа G, содержащего e.*

Доказательство. 1) • Пусть $u \in D(G)$, $e = uv$. Рассмотрим максимальное паросочетание M_u графа G, не покрывающее u.

• Тогда $v \in D(G)$ или $v \in A(G)$.

• Из пункта 2 Теоремы 3 следует, что M_u покрывает вершину v, пусть $vw \in M_u$. Тогда $(M_u \setminus \{vw\}) \cup \{uv\}$ — максимальное паросочетание, содержащее ребро e.

2) Непосредственное следствие пункта 3 Теоремы 3. □

• Разберём несколько важных случаев, в которых разбиение Галлаи-Эдмондса тривиально.

Случай 1: граф G имеет совершенное паросочетание.

• В этом случае $D(G) = A(G) = \varnothing$, $C(G) = V(G)$.

Случай 2: граф G — фактор-критический.

• В этом случае $D(G) = V(G)$, $A(G) = C(G) = \varnothing$.

Случай 3: двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$, в котором доля V_1 имеет запас.

• По Теореме Холла для любой вершины $b \in V_2(G)$ в графе $G - b$ существует паросочетание M_b, покрывающее всю долю $V_1(G)$. Так как граф G двудолен, M — максимальное паросочетание графа G.

• Следовательно, в этом случае $D(G) = V_2$, $A(G) = V_1$, $C(G) = \varnothing$.

Барьеры

Определение

Множество $S \subset V(G)$, для которого $o(G-S)-|S| = \mathrm{def}(G)$ называется *барьером*.

• Барьер графа G — это такое множество вершин S, на котором достигается максимум в формуле Бержа.

• Из пункта 4 структурной теоремы Галлаи-Эдмондса следует, что $A(G)$ — барьер графа G.

• Однако, $A(G)$ — не единственный барьер. Более того, $A(G)$ в общем случае не является ни максимальным, ни минимальным по включению барьером. К тому же, ни пересечение, ни объединение двух барьеров не обязано быть барьером.

Задача 2

Докажите, что пересечение двух максимальных по включению барьеров графа G является барьером.

Определение

Для любого множества $X \subset V(G)$ обозначим через $O(X)$ — объединение всех нечетных компонент связности графа $G - X$.

Лемма 2

1) *Пусть* B *— барьер графа* G*. Тогда* $B \cap D(G) = \varnothing$ *и* $O(B) \supset D(G)$.

2) *Пусть* $x \in A(G) \cup C(G)$, $G' = G - x$, B' *— барьер графа* G'*. Тогда* $B = B' \cup \{x\}$ *— барьер графа* G*. В частности,* x *содержится хотя бы в одном барьере графа* G.

3) *Пусть* B *— барьер графа* G, $x \in B$*. Тогда* $B' = B \setminus \{x\}$ *— барьер графа* $G' = G - x$.

Доказательство. 1) • Пусть M — максимальное паросочетание графа G.

• M должно оставить непокрытой хотя бы по одной вершине в $o(B) - |B| = \mathrm{def}(G)$ нечётных компонентах связности графа $G - B$.

• Поскольку M оставляет непокрытыми ровно $\operatorname{def}(G)$ вершин, то M не покрывает ровно по одной вершине в $\operatorname{def}(G)$ нечётных компонентах связности графа $G - B$ и покрывает все остальные вершины графа.

• В частности, M покрывает B, откуда следует, что $B \cap D(G) = \varnothing$.

• Пусть $u \in D(G)$. Рассмотрим компоненту связности U графа $G - B$, содержащую вершину u и максимальное паросочетание M_u графа G, не покрывающее u.

• Так как M_u не покрывает вершину компоненты связности U, из сказанного выше следует, что U — нечётная. Следовательно, $D(G) \subset O(B)$.

2) • Так как по пункту 1 любое максимальное паросочетание графа G покрывает x, мы имеем $\alpha'(G') = \alpha'(G) - 1$ и, следовательно, $\operatorname{def}(G') = \operatorname{def}(G) + 1$.

• Поэтому, $o(G - B) = o(G' - B') = |B'| + \operatorname{def}(G') = |B'| + \operatorname{def}(G) + 1 = |B| + \operatorname{def}(G)$.

• Следовательно, B — барьер графа G.

• Так как $A(G')$ — барьер графа G', то $A(G') \cup \{x\}$ — барьер графа G.

3) • Из пункта 1 следует, что $x \in A(G) \cup C(G)$, поэтому $\alpha'(G') = \alpha'(G) - 1$ и $\mathrm{def}(G') = \mathrm{def}(G) + 1$.

• Тогда $o(G' - B') = o(G - B) = |B| + \mathrm{def}(G) = |B'| + \mathrm{def}(G) + 1 = |B'| + \mathrm{def}(G')$, следовательно, B' — барьер графа G'. $\square$

• Любая вершина из $A(G) \cup C(G)$ входит хотя бы в один барьер, а вершины множества $D(G)$ в барьеры не входят.

• Пусть B — барьер графа G, а M — максимальное паросочетание. Из доказательства пункта 1 Леммы 2 следует, что M оставляет непокрытыми ровно по одной вершине в $\mathrm{def}(G)$ нечётных компонентах связности графа $G - B$ и покрывает все остальные вершины графа. Вершины барьера B покрыты ребрами M, соединяющими их с вершинами различных нечётных компонент связности графа $G - B$.

• Отметим, что по пункту 2 структурной теоремы Галлаи-Эдмондса $O(A(G)) = D(G)$, то есть, для всех барьеров B графа G имеет место $O(B) \supset O(A(G))$. В этом смысле барьер $A(G)$ является минимальным.

• Если $C(G) = \varnothing$, то любой барьер является подмножеством $A(G)$. В этом случае $A(G)$ — единственный максимальный по включению барьер графа G.

Теорема 4

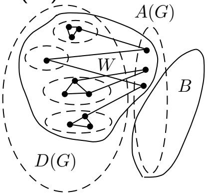
Пересечение всех максимальных по включению барьеров графа G есть $A(G)$.

Доказательство. $\supset$. • Пусть B — максимальный барьер, $|A(G) \setminus B| = k > 0$. Мы докажем, что $B' = B \cup A(G)$ — барьер и, тем самым, получим противоречие.

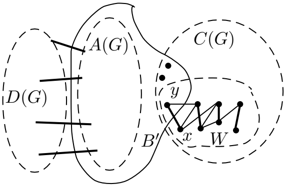
• B' получается из барьера B добавлением k вершин, поэтому достаточно доказать, что $o(G - B') \geq o(G - B) + k$: тогда $o(G - B') - |B'| \geq \mathrm{def}(G)$, то есть, B' — барьер.

• Пусть W — компонента связности графа $G - B$, содержащая $t > 0$ вершин из $A(G)$ (см. рис. a).

• По Лемме 2 $B' \cap D(G) = \varnothing$. Поэтому, W содержит все компоненты связности графа $G(D(G))$, соединённые рёбрами с $W \cap A(G)$.



a

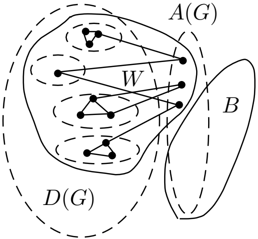


b

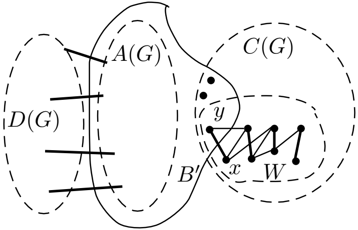
• По Теореме 3 все эти компоненты связности нечётные, а по Следствию 2 их хотя бы $t+1$.

• Таким образом, при добавлении t вершин из $W \cap A(G)$ в барьер может исчезнуть одна нечётная компонента связности (если $|W|$ нечётно), а появляется хотя бы $t+1$ нечётная компонента связности.

• Просуммировав прибавления по всем компонентам связности графа $G - B$, содержащим вершины из $A(G)$, мы получим, что $o(G - B') \geq o(G - B) + k$, что и требовалось доказать.



a



b

$\subset$. • Предположим противное, пусть существует принадлежащая всем максимальным барьерам вершина $x \notin A(G)$.

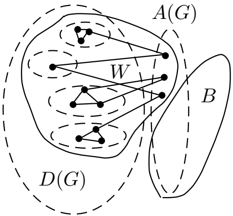
• По Лемме 2 тогда $x \in C(G)$.

• Рассмотрим максимальное паросочетание M графа G, пусть $xy \in M$. По Теореме 3 мы имеем $y \in C(G)$.

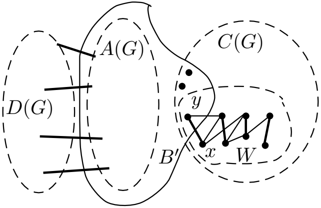
• Докажем, что $B = A(G) \cup \{y\}$ — барьер графа G. Так как $|B| = |A(G)| + 1$, для этого достаточно доказать, что $o(B) \geq o(A(G)) + 1$.

• Пусть W — компонента связности графа $G(C(G))$, содержащая x и y (см. рис.b).

• По Теореме 3 вершины W разбиваются на пары соединённых рёбрами из M, поэтому $|W|$ чётно.



a



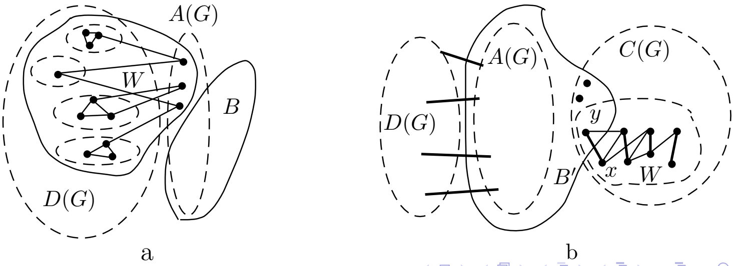
b

• Множество $W' = W \setminus \{y\}$ содержит нечетное число вершин и является объединением нескольких компонент связности графа $G - B$, которых нет в $G - A(G)$.

• Среди этих компонент связности, очевидно, есть нечетная. Значит, B — барьер графа G.

• Пусть B' — максимальный барьер графа G, содержащий B. В максимальном паросочетании M графа G все вершины барьера B' должны быть соединены рёбрами с вершинами различных нечётных компонент связности графа $G - B'$, следовательно, $x \notin B'$.

• Полученное противоречие показывает, что пересечение всех максимальных барьеров графа G может содержать только вершины из $A(G)$. $\square$



Определение

Назовём *лапой* индуцированный подграф графа G, изоморфный двудольному графу $K_{1,3}$. Вершину степени 3 в этом подграфе назовём *центром* лапы.

Лемма 3

Пусть B — минимальный по включению барьер графа G. Тогда каждая вершина B — центр лапы графа G.

Доказательство. • Пусть $x \in B$ — не центр лапы, $B' = B \setminus \{x\}$.

• Тогда вершина x смежна не более, чем с двумя компонентами связности графа $G - B$. В графе $G - B'$ все компоненты связности, смежные с x, объединяются в одну, содержащую также вершину x.

• Тогда $o(G - B') \geq o(G - B) - 1$. Это означает, что B' — барьер графа G, противоречие с минимальностью B. $\square$

Теорема 5

(D. P. Sumner, 1974; M. Las Vergnas, 1975.) *Пусть G — связный граф, не содержащий лапы, $v(G)$ чётно. Тогда G имеет совершенное паросочетание.*

Доказательство. • Пусть B — минимальный по включению барьер графа G. Тогда по Лемме 3 мы имеем $B = \varnothing$.

• Однако, G — связный граф с чётным числом вершин, поэтому $o(G - \varnothing) = 0$, следовательно, $\mathrm{def}(G) = 0$ и граф G имеет совершенное паросочетание. $\square$

• Для $S \subset V(G)$ пусть $\mathrm{N}'_G(S) := \cup_{x\in S} N_G(x)$ (множество всех вершин графа G, смежных с S).

Определение

Бинд графа G — это

$$\mathrm{bind}(G) = \min_{S\subseteq V(G),\ S\neq\varnothing,\ \mathrm{N}'_G(S)\neq V(G)} \frac{|\mathrm{N}'_G(S)|}{|S|}.$$

• Эту характеристику графа впервые рассмотрел Андерсон в 1971 году. Он доказал, что граф с четным числом вершин и биндом не менее $\frac{4}{3}$ обязательно имеет совершенное паросочетание. Мы представим чуть более сильную теорему.

Теорема 6

(I. Anderson, 1973.) *Пусть G — такой граф с четным числом вершин, что*

$$|\mathrm{N}'_G(S)| \geq \min\left\{|V(G)|, \frac{4}{3}|S| - \frac{2}{3}\right\}$$

для любого $S \subseteq V(G)$. Тогда граф G имеет совершенное паросочетание.

Доказательство. • Предположим, что граф G не имеет совершенного паросочетания. Тогда по Теореме Татта он имеет множество Татта S, для которого $o(G - S) > |S|$.

• Пусть $|S| = k$. Из четности $v(G)$ тогда следует, что $o(G - S) \geq k + 2$.

• Пусть m — количество одновершинных компонент связности графа $G - S$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $m > 0$.

• Пусть M — объединение всех одновершинных компонент связности графа $G - S$.

• В нашем случае $\mathrm{N}'_G(V(G) \setminus S) \subset V(G) \setminus M$, поэтому

$$v(G) - m \geq |\mathrm{N}'_G(V(G) \setminus S)| \geq \tfrac{4(v(G)-k)-2}{3},$$

что можно переписать в виде

$$v(G) \leq 4k - 3m + 2. \tag{1}$$

• С другой стороны, $o(G - S) \geq k + 2$ и в $k + 2 - m$ нечетных компонентах графа $G - S$ хотя бы по три вершины. Поэтому

$$v(G) \geq k + m + 3(k + 2 - m) = 4k - 2m + 6,$$

что противоречит неравенству (1).

Случай 2: $m = 0$.

• Тогда все нечетные компоненты связности графа $G - S$ содержат хотя бы по три вершины.

• Пусть X — объединение $k+1$ нечетной компоненты связности графа $G - S$. Тогда

$$|X| \geq 3k + 3. \tag{2}$$

• Множество X не содержит хотя бы одну из нечетных компонент $G - S$ и не смежно с ней, следовательно, $\mathrm{N}'_G(X) \neq V(G)$ и поэтому

$$|\mathrm{N}'_G(X)| \geq \frac{4}{3}|X| - \frac{2}{3}.$$

• С другой стороны, $\mathrm{N}'_G(X) \subset X \cup S$, поэтому $|\mathrm{N}'_G(X)| \leq |X| + k$. Следовательно,

$$|X| + k \geq \frac{4}{3}|X| - \frac{2}{3},$$

откуда $|X| \leq 3k + 2$, противоречие с неравенством (2). $\square$

Определение

Если граф G отличен от полного, то *жесткость* графа G — это

$$\mathrm{t}(G) = \min_{S \subseteq V(G),\, c(G-S) \neq 1} \frac{|S|}{|c(G-S)|}.$$

Будем говорить, что неполный граф G является *t-жестким*, если $\mathrm{t}(G) \geq t$.

Лемма 4

Пусть G — неполный граф с $\mathrm{t}(G) > 0$. Тогда G связен.

Доказательство.

Предположим противное. Так как $c(G - \varnothing) \geq 2$, то должно выполняться $0 = |\varnothing| \geq \mathrm{t}(G)c(G - \varnothing) > 0$, что, очевидно, не так. □

Понятие жесткости напрямую связано с паросочетаниями. Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы Татта о совершенном паросочетании.

Теорема 7

Пусть G — неполный граф с четным числом вершин и $\mathrm{t}(G) \geq 1$. Тогда G имеет совершенное паросочетание.

Доказательство.

• Проверим условие Татта для множества $S \subset V(G)$.

• Пусть $S = \varnothing$. Тогда из $\mathrm{t}(G) \geq 1$ следует связность графа G, а из четности числа вершин — условие Татта.

• Пусть $S \neq \varnothing$. Тогда $o(G - S) \leq c(G - S) \leq \frac{|S|}{\mathrm{t}(G)} \leq |S|$, и по Теореме Татта граф G имеет совершенное паросочетание. □

• Условие $\mathrm{t}(G) \geq k$ для графа с четным числом вершин дает существование k-фактора (то есть, остовного k-регулярного подграфа). Это гораздо более сложное утверждение будет доказано далее с помощью теоремы Татта о факторе.