Паросочетания и факторы. Глава 2. Теория факторов

Д. В. Карпов

09.2021

Определение

• Пусть $f : V(G) \to \mathbb{N}_0$. Подграф H графа G называется f-фактором, если $d_H(v) = f(v)$ для любой вершины $v \in V(G)$.

• Если $k \in \mathbb{N}$ таково, что $f(v) = k$ для всех $v \in V(G)$, то будем называть соответствующий подграф k-фактором.

• Совершенное паросочетание — это 1-фактор.

• Мы будем считать, что граф G — без изолированных вершин (то есть, $\delta(G) \geq 1$). Кратные рёбра и петли в графе допускаются.

• Первой нашей задачей будет свести вопрос о наличии f-фактора в графе G к хорошо изученному выше вопросу о существовании совершенного паросочетания в графе, который мы специально построим.

• С помощью нескольких определений мы проделаем путь, похожий на определение дефицита графа. Однако, это будет технически сложнее.

Определение

1) Пусть $D, S \subset V(G)$ — фиксированные непересекающиеся множества. Назовём компоненту связности U графа $G - D - S$ *$(f; D, S)$-нечётной*, если величина

$$r_{f;D,S}(U) = e_G(U, S) + \sum_{x \in U} f(x)$$

нечётна и *$(f; D, S)$-чётной* в противном случае.

2) Обозначим через $o(f; D, S)$ количество $(f; D, S)$-нечётных компонент связности.

• Пусть $xy \notin E(G)$, причем $x \in D$ или обе вершины x, y лежат в одной компоненте связности графа $G - D - S$. Тогда непосредственно из определения следует, что графы $G - D - S$ и $G + xy - D - S$ имеют одни и те же $(f; D, S)$-нечетные компоненты связности.

• Очевидным необходимым условием для существования f-фактора является условие $f(v) \le d_G(v)$ для всех вершин $v \in V(G)$. Далее мы будем считать, что оно выполняется.

Определение

Пусть $s(v) = d_G(v) - f(v)$ — *избыточная степень* вершины $v \in V(G)$.

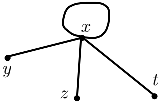
• По графу G и функции f мы построим вспомогательный граф G_f. Для каждой вершины $x \in V(G)$ мы построим множества вершин $D(x)$ и $S(x)$ так, что все эти $2v(G)$ множеств попарно не пересекаются, $|D(x)| = d_G(x)$ и $|S(x)| = s(x)$.

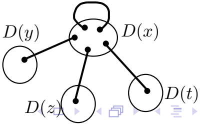
• Пусть $V_D = \bigcup_{x\in V(G)} D(x), \quad V_S = \bigcup_{x\in V(G)} S(x)$.

• Очевидно, существует биекция из $D(x)$ в множество концов рёбер, инцидентных x (каждой инцидентной вершине x петле e при этом соответствуют две вершины $x_{e,1}$ и $x_{e,2}$ из $D(x)$!).

• Таким образом, каждому ребру $e \in E(G)$ соответствуют ровно две вершины из V_D, которые мы соединим ребром $\varphi(e)$. Пусть $E_1 = \{\varphi(e) : e \in E(G)\}$.

• Отметим, что рёбра из E_1 не имеют общих концов, а $\varphi : E(G) \to E_1$ — биекция.





• Для каждой вершины $x \in V(G)$ пусть $B(x)$ — полный двудольный граф с долями $D(x)$ и $S(x)$. Пусть

$$E_2 = \bigcup_{x \in V(G)} E(B(x)).$$

• Определим граф G_f, положив $V(G_f) = V_D \cup V_S$, $E(G_f) = E_1 \cup E_2$.

• Вершины множества $S(v)$ смежны в графе G_f только с вершинами множества $D(v)$.

Лемма 1

Граф G имеет f-фактор тогда и только тогда, когда граф G_f имеет совершенное паросочетание (то есть, 1-фактор).

Доказательство. $\Rightarrow$. • Пусть G имеет f-фактор H с множеством рёбер $F = E(H)$.

• Тогда $\varphi(F)$ — паросочетание в графе G_f, для каждой вершины $v \in V(G)$ покрывающее ровно $f(v) = |D(v)| - |S(v)|$ вершин из $D(v)$ и не покрывающее вершин множества $S(v)$.

• Можно легко дополнить $\varphi(F)$ рёбрами, соединяющими вершины множества $S(v)$ с непокрытыми вершинами из $D(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$, в результате получится совершенное паросочетание графа G_f.

$\Leftarrow$. Пусть G_f имеет совершенное паросочетание F^*.

• Тогда F^* для каждой вершины $v \in V(G)$ покрывает ровно $s(v)$ вершин множества $D(v)$ рёбрами двудольного графа $B(v)$, следовательно, ровно $f(v) = |D(v)| - |S(v)|$ вершин из $D(v)$ покрыты в F^* рёбрами из E_1.

• Поэтому $\varphi^{-1}(F^* \cap E_1)$ — множество рёбер графа G, индуцирующих f-фактор этого графа. $\square$

Нормальные множества

• Продолжим описывать конструкции, необходимые для формулировки и доказательства основного результата этого раздела — теоремы Татта о f-факторе.

Определение

1) Назовём множество $W \subset V(G_f)$ *нормальным*, если для каждой вершины $x \in V(G)$ выполняется одно из трёх условий:

1° $W \supset D(x)$, $W \cap S(x) = \varnothing$ (причем $S(x) \neq \varnothing$);

2° $W \cap D(x) = \varnothing$, $W \supset S(x)$ (возможно, $S(x) \neq \varnothing$);

3° $W \cap D(x) = \varnothing$, $W \cap S(x) = \varnothing$ (причем $S(x) \neq \varnothing$).

2) Для нормального множества W пусть

$$D_W = \{x \in V(G) : D(x) \subset W\},$$

$$S_W = \{x \in V(G) : S(x) \subset W\}.$$

• Пусть W — нормальное множество. Тогда

$$|W| = \sum_{x\in D_W} d_G(x) + \sum_{x\in S_W} s(x) = \sum_{x\in D_W} d_G(x) + \sum_{x\in S_W} (d_G(x) - f(x)). \quad (1)$$

• В случае, когда $S(x) = \varnothing$, по определению $D(x) \cap W = \varnothing$. В этом случае $x \notin D_W \cup S_W$. Отметим, что $D(x) \neq \varnothing$ ввиду $\delta(G) \geq 1$.

• Таким образом, при $x \in D_W \cup S_W$ двудольный граф $B(x)$ связен.

Лемма 2

Пусть $W \subset V(G_f)$ — нормальное множество. Тогда

$$o(G_f - W) - |W| = o(f; D_W, S_W) - \sum_{x\in D_W} f(x) + \sum_{x\in S_W} (f(x) - d_{G-D_W}(x)).$$

Доказательство. Пусть U — компонента связности графа $G_f - W$, $H = G_f(U)$. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1: U состоит из одной вершины множества V_D.

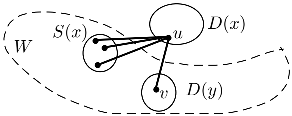
• Пусть $U = \{u\}$, $e \in E(G)$, $\varphi(e) = uv$, $u \in D(x)$, $v \in D(y)$ (где вершины $x, y \in V(G)$, возможно, совпадают).

• Тогда $\mathrm{N}_{G_f}(u) = S(x) \cup \{v\} \subset W$, следовательно, $x \neq y$, $x \in S_W$, $y \in D_W$ и $xy \in E(G)$ (см. рис.).

• Наоборот, если $e = xy \in E(G)$, $x \in S_W$, $y \in D_W$, то принадлежащий $D(x)$ конец ребра $\varphi(e) = uv$ — компонента связности графа $G_f - W$.

• Таким образом, количество таких одновершинных компонент связности графа $G - W$ равно

$$e_G(D_W, S_W) = \sum_{x \in S_W} (d_G(x) - d_{G-D_W}(x)).$$



Случай 2: U состоит из одной вершины множества V_S.

• Пусть $U = \{v\}$, $v \in S(x)$, $x \in V(G)$. Тогда понятно, что $x \in D_W$.

• Наоборот, если $x \in D_W$, то каждая вершина из $S(x)$ образует компоненту связности графа $G_f - W$.

• Таким образом, количество таких одновершинных компонент связности графа $G - W$ равно

$$\sum_{x \in D_W} s(x) = \sum_{x \in D_W} (d_G(x) - f(x)).$$

Случай 3: $E(H) \neq \varnothing$, $E(H) \subset E_1$.

• Так как E_1 состоит из независимых рёбер, в этом случае $|U| = 2$.

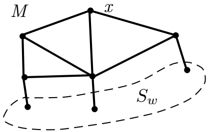
Случай 4: $E(H) \cap E_2 \neq \varnothing$.

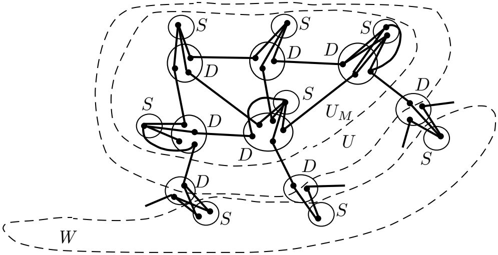
- Назовём такую компоненту связности U *большой*.

- Предположим, что граф $H = G_f(U)$ содержит ребро двудольного графа $B(x)$ для некоторой вершины $x \in V(G)$.

- Тогда $D(x) \not\subset W$, $S(x) \not\subset W$, следовательно, $D(x) \cup S(x) \subset U$.

- Пусть $M = \{x \in V(G) : D(x) \cup S(x) \subset U\}$, $U_M = \cup_{x \in M} D(x) \cup S(x)$. Тогда $U \supset U_M$

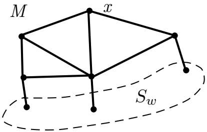


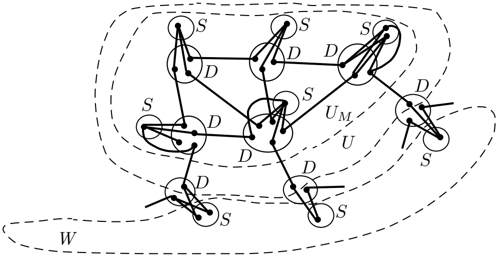


• Пусть $u \in U \setminus U_M$. Тогда $uv \in E_1 \cap E(H)$ для некоторой вершины $v \in U_M$, следовательно, $uv = \varphi(e)$, где $e = xy \in E(G)$, $u \in D(x)$, $v \in D(y)$.

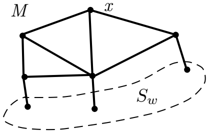
• Поскольку $u \notin W$, то $x \notin D_W$. Так как $u \notin U_M$, то вершина u не соединена рёбрами из E_2 с вершинами из U, следовательно, $S(x) \subset W$, то есть, $x \in S_W$.

• Наоборот, если $x \in S_W$, $y \in M$, $e = xy \in E(G)$, то $\varphi(e)$ — ребро графа H, а его конец из $D(x)$ лежит в U.





- Таким образом, U состоит из вершин множества U_M и концов u всех рёбер $uv \in E_1$, где $u \in D(x)$, $v \in D(y)$, $x \in S_W$, $y \in M$.
- Рёбра множества E_1, соединяющие вершины из U_M с остальными вершинами графа $G_f - W$, как мы доказали выше, выходят только к вершинам множества S_W.
- Поэтому граф $G_f(U_M)$ должен быть связным, а M — компонента связности графа $G - D_W - S_W$.
- Наоборот, понятно, что каждой компоненте связности графа $G - D_W - S_W$ соответствует большая компонента связности графа $G_f - W$.



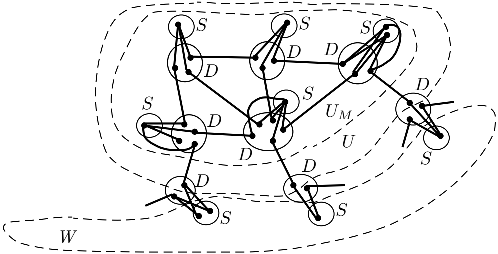


Рис.: Компонента связности M графа $G - D_W - S_W$ и соответствующая ей большая компонента связности U графа $G_f - W$.

• Отметим, что

$$|U| = \sum_{x\in M}(d_G(x)+s(x)) + e_G(M,S_W) \equiv$$
$$\sum_{x\in M} f(x) + e_G(M,S_W) \pmod 2,$$

следовательно, число вершин в U нечётно, если M является $(f;D_W,S_W)$-нечётной и чётно в противном случае.

• Таким образом, количество нечётных больших компонент связности графа $G_f - W$ есть $o(f;D_W,S_W)$.

• Завершим доказательство леммы.

• Ввиду доказанного выше (случаи $1-4$):

$$o(G_f - W) =$$
$$o(f;D_W,S_W) + \sum_{x\in S_W}(d_G(x) - d_{G-D_W}(x)) + \sum_{x\in D_W}(d_G(x) - f(x)).$$

• Вычитая выше доказанное равенство (1) $|W| = \sum_{x\in D_W} d_G(x) + \sum_{x\in S_W}(d_G(x) - f(x))$ из полученного равенства, получаем утверждение леммы.

f-дефицит. Теорема Татта о факторе

Введём обозначение

$$\mathrm{def}(f;D,S) = o(f;D,S) - \sum_{x\in D} f(x) + \sum_{x\in S}(f(x) - d_{G-D}(x)).$$

Определение

Назовём f-дефицитом графа G величину $\mathrm{def}(G;f)$, равную максимуму $\mathrm{def}(f;D,S)$ по всем парам непересекающихся множеств $D,S \subset V(G)$.

- Отметим, что f-дефицит неотрицателен:

$$\mathrm{def}(G;f) \geq \mathrm{def}(f;\varnothing,\varnothing) = o(f;\varnothing,\varnothing) \geq 0.$$

Теорема 1

(W. T. Tutte, 1952.) *Граф G имеет f-фактор тогда и только тогда, когда $\operatorname{def}(G;f)=0$, то есть $\operatorname{def}(f;D,S)\le 0$, или*

$$o(f;D,S)+\sum_{x\in S}(f(x)-d_{G-D}(x))\le\sum_{x\in D}f(x) \qquad (*)$$

для любой пары непересекающихся множеств $S,D\subset V(G)$.

Доказательство. • Мы будем подразумевать, что что $f(x)\le d_G(x)$ для любой вершины $x\in V(G)$ и $\sum_{x\in V(G)}f(x)$ четно.

• Оба утверждения очевидно следуют из существования f-фактора. Выведем их из неравенства $(*)$ и тем самым убедимся, что наше предположение корректно.

• Подставив $D=S=\varnothing$, получим, что $o(f;\varnothing,\varnothing)\le 0$, а следовательно, $\sum_{x\in U}f(x)$ четно для каждой компоненты связности U графа G. Таким образом, $\sum_{x\in V(G)}f(x)$ четно.

• Подставим $D=\varnothing$, $S=\{x\}$ в неравенство $(*)$. Мы получим $o(f;\varnothing,\{x\})+(f(x)-d_G(x))\le 0$, откуда очевидно следует, что $f(x)\le d_G(x)$.

• Мы воспользуемся конструкцией графа G_f и доказанными ранее леммами, чтобы вывести Теорему 1 из теоремы Татта о совершенном паросочетании.

$\Rightarrow$. • Предположим противное, пусть неравенство $(*)$ не выполняется и выберем опровергающую его пару (D, S) так, чтобы $|D|$ было минимальным.

Утверждение 1

Предположим, что $f(z) = d_G(z)$ для вершины $z \in D$. Пусть $D_z = D \setminus \{z\}$, $S_z = S \cup \{z\}$. Тогда неравенство $(*)$ не выполняется для пары (D_z, S_z).

Доказательство. • Достаточно доказать, что при перемещении вершины z из D в S левая часть уменьшится не более, чем правая.

• Граф $G - D - S$ и его компоненты связности при перемещении z не изменятся.

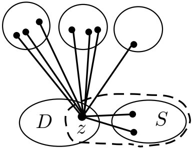
- Рассмотрим величину $\Delta = o(f; D_z, S_z) - o(f; D, S)$.
- Изменяют свою четность те и только те компоненты связности графа $G - D - S$, которые соединены с z нечётным числом рёбер (см. рис.).
- Их количество, очевидно, не превосходит $e(V(G - D - S), z)$, поэтому $\Delta \geq -e(V(G - D - S), z)$.
- Отметим, что

$$\Delta' = \sum_{y \in S} (-d_{G-D_z}(y) + d_{G-D}(y)) = -e(z, S).$$

- Итак, левая часть неравенства $(*)$ изменится на

$$\Delta + \Delta' + f(z) - d_{G-D_z}(z) \geq -e(V(G-D-S), z) - e(z, S) \geq -d_G(z)$$

(поскольку $f(z) = d_G(z) \geq d_{G-D_z}(z)$).
- Правая часть неравенства $(*)$ изменится ровно на $-d_G(z)$.
- Таким образом, $(*)$ не выполнено для пары (D_z, S_z). □



• Значит, $s(x) = d_G(x) - f(x) > 0$ для любой вершины $x \in D$ (иначе ввиду Утверждения 1 получаем противоречие с минимальностью D).

• Следовательно, двудольный граф $B(x)$ связен для любой вершины $x \in D$.

• Определим множество W как

$$W = \bigcup_{x \in D} D(x) \cup \bigcup_{y \in S} S(y).$$

• Ввиду доказанного выше очевидно, что W нормально, $D_W = D$ и $S_W = S$.

• Теперь из Леммы 2 следует $o(G_f - W) > |W|$.

• По теореме Татта о совершенном паросочетании, совершенное паросочетание в графе G_f отсутствует.

• Следовательно, по Лемме 1 в графе G нет f-фактора, противоречие с предположением.

$\Leftarrow$. • Предположим противное, пусть G не имеет f-фактора, тогда по Лемме 1 граф G_f не имеет совершенного паросочетания.

• По теореме Татта о совершенном паросочетании, это означает, что существует множество Татта $W \subset V(G_f)$ (для которого $o(G_f - W) > |W|$).

Утверждение 2

Пусть W — минимальное множество Татта в G_f. Тогда W нормально.

Доказательство. • Числа $o(G_f - W)$ и $|W|$ — одинаковой четности, так как

$$v(G_f) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x) + \sum_{x \in V(G)} (d_G(x) - f(x))$$

чётно.

• Следовательно, $o(G_f - W) \geq |W| + 2$.

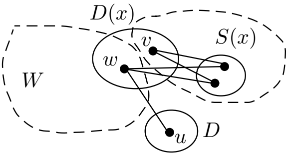
• Пусть $W' \subsetneq W$. В силу минимальности W, тогда

$$o(G_f - W') \leq |W'| \leq |W| - 1 \leq o(G_f - W) - 3. \qquad (\#)$$

Предположим, что W не является нормальным и разберём несколько случаев.

Случай 1: $W \cap D(x) \neq \varnothing$ для некоторой вершины $x \in V(G)$ и выполняется хотя бы одно из двух условий:
— $W \not\supset D(x)$;
— $S(x) = \varnothing$.

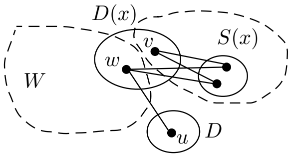
- Пусть $w \in D(x) \cap W$, $wu \in E_1$. Положим $W' = W \setminus \{w\}$.
- В графе $G_f - W'$ вершина w смежна с вершинами из $S(x) \setminus W$ (если это множество непусто) и с вершиной u (при условии, что $u \notin W$).
- Если $S(x) \setminus W = \varnothing$, то w смежна не более, чем с одной компонентой связности графа $G - W$.



• Если $S(x) \setminus W \neq \varnothing$, то имеет место случай $W \not\supset D(x)$. Тогда существует вершина $v \in D(x) \setminus W$ и все вершины из $S(x) \setminus W$ смежны с v, а следовательно, лежат в одной компоненте связности графа $G - W$ (см. рис.).

• В обоих случаях вершина w смежна не более, чем с двумя компонентами связности графа $G - W$. Эти компоненты склеятся в одну, содержащую к тому же w, остальные компоненты связности в $G_f - W'$ такие же, как и в $G_f - W$.

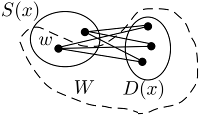
• Поэтому $o(G_f - W') \geq o(G_f - W) - 2$, что противоречит неравенству $(\#)$.



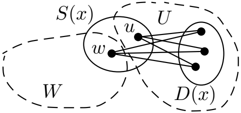
• Таким образом, теперь *для любой вершины $x \in V(G)$ либо $W \supset D(x)$ и $S(x) \neq \varnothing$, либо $W \cap D(x) = \varnothing$.*

Случай 2: $W \cap S(x) \neq \varnothing$ для некоторой вершины $x \in V(G)$.

- Пусть $w \in S(x) \cap W$. Положим $W' = W \setminus \{w\}$.
- Вершина w смежна в графе G_f только с вершинами из $D(x)$.
- Если $W \supset D(x)$ (см. рис. a), то $\{w\}$ — компонента связности графа $G_f - W'$, остальные компоненты связности в графах $G_f - W$ и $G_f - W'$ совпадают, следовательно, $o(G_f - W') = o(G_f - W) + 1$, противоречие с неравенством $(\#)$.
- Следовательно, учитывая доказанное выше, имеем $W \cap D(x) = \varnothing$.
- Пусть $W \not\supset S(x)$, $u \in S(x) \setminus W$.
- Пусть U — компонента связности графа $G_f - W$, содержащая u. Тогда $U \supset D(x)$ (см. рис. b).
- Вершина w смежна в $G_f - W'$ только с вершинами компоненты связности U, поэтому $o(G_f - W') \geq o(G_f - W) - 1$, очередное противоречие с неравенством $(\#)$.



a



b

• Таким образом, при $W \cap S(x) \neq \varnothing$ остаётся единственный возможный случай: $W \cap D(x) = \varnothing$ и $W \supset S(x)$.

• Следовательно, множество W — нормальное. $\square$

• Закончим доказательство Теоремы 1.

• Теперь мы можем применить Лемму 2 и получить

$$\mathrm{def}(G; f) \geq \mathrm{def}(f; D_W, S_W) = o(G_f - W) - |W| > 0.$$

• Следовательно, неравенство $(*)$ для пары множеств (D_W, S_W) не выполняется. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

• Пусть $f : V(G) \to \mathbb{N}_0$. Определим функцию f', положив $f'(x) := d_G(x) - f(x)$. Понятно, что G имеет f-фактор, если и только если G имеет f'-фактор. Таким образом, должна быть связь между f-дефицитом и f'-дефицитом графа G.

Лемма 3

(W. T. Tutte, 1974.) *Для любой пары непересекающихся множеств $D, S \subset V(G)$ выполняются следующие свойства.*

1) *Компонента связности U графа $G - D - S$ является $(f; D, S)$-нечетной тогда и только тогда, когда она является $(f'; S, D)$-нечетной. Следовательно, $o(f; D, S) = o(f'; S, D)$.*

2) $\mathrm{def}(f; D, S) = \mathrm{def}(f'; S, D)$.

Доказательство. • По определению компонента связности U является $(f; D, S)$-нечетной тогда и только тогда, когда $r_{f;D,S}(U) = e_G(U, S) + \sum_{x\in U} f(x)$ нечетно

1) • U является $(f'; S, D)$-нечетной тогда и только тогда, когда $r_{f';S,D}(U) = e_G(U, D) + \sum_{x\in U} f'(x)$ нечетно.

• Учитывая, что $f(x) + f'(x) = d_G(x)$, получаем:

$$r_{f;D,S}(U) + r_{f';S,D}(U) =$$

$$e_G(U, D \cup S) + \sum_{x\in U} d_G(x) = 2e_G(U, D \cup S) + 2e(G(U)).$$

2) Разберёмся со второй частью суммы в определении f-дефицита:

$$\begin{aligned}
\mathrm{def}(f;D,S) - o(f;D,S) = \\
-\sum_{x\in D} f(x) + \sum_{x\in S}(f(x) - d_{G-D}(x)) = \\
\sum_{x\in D} f'(x) + \sum_{x\in S} f(x) - \sum_{x\in D} d_G(x) - \sum_{x\in S} d_G(x) + e(D,S) = \\
-\sum_{x\in S} f'(x) + \sum_{x\in D}(f'(x) - d_{G-S}(x)) = \\
= \mathrm{def}(f';S,D) - o(f';S,D),
\end{aligned}$$

откуда немедленно следует, что $\mathrm{def}(f;D,S) = \mathrm{def}(f';S,D)$. $\square$

• Условие из теоремы Татта о факторе можно эквивалентно переформулировать следующим образом.

Следствие 1

Граф G имеет f-фактор, если и только если

$$o(f;D,S) + e_G(D,S) \le \sum_{x\in D} f(x) + \sum_{x\in S} f'(x)$$

• Применять критерий существования f-фактора прямо в виде, сформулированном в Теореме 1 или Следствии 1 неудобно.

• Мы предпримем исследование о том, когда же вершина входит в пару множеств (D, S) с максимальным f-дефицитом.

Определение

• Пусть $x \in D$. Обозначим через $o(f; D, S, x)$ количество $(f; D, S)$-нечётных компонент связности графа $G - D - S$, смежных с x.

• Пусть $\nu(f; D, S, x)$ равно единице, если $o(f; D, S, x) + e(x, S) + f(x)$ нечётно и нулю, если это число чётно.

Теорема 2

(W. T. Tutte, 1978.) *Пусть* (D,S) — *пара непересекающихся подмножеств* $V(G)$ *с максимальным* $\mathrm{def}(f;D,S)$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Для любой вершины* $x \in D$

$$f(x) \le o(f;D,S,x) - \nu(f;D,S,x) + e(x,S).$$

В случае равенства $\mathrm{def}(f;D,S) = \mathrm{def}(f;D\setminus\{x\},S)$.

2) *Для любой вершины* $x \in S$

$$f'(x) \le o(f';S,D,x) - \nu(f';S,D,x) + e(x,D).$$

В случае равенства $\mathrm{def}(f';S,D) = \mathrm{def}(f';S\setminus\{x\},D)$.

3) *Для любой вершины* $x \in V(G) - D - S$

$$f(x) \ge o(f;D\cup\{x\},S,x) - \nu(f;D\cup\{x\},S,x) + e(x,S) \quad \text{и}$$
$$f'(x) \ge o(f';S\cup\{x\},D,x) - \nu(f';S\cup\{x\},D,x) + e(x,D).$$

Доказательство. 1) • Пусть $D_x = D \setminus \{x\}$, $q = o(f; D, S, x)$.

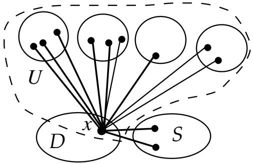
• В графе $G - D_x - S$ вместо всех компонент связности графа $G - D - S$, смежных с x, есть компонента связности U, полученная объединением всех этих компонент связности и вершины x (см. рис.).

• Остальные компоненты связности в графах $G - D_x - S$ и $G - D - S$ — одни и те же.

• Отметим, что,

$$e(U, S)+\sum_{y\in U} f(y) \equiv o(f; D, S, x)+e(x, S)+f(x) \equiv \nu(f; D, S, x) \pmod 2.$$

• Таким образом, функция $\nu(f; D, S, x)$ показывает, является ли $(f; D_x, S)$-нечетной новая компонента связности U графа $G - D_x - S$.



• Поэтому
$o(f;D,S) - o(f;D_x,S) = o(f;D,S,x) - \nu(f;D,S,x)$ и

$$0 \le \mathrm{def}(f;D,S) - \mathrm{def}(f;D_x,S) = \\ o(f;D,S,x) - \nu(f;D,S,x) + e(x,S) - f(x),$$

откуда немедленно следует утверждение пункта 1.

• Доказательство пункта 2 следует из пункта 1 и Леммы 3.

• Неравенства пункта 3 аналогичны неравенствам пунктов 1 и 2. □

• По определению $\nu(f;D,S,x)$, величина $f(x) - o(f;D,S,x) + \nu(f;D,S,x) - e(x,S)$ всегда четна. Поэтому в случае строгого неравенства в любом из пунктов Теоремы 2 разность левой и правой части по модулю не менее 2.

Следствие 2

Существует такая пара (D, S) непересекающихся множеств с максимальным $\mathrm{def}(f; D, S)$, что $f(x) > 1$ для всех вершин $x \in S$.

Доказательство. • Выберем среди всех пар с максимальным f-дефицитом такую пару (D, S), что $|S|$ минимально.

• Предположим, что существует вершина $x \in S$, для которой $f(x) \le 1$. Из минимальности множества S следует $\mathrm{def}(f'; S, D) > \mathrm{def}(f'; S \setminus \{x\}, D)$.

• Теперь применим пункт 2 Теоремы 2 и учтём замечание о четности после Теоремы 2:

$$d_G(x) - 1 \le f'(x) \le$$
$$o(f'; S, D, x) - \nu(f'; S, D, x) + e(x, D) - 2 \le d_G(x) - 2,$$

противоречие.

• Следовательно, пара множеств (D, S) — искомая. $\square$