Паросочетания и факторы. Глава 4. Количество максимальных паросочетаний

Д. В. Карпов

10.2021

Количество паросочетаний в двудольном графе

- Для $s, m \in \mathbb{N}$ положим $r(s, m) := s(s-1)\dots(s-s_m+1)$, где $s_m = \min(s, m)$.
- Через $f'(G)$ будем обозначать количество максимальных паросочетаний в графе G, а через $f(G)$ — количество совершенных паросочетаний .

Теорема 1

(M. Hall, 1948.) *Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф, причем доля V_1 удовлетворяет условию Холла, $|V_1| = m$ и $s \le \delta_{V_1}(G) := \min_{x \in V_1} d_G(x)$. Тогда $\alpha'(G) = m$ и $f'(G) \ge r(s, m)$.*

Доказательство. • Утверждение $\alpha'(G) = m$ следует из классической теоремы Холла (паросочетание, покрывающее всю долю V_1 есть, а большего быть не может).

• Докажем Утверждение о количестве паросочетаний индукцией по m. База для $m = 1$ очевидна.

Переход. Предположим, что для меньших m теорема

Случай 1: для любого непустого множества $A \subsetneq V_1$ выполняется $|\mathrm{N}_G(A)| > |A|$.

• Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_1$. Существует не менее чем s способов выбрать смежную с ней вершину $b \in V_2$.

• Пусть $G' = G - a - b$ — двудольный граф с долями $V_1' = V_1 \setminus \{a\}$ и $V_2' = V_2 \setminus \{b\}$.

• Очевидно, для доли V_1' этого графа выполнено условие Холла, $|V_1'| = m - 1$ и $\delta_{V_1'}(G') \geq s - 1$.

• Тогда $\alpha'(G') = m - 1$ и по индукционному предположению $f'(G') \geq r(s-1, m-1)$.

• Так как ребро ab можно выбрать не менее чем s способами, $f'(G) \geq s \cdot f'(G') \geq s \cdot r(s-1, m-1) = r(s, m)$.

Случай 2: существует такое непустое множество $A \subsetneq V_1$, что $|A| = |\mathrm{N}_G(A)|$.

• Пусть $|A| = n$. Введём обозначения $B = \mathrm{N}_G(A)$, $A' = V_1 \setminus A$, $B' = V_2 \setminus B$. Пусть $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G(A' \cup B')$.

• Очевидно, для двудольного графа G_1 и его доли A выполняется условие Холла, а $\delta_A(G_1) \ge s$.

• По индукционному предположению, $\alpha'(G_1) = |A|$ и $f'(G_1) \ge r(s, n)$.

• Проверим условие Холла для двудольного графа G_2 и его доли A'. Пусть $U \subset A'$. Тогда $|U| + |A| = |U \cup A| \le |\mathrm{N}_G(U \cup A)| = |\mathrm{N}_{G_2}(U) \cup B| = |\mathrm{N}_{G_2}(U)| + |B| = |\mathrm{N}_{G_2}(U)| + |A|$, откуда следует $|U| \le |\mathrm{N}_{G_2}(U)|$.

• Очевидно, $|A'| = m - n$. Несложно понять, что $\delta_{A'}(G_2) \ge s' := \max(s - |B|, 1) = \max(s - n, 1)$.

• По индукционному предположению $\alpha'(G_2) = m - n$, $f'(G_2) \ge r(s', m - n)$.

• Тогда $f'(G) = f'(G_1) \cdot f'(G_2) \ge r(s, n) \cdot r(s', m - n) \ge r(s, m)$.
$\square$

Количество паросочетаний и кратные ребра

Лемма 1

Пусть $G(V_1, V_2, E)$ — двудольный граф (кратные ребра допускаются), имеющий совершенное паросочетание, в котором степень каждой вершины из первой доли не менее s. Тогда $f(G) \geq s$.

Доказательство. • Так как $f(G) > 0$, $|V_1| = |V_2|$. Пусть $|V_1| = m$. Докажем утверждение $f(G) \geq s$ индукцией по m.

• База для $m = 1$ очевидна.

• Переход. Пусть для графов с меньшими долями утверждение доказано.

• Так как $f(G) > 0$, граф G удовлетворяет условию Холла для доли V_1.

• Рассмотрим два случая.

Случай 1: для любого непустого множества $A \subsetneq V_1$ выполняется $|\mathrm{N}_G(A)| > |A|$.

• Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_1$. Существует не менее чем s способов выбрать инцидентное ей ребро (скажем, ab, где $b \in V_2$, концы таких ребер могут совпадать).

• Пусть $G' = G - a - b$ — двудольный граф с долями $V_1' = V_1 \setminus \{a\}$ и $V_2' = V_2 \setminus \{b\}$. Как и в теореме 1, для доли V_1' графа G' выполнено условие Холла, поэтому, $f(G') \ge 1$. Следовательно, $f(G) \ge s$.

Случай 2: существует такое непустое множество $A \subsetneq V_1$, что $|A| = |\mathrm{N}_G(A)|$.

• Пусть $|A| = n < m$. Введём обозначения $B = \mathrm{N}_G(A)$, $A' = V_1 \setminus A$, $B' = V_2 \setminus B$. Пусть $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G(A' \cup B')$. Очевидно, $|A| = |B|$ и $|A'| = |B'|$.

• Аналогично Теореме 1, для двудольного графа G_1 и его доли A выполняется условие Холла, а $\delta_A(G_1) \ge s$. Следовательно, по индукционному предположению $f(G_1) \ge s$.

• Аналогично Теореме 1, для двудольного графа G_2 и его доли A' выполняется условие Холла. Так как $|A'| = |B'|$, мы имеем $f(G_2) \ge 1$.

• Следовательно, $f(G) \ge f(G_1)f(G_2) \ge s$.

Свойство максимальных барьеров

Лемма 2

Если B — максимальный по включению барьер графа G, то все компоненты $G - B$ фактор-критические.

Доказательство. • Пусть $U \in \mathrm{Comp}(G - B)$, $H = G(U)$.

• Предположим $X \subset U$, $|X| = k > 0$, $o(H - X) \ge |X|$. В $G - (B \cup X)$ компонента U распадается на компоненты связности графа $H - X$, среди которых не менее чем $|X|$ нечетных.

• Если $|U|$ четна, то $o(G - (B \cup X)) - o(G - B) \ge |X|$.

• Если $|U|$ нечетна, то среди компонент $H - X$ не может быть ровно $|X|$ нечетных, значит, в этом случае их хотя бы $|X| + 1$. Поэтому, $o(G - (B \cup X)) - o(G - B) \ge |X| + 1 - 1 = |X|$.

• В обоих случаях $o(G - (B \cup X)) - |B \cup X| \ge o(G - B) - |B|$, а значит, $B \cup X$ — барьер, противоречие с максимальностью B.

• Таким образом, для любого непустого $X \subset U$ выполнено $o(H - X) < |X|$.

• Тогда для любой вершины $x \in U$ и любого $W \subset U \setminus \{x\}$ имеем $o(H - x - W) \le |W|$, что означает наличие в $H - x$ 1-фактора. Значит, граф H — фактор-критический.

Количество совершенных паросочетаний и барьеры

Теорема 2

Пусть граф G имеет совершенное паросочетание, а B — его максимальный барьер. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) $|B| \neq \varnothing$, $o(G - B) = |B|$.

2) *Любое паросочетание, соединяющее вершины B с вершинами разных компонент связности $G - B$ (по одному ребру в каждую компоненту), содержится в совершенном паросочетании графа G.*

3) *Пусть* $d = \min\limits_{U \in \mathrm{Comp}(G-B)} |\mathrm{N}_G(U) \cap B|$. *Тогда* $f(G) \geq r(d, m)$.

4) *Пусть* $s = \min\limits_{U \in \mathrm{Comp}(G-B)} |e_G(U, B)|$. *Тогда* $f(G) \geq s$.

Доказательство. 1) • По Теореме Татта о паросочетании, $o(G - B) = |B|$.

• Рассмотрим любую вершину $b \in V(G)$. Так как $f(G) > 0$, $o(G - v) = |\{v\}| = 1$, то есть, $\{v\}$ — барьер. Следовательно, максимальный барьер непуст.

2) • По Лемме 2 все компоненты $G-B$ фактор-критические, значит, значит, они нечетны и их ровно m.

• Пусть $\mathrm{Comp}(G-B)=\{U_1,\dots,U_m\}$, а паросочетание N покрывает B и вершины $x_i\in U_i$. Тогда для всех $i\in\{1,\dots,m\}$ в графе $G(U_i)-x_i$ есть совершенное паросочетание. Добавим к N все эти m паросочетаний и получим совершенное паросочетание в G, содержащее M.

3) • Построим двудольный граф G_B: одна доля — вершины барьера B, другая доля — компоненты $U_1,\dots,U_m$. Вершина U_i графа G_B смежна с теми и только теми вершинами B, с которыми смежна соответствующая компонента $G-B$.

• Рассмотрим совершенное паросочетание M графа G. В каждой компоненте U_i есть вершина, которую M покрывает ребром, инцидентным B (так как U_i нечетна). Эти ребра образуют совершенное паросочетание в двудольном графе G_B.

• Следовательно, в G_B выполнено условие Холла для доли B. По Теореме 1, $f(G_B)\ge r(d,m)$.

• $f(G_B)$ паросочетаний графа G_B дают нам $f(G_B)$ различных паросочетаний графа G, соединяющих вершины B с вершинами разных компонент связности $G-B$. Каждое из этих паросочетаний по пункту 2 может быть продолжено до совершенного паросочетания графа G.

• Следовательно, $f(G) \geq f(G_B) \geq r(d,m)$.

4) • Аналогично графу G_B построим граф G'_B (на тех же вершинах), только компоненту $U \in \mathrm{Comp}(G-B)$ соединим с вершиной $b \in B$ ровно $e_G(U,b)$ ребрами, соответствующими различным ребрам из $E_G(U,b)$.

• В долях графа G'_B по m вершин и каждая вершина-компонента смежна хотя бы с s вершинами барьера B. Аналогично доказанному выше, G'_B имеет совершенное паросочетание.

• Следовательно, $f(G'_B) \geq s$.

• Аналогично пункту 3, $f(G) \geq f(G'_B) \geq s$. $\square$

Следствие 1

Пусть G — реберно k-связный граф, имеющий совершенное паросочетание. Тогда $f(G) \geq k$.

Доказательство. Любая компонента связности графа $G - B$ смежна хотя бы с k вершинами B по реберной k-связности графа G. Утверждение следует из пункта 4 Теоремы 2. $\square$

Следствие 2

(A. Kotzig, 1959.) *Пусть G — связный граф (возможно, с кратными рёбрами), имеющий единственное совершенное паросочетание. Тогда граф G имеет мост, входящий в это паросочетание.*

Доказательство. • Пусть B — максимальный барьер G, тогда $|B| = m \geq 1$.

• Предположим, что каждая компонента связности графа $G - B$ смежна хотя бы с двумя вершинами из B. Тогда $f(G) \geq 2$ по пункту 4 Теоремы 2, противоречие.

• Значит, существует такая $U \in \mathrm{Comp}(G - B)$, что $e_G(U, B) = 1$. Пусть $u \in U$, $b \in B$, $ub \in E(G)$.

• По Лемме 2 компонента U фактор-критическая. Значит, ребро ub входит в единственное совершенное паросочетание G

Теорема 3

(L. Lovász, 1972.) *Пусть G — граф с единственным совершенным паросочетанием, $v(G) = 2n$. Тогда $\delta(G) \le [\log_2(n+1)]$.*

Доказательство. • Индукция по n. База $n = 1$ (то есть, $v(G) = 2$) тривиальна.

• Переход. Пусть для графов менее чем на $2n$ вершинах теорема доказана.

• По Следствию 2 граф G имеет мост xy, входящий в единственное совершенное паросочетание M.

• Граф $G - x - y$ имеет компоненту H с $v(H) \le \frac{2n-2}{2} = n - 1$.

• Граф H также имеет единственное совершенное паросочетание. Следовательно, $\delta_G(H) \le [log_2(\frac{n-1}{2} + 1)]$.

• Если z — вершина минимальной степени в H, то $d_G(z) \le d_H(z) + 1$. (может добавится ребро только в одну из вершин x и y.

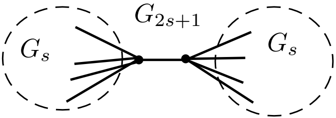
• Следовательно, $d_G(z) \le [log_2(\frac{n+1}{2})] + 1 = [log_2(n+1)]$. $\square$

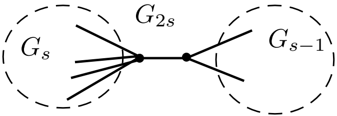
• Оценка из Теоремы 3 точная для любого n, можно построить серию примеров.

• Пусть $G_0 = K_1$, $G_1 = K_2$ и построена серия до графа G_n (где $v(G_n) = 2n$, $\delta(G_n) = [\log_2(n+1)]$).

• Если $n = 2s+1$, то построим G_n из двух копий G_s, добавив две новые смежные друг с другом вершины, каждая изкоторых соединена со всеми вершинами своей копии G_s (см. рисунок слева). Тогда $\delta(G_{2s+1}) = \delta(G_s) + 1 = [\log_2(s+1)] + 1 = [\log_2(2s+2)]$.

• Если $n = 2s$, то аналогично построим G_n из копии G_s и копии G_{s-1} (см. рисунок справа). Тогда $\delta(G_{2s}) = \delta(G_{s-1}) + 1 = [\log_2(s)] + 1 = [\log_2(2s)] = [\log_2(2s+1)]$.





Задача

Найдите максимальное число ребер в графе на $2n$ вершинах с единственным паросочетанием.

Лемма 3

Пусть G — k-связный граф, $f(G) > 0$. Тогда либо $f(G) \geq k!$, либо для любой пары различных вершин $x, y \in V(G)$ выполнено $f(G - x - y) > 0$.

Доказательство. • По Следствию 1 при $k \leq 2$ оценка $f(G) \geq k!$ выполнена. Далее пусть $k \geq 3$.

• Предположим, что $x, y \in V(G)$ таковы, что $f(G - x - y) = 0$. Пусть $H = G - x - y$.

• По теореме Татта тогда существует такое $S \subset V(H)$, что $o(H - S) > |S|$.

• Так как $v(H)$ четно, $o(H - S) \geq |S| + 2$.

• С другой стороны, $|S| + 2 \leq o(H - S) = o(G - (\{x, y\} \cup S)) \leq |S| + 2$, так как G имеет совершенное паросочетание.

• Следовательно, существует барьер графа G, содержащий $\{x, y\}$. Пусть B — максимальный такой барьер.

• Так как G k-связен, а $c(G - B) \geq o(G - B) \geq 2$, мы имеем $|B| \geq k$, а каждая компонента связности графа $G - B$ смежна хотя бы с k вершинами барьера B.

• Значит, по Теореме 2 мы имеем $f(G) \geq r(k, k) = k!$. $\square$

• Обозначим через $F(k)$ минимальное количество совершенных паросочетаний в k-связном графе, который их имеет.

Лемма 4

(J. Zaks, 1970.) 1) *Пусть G — k-связный граф с $f(G) > 0$. Тогда $f(G) \geq k!$ или $f(G) \geq \Delta(G)F(k-2)$.*

2) $F(k) \geq k!! = \prod_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]} (k-2i)$.

Доказательство. 1) • Пусть $f(G) < k!$. Тогда $k \geq 3$ и по Лемме 3 любое ребро графа G входит в совершенное паросочетание.

• Пусть $x \in V(G)$ такова, что $d_G(x) = \Delta(G)$. Тогда можно $\Delta(G)$ способами выбрать инцидентное x ребро xy и каждое из них дополнить до совершенного паросочетания графа G всеми возможными совершенными паросочетаниями графа $G - x - y$.

• Так как граф $G - x - y$ $(k-2)$-связен, $f(G - x - y) \geq F(k-2)$ и $f(G) \geq \Delta(G)f(G - x - y) \geq \Delta(G)F(k-2)$, что нам и нужно.

2) Прямое следствие пункта 1. $\square$

Теорема 4

Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $F(2k+1) = (2k+1)!!$, а единственным $(2k+1)$-связным графом с ровно $(2k+1)!!$ совершенными паросочетаниями является K_{2k+2}.

Доказательство. • Оценка $F(2k+1) \ge (2k+1)!!$ следует из пункта 2 Леммы 4.

• Нетрудно проверить, что $f(K_{2k+2}) = (2k+1)!!$. Тем самым, $F(2k+1) = (2k+1)!!$.

• Пусть G — $(2k+1)$-связный граф с $f(G) = (2k+1)!!$.
• Из Леммы 4 следует, что $\Delta(G) = 2k+1$, то есть, G — $(2k+1)$-регулярный граф.

• Пусть $xy \in E(G)$, $H = G - x - y$. Из доказательства Леммы 4 следует, что $f(G) \ge (2k+1)f(H)$ и $f(H) > 0$. Следовательно, $f(H) = (2k-1)!!$.

• При $2k-1 \ge 3$ мы имеем $(2k-1)$-связный граф H с $f(H) = (2k-1)!!$. По доказанному выше, H должен быть $(2k-1)$-регулярным. Следовательно, каждая из вершин графа H смежна в G с обеими вершинами x и y, откуда из $d_G(x) = d_G(y) = 2k+1$ следует $v(H) = 2k$.

• Значит, $v(G) = 2k+2$. Так как это $(2k+1)$-регулярный граф, получаем $G = K_{2k+2}$.

• Остается случай, когда G — 3-связный 3-регулярный граф с $f(G) = 3$.

• Пусть $G \neq K_4$. Тогда (по теореме Татта из Теории связности) существует такая пара смежных вершин $x, y \in E(G)$, что граф $G \cdot xy$ 3-связен.

• Тогда граф $G - x - y$ 2-связен, то есть, не может иметь моста, откуда по следствию 2 получаем $f(G - x - y) > 1 = 1!!$. Это противоречит доказанному выше. $\square$

Количество совершенных паросочетаний в графах четной связности.

• Оценка количества совершенных паросочетаний в графах четной связности потребует бо́льших усилий. Определим серию графов, на которых достигается максимум.

• Для $k \in \mathbb{N}_0$ пусть S_k — граф, полученный из K_{2k+2} удалением совершенного паросочетания.

• Очевидно, $f(S_0) = 0$ и $f(S_1) = 2$.

Лемма 5

1) *При* $k \ge 2$ *выполнено* $f(S_k) = 2k(f(S_{k-1}) + f(S_{k-2}))$.

2) *При* $k \in \mathbb{N}$ *граф* S_k $2k$*-связен. Если* G $2k$*-связен и* $v(G) = 2k + 2$*, то* S_k *— подграф* G

Доказательство. 1) • Пусть $V(S_k) = \{x_1, y_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+1}\}$, причем удаленные из K_{2k+2} ребра — это $x_1y_1, \dots, x_{k+1}y_{k+1}$.

• Есть $2k$ аналогичных способов выбрать в совершенном паросочетании M ребро, инцидентное x_1. НУО $x_1x_2 \in M$.

• Если $y_1y_2 \in M$, то оставшиеся $k-1$ ребер M —это совершенное паросочетание графа $S_k - \{x_1, x_2, y_1, y_2\} \simeq S_{k-2}$. У него $f(S_{k-2})$ различных совершенных паросочетаний.

• Если $y_1y_2 \notin M$, то оставшиеся k ребер M —это совершенное паросочетание графа $S_k - \{x_1, x_2\} - y_1y_2 \simeq S_{k-1}$. У него $f(S_{k-1})$ различных совершенных паросочетаний.

2) • Граф S_k, очевидно, $2k$-связен.

• Так как G — $2k$-связен, $\delta(G) \ge 2k$. Так как $v(G) = 2k + 2$, отсутствующие в G ребра образуют паросочетание. Дополнив его до совершенного паросочетания в K_{2k+2}, получим подграф S_k графа G. $\square$

Лемма 6

Пусть $k \in \mathbb{N}$, а G — $2k$-связный граф с $v(G) = 2k + 2$, $G \not\simeq S_k$. Тогда $f(G) \ge f(S_k) + f(S_{k-1})$.

Доказательство. • По Лемме 5 G имеет подграф S_k.

• Так как $G \not\simeq S_k$, G имеет хотя бы еще одно ребро, а значит, G имеет подграф S_k^+, полученный из S_k добавлением ребра. Следовательно, $f(G) \ge f(S_k^+)$.

• Остается доказать, что $f(S_k^+) = f(S_k) + f(S_{k-1})$.

• Пусть добавлено ребро x_1y_1. Количество совершенных паросочетаний S_k^+, не содержащих x_1y_1, равно $f(S_k^+ - x_1y_1) = f(S_k)$.

• Количество совершенных паросочетаний S_k^+, содержащих x_1y_1, равно $f(S_k^+ - x_1 - y_1) = f(S_{k-1})$. □

• Рекуррентное соотношение из Леммы 5 позволяет вычислить значения $f(S_2) = 8$, $f(S_3) = 60$, $f(S_4) = 544$, ...

• Для $k, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2k$ рекурсивно определим функцию $g(2k, d)$: положим $g(2, d) = 2$ и

$$g(2k, d) = \min_{d_1}((2k)!, \quad d \cdot g(2k-2, d_1)),$$

где параметр d_1 пробегает все значения, удовлетворяющие условиям $2k - 1 \leq d_1 \leq d$ при $d \leq 2k + 2$ и $2k - 2 \leq d_1 \leq d$ при $d > 2k + 2$.

• Положим $g(2k) = \min_{d \geq 2k} g(2k, d)$.

Лемма 7

Пусть $k \geq 2$. *Тогда* $g(2k) = g(2k, 2k) = \frac{4k}{3} \cdot (2k-1)!!$,

$$g(2k, 2k+1) = \frac{2}{3} \cdot (2k+1)!!,$$

и это два наименьших значения среди $g(2k, d)$ *при* $d \geq 2k$.

Доказательство. • Индукция по k. Сначала докажем, что $g(2k, 2k)$ и $g(2k, 2k+1)$ — два наименьших значения, считая, что для $k-1$ это уже известно. При $k = 2$ это предположение корректно, так как $g(2, d) = 2$ при всех d.

• При $d \in \{2k, 2k+1, 2k+2\}$ по индукционному предположению и определению

$$g(2k,d) = \min((2k)!,\ d \cdot g(2k-2, 2k-1)) = d \cdot g(2k-2, 2k-1).$$

• Поэтому, $g(2k, 2k) < g(2k, 2k+1) < g(2k, 2k+2)$.

• При $d \geq 2k+3$ по индукционному предположению и определению

$$g(2k,d) = \min((2k)!,\ d \cdot g(2k-2, 2k-2)) = d \cdot g(2k-2, 2k-2)).$$

• Поэтому, $g(2k, d)$ нестрого возрастает при $d \geq 2k+3$.

• Так как $g(2, d) = 2$ при всех d, поэтому, $g(4, 6) < g(4, 4)$ и при $k = 2$ утверждение доказано.

• При $k \geq 3$ остается проверить, что

$$g(2k, 2k+1) < g(2k, 2k+3) \iff$$
$$(2k+1)g(2k-2, 2k-1) < (2k+3)g(2k-2, 2k-2)) \iff$$
$$(2k+1)\frac{2}{3} \cdot (2k-1)!! < (2k+3)\frac{4(k-1)}{3} \cdot (2k-3)!! \iff$$
$$(2k+1)(2k-1) < (2k+3)(2k-2) \iff -1 < 2k-6,$$

что верно.

- Из доказанного выше следует, что $g(2k) = g(2k, 2k)$, а при вычислении минимума достаточно нужно рассмотреть минимально возможное значение $d_1 = 2k - 1$. Вычислим значения функции g по индукции.
- База $k = 2$.

$$g(4) = g(4,4) = \min(4!,\ 4g(2,3)) = 8 = \frac{4 \cdot 2}{3} \cdot 3!! \quad \text{и}$$

$$g(4,5) = \min(4!,\ 5g(2,3)) = 10 = \frac{2}{3} \cdot 5!!.$$

- Переход $k - 1 \to k$.

$$g(2k) = g(2k, 2k) = \min((2k)!,\ (2k)g(2k-2, 2k-1)) =$$
$$\min((2k)!,\ \frac{4k}{3} \cdot (2k-1)!!) = \frac{4k}{3} \cdot (2k-1)!! \quad \text{и}$$

$$g(2k, 2k+1) = \min((2k)!,\ (2k+1)g(2k-2, 2k-1)) =$$
$$\min((2k)!,\ \frac{2}{3} \cdot (2k+1)!!) = \frac{2}{3} \cdot (2k+1)!!. \qquad \square$$

• $f(S_1) = 2 = g(2)$, $f(S_2) = 8 = g(4)$, $f(S_3) = 60 = g(6)$, $f(S_4) = 544 < 560 = g(8)$.

Лемма 8

При $k \geq 4$ выполнено $f(S_k) < g(2k)$.

Доказательство. • Индукция по k, база проверена выше.

• Переход $k-2, k-1 \to k$.

$$f(S_k) = 2k(f(S_{k-1}) + f(S_{k-2})) <$$
$$2k\left(\frac{4(k-1)}{3}(2k-3)!! + \frac{4(k-2)}{3}(2k-5)!!\right) =$$
$$\frac{4k}{3}(2k-5)!!\big(2(k-1)(2k-3) + 2(k-2)\big) =$$
$$\frac{4k}{3}(2k-5)!!\big((2k-1)(2k-3) - 1\big) <$$
$$\frac{4k}{3}(2k-1)!! = g(2k). \qquad \square$$

• Обозначим через $h(2k,d)$ минимум $f(G)$ по всем $2k$-связным графам G с $f(G)>0$, $v(G)\ge 2k+4$ и $\Delta(G)\ge d$. Пусть

$$h(2k)=\min_{d\ge 2k} h(2k,d).$$

Лемма 9

При $k\in\mathrm{N}$ и $d\ge 2k$ выполнено $h(2k,d)\ge g(2k,d)$ и следовательно, $h(2k)\ge g(2k)$.

Доказательство. • Пусть G — граф с указанными выше параметрами. Нам нужно доказать, что $f(G)\ge g(2k,d)$.

• При $k=1$ по Следствию 2 имеем $f(G)\ge 2=g(2,d)$. Далее $k\ge 2$.

• Можно считать, что каждое ребро G входит в 1-фактор, иначе по Лемме 3 имеем $f(G)\ge (2k)!\ge g(2k,d)$ по определению.

• Пусть $x\in V(G)$, $d_G(x)=d$, $\mathrm{N}_G(x)=\{y_1,\dots,y_d\}$. Пусть $H_i=G-x-y_i$.

- Тогда H_i — $(2k-2)$-связный граф с $v(H_i) = v(G) - 2 \ge 2k+2$. Пусть $\Delta(H_i) = d_i \ge 2k-2$. Тогда

$$f(G) = \sum_{i=1}^{d} f(H_i) \ge \sum_{i=1}^{d} h(2k-2, d_i) \ge \sum_{i=1}^{d} g(2k-2, d_i). \qquad (*)$$

- Понятно, что $\Delta(H_i) \ge \Delta(G) - 2 \ge 2k-2$.
- Пусть $\Delta(G) = d \le 2k+2$. Тогда x смежна не более чем с $2k+1$ вершиной H_i (то есть, не со всеми). Пусть $z \in V(H_i)$ несмежна с x. Тогда $d_i = d_{H_i}(z) \ge \delta(G) - 1 \ge 2k-1$.
- Следовательно, по определению функции g имеем $g(2k, d) \le d \cdot g(2k-2, d_i)$. Продолжим неравенство $(*)$:

$$f(G) \ge \sum_{i=1}^{d} g(2k-2, d_i) \ge d \cdot \min_{i \in \{1,\dots,d\}} g(2k-2, d_i) \ge g(2k, d).$$

$\square$

Теорема 5

(W. Mader, 1973.) *Пусть $k \in \mathbb{N}$.*

1) $F(2k) = f(S_k)$.

2) *При $k \geq 4$ единственный $2k$-связный граф, имеющий ровно $F(2k)$ совершенных паросочетаний — это S_k.*

Доказательство. **(B. Bollobás, 1978.)**

• Пусть G — $2k$-связный граф с $f(G) > 0$. Очевидно, $v(G) \geq 2k+2$ (отметим, что $v(G)$ четно).

• Если $v(G) = 2k+2$, то либо $G = S_k$, либо по Лемме 6 мы имеем $f(G) > f(S_k)$.

• Пусть $v(G) \geq 2k+4$. Тогда $f(G) \geq h(2k) \geq g(2k) > f(S_k)$ по Леммам 9 и 8. □

• Можно доказать, что при $k \in \{2,3\}$ граф S_k также является единственным графом, имеющим ровно $F(2k)$ совершенных паросочетаний, но это требует бóльших усилий.