Паросочетания и факторы. Глава 2. K-факторы

Д. В. Карпов

10.2021

K-факторы регулярного графа

• Пусть $r, k \in \mathrm{N}$, $r \le k$. Когда же k-решгулярный граф имеет r-фактор?

• Если k и r четны, то по теореме Петерсена любой регулярный граф степени $2k$ имеет $2r$-фактор.

• Остаются случаи, когда хотя бы одно из чисел r и k нечетно. В этих случаях имеет смысл рассматривать только регулярные графы с четным количеством вершин.

Определение

Назовем граф G *реберно k-нечетно связным*, если для любого множества $F \subset E(G)$, состоящего менее чем из k рёбер, все компоненты связности графа $G - F$ имеют четное число вершин.

• Очевидно, у реберно k-нечетно связного графа четное число вершин.

• Реберно k-связный граф с четным числом вершин является и реберно k-нечетно связным.

• Напомним результат главы 2.

Следствие 2.1

Граф G имеет f-фактор, если и только если для любой парв непересекающихся $D, S \subset V(G)$

$$o(f; D, S) + e_G(D, S) \le \sum_{x\in D} f(x) + \sum_{x \in S} f'(x).$$

Теорема 1

(T. Gallai, 1961.) *Пусть k четно, а G — реберно n-нечетно связный регулярный граф степени k. Тогда G имеет r-факторы для всех таких нечетных r, что $\frac{1}{n} \cdot k \le r \le \frac{n-1}{n} \cdot k$.*

Доказательство. • Тогда $k - r$ также нечетно.

• Положим $f(x) = k - r$ для каждой вершины $x \in V(G)$. Тогда $f'(x) = d_G(x) - f(x) = r$.

• Мы хотим доказать, что граф G имеет f-фактор.

• Пусть $D, S \subset V(G)$ — произвольные непересекающиеся подмножества. По Следствию 2.1 нам достаточно доказать, что выполняется неравенство

$$o(f; D, S) + e_G(D, S) \le (k - r)|D| + r|S|. \qquad (*)$$

• Пусть $U_1, \dots, U_p$ — все $(f; D, S)$-нечетные (а значит, по Лемме 2.3, все $(f'; S, D)$-нечетные) компоненты связности графа $G - D - S$.

• Пусть $d_i = e_G(U_i, D)$ и $s_i = e_G(U_i, S)$.

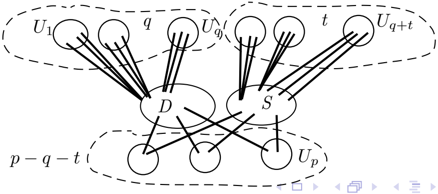
• Так как U_i является $(f; D, S)$-нечетной и $(f'; S, D)$-нечетной, нечетно $r_{f;D,S}(U_i) = s_i + \sum_{x \in U_i} f(x) = s_i + r|U_i| \equiv_2 s_i + |U_i|$.

• Аналогично, $d_i + |U_i|$ нечетно.

• Если $|U_i|$ четно, то оба числа s_i и d_i нечетны, а значит, не менее 1.

• Пусть $U_1, \dots, U_q$ (где $q \le p$) несмежны с S, $U_{q+1}, \dots, U_{q+t}$ несмежны с D, а остальные компоненты связности $U_{q+t+1}, \dots, U_p$ смежны и с S, и с D.

• Из сказанного выше понятно, что все компоненты связности $U_1, \dots, U_q$, $U_{q+1}, \dots, U_{q+t}$ нечетны, поэтому все числа $d_1, \dots, d_q$, $s_{q+1}, \dots, s_{q+t}$ не менее, чем n (см. рис.).



- Оценим $e_G(D,\ V(G)\setminus(D\cup S))=\sum_{i=1}^{p} d_i$:

$$k|D|-e_G(D,S)\ge\sum_{i=1}^{p} d_i\ge nq+p-t-q=p+(n-1)q-t. \quad (1)$$

- Оценим $e_G(S,\ V(G)\setminus(D\cup S))=\sum_{i=1}^{p} s_i$:

$$k|S|-e_G(D,S)\ge\sum_{i=1}^{p} s_i\ge nt+p-q-t=p+(n-1)t-q. \quad (2)$$

Умножим неравенство (1) на $(k-r)$, а неравенство (2) на r и сложим:

$$\begin{aligned}
&k\cdot((k-r)|D|+r|S|-e_G(D,S))=\\
&\quad(k-r)\cdot(k|D|-e_G(D,S))+r\cdot(k|S|-e_G(D,S))\ge\\
&\quad(k-r)(p+(n-1)q-t)+r(p+(n-1)t-q)\ge\\
&\quad kp+(k(n-1)-rn)\cdot q+(rn-k)\cdot t\ge\\
&\quad kp=k\cdot o(f;D,S),
\end{aligned}$$

так как $p=o(f;D,S)$. Таким образом, мы доказали неравенство $(*)$ $\square$.

Теорема 2

(B. Bollobás, A. Saito, N. C. Wormald, 1985.) *Пусть k нечетно, G — реберно n-нечетно связный регулярный граф степени k, а $n' = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ — наименьшее нечетное число, которое не менее n. Тогда G имеет r-факторы для четных $r \le \frac{n'-1}{n'} \cdot k$ и для нечетных $r \ge \frac{1}{n'} \cdot k$.*

Доказательство. • Достаточно доказать утверждение только для четных r.

• Действительно, дополнение графа G до r-фактора с четным r — это $(k-r)$-фактор, а $k-r$ — нечетно. При этом, если $r \le \frac{n'-1}{n'} \cdot k$, то $k - r \ge \frac{1}{n'} \cdot k$.

• Итак, пусть r четно, $r \le \frac{n'-1}{n'} \cdot k$.

• Положим $f(x) = k - r$ для каждой вершины $x \in V(G)$. Тогда $f'(x) = d_G(x) - f(x) = r$. Мы хотим доказать, что граф G имеет f-фактор.

• Пусть $D, S \subset V(G)$ — произвольные непересекающиеся подмножества. По Следствию 2.1 нам достаточно доказать, что выполняется неравенство

$$o(f; D, S) + e_G(D, S) \le (k-r)|D| + r|S|. \qquad (*)$$

• Пусть $U_1, \dots, U_p$ — все $(f; D, S)$-нечетные (а значит, и все $(f'; S, D)$-нечетные) компоненты связности графа $G - D - S$.

• Пусть $d_i = e_G(U_i, D)$ и $s_i = e_G(U_i, S)$.

• U_i является $(f'; S, D)$-нечетной, если и только если нечетно $r_{f';S,D}(U_i) = d_i + \sum_{x \in U_i} f'(x) = d_i + r|U_i| \equiv_2 d_i$.

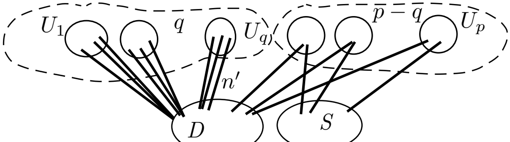
• Таким образом, все числа $d_1, \dots, d_p$ — нечетны, а следовательно, каждое из них не менее 1.

• Пусть компоненты связности $U_1, \dots, U_q$ (где $q \le p$) несмежны с S, а $U_{q+1}, \dots, U_p$ смежны с S, то есть, $s_1 = \dots = s_q = 0$, а $s_{q+1}, \dots, s_p \ge 1$.

• Тогда $U_1, \dots, U_q$ — компоненты связности графа $G - D$.

• Пусть $1 \le i \le q$. Так как степени вершин графа G нечетны, числа $|U_i|$ и d_i имеют одинаковую четность.

• Следовательно, U_i — нечетная компонента связности, а значит, по условию имеем $d_i \ge n$. Учитывая четность, получаем $d_i \ge n'$.



- Посчитаем $e_G(D,\ V(G)\setminus(D\cup S))$:

$$k|D| - e_G(D,S) \ge \sum_{i=1}^{q} d_i + \sum_{j=q+1}^{p} d_j \ge n'q + (p-q) = (n'-1)q + p. \qquad (1)$$

- Посчитаем $e_G(S,\ V(G)\setminus(D\cup S))$:

$$k|S| - e_G(D,S) \ge \sum_{j=q+1}^{p} s_j \ge p - q. \qquad (2)$$

Умножим неравенство (1) на $(k-r)$, а неравенство (2) на r и сложим:

$$k\cdot((k-r)|D| + r|S| - e_G(D,S)) = (k-r)\cdot(k|D| - e_G(D,S)) + r\cdot(k|S| - e_G(D,S)) \ge (k-r)((n'-1)q+p) + r(p-q) \ge kp + (k(n'-1) - rn')\cdot q \ge kp = k\cdot o(f;D,S),$$

так как $p = o(f;D,S)$. Таким образом, мы доказали неравенство $(*)$

Следствие 1

(F. Bäbler, 1938.) *Пусть G — n-нечетно-связный регулярный граф нечетной степени k, причем n четно. Тогда G имеет n-фактор и $(k-n)$-фактор.*

Доказательство. • Тогда $k-n$ нечетно. По Теореме 2 достаточно доказать, что $k-n \ge \frac{k}{n'} \ge \frac{k}{n+1}$, так как $n+1$ — наименьшее нечетное число, которое не менее n.

Докажем это. Так как $n \le k-1$, мы имеем

$$k-n \ge \frac{k}{n+1} \iff (n+1)(k-n) \ge k \iff (k-1)n \ge n^2,$$

что верно ввиду $k \ge n+1$. □

Жесткость и k-факторы

Определение

• Если граф G отличен от полного, то *жесткость* графа G — это

$$\mathrm{t}(G) = \min_{S \subseteq V(G),\, c(G-S) \neq 1} \frac{|S|}{c(G-S)}.$$

• Будем говорить, что неполный граф G является *k-жестким*, если $\mathrm{t}(G) \geq k$.

- Сначала выясним очевидные свойства k-жесткого графа.

Лемма 1

Пусть k — натуральное число, а G — неполный k-жесткий граф. Тогда $v(G) \geq 2k+2$ и $\delta(G) \geq 2k$.

Доказательство. • Предположим, что $v(G) \leq 2k+1$. Так как граф неполный, то в нем есть две несмежные вершины a и b. Пусть $X = V(G) \setminus \{a, b\}$.

- Тогда $c(G-X) = 2$, следовательно,

$$2k - 1 \geq |X| \geq c(G-X) \cdot t(G) \geq 2k,$$

противоречие. Значит, $v(G) \geq 2k+2$.

- Предположим, что существует вершина $x \in V(G)$ с $d_G(x) \leq 2k-1$.
- Из $v(G) \geq 2k+2$ следует $c(G - \mathrm{N}_G(x)) \geq 2$, а значит,

$$2k - 1 \geq |\mathrm{N}_G(x)| \geq c(G - \mathrm{N}_G(x)) \cdot t(G) \geq 2k,$$

противоречие. □

Теорема 3

(H.Enomoto, B.Jackson, P.Katerinis, A.Saito, 1985.) *Пусть G — неполный граф с $v(G) \ge k+1$, причем $k \cdot v(G)$ четно и $\mathrm{t}(G) \ge k$. Тогда G имеет k-фактор.*

Доказательство. • Предположим, что G не имеет k-фактора.

• Пока это возможно, будем добавлять в граф G рёбра так, чтобы не появился k-фактор. От этой процедуры, очевидно, не уменьшается $\mathrm{t}(G)$.

• Так как $kv(G)$ четно, у полного графа на $v(G)$ вершинах есть k-фактор. Поэтому можно считать, что граф G — неполный и не имеет k-фактора, но при добавлении любого ребра k-фактор появляется.

• Положим $f(x) = k$ для любой вершины $x \in V(G)$.
Далее $k \ge 2$ (для $k = 1$ утверждение доказано в Теореме 1.7).

• Для доказательства теоремы мы проверим, что для любой пары непересекающихся множеств $D, S \subset V(G)$ выполняется условие теоремы Татта о факторе $\mathrm{def}(f; D, S) \le 0$, которое мы перепишем, учитывая явный вид функции f:

$$o(f; D, S) + k|S| \le k|D| + \sum_{x \in S} d_{G-D}(x). \qquad (*)$$

• Предположим, что это неравенство $(*)$ выполнено не всегда и выберем из всех пар (D, S) с наибольшим f-дефицитом пару с минимальным S. Понятно, что $\mathrm{def}(f; D, S) > 0$.

• Случай $D = S = \varnothing$ невозможен: по Лемме 1 граф G связен, в этом случае G — единственная компонента связности графа $G - \varnothing$, которая в силу $r(f; \varnothing, \varnothing) = kv(G)$ является четной.

Утверждение 1

Пусть $S \neq \varnothing$. Тогда $\Delta(G(S)) \le k - 2$.

Доказательство. • Пусть $x \in S$. По выбору множества S мы имеем $\mathrm{def}(f; D, S \setminus \{x\}) < \mathrm{def}(f; D, S)$.

• Тогда из пункта 2 Теоремы 2.2 следует, что
$d_G(x) - k = f'(x) < o(f'; S, D, x) + e_G(x, D) - \nu(f'; S, D, x)$.

• Из соображений четности левая часть меньше правой хотя бы на 2, что можно переписать в виде
$d_G(x) - o(f'; S, D, x) - e_G(x, D) \le k - 2 - \nu(f'; S, D, x)$.

• Так как $o(f'; S, D, x) \le e(x, V(G - D - S))$, а
$\nu(f'; S, D, x) \ge 0$,

$$d_{G(S)}(x) = d_G(x) - e_G(x, V(G - D - S)) - e_G(x, D) \le d_G(x) - o(f'; S, D, x) - e_G(x, D) \le k - 2. \qquad \square$$

• Вернемся к доказательству Теоремы 3. Пусть $U = V(G - D - S)$, а $U_1, \dots, U_p$ — все компоненты связности графа $G - D - S$.

• Отсутствие k-фактора эквивалентно невыполнению условия $(*)$.

• Предположим, что вершина $a \in D$ несмежна хотя бы с одной вершиной $b \in V(G)$.

• В графах $G - D - S$ и $G + ab - D - S$ одни и те же $(f; D, S)$-нечетные компоненты связности.

• Поэтому, в графе $G + ab$ левая и правая часть $(*)$ такие же, как в G, значит, и этот граф не имеет k-фактора, что противоречит выбору G.

• Таким образом, каждая вершина множества D смежна со всеми остальными вершинами графа G.

• Предположим, что в графе G несмежны вершины $x, y \in U_i$.

• В графах $G - D - S$ и $G + xy - D - S$ одни и те же $(f; D, S)$-нечетные компоненты связности. Поэтому, в графе $G + xy$ левая и правая часть $(*)$ такие же, как в G, значит, и этот граф не имеет k-фактора, что противоречит выбору G.

• Таким образом, каждая компонента связности U_i — клика в графе G.

• Пусть S_1 — максимальное независимое множество вершин в графе $H = G(S)$, а $H_1 = H - S_1$.

• Для $i \geq 1$ пусть S_{i+1} — максимальное независимое множество вершин в графе H_i, а $H_{i+1} = H_i - S_{i+1}$.

• Из $\Delta(H) \leq k-2$ следует, что $S = \cup_{i=1}^{k-1} S_i$. Пусть $V_i = V(H_i)$.

• Изучим свойства множеств $S_1, \dots, S_{k-1}$.

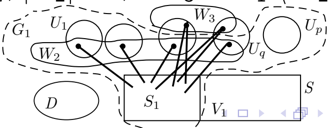
Утверждение 2

Можно выбрать множество S_1 так, чтобы $k|S_1| \leq |D| + |V_1| + e_G(U, S_1) - p$.

Доказательство. • Пусть W_1 — множество всех вершин из U, смежных с S_1.

• Предположим, что $U_1, \dots, U_q$ — все компоненты связности графа $G - D - S$, смежные с S_1.

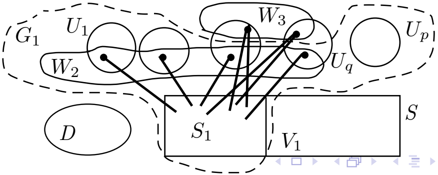
• Если в компоненте связности U_i существует вершина, смежная ровно с одной вершиной из S_1, то выберем одну из таких вершин и обозначим через w_i. Пусть W_2 — множество из всех вершин w_i, $|W_2| = t$, а $W_3 = W_1 \setminus W_2$. Понятно, что $t \leq q$.



- Каждая из компонент связности $U_1, \dots, U_q$, не содержащая вершину из W_2, содержит вершину, инцидентную хотя бы двум рёбрам из $E_G(U, S_1) = E_G(W_1, S_1)$. Поэтому в множестве W_1 не менее $q - t$ таких вершин.
- Следовательно, $|W_1| \le e_G(W_1, S_1) - (q - t)$, а значит,

$$|W_3| = |W_1| - t \le e_G(W_1, S_1) - q = e_G(U, S_1) - q. \qquad (1)$$

- Пусть $G_1 = G - (D \cup V_1 \cup W_3)$. Множество S_1 — независимое, и его вершины в графе G_1 смежны только с вершинами из независимого множества W_2, причем каждая вершина из W_2 смежна только с одной вершиной из S_1.
- Поэтому, вершины из S_1 принадлежат разным компонентам связности графа G_1.
- Компоненты связности $U_{q+1}, \dots, U_p$ графа $G - D - S$, вершины которых не смежны с S_1, являются компонентами связности графа G_1. Поэтому $\quad c(G_1) \ge |S_1| + p - q. \qquad (2)$



- Рассмотрим два случая.

Случай 1: $c(G_1) \geq 2$.

- Тогда из $\mathrm{t}(G) \geq k$, $G_1 = G - (D \cup V_1 \cup W_3)$, неравенств (1) и (2) делаем вывод

$$|D| + |V_1| + e_G(U, S_1) - q \geq |(D \cup V_1 \cup W_3)| \geq k \cdot c(G_1) \geq k(|S_1| + p - q) \geq k|S_1| + p - q,$$

откуда непосредственно следует доказываемое утверждение.

Случай 2: $c(G_1) = 1$.

- В силу неравенства (2) мы имеем $|S_1| = 0$ или $|S_1| = 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 2.1: $|S_1| = 0$.

- Тогда $S = S_1 = \varnothing$, следовательно, $|V_1| = 0$ и $e_G(U, S_1) = 0$.
- Как сказано выше, тогда $D \neq \varnothing$. В этом случае Утверждение 2 эквивалентно неравенству $p \leq |D|$.
- Если $p = c(G - D) > 1$, то $p \leq \frac{|D|}{t(G)} \leq |D|$.
- Если же $p = 1$, то утверждение очевидно, так как $|D| \geq 1$.

Случай 2.2: $|S_1| = 1$.

- Пусть $S_1 = \{s_1\}$. Тогда S — клика в G, следовательно, все вершины из V_1 смежны с s_1.
- По построению, все вершины множества D смежны с s_1.
- Если $p = 1$, то по Лемме 1 мы имеем $d_G(s_1) \ge 2k$ и

$$k|S_1| = k < d_G(s_1) - p \le |D| + |V_1| + e_G(U, s_1) - p,$$

что и требовалось доказать.

- Пусть $p \ge 2$. Тогда из $\mathrm{t}(G) \ge k$ следует, что

$$|D| + |S| = |D \cup S| \ge k \cdot c(G - D - S) = kp \ge 2k.$$

- Из неравенства (2) следует, что $1 = c(G_1) \ge |S_1| + p - q$, откуда $p = q$.
- Значит $e_G(U, s_1) \ge q = p$. Тогда

$$|D| + |V_1| + e_G(U, s_1) - p \ge |D| + |V_1| =$$
$$|D| + |V_1| + |S_1| - 1 = |D| + |S| - 1 \ge 2k - 1 > k = k|S_1|,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 3

Пусть $M_r = \cup_{j=1}^{r} S_j$. *Тогда для* $i \in [2..k-1]$ *выполнено неравенство*

$$k|S_i| \le |D| + |V_i| + e_G(U, S_i) + e_G(M_{i-1}, S_i).$$

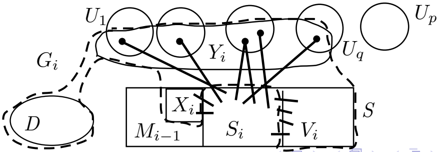
Доказательство. • Если $S_i = \varnothing$, то, очевидно, утверждение выполнено. Пусть $S_i \ne \varnothing$.

• Положим $X_i = \mathrm{N}_G(S_i) \cap M_{i-1}$, $\quad Y_i = \mathrm{N}_G(S_i) \cap U$, $G_i = G - \mathrm{N}_G(S_i)$ (см. рис.).

• $\mathrm{N}_G(S_i) = D \cup X_i \cup Y_i \cup V_i$ (вершины множества V_i смежны со всеми вершинами из S_i по построению, а вершины множества D — по доказанному выше).

• Так как $|X_i| \le e_G(M_{i-1}, S_i)$ и $|Y_i| \le e_G(U, S_i)$,

$$|\mathrm{N}_G(S_i)| \le |D| + |V_i| + e_G(M_{i-1}, S_i) + e_G(U, S_i). \qquad (3)$$



- Вершины множества S_i — изолированные в $G_i = G - \mathrm{N}_G(S_i)$, следовательно, $c(G_i) \ge |S_i|$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $c(G_i) \ge 2$.

Тогда из $\mathrm{t}(G) \ge k$ и неравенства (3) следует, что

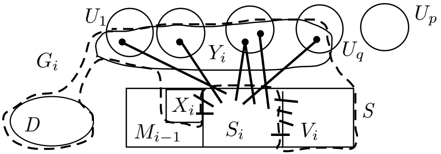
$$|D|+|V_i|+e_G(M_{i-1},S_i)+e_G(U,S_i) \ge |\mathrm{N}_G(S_i)| \ge k\cdot c(G_i) \ge k|S_i|.$$

Случай 2: $c(G_i) = 1$.

- В этом случае $|S_i| = 1$ и, кроме того, $V(G) = S_i \cup \mathrm{N}_G(S_i)$.
- Тогда из $v(G) \ge 2k+2$ следует $|\mathrm{N}_G(S_i)| > k$.
- Теперь из неравенства (3) следует, что

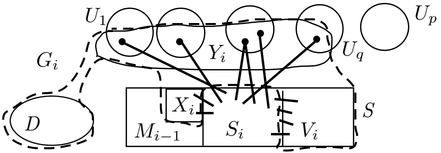
$$|D| + |V_i| + e_G(M_{i-1}, S_i) + e_G(U, S_i) \ge |\mathrm{N}_G(S_i)| > k = k|S_i|.$$

□



- Закончим доказательство теоремы. Положим $M_0 = \varnothing$.
- Заметим, что $e_G(S_i, V_i) \ge |V_i|$, так как S_i — максимальное независимое множество вершин в графе H_{i-1}, а $V_i = V(H_{i-1}) \setminus S_i$.
- Кроме того, $V(G) \setminus D = U \cup M_{i-1} \cup S_i \cup V_i$. Так как никакие две вершины множества S_i не смежны, мы имеем

$$e_G(S_i, V(G) \setminus D) = e_G(S_i, M_{i-1}) + e_G(S_i, U) + e_G(S_i, V_i) \ge e_G(S_i, M_{i-1}) + e_G(S_i, U) + |V_i|. \qquad (4)$$



• Сложим неравенство из Утверждения 2 и неравенства из Утверждения 3 для всех $i \in [2, \dots, k-1]$, после чего перенесем p в левую часть. Учитывая неравенство (4), получим

$$k|S| + o(f; D, S) \le \sum_{i=1}^{k-1} k|S_i| + p \le$$

$$(k-1)|D| + \sum_{i=1}^{k-1} |V_i| + \sum_{i=1}^{k-1} e_G(U, S_i) + \sum_{i=2}^{k-1} e_G(M_{i-1}, S_i) =$$

$$(k-1)|D| + \sum_{i=1}^{k-1} \Big(e_G(S_i, U) + e_G(S_i, M_{i-1}) + |V_i| \Big) \le$$

$$(k-1)|D| + \sum_{i=1}^{k-1} e_G(S_i, V(G) \setminus D) \le k|D| + \sum_{x \in S} d_{G-D}(x).$$

• Тем самым неравенство $(*)$ для множеств D и S выполнено, противоречие. Теорема доказана. $\square$