# Паросочетания и факторы. Глава 5. Размер максимального паросочетания

Д. В. Карпов

10.2021

• В этом разделе мы оценим снизу размер максимального паросочетания $\alpha'(G)$ в графе $G$ с $v(G) = n$, $\Delta(G) = \Delta$ и $\delta(G) = \delta$. Рассматриваются графы без петель и кратных ребер.

## Теорема 1

**(P. Erdös, L. Pósa, 1962.)** $\alpha'(G) \geq \min([\frac{n}{2}], \delta)$.

Доказательство. • При $\delta \geq [\frac{n}{2}]$ по критерию Дирака в графе есть гамильтонов путь, а значит $\alpha'(G) \geq [\frac{n}{2}]$. Далее будем считать, что $\delta < [\frac{n}{2}]$ и доказывать неравенство $\alpha'(G) \geq \delta$.

• Пусть $S$ — барьер графа $G$, $|S| = s$. Тогда $q = o(G - S) = n + s - 2\alpha'(G)$.

• Очевидно, $q \leq n - s$. Следовательно, $\quad s \leq \alpha'(G) \quad$ (1).

• Из $\delta(G) = \delta$ следует, что любая компонента связности $G - S$ имеет размер не менее $\delta - s + 1$. Следовательно,

$$q(\delta - s + 1) \leq n - s \qquad (2).$$

• Подставим в (2) выражение для $q$:

$$(n + s - 2\alpha'(G))(\delta - s + 1) + s \leq n \qquad (3).$$

• Это квадратный трехчлен по $s$ с отрицательным старшим коэффициентом. Значит, минимум по $s$ достигается на одном из краев интервала $[0, \alpha'(G)]$ и при этом значении неравенство (3) выполнено.

- Рассмотрим два случая.

Случай 1: неравенство (3) выполнено при $s = 0$.

- Следовательно, $(n - 2\alpha'(G))(\delta + 1) \le n$.
- Если $\alpha'(G) < \delta$, то $\alpha'(G) \le \delta - 1 \le [\frac{n}{2}] - 2$ и

$$(n - 2\alpha'(G))(\alpha'(G) + 1) \le (n - 2\alpha'(G))(\delta + 1) \le n \Rightarrow$$

$$n\alpha'(G) - 2(\alpha'(G))^2 - 2\alpha'(G) \le 0 \Rightarrow \alpha'(G) \ge \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1,$$

противоречие.

Случай 2: неравенство (3) выполнено при $s = \alpha'(G)$.

- Следовательно,

$$(n - \alpha'(G))(\delta - \alpha'(G) + 1) + \alpha'(G) \le n \iff (n - \alpha'(G))(\delta - \alpha'(G)) \le 0,$$

что неверно при $\alpha'(G) < \delta$. $\square$

- Введем обозначение

$$m(n,\delta,\Delta) = \min_{v(G)=n,\ \delta(G)=\delta,\ \Delta(G)=\Delta} \alpha'(G).$$

- По Теореме 1, $m(n,\delta,\Delta) \ge \min([\frac{n}{2}],\delta)$.
- Так как $\alpha'(G) \le \frac{v(G)}{2}$, при $\delta \ge [\frac{n}{2}]$ мы имеем $m(n,\delta,\Delta) = [\frac{n}{2}]$.

# Теорема 2

*При* $[\frac{n}{2}] > \delta$ *и* $n < \Delta + \delta$ *выполнено* $m(n,\delta,\Delta) = \delta$.

• Отметим, что в этом случае $\Delta - 2 > \delta$.

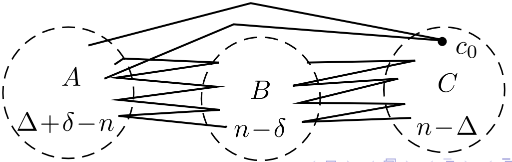
Доказательство. • По Теореме 1 мы имеем $m(n,\delta,\Delta) \ge \delta$.

• Построим граф $G_n$ с $v(G_n) = n$, $\Delta(G_n) = \Delta$, $\delta(G_n) = \delta$ и $\alpha'(G_n) = \delta$.

• Пусть $V(G_n) = A \cup B \cup C$, где $|A| = \Delta + \delta - n$, $|B| = n - \delta$, $|C| = n - \Delta$, эти три множества не пересекаются. Проведем все ребра между $A$ и $B$, $B$ и $C$. Кроме того, одну из вершин $c_0 \in C$ соединим со всеми вершинами из $A$.

• Тогда вершины из $B$ имеют степень $\delta$, $d_{G_n}(c_0) = \Delta$, остальные вершины имеют степени $n - \delta$ или $n - \delta + 1$, лежащие между $\delta$ и $\Delta$.

• $\alpha'(G_n) = \delta$, так как любое ребро имеет конец в $A \cup C$, а $|A| + |C| = \delta$. $\square$



## Теорема 3

**(B. Bollobás, S. Eldridge, 1976.)** *Пусть $\delta^*$ — наименьшее четное число, не меньшее чем $\delta$.*

1) *Если $\delta \le \Delta - 2$, то $m(n,\delta,\Delta) \ge \lceil \frac{n\delta}{\Delta+\delta} \rceil$.*

2) *Если $\delta \ge \Delta - 1$, то $m(n,\delta,\Delta) \ge \lceil \frac{n\delta^*}{2(\delta^*+1)} \rceil$.*

3) *Если $\delta = \Delta - 1 \,\vdots\, 2$, то $m(n,\delta,\Delta) \ge \lceil \frac{\delta n+1}{2(\delta+1)} \rceil$.*

Доказательство. • Пусть $S$ — барьер графа $G$, $|S| = s$. Тогда $q := o(G - S) = n + s - 2\alpha'(G)$.

• Очевидно, $q \le n - s$. Следовательно, $\quad s \le \alpha'(G) \quad (1).$

• Обозначим через $a$ количество нечетных компонент $G - S$ размера не более $\delta$.

• Так как каждая нечетная компонента $G - S$ имеет хотя бы одну вершину, а $q - a$ компонент — хотя бы $\delta^* + 1$ вершин, получаем

$$a + (q - a)(\delta^* + 1) \le n - s \iff a\delta^* \ge q(\delta^* + 1) - n + s. \qquad (2)$$

• Если $U \in \mathrm{Comp}(G - S)$ и $|U| = 2k + 1 \le \delta$, то каждая вершина $x \in U$ имеет $e_G(x, S) \ge \delta - 2k$. Следовательно, $e_G(U, S) \ge (2k + 1)(\delta - 2k) \ge \delta$.

• Так как из $S$ выходит не более $s\Delta$ ребер, $s\Delta \geq a\delta$. Воспользовавшись (1) и тем, что $q = n + s - 2\alpha'(G)$, получаем

$$s\Delta \geq a\delta \geq q\frac{\delta(\delta^* + 1)}{\delta^*} - n\frac{\delta}{\delta^*} + s\frac{\delta}{\delta^*} =$$
$$(n + s - 2\alpha'(G))(\delta + \frac{\delta}{\delta^*}) - n\frac{\delta}{\delta^*} + s\frac{\delta}{\delta^*} =$$
$$s(\delta + 2\frac{\delta}{\delta^*}) + n\delta - 2\alpha'(G)(\delta + \frac{\delta}{\delta^*}),$$

что можно переписать в виде

$$s\left(\Delta - \frac{\delta^* + 2}{\delta^*}\delta\right) \geq \delta\left(n - 2\alpha'(G)\frac{\delta^* + 1}{\delta^*}\right). \qquad (3)$$

• Далее перейдем к доказательству утверждений теоремы по пунктам.

1) • При $\delta \le \Delta - 2$ коэффициент $\Delta - \frac{\delta^*+2}{\delta^*}\delta$ при $s$ в левой части неравенства (3) неотрицателен:

при $\delta^* = \delta$ имеем $\Delta - \delta - 2 \ge 0$, а

при $\delta^* = \delta + 1$ имеем

$$\Delta - \frac{\delta+3}{\delta+1}\delta \ge 0 \iff \Delta(\delta+1) \ge (\delta+3)\delta \iff (\Delta-\delta)(\delta+1) \ge 2\delta,$$

что очевидно.

• Значит, если подставить максимальное значение $s = \alpha'(G)$, неравенство (3) будет верно:

$$\alpha'(G) \cdot \left(\Delta - \frac{\delta^*+2}{\delta^*}\delta\right) \ge \delta\left(n - 2\alpha'(G)\frac{\delta^*+1}{\delta^*}\right) \iff$$

$$\alpha'(G)\left(\Delta - \delta - \frac{2\delta}{\delta^*} + 2\delta + \frac{2\delta}{\delta^*}\right) \ge \delta n \iff \alpha'(G) \ge \left\lceil \frac{\delta n}{\Delta+\delta} \right\rceil.$$

2) • При $\delta \ge \Delta - 1$ коэффициент $\Delta - \frac{\delta^*+2}{\delta^*}\delta$ при $s$ в левой части неравенства (3) неположителен:

при $\delta^* = \delta$ имеем $\Delta - \delta - 2 < 0$, а

при $\delta^* = \delta + 1$ имеем

$$\Delta - \frac{\delta+3}{\delta+1}\delta \le 0 \iff (\Delta - \delta)(\delta+1) \le \delta + 1 \le 2\delta.$$

• Значит, если подставить максимальное значение $s = 0$, неравенство (3) будет верно:

$$0 \ge \delta\left(n - 2\alpha'(G)\frac{\delta^*+1}{\delta^*}\right) \iff 2\alpha'(G)\frac{\delta^*+1}{\delta^*} \ge n \iff$$

$$\alpha'(G) \ge \left\lceil \frac{\delta^* n}{2(\delta^*+1)} \right\rceil$$

3) • При $\delta = \Delta - 1 \vdots 2$ мы имеем $\delta = \delta^*$ и $\alpha'(G) \geq \lceil \frac{\delta n}{2(\delta+1)} \rceil$.

• Нам нужно увеличить числитель дроби на 1. Это невозможно сделать лишь в случае, если числитель делится на знаменатель, что эквивалентно $n \vdots \delta + 1$.

• Кроме того, все неравенства при получении оценки в пункте 2 должны обращаться в равенства. Следовательно, $s = 0$ (то есть,$S = \varnothing$ — максимальный барьер), откуда из $s\Delta \geq a\delta$ имеем $a = 0$.

• Таким образом, граф $G = G - S$ состоит из $q = q - a$ компонент, в которых ровно по $\delta + 1$ вершин (так как в (2) достигается равенство).

• Но тогда $\Delta = \Delta(G) \leq \delta$, противоречие.

• Следовательно, $\alpha'(G) \geq \lceil \frac{\delta n+1}{2(\delta+1)} \rceil$. $\square$

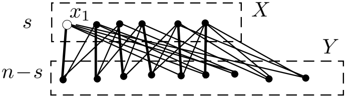
## Теорема 4

*При $\Delta - \delta \geq 2$, $[\frac{n}{2}] > \delta$ и $n \geq \Delta + \delta$ выполнено $m(n, \delta, \Delta) = \lceil \frac{n\delta}{\Delta+\delta} \rceil$.*

Доказательство. • По Теореме 3 мы имеем $m(n, \delta, \Delta) \geq \lceil \frac{n\delta}{\Delta+\delta} \rceil =: s$.

• Построим двудольный граф $G_n(X, Y, E)$ с $v(G_n) = n$, $\Delta(G_n) = \Delta$, $\delta(G_n) = \delta$ и $\alpha'(G_n) = \delta$. Отметим, что $s \geq \delta$.

• Пусть $X = \{x_1, \dots, x_s\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_{n-s}\}$. Каждую вершину доли $Y$ соединим с $\delta$ вершинами доли $X$ так, чтобы степени вершин $x_1, \dots, x_s$ различались не более чем на 1 и было совершенное паросочетание, покрывающее $X$.




.

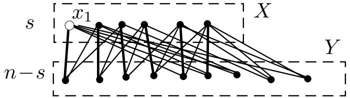
• В полученном графе степени всех вершин $y_j$ равны $\delta$, а степени вершин из $X$ не превосходят

$$\left\lceil \frac{\delta(n-s)}{s} \right\rceil \le \Delta \iff \frac{\delta(n-s)}{s} \le \Delta \iff \Delta s \ge \delta(n-s)$$

$$\iff (\Delta+\delta)s \ge \delta n \iff s \ge \frac{\delta n}{\Delta+\delta},$$

что верно. Следовательно, можно добавить несколько ребер с концом в $x_1$ в разные вершины доли $Y$ так, чтобы получилось $d_{G_n}(x_1) = \Delta$. В итоге $\delta(G_n) = \delta$ и $\Delta(G_n) = \Delta$.

• Так как каждое ребро имеет конец в $X$, $\alpha'(G) = |X| = s$. □



## Теорема 5

*Пусть* $[\frac{n}{2}] > \delta$.

1) *Если* $\delta = \Delta \,\vdots\, 2$, *то* $m(n,\delta,\Delta) = \lceil \frac{n\delta}{2(\delta+1)} \rceil$.

2) *Если* $\delta = \Delta - 1 \not\vdots\, 2$, *то* $m(n,\delta,\Delta) = \lceil \frac{n\Delta}{2(\Delta+1)} \rceil$.

3) *Если* $\delta = \Delta - 1 \,\vdots\, 2$, *то* $m(n,\delta,\Delta) = \lceil \frac{n\delta+1}{2(\delta+1)} \rceil$.

Доказательство. 1) • В этом случае $\delta^* = \delta$ и по Теореме 3 мы имеем $m(n,\delta,\Delta) \ge \lceil \frac{n\delta}{2(\delta+1)} \rceil$. Построим $\delta$-регулярный граф $G_n^1$ с $v(G_n^1) = n$ и $\alpha'(G_n^1) \le \lceil \frac{n\delta}{2(\delta+1)} \rceil$.

• Так как $n > 2\delta + 1$, существует представление в виде $n = b(\delta+1) + c$, где $\delta + 1 \le c < 2(\delta+1)$.

• $G_n^1$ — объединение $b$ графов $K_{\delta+1}$ и одного $\delta$-регулярного графа на $c$ вершинах (при $c \ge \delta + 1$ такой граф существует).

• Тогда $\alpha'(G_n^1) \le b \cdot \frac{\delta}{2} + [\frac{c}{2}]$.

• Так как $\lceil \frac{n\delta}{2(\delta+1)} \rceil = \lceil \frac{b\delta(\delta+1)+c\delta}{2(\delta+1)} \rceil = b \cdot \frac{\delta}{2} + \lceil \frac{c\delta}{2(\delta+1)} \rceil$, нам достаточно доказать, что $\lceil \frac{c\delta}{2(\delta+1)} \rceil \ge [\frac{c}{2}]$.

• Так как $\frac{c}{2} - \frac{c\delta}{2(\delta+1)} = \frac{c\delta+c}{2(\delta+1)} - \frac{c\delta}{2(\delta+1)} = \frac{c}{2(\delta+1)} < 1$, на интервале $[\frac{c\delta}{2(\delta+1)}, \frac{c}{2}]$ находится не более одного целого числа.

2) • В этом случае $\delta^* = \delta + 1 = \Delta$ и по Теореме 3 мы имеем $m(n, \delta, \Delta) \ge \lceil \frac{n\Delta}{2(\Delta+1)} \rceil$.

• Так как $n \ge 2(\delta + 1) = 2\Delta$, существует представление в виде $n = b(\Delta + 1) + c$, где $\Delta + 1 \le c < 2(\Delta + 1)$.

• $G_n^2$ — объединение $b$ графов $K_{\Delta+1}$ и одного графа $H$ на $c$ вершинах, который мы построим так: возьмем $\Delta$-регулярный граф (при $c \ge \Delta + 1$ и четном $\Delta$ такой граф несложно построить), и удалим из него ребро.

• Тогда $\delta(G_n^2) = \delta$, $\Delta(G_n^2) = \Delta$ и $\alpha'(G_n^2) \le b \cdot \frac{\Delta}{2} + [\frac{c}{2}]$.

• Аналогично пункту 1,
$\lceil \frac{n\Delta}{2(\Delta+1)} \rceil = b \cdot \frac{\Delta}{2} + \lceil \frac{c\Delta}{2(\Delta+1)} \rceil \ge b\frac{\Delta}{2} + [\frac{c}{2}] = \alpha'(G_n^2)$.

• Значит, $m(n, \delta, \Delta) = \lceil \frac{n\Delta}{2(\Delta+1)} \rceil$.

3) • В этом случае по Теореме 3 мы имеем $m(n,\delta,\Delta) \ge \lceil \frac{n\delta+1}{2(\delta+1)} \rceil$.

• Так как $n > 2\delta+1$, существует представление в виде $n = b(\delta+1)+c$, где $\delta+1 < c \le 2(\delta+1)$.

• $G_n^3$ — объединение $b$ графов $K_{\delta+1}$ и графа $H$ на $c$ вершинах, который мы построим так: возьмем $\delta$-регулярный граф на $c$ вершинах (при $c \ge \delta+2$ и четном $\delta$ такой несложно построить) и добавим одно отсутствующее ребро (такое есть, так как наш граф имеет хотя бы $\delta+2$ вершины, а значит, он неполный).

• Тогда $\delta(G_n^3) = \delta$, $\Delta(G_n^3) = \Delta$ и $\alpha'(G_n^3) \le b \cdot \frac{\delta}{2} + [\frac{c}{2}]$.

• Так как $\lceil \frac{n\delta+1}{2(\delta+1)} \rceil = \lceil \frac{b\delta(\delta+1)+c\delta+1}{2(\delta+1)} \rceil = b \cdot \frac{\delta}{2} + \lceil \frac{c\delta+1}{2(\delta+1)} \rceil$, нам нужно доказать, что $\lceil \frac{c\delta+1}{2(\delta+1)} \rceil \le [\frac{c}{2}]$.

• Так как $\frac{c}{2} - \frac{c\delta+1}{2(\delta+1)} = \frac{c\delta+c}{2(\delta+1)} - \frac{c\delta+1}{2(\delta+1)} = \frac{c-1}{2(\delta+1)} < 1$, на интервале $[\frac{c\delta+1}{2(\delta+1)}, \frac{c}{2}]$ находится не более одного целого числа.

• Значит, $m(n,\delta,\Delta) = \lceil \frac{n\delta+1}{2(\delta+1)} \rceil$. □

• При $\delta = \Delta = 1$, очевидно, имеем $m(n,1,1) = [\frac{n}{2}]$.

• Самая сложная ситуация — в случае $\delta$-регулярного графа с нечетным $\delta \geq 3$. В этом случае, очевидно, $n$ может быть только четным.

• Рассмотрим представление в виде

$$n = u(\delta+1)^2 + (2k+1)(\delta+2) + r, \quad \text{где } 0 \leq 2k < \delta, \quad r \leq 2\delta+3.$$

• Отметим, что $r$ нечетно, так как $\delta$ нечетно и $n$ четно.

• Положим $\qquad m_0(n,\delta) = \frac{n-u(\delta-1)}{2} - k.$

## Лемма 1

*Величина $m_0(n,\delta)$ определена корректно.*

Доказательство. ! • Пусть $n = u_1(\delta+1)^2 + (2k_1+1)(\delta+2) + r_1$ и $n = u_2(\delta+1)^2 + (2k_2+1)(\delta+2) + r_2$.

• Так как
$\delta + 3 \leq (2k_i+1)(\delta+2) + r_i \leq \delta(\delta+2) + 2\delta + 3 < 2(\delta+1)^2$, мы имеем $|u_2 - u_1| \leq 1$.

• Если $u_1 = u_2$, то $2(\delta+2)(k_1-k_2) + r_1 - r_2 = 0$, откуда ввиду $|r_1 - r_2| \leq 2\delta+3$ следует, что $k_1 = k_2$, а значит, и $r_1 = r_2$.

- Пусть $u_2 = u_1 + 1$. Тогда:
$2(\delta+2)(k_1 - k_2) + r_1 - r_2 = (\delta+1)^2 = 2(\delta+2)\cdot\frac{\delta-1}{2} + (\delta+3)$, откуда следует $k_1 - k_2 = \frac{\delta-1}{2}$.
- В этом случае $\frac{n-u_1(\delta-1)}{2} - k_1 = \frac{n-u_2(\delta-1)}{2} - k_2$, значит, $m_0(n,\delta)$ определено корректно.

$\exists$ • Поделим $n$ на $(\delta+1)^2$ с остатком: $n = q(\delta+1)^2 + r'$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $r' > \delta + 2$.

- Поделим $r' - (\delta+2)$ на $2(\delta+2)$ с остатком: $r' - (\delta+2) = 2s(\delta+2) + p$.
- Так как $r' \le (\delta+1)^2 - 1 = \delta(\delta+2)$, мы имеем $2s + 1 \le \delta$, откуда $2s < \delta$.
- Положим $u = q$, $k = s$ и $r = p$ и получим искомое представление: $n = u(\delta+1)^2 + (2k+1)(\delta+2) + r$.

Случай 2: $r' < \delta + 2$.

- Пусть $\delta = 2s + 1$. Тогда

$$r' + (\delta+1)^2 = \delta(\delta+2) + r' + 1 = (2s+1)(\delta+2) + r' + 1.$$

- Положим $u = q - 1$, $k = s$ и $r = r' + 1$. Тогда $2k = 2s < 2s + 1 = \delta$ и $r = r' + 1 \le \delta + 2 < 2\delta + 3$, а значит, найденные коэффициенты нам подходят.

## Теорема 6

**(B. Bollobás, S. Eldridge, 1976.)** *При нечетном $\delta > 1$ и четном $n > 2\delta$ выполнено $m(n,\delta,\delta) = m_0(n,\delta)$.*

Доказательство. $\geq$. • Рассмотрим $\delta$-регулярный граф $G$ на $n$ вершинах. Каждая компонента $G$ имеет четное число вершин.

• Пусть $S$ — барьер графа $G$, $|S| = s$. Тогда $q := o(G-S) = n + s - 2\alpha'(G)$.

• Обозначим через $a$ количество нечетных компонент $G - S$ размера не более $\delta$.

• Так как $\delta$ нечетна, каждая нечетная компонента $U \in \mathrm{Comp}(G-S)$ имеет $e_G(U,S) \geq 1$.

• Аналогично Теореме 3, каждая нечетная $U \in \mathrm{Comp}(G-S)$ с $|U| \leq \delta$ имеет $e_G(U,S) \geq \delta$.

• Следовательно, $\quad s\delta \geq a\delta + (q-a)$. (1)

• Предположим, что $n = u(\delta+1)^2 + (2k+1)(\delta+2) + r$, где $0 \leq 2k < \delta$ и $r \leq 2\delta+3$, но $\alpha'(G) \leq m_0(n,\delta) - 1 = \frac{n-u(\delta-1)}{2} - k - 1$.

• Тогда $q = n + s - 2\alpha'(G) \geq n + s - n + u(\delta-1) + 2(k+1) = u(\delta-1) + 2(k+1) + s$. (2)

- Из (1) и (2) следует

$$a \le \frac{s\delta - q}{\delta - 1} \le \frac{s\delta - u(\delta-1) - 2(k+1) - s}{\delta - 1} = s - u - \frac{2(k+1)}{\delta - 1}.$$

- Так как $a \in \mathbb{N}_0$, получаем $$0 \le a \le s - u - 1. \qquad (3)$$
- Воспользуемся неравенством (2) из доказательства Теоремы 3, подставив в него $\delta^* = \delta + 1$ (так как $\delta$ нечетно), и продолжим цепочку неравенств с учетом неравенства (2) на $q$ и выражения для $n$ через $u$, $k$ и $r$:

$$a(\delta+1) \ge q(\delta+2) + s - n \ge$$
$$(u(\delta-1)+2(k+1)+s)(\delta+2)+s-(u(\delta+1)^2+(2k+1)(\delta+2)+r) =$$
$$(s-u)(\delta+3)+\delta+2-r \qquad (4).$$

- Выразим $r$ из (4) и воспользуемся неравенством (3):

$$r \ge (s-u)(\delta+3) - a(\delta+1) + \delta + 2 \ge$$
$$(s-u)(\delta+3) - (s-u-1)(\delta+1) + \delta + 2 =$$
$$= 2(s-u-1) + 2 + \delta + 1 + \delta + 2 \ge 2\delta + 5,$$

противоречие с $r \le 2\delta + 3$ (из определения). Оценка доказана!

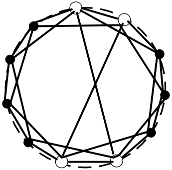
$\leq$.

## Граф $L_{p,d}$.

• Сначала для любых нечетных $p, d$ таких, что $p > d$ и $p > \delta$ построим граф $L_{p,d}$ на $p$ вершинах, в котором будет $d$ вершин степени $\delta - 1$ и $p - d$ вершин степени $\delta$.

• Пусть $V(L_{p,d}) = Z_p$, расставим вершины по кругу. Сначала соединим пары вершин $i \neq j$ с $i - j \in \{1, \dots, \frac{\delta-1}{2}\}$. (Каждая вершина будет соединена с ближайшими $\frac{\delta-1}{2}$ слева и справа по кругу.)

• Для каждой вершины $x \in \{1, \dots \frac{p-d}{2}\}$ дополнительно проведем ребро, соединяющее $x$ с $x + \frac{p-1}{2}$.



$L_{11,7}$
$\delta = 5$

## Граф $M$.

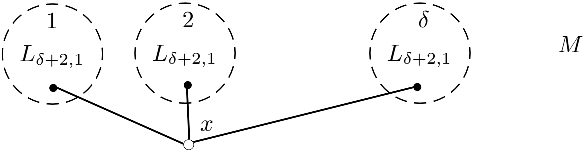
• Граф $M$ состоит из $\delta$ непересекающихся копий графа $L_{\delta+2,1}$ и еще одной вершины $x$.

• Каждый $L_{\delta+2,1}$ имеет ровно одну вершину степени $\delta - 1$. Все эти вершины соединим с $x$, получится $\delta$-регулярный граф $M$.

• $v(M) = \delta(\delta + 2) + 1 = (\delta + 1)^2$.

• Максимальное паросочетание внутри каждой копии $L_{\delta+2,1}$ оставляет непокрытую вершину, не более чем одну из этих $\delta$ вершин можно покрыть ребром из $x$.

• Следовательно, $\mathrm{def}(M) \geq \delta - 1$ и $\alpha'(M) = \frac{v(M) - \mathrm{def}(M)}{2} \leq \frac{(\delta+1)^2 - (\delta-1)}{2}$ (на самом деле имеет место равенство).



## Граф $N$.

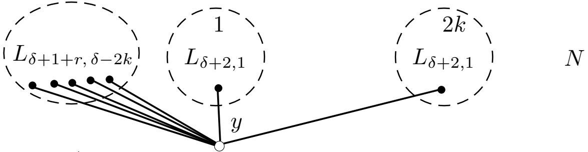
• Граф $N$ состоит из графа $L_{\delta+1+r,\,\delta-2k}$, $2k$ копий графа $L_{\delta+2,1}$ и еще одной вершины $y$.

• Каждый $L_{\delta+2,1}$ имеет ровно одну вершину степени $\delta-1$, а $L_{\delta+1+r,\,\delta-2k}$ имеет $\delta-2k$ вершин степени $\delta-1$. Все эти вершины соединим с $y$, получится $\delta$-регулярный граф $N$.

• $v(N)=2k(\delta+1)+(\delta+1+r)+1=(2k+1)(\delta+2)+r$.

• Максимальное паросочетание внутри каждой копии $L_{\delta+2,1}$ и внутри $L_{\delta+1+r,\,\delta-2k}$ оставляет непокрытую вершину, не более чем одну из этих $2k+1$ вершин можно покрыть ребром из $y$.

• Следовательно, $\mathrm{def}(N)\ge 2k$ и $\alpha'(N)=\frac{v(N)-\mathrm{def}(N)}{2}\le\frac{(2k+1)(\delta+2)+r}{2}-k$ (на самом деле имеет место равенство).



## Граф $G_n$.

- Итак, $n = u(\delta+1)^2 + (2k+1)(\delta+2) + r$, где $0 \le 2k < \delta$ и $r \le 2\delta+3$.
- Граф $G_n$ состоит из графа $N$ и $u$ копий графа $M$. Тогда

$$v(G_n) = uv(M)+v(N) = u(\delta+1)^2+((2k+1)(\delta+2)+r) = n \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'(G_n) = u\alpha'(M) + \alpha'(N) \le \\
u \cdot \frac{(\delta+1)^2 - (\delta-1)}{2} + \frac{(2k+1)(\delta+2)+r}{2} - k = \\
\frac{(u(\delta+1)^2 + (2k+1)(\delta+2)+r) - u(\delta-1)}{2} - k = \\
\frac{n-u(\delta-1)}{2} - k = m_0(n,\delta).
\end{aligned}$$

- Следовательно, $m(n,\delta,\delta) \le m_0(n,\delta)$. $\square$

## Бинд и размер максимального паросочетания

• Напомним, что $\mathrm{N}'_G(S) := \cup_{x\in S}\mathrm{N}_G(x)$ (для $S \subset V(G)$), а

$$\mathrm{bind}(G) = \min_{S\subseteq V(G),\ S\neq\varnothing,\ \mathrm{N}'_G(S)\neq V(G)} \frac{|\mathrm{N}'_G(S)|}{|S|}.$$

• В Теореме 1.6 доказано, что граф $G$ с четным числом вершин и $\mathrm{bind}(G) \geq \frac{4}{3}$ имеет совершенное паросочетание. Теперь мы оценим размер максимального паросочетания через бинд.

### Теорема 7

**(D. R. Woodall, 1973.)** *Пусть $G$ — граф с $v(G) = n$ и $\mathrm{bind}(G) \geq c$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) $\alpha'(G) \geq \frac{nc}{c+1}$ *при* $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$;

2) $\alpha'(G) \geq \frac{n}{3}$ *при* $\frac{1}{2} \leq c \leq 1$;

3) $\alpha'(G) \geq \frac{n(3c-2)}{3c} - \frac{2c-2}{c}$ *при* $1 \leq c \leq \frac{4}{3}$.

• Все эти оценки точные.

Доказательство. • По формуле Бержа, $\alpha'(G) = \frac{1}{2}(n - \mathrm{def}(G))$, где $\mathrm{def}(G) = \max\limits_{S\subset V(G)}(o(G-S) - |S|)$.

1) • Достаточно доказать, что для любого $S \subset V(G)$

$\frac{1}{2}(n - o(G-S) + |S|) \ge \frac{nc}{c+1} \iff o(G-S) \le |S| + \frac{n(1-c)}{1+c}$ (1).

• Пусть $x$ — количество изолированных вершин в $G - S$, а $X$ — их множество. Пусть $|S| = s$.

• Если $x > 0$, то $\mathrm{N}'_G(X) \ne V(G)$ и по определению бинда

$s = |S| \ge |N'_G(X)| \ge c|X| = cx \iff x \le \frac{s}{c}$. (2)

• Если $x > 0$, то по определению бинда

$n - x \ge |\mathrm{N}'_G(V(G) \setminus S)| \ge c(n-s) \iff x \le cs + (1-c)n$. (3)

• При $x = 0$ неравенства (2) и (3) верны, так как справа положительное число.

• Умножим (3) на $\frac{1-2c}{1-c^2} > 0$, умножим (2) на $\frac{2c-c^2}{1-c^2} > 0$ и сложим неравенства:

$$x = \frac{1-2c}{1-c^2}x + \frac{2c-c^2}{1-c^2}x \le$$

$$\frac{c(1-2c)}{1-c^2}s + \frac{(1-c)(1-2c)}{1-c^2}n + \frac{2c-c^2}{c(1-c^2)}s$$

$$= \frac{c-2c^2+2-c}{1-c^2}s + \frac{1-2c}{1+c}n = 2s + \frac{1-2c}{1+c}n. \qquad (4)$$

• Так как остальные $o(G-S)-x$ нечетных компонент $G-S$ имеют хотя бы по 3 вершины,

$|S|+x+3(o(G-S)-x) \le n \iff 3o(G-S) \le n-s+2x \qquad (5).$

• Подставим (4) в (5):

$$3o(G-S) \le n-s+2x \le n-s+4s+2\frac{1-2c}{1+c}n =$$
$$3s+\frac{1+c+2-4c}{1+c}n = 3\left(s+\frac{n(1-c)}{1+c}\right)$$

и (1) доказано.

2) следует из пункта 1 .

3) • Будем применять обозначения $s$, $x$ и $X$. На этот раз достаточно доказать, что для любого $S \subset V(G)$

$$\frac{1}{2}(n - o(G-S) + |S|) \geq \frac{n(3c-2)}{3c} - \frac{2(c-1)}{c} \iff$$

$$o(G-S) \leq s + \frac{n(4-3c)}{3c} + \frac{4(c-1)}{c} \qquad (6).$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $cs \geq n(c-1)$.

• Тогда верно неравенство $\quad x \leq cs + (1-c)n. \quad (3) \quad :$ при $x > 0$ оно доказано в пункте 1, а при $x = 0$ отметим, что правая часть в рассматриваемом случае положительна.

• Продолжим неравенство (5):

$$3o(G-S) \leq n-s+2x \leq n-s+2(cs-(c-1)n) = n(3-2c)+s(2c-1) =$$
$$3\left(s+\frac{n(4-3c)}{3c}\right)-(4-2c)\left(s-\frac{n(c-1)}{c}\right) \leq 3\left(s+\frac{n(4-3c)}{3c}\right)$$

(последний переход верен при $c \leq \frac{4}{3}$ и $sc \geq n(c-1)$).

• В этом случае неравенство (6) доказано.

## Случай 2: $cs \le n(c-1)$.

- В этом случае $cs + (1-c)n \le 0$, а значит, при положительном $x$ неравенство (3) не может быть выполнено. Следовательно, $x = 0$.
- Значит, в каждой нечетной компоненте $G - S$ хотя бы 3 вершины и $$o(G-S) \le \tfrac{1}{3}(n-s). \qquad (7)$$
- Пусть $H$ — объединение всех, кроме одной, нечетных компонент $G - S$, $h := |H|$.
- По определению бинда тогда

$$h + s \ge |\mathrm{N}_G(H)| \ge c|H| = ch \Rightarrow$$

$$s \ge h(c-1) \ge 3(o(G-S)-1)(c-1) \Rightarrow o(G-S) \le \frac{s}{3(c-1)} + 1. \qquad (8)$$

- Умножим (7) на $\frac{4-3c}{c} > 0$, умножим (8) на $\frac{4(c-1)}{c} > 0$ и сложим:

$$o(G-S) = o(G-S)\left(\frac{4-3c}{c} + \frac{4(c-1)}{c}\right) \le$$

$$\frac{4-3c}{3c}(n-s) + \frac{4(c-1)}{c}\left(\frac{s}{3(c-1)} + 1\right) = s + \frac{n(4-3c)}{3c} + \frac{4(c-1)}{c}.$$

- И в этом случае неравенство (6) доказано.

- Оценка пункта 1 Теоремы 7 точна: рассмотрим полный двудольный граф $K_{a,b}$, где $b < a$.
- Тогда $n = v(K_{a,b}) = a + b$, $\quad \alpha'(K_{a,b}) = b = \frac{b}{b+a}n$.

### Лемма 2

*При $b < a$ выполнено $\mathrm{bind}(K_{a,b}) = \frac{b}{a}$.*

Доказательство. • Пусть $X \subset V(K_{a,b})$, $X \neq \varnothing$, $\mathrm{N}'_{K_{a,b}}(X) \neq V(K_{a,b})$. Тогда $X$ — подмножество одной из долей $A$ ($|A| = a$) или $B$ ($|B| = b$).

- Если $X \subset A$, то $N'_{K_{a,b}}(X) = B$ и $\frac{|N'_{K_{a,b}}(X)|}{|X|} \geq \frac{|B|}{|A|} = \frac{b}{a}$.
- Аналогично, если $X \subset B$, то $N'_{K_{a,b}}(X) = A$ и $\frac{|N'_{K_{a,b}}(X)|}{|X|} \geq \frac{a}{b}$.
- Значит, $\mathrm{bind}(K_{a,b}) = \min(\frac{b}{a}, \frac{a}{b}) = \frac{b}{a}$. □

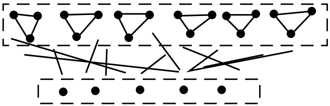
- Таким образом, для графа $K_{a,b}$ достигается равенство в оценке из пункта 1 Теоремы 7 при $c = \frac{b}{a}$.

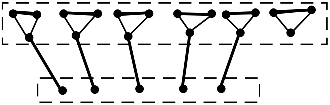
• Оценка пункта 3 Теоремы 7 (а значит, и пункта 2) точна.

• Для $b < a$ построим граф $H_{a,b}$ из полного двудольного графа $K_{3a,b}$ с долями $A$ размера $3a$ и $B$ размера $b$, разбив $A$ на $a$ треугольников (см. рис. слева). Тогда $n := v(H_{a,b}) = 3a + b$.

• Так как $o(H_{a,b} - B) = a$, мы имеем $\mathrm{def}(G) \geq a - b$. Значит, максимальное паросочетание не покрывает хотя бы $a - b$, а такое легко построить: соединим вершины $B$ с $b$ различными треугольниками, в которых возьмем оставшееся ребро, а в остальных $a - b$ треугольниках останется по непокрытой вершине (см. рис. справа).

• Таким образом, $\alpha'(K_{a,b}) = a + b$.





## Лемма 3

*При* $b < a$ *выполнено* $\mathrm{bind}(H_{a,b}) = \frac{3(a-1)+b}{3(a-1)}$.

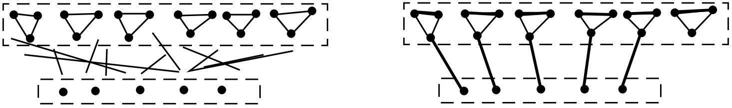
Доказательство. • Пусть $X \subset V(H_{a,b})$, $X \ne \varnothing$, $\mathrm{N}'_{H_{a,b}}(X) \ne V(H_{a,b})$. Тогда $X$ — подмножество одной из долей $A$ или $B$.

• Если $X \subset B$, то $N'_{H_{a,b}}(X) = A$ и $\frac{|N'_{H_{a,b}}(X)|}{|X|} \ge \frac{|A|}{|B|} = \frac{3a}{b}$ (1).

• Пусть $X \subset A$, причем есть $k$ треугольников, в которых $X$ содержит 2 или 3 вершины и $r$ треугольников, в которых $X$ содержет по одной вершине. Очевидно, $k \le a-1$ (иначе $N'_{H_{a,b}}(X) = V(H_{a,b})$), $k + r \le a$.

• Тогда $|\mathrm{N}_G(X)| = 3k + 2r + b$ (в окрестность входит $k$ треугольников полностью и по две вершины из $r$ треугольников) и $|X| \le 3k + r$.

• Следовательно, $\frac{|N'_{H_{a,b}}(X)|}{|X|} \ge \frac{3k+2r+b}{3k+r}$. Разберем два случая



Случай 1: $r = 0$

Тогда $\frac{|N'_{H_{a,b}}(X)|}{|X|} \geq \frac{3k+b}{3k} \geq \frac{3(a-1)+b}{3(a-1)}$ (2).

Случай 2: $r > 0$

•Так как $\frac{3k+2r+b}{3k+r}$ уменьшается при росте $k$, можно считать, что $k = a - r$. Тогда

$$\frac{|N'_{H_{a,b}}(X)|}{|X|} \geq \frac{3k+2(a-k)+b}{2k+(a-k)} = \frac{k+2a+b}{2k+a} \quad (3).$$

• Правая часть (3) убывает при росте $k$, следовательно, минимум достигается при $k = a - 1$:

$$\frac{|N'_{H_{a,b}}(X)|}{|X|} \geq \frac{k+2a+b}{2k+a} \geq \frac{3a-1+b}{3a-2} \quad (4).$$

• Из доканного (неравенства (1),(2) и (4)) ясно, что $\mathrm{bind}(H_{a,b}) = \min\left(\frac{3a}{b}, \frac{3(a-1)+b}{3(a-1)}, \frac{3a-1+b}{3a-2}\right)$.

• Первый вариант явно меньше двух остальных, которые мы и сравним:

$$\frac{3(a-1)+b}{3(a-1)} < \frac{3a-1+b}{3a-2} \iff$$

$$9a^2-6a-9a+6+3ab-2b < 9a^2-9a-3a+3+3ab-3b \iff b+3 < 3a.$$

• Значит, $\mathrm{bind}(H_{a,b}) = \frac{3(a-1)+b}{3(a-1)}$.

- Пусть $c = \frac{3(a-1)+b}{3(a-1)}$. Тогда

$\mathrm{bind}(H_{a,b}) = c$, $v(H_{a,b}) = 3a+b$, $\alpha'(H_{a,b}) = a+b$.

- Проверяем точность оценки:

$$\frac{n(3c-2)}{3c} - \frac{2(c-1)}{c} = \frac{(3a+b)\left(\frac{3(a-1)+b}{a-1} - 2\right)}{\frac{3(a-1)+b}{a-1}} - 2\frac{\frac{b}{3(a-1)}}{\frac{3(a-1)+b}{3(a-1)}} =$$

$$\frac{(3a+b)(a-1+b)-2b}{3(a-1)+b} = \frac{(a+b)(3(a-1)+b)}{3(a-1)+b} =$$

$$a+b = \alpha'(G).$$

Таким образом, для графа $H_{a,b}$ достигается равенство в оценке из пункта 3 Теоремы 7 при $c = \frac{3(a-1)+b}{3(a-1)}$.