Паросочетания и факторы. Глава 6. Структура паросочетаний в двудольных графах

Д. В. Карпов

11.2021

Разбиение Галлаи-Эдмндса для двудольных графов

Теорема 1. **(A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn, 1959.)**
Пусть $G(V_1, V_2, E)$ — двудольный граф, D, A, C — множества из разбиения Галлаи-Эдмондса для G, $A_i = A \cap V_i$, $D_i = D \cap V_i$, $C_i = C \cap V_i$. Тогда:

1) $D = D_1 \cup D_2$ — независимое множество;

2) подграф $G(C_1 \cup C_2)$ имеет 1-фактор, следовательно, $|C_1| = |C_2|$;

3) $\mathrm{N}_G(D_1) = A_2$ и $\mathrm{N}_G(D_2) = A_1$;

4) любое максимальное паросочетание в G состоит из совершенного паросочетания графа $G(C_1 \cup C_2)$ и паросочетания, в котором A_1 покрыто ребрами с концами в D_2, а A_2 покрыто ребрами с концами в D_1;

5) в подграфах $G(A_1 \cup D_2)$ и $G(A_2 \cup D_1)$ доли A_1 и A_2 соответственно имеют запас (в условии Холла);

6) если T — минимальное вершинное покрытие G, то $A \subset T \subset A \cup C$;

7) $C_1 \cup A$ и $C_2 \cup A$ — минимальные вершинные покрытия, а пересечение всех минимальных вершинных покрытий равно A.

Доказательство. 1) • По Теореме Галлаи-Эдмондса (Теореме 1.3), каждая компонента $G(D)$ — фактор-критический граф.

• Однако, фактор-критический граф $H(U_1, U_2)$ на более чем одной вершине не может быть двудольным (если $|U_1| \geq |U_2|$, то удаление вершины из доли U_2 дает нам граф без 1-фактора).

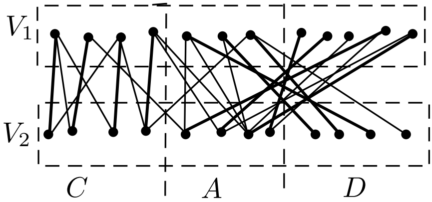
2) следует из пункта 1 Теоремы 1.3.

3) следует из определения A и D (учитываем двудольность G).

4) следует из пункта 3 Теоремы 1.3 и пункта 1 этой теоремы.

5) • Так как D независимое, двудольный граф D_G из Следствия 1.2 — это в точности граф из двух компонент $G(A_1 \cup D_2)$ и $G(A_2 \cup D_1)$.

• По Следствию 1.2 доля A имеет запас в D_G, а значит, в каждой его компоненте имеет запас соответствующая доля A_i.



6) • Предположим, что $A' = A_1 \setminus T \neq \varnothing$. Пусть $D' = \mathrm{N}_G(A') \cap D_2$. Тогда $D' \subset T$.

• По пункту 5 мы имеем $|D'| > |A'|$. Очевидно, $D' \subset T$.

• Множество $T' = (T \setminus D') \cup A'$ — Тоже вершинное покрытие (вершины из $D' \subset D_2$ смежны в G только с $A_1 \subset T'$, а ребра, инцидентные другим вершинам остались покрыты как раньше).

• Однако, $|T'| < |T|$, противоречие с минимальностью T. Значит, $T \supset A_1$ и аналогично $T \supset A_2$.

• Пусть $D^* = D_1 \cap T \neq \varnothing$. Так как D_1 смежно в G только с A_2, а $A_2 \subset T$, множество $T \setminus D^*$ также является вершинным покрытием, противоречие с минимальностью T.

7) По пункту 4, $\alpha'(G) = |A_1| + |A_2| + |C_1|$. По определениям и пункту 1, множество $A_1 \cup A_2 \cup C_1$ — вершинное покрытие.

• По Теореме Кенига $\alpha'(G) = \beta(G)$ для двудольного графа, а значит, $A_1 \cup A_2 \cup C_1$ — минимальное вершинное покрытие. Аналогично для $A_1 \cup A_2 \cup C_2$.

• Из пункта 6 и доказанного выше следует, что пересечение всех минимальных вершинных покрытий G — это A. $\square$

Элементарные графы

Определение

Пусть G — граф (не обязательно двудольный).

• Ребро $e \in E(G)$ — *допустимое*, если существует совершенное паросочетание графа G, содержащее e. Иначе ребро e — *запрещенное*.

• Граф G — *элементарный*, если его допустимые ребра образуют связный остовный подграф G.

Теорема 2

(G. Hetyei, 1964.) *Для двудольного графа $G(V_1, V_2, E)$ следующие условия эквивалентны.*

1°. *G элементарный.*

2°. *G имеет в точности два минимальных вершинных покрытия — V_1 и V_2.*

3°. *$|V_1| = |V_2|$ и для любого непустого $X \subsetneq V_1$ выполнено $|\mathrm{N}_G(X)| \geq |X| + 1$.*

4°. *Либо $G = K_2$, либо $v(G) \geq 4$ и для любых $a \in V_1$, $b \in V_2$ граф $G - a - b$ имеет 1-фактор.*

5°. *G связен и все ребра G допустимы.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2^\circ$. • Пусть G имеет минимальное вершинное покрытие K, причем $K_1 = K \cap V_1 \neq \varnothing$ и $K_2 = K \cap V_2 \neq \varnothing$.

• Предположим, что ребро ab (где $a \in K_1$, $b \in K_2$) принадлежит совершенному паросочетанию M.

• Тогда M соединяет $V_1 \setminus K_1$ с $K_2 \setminus \{b\}$ и $V_2 \setminus K_2$ с $K_1 \setminus \{a\}$.

• Следовательно, $|V_1 \setminus K_1| < |K_2|$ и $|V_2 \setminus K_2| < |K_1|$.

• Тогда $|V_1| = |V_1 \setminus K_1| + |K_1| < |K_2| + |K_1| = |K|$. Однако, V_1 — покрытие, противоречие с минимальностью K.

• Следовательно, все ребра графа $G(K)$ запрещенные (обозначим их множество E_k).

• Но тогда граф на допустимых ребрах G — подграф $G - E_K$, а этот граф несвязен: удаление E_K отделяет друг от друга K_1 и K_2. Противоречие.

• Остается лишь добавить, что $|V_1| = |V_2|$, так как граф G имеет 1-фактор. Значит, V_1 и V_2 — два минимальных вершинных покрытия.

$2 \Rightarrow 3^\circ$. • $|V_1| = |V_2|$, так как оба эти множества — минимальные вершинные покрытия.

• Предположим, что существует такое непустое $X \subset V_1$, что $|\mathrm{N}_G(X)| \le |X|$.

• Очевидно, $K = (V_1 \setminus X) \cup \mathrm{N}_G(X)$ — вершинное покрытие, причем минимальное (так как $|K| = |V_1 \setminus X| + |\mathrm{N}_G(X)| \le |V_1| - |X| + |X| = |V_1|$).

• В частности, $|K| = |X_1| \Rightarrow |N_G(X)| = |X| > 0$.

• Тогда $K \cap V_1 = V_1 \setminus X \ne \varnothing$ и $K \cap V_2 = N_G(X) \ne \varnothing$, противоречие.

$3 \Rightarrow 4^\circ$. • Пусть $G \ne K_2$. Из $|V_1| = |V_2|$ следует, что $v(G) \ge 4$.

• Пусть $a \in V_1$, $b \in V_2$ и $H = G - a - b$.

• Тогда для любого множества $U \subset V_1 \setminus \{a\}$ мы имеем
$|\mathrm{N}_H(U) \cup \{b\}| \ge |\mathrm{N}_G(U \cup \{a\}) \ge |U \cap \{a\}| + 1$,
откуда следует, что $|\mathrm{N}_H(U)| \ge |U|$.

• По Теореме Холла в графе H существует паросочетание, покрывающее долю $V_1 \setminus \{a\}$, которое, очевидно, будет совершенным.

$4 \Rightarrow 5^\circ$. • Если $G = K_2$, утверждение очевидно. Далее пусть $v(G) \geq 4$.

• Из условия 4° понятно, что граф G не имеет изолированных вершин.

• Пусть G несвязен, а H — компонента G с долями $U_1 = V(H) \cap V_1$ и $U_2 = V(H) \cap V_2$,

• НУО $|U_1| \leq |U_2|$. Ясно, что $U_1 \neq \varnothing$ (иначе G_1 состоит из изолированной вершины из V_2, что невозможно.

• Если $V_2 \setminus U_2 = \varnothing$, то все остальные компоненты G — изолированные вершины из $V_1 \setminus U_1$, что противоречит условию 4°. Значит, $V_2 \setminus U_2 \neq \varnothing$.

• Пусть $a \in U_1$ и $b \in V_2 \setminus U_2$. Тогда $|U_1 \setminus \{a\}| < |U_2|$, а значит, граф $G_1 - a$ не имеет 1-фактора. Тогда и граф $G - a - b$ не имеет 1-фактора, противоречие.

• Так как для любого ребра $xy \in E(G)$ граф $G - x - y$ имеет совершенное паросочетание, все ребра графа G допустимые.

$5 \Rightarrow 1^\circ$. Очевидно.

Двудольное разбиение на уши

- Начнем с цикла четной длины C_0, положим $G_0 = C_0$.
- Пусть построен двудольный граф G_k, где $k \in \mathrm{N}_0$. Соединим две вершины разного цвета простым *ухом* — путем нечетной длины P_{k+1}, где $\mathrm{Int}(P_{k+1}) \cap V(G_k) = \varnothing$ — и положим $G_{k+1} := G_k \cup P_{k+1}$.
- В результате получится граф $G_n = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n$, а указанное его представление — двудольное разбиение на уши.
- Двудольное разбиение графа на уши может быть неединственным, но количество ушей n определется однозначно — это $e(G) - v(G)$.

Определение

Назовем подграф H графа G *красивым*, если $v(H) \neq 0$ и $G - V(H)$ имеет совершенное паросочетание.

- Если $G = G_n = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n$ — двудольное разложение на уши двудольного графа, то каждый подграф G_i (где $i \in \{0, \dots, n-1\}$) — красивый ($G - V(G_i)$ разбивается на уши, все внутренние вершины которых разбиваются на пары).

Лемма 1

Если G — элементарный двудольный граф, а H — его красивый подграф, то существует разбиение $G = H \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$, где $P_1, \dots, P_k$ — уши.

Доказательство. • Пусть M — совершенное паросочетание графа $G - V(H)$.

• Построим по индукции такой подграф $G_k = H \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$, где $P_1, \dots, P_k$ — уши, а все вершины $G - V(G_k)$ разбиваются на пары соединенных ребрами из M.

• База $k = 0$: подойдет $G_0 = H$.

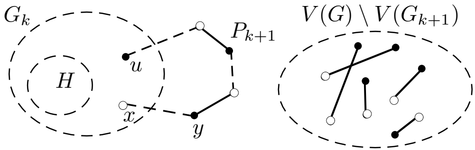
Переход $k \to k+1$. • Пусть построен подграф $G_k = H \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$. Если $G_k = G$, утверждение доказано.

• Пусть $G_k \neq G$. Тогда существует ребро $e = xy \in E(G) \setminus E(G_k)$, где $x \in V(G_k)$ (напомним, что элементарный граф G связен).

• Рассмотрим 1-фактор N графа G, содержащий e.

• Пусть M' — 1-фактор, индуцированный M в $G - V(G_k)$.

- Компонента P_{k+1} графа $G(M' \triangle N)$, содержащая вершину x — путь с началом в x (так как x непокрыта M', $d_H(x) = 1$.
- Второй конец P_{k+1} (скажем, u) должен лежать в $V(G_k)$ (так как каждая вершина из $V(G) \setminus V(G_k)$ покрыта обоими паросочтаниями M' и N, значит не может иметь степень 1 в H).
- Так как M' не покрывает вершину $u \in V(G_k)$, инцидентное u ребро пути P_{k+1} принадлежит N', то есть, $e(P_{k+1}) \not\vdots\, 2$ (см. рисунок).
- Следовательно, x и u принадлежат разным долям G_k и очередное ухо — путь P_{k+1} — построено.
- Все вершины из $V(P_{k+1}) \setminus \{x, u\}$ по построению разбиваются на пары соединенных ребрами M.
- Следовательно, вершины из $V(G) \setminus V(G_{k+1}) = V(G) \setminus (V(G_k) \cup V(P_{k+1}))$ также разбит на пары соединенных паросочетанием M. □



Теорема 3

(G. Hetyei, 1964.) *Элементарные двудольные графы с более чем 2 вершинами — в точности те, что имеют двудольное разбиение на уши.*

Доказательство. $\Leftarrow$. • Пусть $G = G_n = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n$ — двудольное разбиение на уши.

• Докажем индукцией по k, что все ребра графа G_k допустимые.

База $k = 0$: граф G_0 — четный цикл, для которого это очевидно.

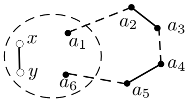
Переход $k-1 \to k$. • $G_k = G_{k-1} + P_k$, пусть $P_k = a_1a_2\dots a_{2m}$ — нечетный путь. Тогда $a_1, a_{2m} \in V(G_{k-1})$.

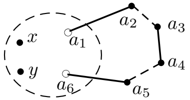
• Пусть $xy \in E(G_{k-1})$ — произвольное ребро. По пункту 4° Теоремы 2 граф $G_{k-1} - x - y$ имеет 1-фактор, который можно дополнить ребрами xy, a_2a_3, …, $a_{2m-2}a_{2m-1}$ до 1-фактора графа G_k (см. рис. слева).

• Таким образом, все ребра графа G_{k-1}, а также указанные выше ребра пути P_k допустимые.

• Остается доказать, что оставшиеся ребра пути P_k допустимые.

• По пункту 4° Теоремы 1 граф $G_k - a_1 - a_{2m}$ имеет 1-фактор. Добавим к нему ребра a_1a_2, a_3a_4, …, $a_{2m-1}a_{2m}$ и получим 1-фактор графа G_k (см. рис. справа).





$\Rightarrow$. • Пусть G — элементарный двудольный граф.

• Граф G имеет два разных 1-фактора M и N (например, можно взять 1-факторы, содержащие два смежных ребра). Граф $G(M \triangle N)$ очевидно, имеет четный цикл, который обозначим C_0, положим $G_0 = C_0$.

• Очевидно, подграф C_0 красивый (не вошедшие в него вершины разбиты на пары соединенных ребрами M).

• По Лемме 1, существует разбиение на уши $G = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$. $\square$

Следствие 2

Если H — элементарный двудольный граф, $G = H \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$, где $P_1, \dots, P_k$ — уши, то при $i \le k$ граф $G_i = H \cup P_1 \cup \dots \cup P_i$ — элементарный двудольный.

Доказательство. Следует из доказательства $\Leftarrow$ Теоремы 3. $\square$

Следствие 3

Если G — элементарный двудольный граф, а H — его красивый элементарный подграф, то существует двудольное разбиение на уши $G = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$, для которого $H = G_\ell$ (где $\ell = e(H) - v(H)$).

Доказательство. Сначала разобьем на уши $H = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_\ell$ (выше показано, что $\ell = e(H) - v(H)$).

• Потом по Лемме 1 дополним это разбиение до разбиения на уши всего графа G:
$G = H \cup P_{\ell+1} \cup \dots \cup P_n = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n$.

• Тогда $H = G_\ell$. □

Следствие 4

Если G — элементарный двудольный граф, а $e \in E(G)$, то существует двудольное разбиение на уши $G = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$, для которого $e \in E(C_0)$.

Доказательство. Достаточно построить красивый четный цикл C_0, содержащий e.

• Для этого возьмем e и смежное с ним ребро f и рассмотрим содержащие их 1-факторы графа G — скажем, M и N.

• Тогда содержащая e компонента C_0 графа $G(M \triangle N)$ — это четный цикл.

• Цикл C_0 — красивый подграф G, так как множество $V(G) \setminus V(C_0)$ разбито на пары вершин, соединенных рёбрами M. □

Разбиение двудольного графа на элементарные

- Эту конструкцию придумали Dulmage и Mendelsohn в 1958-1959 годах.
- Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, имеющий 1-фактор. Пусть подграф H графа G на допустимых ребрах имеет компоненты $L_1, \dots, L_k$ $(k \in \mathbb{N})$.
- Каждый граф L_i — элементарный. Пусть $S_i = V(L_i) \cap V_1$ и $T_i = V(L_i) \cap V_2$.

• Построим двудольный граф $G_0(S, T)$, где $S = \{S_1, \dots, S_k\}$, $T = \{T_1, \dots, T_k\}$ и $S_i T_j \in E(G_0) \iff e_G(S_i, T_j) > 0$.

Лемма 2

Двудольный граф G_0 имеет единственный 1-фактор $M = \{S_1 T_1, \dots, S_k T_k\}$.

Доказательство. • Пусть в G_0 есть другое паросочетание $N' = \{f'_1, \dots, f'_k\}$.

• Каждому ребру $f'_m = S_i T_j$ поставим в соответствие ребро $f_m \in E_G(S_i, T_j)$.

• Пусть $N = \{f_1, \dots, f_k\}$ и $H' = H - V(G(N))$. Хотя бы одно из ребер N соединяет разные компоненты H, а значит, является запрещенным.

• Из каждой компоненты L_i графа H при построении H' удалено ровно по вершине из разных долей: одна из S_i, другая из T_i. Обозначим полученную в результате компоненту через $L'_i(S'_i, T'_i)$.

• Если $v(L'_i) > 0$, то L'_i по Теореме 2 имеет 1-фактор. Значит, и H' имеет 1-фактор.

• Следовательно, G имеет 1-фактор, содержащий N. Однако, это невозможно, так как в N есть запрещенные рёбра.

Лемма 3

Пусть $F(W_1, W_2)$ — двудольный граф с единственным 1-фактором $M = \{s_1t_1, \dots, s_kt_k\}$. Тогда можно занумеровать вершины $W_1 = \{s_1, \dots, s_k\}$ и $W_2 = \{t_1, \dots, t_k\}$ так, что $s_it_j \in E(F) \Rightarrow i \le j$.

Доказательство. • Построим орграф D с $V(D) = \{d_1, \dots, d_k\}$, где $d_id_j \in A(D)$, если и только если $i \ne j$ и существует ребро s_it_j.

• Пусть D имеет цикл Z, НУО $Z = d_1d_2\dots d_\ell$. Тогда $s_1t_2, s_2t_3, \dots, s_\ell t_1 \in E(F)$.

• Заменив в M ребра $s_1t_1, \dots, s_\ell t_\ell$ на $s_1t_2, s_2t_3, \dots, s_\ell t_1$, мы получим другой 1-фактор N в графе F, противоречие.

• Значит, орграф D ацикличен. Тогда его вершины можно занумеровать так, чтобы $d_id_j \in A(D) \Rightarrow i < j$.

• Соответствующая нумерация вершин F нам подойдет. □

Следствие 5

Компоненты $L_1, \dots, L_k$ графа H можно занумеровать так, что $E_G(S_i, T_j) = \varnothing$ при $i > j$.

Доказательство. • Достаточно применить Лемму 3 к графу G_0. □

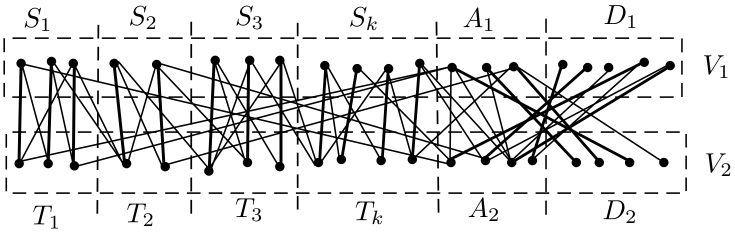
• Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, D, A, C — его разложение Эдмондса-Галлаи (см. Теорему 1).

• Граф $G(C_1, C_2)$ имеет 1-фактор, применим к нему разработанную технику.

• Пусть $L_1, \dots, L_k$ — компоненты подграфа $G(C_1, C_2)$, занумерованные так, что $L_i \cap C_1 = S_i$, $L_i \cap C_2 = T_i$ и $E_G(S_i, T_j) = \varnothing$ при $i > j$.

• По пункту 7 Теоремы 1, $A_1 \cup A_2 \cup C_1 = A_1 \cup A_2 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$ и $A_1 \cup A_2 \cup C_2 = A_1 \cup A_2 \cup T_1 \cup \dots \cup T_k$ — минимальные вершинные покрытия.

• По построению, тогда для любого $\ell \in \{1, \dots, k\}$ множество $A_1 \cup A_2 \cup S_1 \cup \dots \cup S_\ell \cup T_{\ell+1} \cup \dots \cup T_k$ — также минимальное вершинное покрытие.



Минимальные элементарные двудольные графы

Определение

Элементарный двудольный граф G — минимальный, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является элементарным.

Теорема 4

Если G — минимальный элементарный двудольный граф, а H — его красивый элементарный подграф, то H — минимальный элементарный двудольный граф.

Доказательство. • По Лемме 1 существует двудольное разбиение $G = H \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$, где $P_1, \dots, P_k$ — уши.

• Мы докажем, что каждый граф $G_i = H \cup P_1 \cup \dots \cup P_i$ (включая $G_0 = H$) — минимальный (по Теореме 3 все они — элементарные) обратной индукцией по i. База $i = k$ очевидна.

Переход $i \to i - 1$. • Предположим противное, пусть существует такое ребро $e \in E(G_{i-1})$, что $G_{i-1} - e$ — элементарный двудольный.

• Но тогда по Следствию 2 и граф $G_i - e = (G_{i-1} - e) \cup P_i$ — элементарный, что противоречит минимальности G_i. □

Лемма 4

Пусть $ab \in E(G)$, а граф G' получен из графа G заменой ребра ab на нечетный ab-путь P, все внутренние вершины которого — новые и имеют степень 2. Тогда G — элементарный двудольный граф, если и только если G' — элементарный двудольный граф.

Доказательство. • Очевидно G двудолен $\iff$ G' двудолен.

• Пусть $P = a_1a_2\dots a_{2m}$, где $a = a_1$ и $b = a_{2m}$.

• Построим биекцию $M \to M'$ между 1-факторами G и G' соответственно.

• Если $M \not\ni a_1a_{2m}$, то $M' := M \cup \{a_2a_3, \dots, a_{2m-2}a_{2m-1}\}$ (назовем такие M и M' 1-факторами 1 типа).

• Если $M \ni a_1a_{2m}$, то $M' := \big(M \setminus \{a_1a_{2m}\}\big) \cup \{a_1a_2, \dots, a_{2m-1}a_{2m}\}$ (назовем такие M и M' 1-факторами 2 типа).

• Отметим, что любой 1-фактор M' графа G' содержит либо все нечетные ребра пути P (тогда M' включает в себя 1-фактор графа $G - \{a_1, a_{2m}\}$ и является 1-фактором 2 типа), либо все четные ребра пути P (тогда M' включает в себя 1-фактор графа G и является 1-фактором 1 типа).

$\Rightarrow$. • Если G элементарен, то все его ребра допустимые. Из построенного выше соответствия 1-факторов видно, что все ребра из $E(G - a_1a_{2m})$ — допустимые в G'.

• По теореме 2 граф $G - a_1a_{2m}$ имеет 1-фактор M, который является 1-фактором 1 типа графа G. Значит, ребра $a_2a_3, \dots, a_{2m-2}a_{2m-1} \in M'$ допустимы в G'.

• Так как ребро a_1a_{2m} допустимо в графе G, существует и 1-фактор M 2 типа в графе графа G. Следовательно, ребра $a_1a_2, \dots, a_{2m-1}a_{2m} \in M'$ допустимы в G'.

$\Leftarrow$. • Если G' элементарен, то все его ребра допустимые. Из построенного выше соответствия 1-факторов видно, что все ребра из $E(G) \setminus E(P)$ — допустимые в G.

• Так как ребро a_1a_2 допустимо в графе G', существует 1-фактор M' 2 типа. Следовательно, ребро $a_1a_{2m} \in M$ допустимо в G. $\square$

Следствие 6

Пусть G граф, $W \subset V(G)$ таково, что все вершины из $V(G) \setminus W$ имеют степень 2 в G. Пусть G' получен из G несколькими операциями замены пути P с концами в W на новый путь P' такой же четности (все внутренние вершины обоих путей имеют степень 2 в соответствующих графах). Тогда G — элементарный двудольный граф, если и только если G' — элементарный двудольный граф.

Доказательство. Каждую операцию замены пути на другой путь такой же четности можно провести с помощью замены нечетного пути на ребро. □

Теорема 5

Пусть G — минимальный элементарный двудольный граф, $G \neq C_4$. Тогда G не содержит подграфа C_4 (это цикл длины 4).

Доказательство. • Достаточно рассмотреть случай $v(G) \geq 4$.

• Предположим, что G имеет собственный подграф C_4.

• Пусть $G = C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$ — двудольное разбиение на уши и m — минимальный такой индекс, что G_m имеет подграф C_4.

• Рассмотрим два случая.

Случай 1: $m = 0$.

• Тогда $C_0 = C_4$ и P_1 соединяет две разноцветные вершины a, b, которые в цикле C_4 обязательно соединены ребром.

• Граф $G_1 - ab$ — цикл четной длины, а значит, элементарен.

• Но G_1 — красивый подграф G, а значит, G_1 минимален по Теореме 4. Противоречие.

Случай 2: $m > 0$.

• Тогда G_{m-1} не содержит C_4, а $G_m = G_{m-1} + P_m$ содержит. Значит, C_4 содержит P_m (так как все внутренние вершины P_m имеют степень 2).

• Ввиду минимальности G_m, путь P_m не может иметь длину 1. Значит, он имеет длину 3.

• Тогда P_m соединяет вершины $a, b \in V(G_{m-1})$, где $ab \in E(G_{m-1})$ — четвертое ребро C_4.

• Граф $G_m - ab$ — элементарный двудольный по Лемме 4 (он получен из G_m заменой ребра ab на нечетный ab-путь P_m). Противоречие с минимальностью G_m. $\square$

Следствие 7

Пусть G — минимальный элементарный двудольный граф с $v(G) \geq 6$. Тогда $e(G) \leq \frac{3v(G)-6}{2}$.

Доказательство. • Пусть $G = C_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_k$, а $G_i = C_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$.

• Докажем по индукции, что $e(G_i) \leq \frac{3v(G_i)-6}{2}$.

База: $G_0 = C_0$ — четный цикл длины не менее 6, для него утверждение верно.

Переход $i-1 \to i$. • $G_i = G_{i-1} + P_i$, пусть $e(P_i) = s$, тогда $s \geq 3$, а $v(G_i) - v(G_{i-1}) = s - 1$ (добавляется $s-1$ внутренних вершин пути P_i).

• Тогда $\frac{3(s-1)}{2} \geq s$ и доказываемое утверждение верно. □