

В. И. АРНОЛЬД

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ



В. И. АРНОЛЬД

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

531
А 84
УДК 531

Математические методы классической механики,
Арнольд В. И., М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974, 432 стр.

Книга отличается от имеющихся учебников механики большей, чем это обычно принято, связью с современной математикой. Особенное внимание обращено на взаимно обогащающее взаимодействие идей механики и геометрии многообразий.

В соответствии с таким подходом центральное место в книге занимают не вычисления, а геометрические понятия (фазовые пространства и потоки, векторные поля, группы Ли) и их приложения в конкретных механических ситуациях (теория колебаний, механика твердого тела, гамильтонов формализм). Много внимания уделено качественным методам изучения движения в целом, в том числе асимптотическим (теория возмущений, методы осреднения, адиабатические инварианты).

Книга рассчитана на студентов университетов и вузов с расширенной программой по математике, а также на преподавателей и научных работников.

А $\frac{20302-150}{053(02)-74}$ 141-74

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	Б
-----------------------	---

ЧАСТЬ I

НЬЮТОНОВА МЕХАНИКА

Глава 1. Экспериментальные факты	7
§ 1. Принципы относительности и детерминированности	7
§ 2. Галилеева группа и уравнения Ньютона	8
§ 3. Примеры механических систем	14
Глава 2. Исследование уравнений движения	17
§ 4. Системы с одной степенью свободы	17
§ 5. Системы с двумя степенями свободы	22
§ 6. Потенциальное силовое поле	26
§ 7. Кинетический момент	28
§ 8. Исследование движения в центральном поле	31
§ 9. Движение точки в трехмерном пространстве	38
§ 10. Движение системы n точек	39
§ 11. Соображения подобия	45

ЧАСТЬ II

ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА

Глава 3. Вариационный принцип	47
§ 12. Вариационное исчисление	48
§ 13. Уравнения Лагранжа	51
§ 14. Преобразование Лежандра	54
§ 15. Уравнения Гамильтона	57
§ 16. Теорема Лиувилля	60
Глава 4. Лагранжева механика на многообразиях	65
§ 17. Голономные связи	65
§ 18. Дифференцируемые многообразия	67
§ 19. Лагранжева динамическая система	72
§ 20. Теорема Э. Нётер	76
§ 21. Принцип Даламбера	79
Глава 5. Колебания	85
§ 22. Линеаризация	85
§ 23. Малые колебания	89
§ 24. О поведении собственных частот	94
§ 25. Параметрический резонанс	98
Глава 6. Твердое тело	106
§ 26. Движение в подвижной системе координат	106
§ 27. Силы инерции. Сила Кориолиса	111
§ 28. Твердое тело	114
§ 29. Уравнения Эйлера. Описание движения по Пуансо	122
§ 30. Волчок Лагранжа	127
§ 31. Спящий волчок и быстрый волчок	132

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Глава 7. Дифференциальные формы	137
§ 32. Внешние формы	138
§ 33. Внешнее умножение	143
§ 34. Дифференциальные формы	147
§ 35. Интегрирование дифференциальных форм	153
§ 36. Внешнее дифференцирование	159
Глава 8. Симплектические многообразия	170
§ 37. Симплектическая структура на многообразии	170
§ 38. Гамильтоновы фазовые потоки и их интегральные инварианты	172
§ 39. Алгебра Ли векторных полей	176
§ 40. Алгебра Ли функций Гамильтона	182
§ 41. Симплектическая геометрия	186
§ 42. Параметрический резонанс в системах со многими степенями свободы	192
§ 43. Симплектический атлас	196
Глава 9. Канонический формализм	200
§ 44. Интегральный инвариант Пуанкаре—Картана	200
§ 45. Следствия из теоремы об интегральном инварианте Пуанкаре—Картана	206
§ 46. Принцип Гюйгенса	214
§ 47. Метод Якоби—Гамильтона интегрирования канонических уравнений Гамильтона	222
§ 48. Производящие функции	230
Глава 10. Введение в теорию возмущений	
§ 49. Интегрируемые системы	234
§ 50. Переменные действие—угол	241
§ 51. Усреднение	247
§ 52. Усреднение возмущений	252
Добавление 1. Риманова кривизна	262
Добавление 2. Геодезические левоинвариантных метрик на группах Ли и гидродинамика идеальной жидкости	280
Добавление 3. Симплектическая структура на алгебраических многообразиях	306
Добавление 4. Контактные структуры	312
Добавление 5. Динамические системы с симметрией	335
Добавление 6. Нормальные формы квадратичных гамильтонианов	346
Добавление 7. Нормальные формы гамильтоновых систем вблизи неподвижных точек и замкнутых траекторий	350
Добавление 8. Теория возмущений условно-периодических движений и теорема Колмогорова	365
Добавление 9. Геометрическая теорема Пуанкаре, ее обобщения и приложения	384
Добавление 10. Кратности собственных частот и эллипсоиды, зависящие от параметров	394
Добавление 11. Коротковолновые асимптотики	408
Добавление 12. Лагранжевы особенности	417
Добавление 13. Уравнение Кортвега—де Фриза	424
Предметный указатель	427

ПРЕДИСЛОВИЕ

В классической механике используются весьма разнообразные математические методы и понятия: дифференциальные уравнения и фазовые потоки, гладкие отображения и многообразия, группы и алгебры Ли, симплектическая геометрия и эргодическая теория. Многие современные математические теории возникли из проблем механики и лишь впоследствии приняли тот аксиоматически-абстрактный вид, который так затрудняет их изучение.

Математический аппарат классической механики строится в настоящей книге с самого начала, так что у читателя не предполагается предварительных знаний, выходящих за рамки стандартных курсов анализа (производная, интеграл, дифференциальные уравнения), геометрии (линейное пространство, векторы) и линейной алгебры (линейные операторы, квадратичные формы).

С помощью этого аппарата разбираются все основные вопросы динамики системы, включая теорию колебаний, теорию движения твердого тела и гамильтонов формализм. Автор стремился всюду выявить геометрическую, качественную сторону явлений. В этом отношении книга ближе к курсам теоретической механики для физиков-теоретиков, чем к традиционным курсам теоретической механики, читаемым математикам.

Значительная часть книги посвящена вариационным принципам и аналитической динамике. Характеризуя аналитическую динамику в своих «Лекциях о развитии математики в XIX столетии», Ф. Клейн писал, что «физик для своих задач может извлечь из этих теорий лишь очень немного, а инженер — ничего». Развитие науки в последующие годы решительно опровергло это замечание. Гамильтонов формализм лег в основу квантовой механики и является в настоящее время одним из наиболее часто употребляемых орудий в математическом арсенале физики. После того как было осознано значение симплектической структуры и принципа Гюйгенса для всевозможных задач оптимизации, уравнения Гамильтона стали постоянно использоваться в инженерных расчетах в этой области. С другой стороны, современное развитие небесной механики, связанное с потребностями космических исследований, привело к новому возрождению интереса к методам и задачам аналитической динамики.

Связи классической механики с другими отделами математики и физики многочисленны и разнообразны. «Добавления» в конце книги посвящены некоторым из этих связей. В качестве приложений аппарата классической механики здесь рассматриваются основы римановой геометрии, динамика идеальной жидкости, колмогоровская теория возмущений условно-периодических движений, коротковолновые асимптотики для уравнений математической физики и классификация каустик в геометрической оптике.

Эти добавления рассчитаны на любознательного читателя и не входят в программу обязательного общего курса. Некоторые из них могут составить основу специальных курсов (например, по асимптотическим методам теории нелинейных колебаний или по квазиклассическим асимптотикам). В добавления внесены также ряд сведений справочного характера (например, список нормальных форм квадратичных гамильтонианов). В то время как в основных главах книги автор старался проводить все доказательства как можно подробнее, избегая ссылок на другие источники, добавления состоят в основном из сводок результатов, доказательства же заменены ссылками на литературу.

Основу книги составил полуторарадовой обязательный курс классической механики, читавшийся автором студентам-математикам 3-го и 4-го года обучения на механико-математическом факультете МГУ в 1966—1968 гг.

Автор благодарен И. Г. Петровскому, который настоял на том, чтобы этот курс лекций был прочитан, записан и издан. При подготовке лекций к печати автору оказали большую помощь Л. А. Бунимович, Л. Д. Вайнгортин и В. Л. Новиков, предоставившие свои записки лекций, и особенно Н. Н. Колесников, организовавший ротاپринтное издание (МГУ, 1968). Автор признателен им, а также всем слушателям и коллегам, сообщившим свои замечания о ротاپринтном тексте: многие замечания использованы при подготовке настоящего издания. Автор благодарен М. А. Леонтовичу, предложившему трактовку связей с помощью предельного перехода, а также И. И. Воровичу и В. И. Юдовичу за внимательное рецензирование рукописи.

В. Арнольд

ЧАСТЬ I

НЬЮТОНОВА МЕХАНИКА

Ньютонова механика изучает движение системы материальных точек в трехмерном евклидовом пространстве. В евклидовом пространстве действует шестимерная группа движений пространства. Основные понятия и теоремы ньютоновой механики (даже если они и формулируются в терминах декартовых координат) инвариантны относительно этой группы *).

Ньютонова потенциальная механическая система задается массами точек и потенциальной энергией. Движениям пространства, оставляющим потенциальную энергию неизменной, соответствуют законы сохранения.

Уравнения Ньютона позволяют исследовать до конца ряд важных задач механики, например задачу о движении в центральном поле:

ГЛАВА I

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В этой главе описаны основные экспериментальные факты, лежащие в основе механики: принцип относительности Галилея и дифференциальное уравнение Ньютона. Здесь рассмотрены ограничения на уравнения движения, накладываемые принципом относительности, и приведены простейшие примеры.

§. 1. Принципы относительности и детерминированности

В этом параграфе вводится и обсуждается понятие инерциальной системы координат. Математически точная формулировка утверждений этого параграфа приведена в следующем параграфе.

В основе классической механики лежит ряд экспериментальных фактов **). Перечислим некоторые из них.

А. Пространство и время. Наше пространство трехмерно и евклидово, а время — одномерно.

*) и даже относительно более широкой группы галилеевых преобразований пространства — времени.

**) Все эти «экспериментальные факты» верны лишь приближенно и более точными экспериментами опровергаются. Чтобы избежать громоздких выражений, мы не будем в дальнейшем этого оговаривать и будем говорить о наших математических моделях так, как если бы они точно описывали физические явления.

Б. Принцип относительности Галилея. Существуют системы координат (называемые инерциальными), обладающие следующими двумя свойствами:

1) Все законы природы во все моменты времени одинаковы во всех инерциальных системах координат.

2) Все системы координат, движущиеся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, инерциальны.

Иначе говоря, если система координат, связанная с Землей, инерциальна, то экспериментатор, находящийся в равномерно и прямолинейно движущемся относительно Земли поезде, не может обнаружить движение поезда по опытам, проводящимся целиком внутри вагона.

В действительности система координат, связанная с Землей, инерциальна лишь приближенно. С большей точностью инерциальны системы координат, связанные с Солнцем, со звездами и т. д.

В. Принцип детерминированности Ньютона. Начальное состояние механической системы (совокупность положений и скоростей точек системы в какой-нибудь момент времени) однозначно определяет все ее движение.

Мы не успеваем удивиться этому факту, так как узнаем его очень рано. Можно представить себе мир, в котором для определения будущего системы нужно в начальный момент знать также и ускорения. Опыт показывает, что наш мир не таков.

§ 2. Галилеева группа и уравнения Ньютона

В этом параграфе определяется и исследуется группа галилеевых преобразований пространства — времени. Далее рассматриваются уравнение Ньютона и простейшие ограничения, накладываемые на его правую часть свойствами инвариантности относительно преобразований Галилея *).

А. Обозначения. R означает множество всех вещественных чисел. Через R^n обозначается n -мерное вещественное линейное пространство.

Аффинное n -мерное пространство A^n отличается от R^n тем, что в нем «не фиксировано начало координат». Группа R^n действует в A^n как группа параллельных переносов (рис. 1):

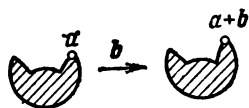


Рис. 1. Параллельный перенос.

$$a \rightarrow a + b \quad (a \in A^n, b \in R^n, a + b \in A^n).$$

[Таким образом, сумма двух точек A^n не определена, а разность определена и есть вектор из R^n .]

Евклидова структура в линейном пространстве R^n — это положительно-определенная билинейная симметрическая форма, назы-

*у Читатель, не испытывающий потребности в математических формулировках утверждений § 1, может пропустить этот параграф.

ваемая скалярным произведением. Скалярное произведение позволяет определить расстояние

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$$

между точками соответствующего *аффинного* пространства A^n .

Аффинное пространство с введенным таким образом расстоянием называется *евклидовым пространством* и обозначается E^n .

Б. Галилеева структура. Галилеева пространственно-временная структура включает следующие три элемента:

1) *Мир* — четырехмерное аффинное*) пространство A^4 . Точки A^4 называются *мировыми точками* или *событиями*. Параллельные переносы мира A^4 образуют линейное пространство R^4 .

2) *Время* — линейное отображение $t: R^4 \rightarrow R$ линейного пространства параллельных переносов мира на вещественную «ось времени». *Промежутком времени* от события $a \in A^4$ до события $b \in A^4$ называется число $t(b - a)$ (рис. 2). Если $t(b - a) = 0$, то события a и b называются *одновременными*.

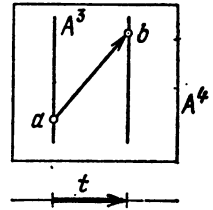


Рис. 2. Интервал времени t .

Множество событий, одновременных друг с другом, образует трехмерное аффинное подпространство в A^4 . Оно называется *пространством одновременных событий* A^3 .

Ядро отображения t составляют параллельные переносы A^4 , переводящие какое-нибудь (и тогда любое) событие в одновременное с ним. Это ядро является трехмерным линейным подпространством R^3 линейного пространства R^4 .

Галилеева структура включает в себя еще один элемент.

3) *Расстояния между одновременными событиями*

$$\rho(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{(a - b, a - b)}, \quad a, b \in A^3,$$

заданное скалярным произведением в пространстве R^3 . Это расстояние превращает каждое пространство одновременных событий в трехмерное евклидово пространство E^3 .

Пространство A^4 , снабженное галилеевой пространственно-временной структурой, называется *галилеевым пространством*.

Можно говорить о двух событиях, происходящих одновременно в разных местах, однако утверждение «два одновременных события $a, b \in A^4$ происходили в одном и том же месте трехмерного пространства» не имеет смысла, пока мы не выбрали систему координат.

Галилеевой группой называется группа всех преобразований галилеева пространства, сохраняющих его структуру. Элементы

*) В древности мир снабжали не аффинной, а линейной структурой (геоцентрическая система + сотворение мира).

этой группы называются *галилеевыми преобразованиями*. Таким образом, галилеевы преобразования являются аффинными преобразованиями A^4 , сохраняющими интервалы времени и расстояния между одновременными событиями.

Пример. Рассмотрим прямое произведение *) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ оси t на трехмерное линейное пространство \mathbb{R}^3 с фиксированной евклидовой структурой. Такое пространство имеет естественную галилееву структуру. Это пространство мы будем называть *координатным галилеевым пространством*.

Приведем три примера галилеевых преобразований этого пространства. Во-первых, *равномерное движение со скоростью v*

$$g_1(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x} + v\mathbf{t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Далее, *сдвиг начала отсчета*

$$g_2(t, \mathbf{x}) = (t + s, \mathbf{x} + \mathbf{s}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Наконец, *поворот осей координат*

$$g_3(t, \mathbf{x}) = (t, G\mathbf{x}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

где $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — ортогональное преобразование.

Задача. Докажите, что *каждое галилеево преобразование пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ можно представить в виде произведения поворота, сдвига и равномерного движения ($g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$) и притом единственным образом* (так что размерность галилеевой группы равна $3 + 4 + 3 = 10$).

Задача. Докажите, что *все галилеевы пространства изоморфны друг другу (**)* и, в частности, изоморфны координатному пространству $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Пусть M — множество. Взаимно однозначное отображение $\varphi_1: M \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ называется *галилеевой системой координат в множестве M* . Система координат φ_2 *равномерно движется* относительно системы координат φ_1 , если $\varphi_1 \cdot \varphi_2^{-1}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ — галилеево преобразование. Галилеевы системы координат φ_1 и φ_2 задают в M одинаковую галилееву структуру.

В. Движение, скорость, ускорение. Движением в \mathbb{R}^N называется дифференцируемое отображение $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ интервала I вещественной оси в \mathbb{R}^N .

Вектором скорости в точке $t_0 \in I$ называется производная

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^N.$$

*) Напомню, что прямое произведение двух множеств A, B есть множество упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$. Прямое произведение двух пространств (линейных, аффинных, евклидовых) имеет структуру пространства того же типа.

***) то есть существует взаимно однозначное отображение одного на другое, сохраняющее галилееву структуру.

Вектором ускорения в точке t_0 называется вторая производная

$$\ddot{x}(t_0) = \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_0}.$$

Мы будем считать, что встречающиеся нам функции непрерывно дифференцируемы нужное число раз. В дальнейшем, если не оговорено противное, под отображениями, функциями и т. п. понимаются дифференцируемые отображения, функции и т. д. Образ отображения $x: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ называется *траекторией* или *кривой* в \mathbb{R}^N .

Задача. Может ли траектория дифференцируемого движения на плоскости иметь нарисованный на рис. 3 вид? Может ли вектор ускорения иметь указанное значение?

Ответ. Да. Нет.

Определим теперь, что такое *механическая система из n точек, движущихся в трехмерном евклидовом пространстве*.

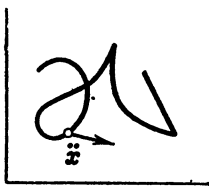


Рис. 3. Траектория движения точки.

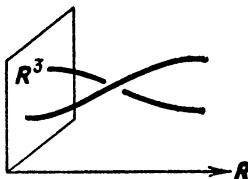


Рис. 4. Мировые линии.

Пусть $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — движение в \mathbb{R}^3 . График *) этого отображения является кривой в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Кривая в галилеевом пространстве, являющаяся в какой-нибудь (и тогда любой) галилеевой системе координат графиком движения, называется *мировой линией* (рис. 4).

Движение системы из n точек задается в галилеевом пространстве n мировыми линиями. В галилеевой системе координат они описываются n отображениями $x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$.

Прямое произведение n экземпляров \mathbb{R}^3 называется *конфигурационным пространством* системы n точек. Наши n отображений $x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ определяют одно отображение

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad N = 3n,$$

оси времени в конфигурационное пространство. Такое отображение и называется *движением системы n точек в галилеевой системе координат $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$* .

*) Графиком отображения $f: A \rightarrow B$ называется подмножество прямого произведения $A \times B$, составленное из всех пар вида $(a, f(a))$, $a \in A$.

Г. Уравнение Ньютона. Согласно принципу детерминированности Ньютона (§1, В) все движение системы однозначно определяется ее начальным положением $(x(t_0) \in \mathbb{R}^N)$ и начальными скоростями $(\dot{x}(t_0) \in \mathbb{R}^N)$.

В частности, *начальное положение и скорости определяют ускорение*. Иными словами, существует функция $F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ такая, что

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (1)$$

Уравнение (1) положено Ньютоном в основу механики. Оно называется *уравнением Ньютона*.

По теореме существования и единственности теории обыкновенных дифференциальных уравнений функция F и начальные условия $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ однозначно определяют движение *).

Вид функции F для каждой конкретной механической системы определяется экспериментально. С математической точки зрения вид F для каждой системы составляет *определение* этой системы.

Д. Ограничения, налагаемые принципом относительности. Принцип относительности Галилея утверждает, что в физическом пространстве — времени имеется избранная галилеева структура («класс инерциальных систем координат»), обладающая следующим свойством.

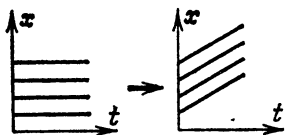


Рис. 5. Принцип относительности Галилея.

*Если подвергнуть мировые линии всех точек любой механической системы **) одному и тому же галилееву преобразованию, то получатся мировые линии той же системы (с новыми начальными условиями) (рис. 5).*

Это налагает на вид правой части уравнения Ньютона, записанного в инерциаль-

*) При некоторых условиях гладкости, которые здесь, конечно, предполагаются выполненными. Движение определяется уравнением (1), вообще говоря, лишь на некотором *интервале* оси времени. Для упрощения мы будем считать, что этот интервал есть вся ось времени, что выполняется в большинстве задач механики.

**) При формулировке принципа относительности следует иметь в виду, что он относится лишь к *замкнутым* физическим (в частности, механическим) системам, т. е. что мы должны включать в систему все тела, взаимодействие которых играет роль при изучении данного явления. Строго говоря, следовало бы включать в систему все вообще тела Вселенной. Но опыт показывает, что часто можно пренебречь влиянием многих из них: например, при изучении движения планет вокруг Солнца можно пренебречь притяжением других звезд и т. п.

С другой стороны, при изучении движения тел в окрестности Земли система не замкнута, если в нее не включена Земля, при изучении движения самолета система не замкнута, пока в ней не включен окружающий самолет воздух, и т. д. В дальнейшем под термином «механическая система» понимается в большинстве случаев замкнутая система, когда же будет идти речь о незамкнутых системах, это будет специально оговариваться (см., например, § 3).

ной системе координат, ряд условий: уравнение (1) должно быть инвариантно относительно группы галилеевых преобразований.

Пример 1. Среди галилеевых преобразований имеется сдвиг по времени. Инвариантность относительно сдвигов по времени означает, что «законы природы остаются постоянными», т. е. если $x = \Phi(t)$ — решение уравнения (1), то для всякого $s \in \mathbb{R}$ решением будет также $x = \Phi(t + s)$.

Отсюда вытекает, что *правая часть уравнения (1) в инерциальной системе координат не может зависеть от времени:*

$$\ddot{x} = \Phi(x, \dot{x}).$$

Замечание. Дифференциальные уравнения, правые части которых зависят от времени, встречаются в следующей ситуации.

Предположим, что мы изучаем часть I механической системы I + II. Тогда влияние части II на часть I можно иногда заменить изменением со временем параметров системы уравнений, описывающих движение части I.

Пример: влиянием Луны на Землю можно пренебречь при исследовании большинства явлений на Земле. Однако при исследовании приливов это влияние нужно учитывать, заменяя притяжение Луны периодическим изменением силы тяжести на Земле.

Уравнения с переменными коэффициентами могут появиться также в результате формальных операций при решении задач.

Пример 2. Среди галилеевых преобразований имеются сдвиги в трехмерном пространстве. Инвариантность относительно таких сдвигов означает, что *пространство однородно* или «имеет одинаковые свойства во всех своих точках». То есть, если $x_i = \Phi_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) — движение системы n точек, удовлетворяющее (1), то для всякого $r \in \mathbb{R}^3$ движение $\Phi_i(t) + r$ ($i = 1, \dots, n$) также удовлетворяет уравнению (1).

Отсюда вытекает, что *правая часть уравнения (1) в инерциальной системе координат может зависеть лишь от «относительных координат» $x_j - x_k$.*

Из инвариантности относительно перехода к равномерно движущейся системе координат (что не меняет \dot{x}_i и $x_j - x_k$, но прибавляет ко всем \dot{x}_j постоянный вектор v) вытекает, что правая часть уравнения (1) в инерциальной системе координат может зависеть лишь от *относительных скоростей*

$$\dot{x}_i = f_i(\{x_j - x_k, \dot{x}_j - \dot{x}_k\}), \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Пример 3. Среди галилеевых преобразований имеются повороты в трехмерном пространстве. Инвариантность относительно таких поворотов означает, что *пространство изотропно*, так что в нем нет предпочтительных направлений.

То есть, если $\Phi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 1, \dots, n$) — движение системы точек, удовлетворяющее (1), и $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — ортогональное

преобразование, то движение $G\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i=1, \dots, n$) также удовлетворяет (1). Иначе говоря,

$$F(Gx, G\dot{x}) = GF(x, \dot{x}),$$

где Gx означает (Gx_1, \dots, Gx_n) , $x_i \in \mathbb{R}^3$.

Задача. Докажите, что если механическая система состоит всего из одной точки, то ее ускорение в инерциальной системе координат равно нулю («первый закон Ньютона»).

Указание. Согласно примерам 1, 2 вектор ускорения не зависит от x , \dot{x} , t , а согласно примеру 3 вектор F инвариантен относительно вращений. Задача. Механическая система состоит из двух точек. В начальный момент их скорости (в некоторой инерциальной системе координат) равны нулю. Докажите, что точки будут двигаться по соединяющей их прямой.

Задача. Механическая система состоит из трех точек. В начальный момент их скорости (в некоторой инерциальной системе координат) равны нулю. Докажите, что точки всегда останутся в той же плоскости, в которой они лежат в начальный момент.

Задача. Механическая система состоит из двух точек. Докажите, что при любых начальных условиях существует такая инерциальная система координат, что в ней эти две точки постоянно остаются в неподвижной плоскости.

Задача. Докажите, что механика в зеркальце тождественна с нашей. **Указание.** В галилеевой группе есть преобразования отражения, меняющие ориентацию \mathbb{R}^3 .

Задача. Единствен ли класс инерциальных систем?

Ответ. Другие классы получают, если изменять масштабы длины и времени, а также направление времени.

§ 3. Примеры механических систем

Мы уже отметили, что вид функции F в уравнении Ньютона (1) для каждой механической системы определяется экспериментально. Приведем несколько примеров.

При рассмотрении конкретных систем разумно не включать в систему все объекты вселенной. Например, при исследовании большинства происходящих на Земле явлений можно не учитывать влияние Луны. Далее, обычно можно пренебречь влиянием изучаемых процессов на движение самой Земли и даже считать систему координат, связанную с Землей, «неподвижной». Разумеется, принцип относительности уже не накладывает на уравнения движения, записанные в такой системе координат, прежних ограничений. Например, вблизи Земли имеется избранное направление: вертикальное.

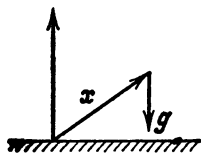


Рис. 6. Падение камня на Землю.

А. Пример 1. Падение камня на Землю. Опыт показывает, что

$$\ddot{x} = -g, \quad g \approx 9,8 \text{ м/сек}^2 \text{ (Галилей)}, \quad (2)$$

где x — высота камня над поверхностью Земли (рис. 6).

Если ввести («потенциальную энергию» $U = gx$, то уравнение (2) можно записать в виде

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}.$$

Если $U: E^N \rightarrow \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция в евклидовом пространстве, то мы будем обозначать через $\partial U/\partial \mathbf{x}$ градиент функции U . Если $E^N = E^{n_1} \times \dots \times E^{n_k}$ — прямое произведение евклидовых пространств, то мы будем обозначать точку $\mathbf{x} \in E^N$ через (x_1, \dots, x_k) , а вектор $\partial U/\partial \mathbf{x}$ через $(\partial U/\partial x_1, \dots, \partial U/\partial x_k)$. В частности, если x_1, \dots, x_N — декартовы координаты в E^N , то компоненты вектора $\partial U/\partial \mathbf{x}$ равны частным производным $\partial U/\partial x_1, \dots, \partial U/\partial x_N$.

Опыт показывает, что радиус-вектор камня относительно какой-нибудь точки Земли O , удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \text{ где } U = g\mathbf{x}. \quad (3)$$

Вектор в правой части направлен к Земле. Он называется вектором ускорения силы тяжести g .

Б. Пример 2. Падение с большой высоты. Подобно всем экспериментальным фактам, закон движения (2) имеет ограниченную область применения.

Согласно более точному экспериментальному закону падения, открытому Ньютоном, ускорение *обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли*:

$$\ddot{x} = -g \frac{r_0^2}{r^2},$$

где $r = r_0 + x$ (рис. 7).

Это уравнение также можно записать в виде (3), введя *потенциальную энергию*

$$U = -\frac{k}{r}, \quad k = gr_0^2,$$

обратно пропорциональную расстоянию до центра Земли.

Задача. Определить, с какой скоростью следует бросить камень, чтобы он улетел с поверхности Земли на бесконечное расстояние *).

Ответ. $\geq 11,2$ км/сек.

В. Пример 3. Движение грузика по прямой под действием пружины. Эксперимент показывает, что при небольших отклонениях пружины от ее нейтрального положения уравнение движения грузика будет (рис. 8)

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x.$$

Это уравнение также можно записать в виде (3), если ввести

*) Это так называемая вторая космическая скорость v_2 . Наше уравнение не учитывает притяжения Солнца. Притяжение Солнца не выпустит камень из Солнечной системы, если скорость камня относительно Земли меньше 16,6 км/сек.

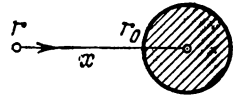


Рис. 7. Поле тяготения Земли.

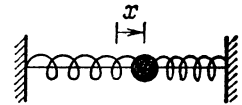


Рис. 8. Грузик на пружине.

потенциальную энергию

$$U = \frac{\alpha^2 x^2}{2}.$$

Если поместить на место одного грузика два таких же, то окажется, что при том же растяжении пружины ускорение в два раза меньше.

Экспериментально установлено, что для любых двух тел отношение ускорений \ddot{x}_1/\ddot{x}_2 при одинаковом растяжении пружины постоянно (не зависит от степени растяжения пружины и от ее свойств, но лишь от самих тел). Величина, обратная этому отношению, называется отношением масс:

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

За единицу массы принимается масса какого-нибудь фиксированного тела, например 1 л воды. Опыт показывает, что массы всех тел положительны.

Произведение массы тела на ускорение $m\ddot{x}$ не зависит от тела, а является характеристикой растяжения пружины. Эта величина называется *силой*, действующей на тело со стороны пружины.

За единицу силы принимается «ньютон». Например, на 1 л воды, подвешенный на пружине на поверхности Земли, пружина действует с силой в 9,8 ньютона (= 1 кгГ).

Г. Пример 4. Потенциальная система. Пусть $E^{3n} = E^3 \times \dots \times E^3$ — конфигурационное пространство системы n точек в евклидовом трехмерном пространстве E^3 . Пусть $U: E^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, и пусть m_1, \dots, m_n — положительные числа.

Определение. Движение n точек масс m_1, \dots, m_n в потенциальном поле с потенциальной энергией U задается системой дифференциальных уравнений

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Уравнения движения в примерах 1—3 имеют как раз такой вид. В таком же виде записываются уравнения движения большого числа многих других механических систем.

Например, небесно-механической задачей трех тел называется задача (4), в которой

$$U = -\frac{m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|} - \frac{m_2 m_3}{\|x_2 - x_3\|} - \frac{m_3 m_1}{\|x_3 - x_1\|}.$$

К виду (4) могут быть приведены некоторые дифференциальные уравнения совсем другого происхождения, например уравнения электрических колебаний.

В следующей главе мы будем главным образом заниматься исследованием системы дифференциальных уравнений (4).

ГЛАВА 2

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В большинстве случаев (например, в задаче трех тел) не удается ни решить систему дифференциальных уравнений движения, ни достаточно полно исследовать поведение решений. В этой главе рассматривается несколько простых, но важных задач, в которых уравнения Ньютона решаются.

§ 4. Системы с одной степенью свободы

В этом параграфе изучается фазовая плоскость дифференциального уравнения (1). Для качественного исследования такого уравнения достаточно одного взгляда на график потенциальной энергии. Кроме того, уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

А. Определения. Системой с одной степенью свободы мы будем называть систему, описываемую одним дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Кинетической энергией называется квадратичная форма

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2.$$

Потенциальной энергией называется функция

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

Знак в этой формуле выбран так, чтобы потенциальная энергия камня была тем больше, чем выше он находится.

Заметим, что потенциальная энергия U определяет f . Поэтому для задания системы (1) достаточно указать потенциальную энергию. Прибавление постоянной к потенциальной энергии не меняет уравнения движения (1).

Полной энергией называется сумма

$$E = T + U.$$

Таким образом, полная энергия — это функция $E(x, \dot{x})$.

Б. Теорема (закон сохранения энергии). Полная энергия движущейся точки при движении (1) сохраняется: $E(x(t), \dot{x}(t))$ не зависит от t .

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - f(x)) = 0, \text{ ч. т. д.}$$

В. Фазовая плоскость.

Уравнение (1) эквивалентно системе двух уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x). \quad (2)$$

Рассмотрим плоскость с координатами x, y . Эта плоскость называется *фазовой плоскостью* уравнения (1). Точки фазовой плоскости называются *фазовыми точками*. Правая часть системы (2) определяет на фазовой плоскости векторное поле. Это поле называется *векторным полем фазовой скорости*.

Решение системы (2) — это движение фазовой точки по фазовой плоскости $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором скорость движущейся точки в каждый момент времени равна вектору фазовой скорости в том месте, где фазовая точка в данный момент времени находится*).

Образ отображения φ называется *фазовой кривой*. Таким образом, фазовая кривая задается параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \dot{\varphi}(t).$$

Задача. Докажите, что через каждую фазовую точку проходит одна и только одна фазовая кривая.

Указание. См. учебники по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Заметим, что фазовая кривая может состоять всего из одной точки. Такая точка называется *положением равновесия*. Вектор фазовой скорости в положении равновесия равен нулю.

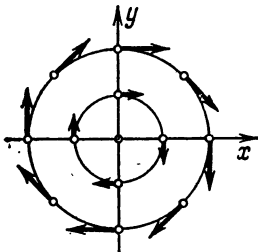


Рис. 9. Фазовая плоскость уравнения $\ddot{x} = -x$.

Закон сохранения энергии позволяет легко находить фазовые кривые. Действительно, на каждой фазовой кривой значение полной энергии постоянно. Поэтому каждая фазовая кривая целиком принадлежит одному множеству уровня энергии $E(x, y) = h$.

Г. Примеры.

Пример 1. Основное уравнение теории колебаний

$$\ddot{x} = -x.$$

В этом случае (рис. 9) имеем:

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad U = \frac{x^2}{2}, \quad E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

*) Здесь для простоты предполагается, что решение φ определено на всей оси времени \mathbb{R} .

Множества уровня энергии — концентрические окружности и начало координат. Вектор фазовой скорости в фазовой точке (x, y) имеет компоненты $(y, -x)$. Он перпендикулярен радиусу-вектору и равен ему по величине. Поэтому движение фазовой точки по фазовой плоскости есть равномерное вращение вокруг 0: $x = r_0 \cos(\varphi_0 - t)$, $y = r_0 \sin(\varphi_0 - t)$. Итак, каждое множество уровня энергии является фазовой кривой.

Пример 2. Пусть потенциальная энергия задана своим графиком (рис. 10). Нарисуем множества уровня энергии $\frac{y^2}{2} + U(x) = E$. При этом полезно иметь в виду следующие обстоятельства.

1. Положения равновесия системы (2) лежат на оси x фазовой плоскости. Точка $x = \xi$, $y = 0$ является положением равновесия, если ξ — критическая точка потенциальной энергии, т. е. если $dU/dx|_{x=\xi} = 0$.

2. Каждое множество уровня — гладкая кривая в окрестности каждой своей точки, не являющейся положением равновесия (это следует из теоремы о неявной функции). В частности, если число E — не критическое значение потенциальной энергии (т. е. не равно значению потенциальной энергии в одной из критических точек), то множество уровня, где энергия равна E , — гладкая кривая.

При исследовании линий уровня энергии следует обращать внимание на критические значения E и значения E , близкие к критическим. При этом удобно представлять себе шарик, катающийся в потенциальной яме U .

Например, рассуждение «кинетическая энергия неотрицательна. Значит, потенциальная не больше полной. Чем потенциальная энергия меньше, тем скорость больше» принимает на этом языке вид: «шарик не может выскочить из потенциальной ямы, поднявшись выше уровня, определяемого его начальной энергией. Скатываясь в яму, шарик набирает скорость». Далее, мы сразу замечаем, что точки локального максимума потенциальной энергии — неустойчивые, а точки минимума — устойчивые положения равновесия.

Задача. Докажите это.

Задача. Из скольких фазовых кривых состоит сепаратриса (восьмерка) — кривая, соответствующая уровню E_2 ?

Ответ. Из трех.

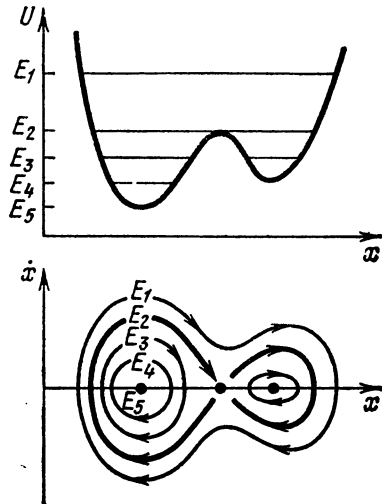


Рис. 10. Потенциальная энергия и фазовые кривые.

Задача. Определить время движения по сепаратрисе.

Ответ. Из теоремы единственности вытекает, что это время бесконечно.

Задача. Докажите, что время движения от x_1 до x_2 (в одну сторону)

$$\text{равно } t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

Задача. Нарисовать фазовые кривые, зная график потенциальной энергии (рис. 11).

Ответ — рис. 12.

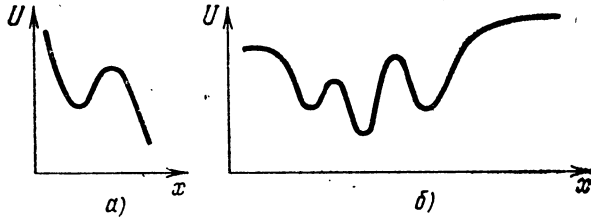


Рис. 11. Потенциальная энергия.

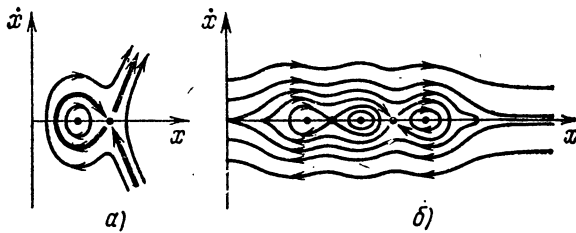


Рис. 12. Фазовые кривые.

Задача. Нарисовать фазовые кривые для «уравнения плоского математического маятника»: $\ddot{x} = -\sin x$.

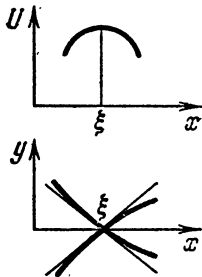


Рис. 13. Линия критического уровня энергии.

Задача. Нарисовать фазовые кривые для «уравнения маятника, ось которого вращается»: $\ddot{x} = -\sin x + M$.

З а м е ч а н и е. В этих двух задачах x означает угол отклонения маятника. Фазовые точки, координаты которых отличаются на 2π , соответствуют одинаковому положению маятника. Поэтому кроме фазовой плоскости естественно рассматривать фазовый цилиндр $\{x \pmod{2\pi}, y\}$.

Задача. Найти касательные к ветвям линии критического уровня, соответствующего максимуму потенциальной энергии, $E = U(\xi)$ (рис. 13).

Ответ. $y = \pm \sqrt{U''(\xi)}(x - \xi)$.

Задача. Пусть $S(E)$ — площадь, заключенная внутри замкнутой фазовой кривой, соответствующей уровню энергии E . Докажите, что период движения по этой кривой равен

$$T = \frac{dS}{dE}.$$

Задача. Пусть E_0 — значение потенциальной энергии в точке минимума ξ_0 . Найти период малых колебаний в окрестности точки ξ , $T_0 = \lim_{E \rightarrow E_0} T(E)$.

Ответ. $2\pi / \sqrt{U''(\xi)}$.

Задача. Рассмотрим периодическое движение по замкнутой фазовой кривой, соответствующей уровню энергии E . Устойчиво ли оно по Ляпунову? *Ответ.* Нет*).

Д. Фазовый поток. Пусть M — точка фазовой плоскости. Рассмотрим решение системы (2), начальные условия которого при $t=0$ изображаются точкой M . Предположим, что любое решение системы продолжится на всю ось времени. Значение нашего решения при некотором значении t зависит от M . Мы обозначим полученную фазовую точку (рис. 14) через

$$M(t) = g^t M.$$

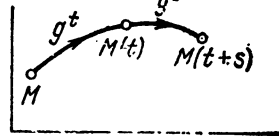


Рис. 14. Фазовый поток.

Таким образом, мы определили отображение фазовой плоскости на себя $g^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. По известным теоремам теории обыкновенных дифференциальных уравнений отображение g^t является диффеоморфизмом (взаимно однозначным и взаимно дифференцируемым отображением). Диффеоморфизмы g^t , $t \in \mathbb{R}$, образуют группу: $g^{t+s} = g^t \circ g^s$. Далее, отображение g^0 , тождественное ($g^0 M = M$), а отображение g^{-t} обратно g^t . Отображение $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t, M) = g^t M$ дифференцируемо. Все эти свойства вместе выражают короче, говоря, что преобразования g^t образуют *однопараметрическую группу диффеоморфизмов* фазовой плоскости. Эту группу называют также *фазовым потоком*, заданным системой (2) (или уравнением (1)).

Пример. Фазовый поток, заданный уравнением $\dot{x} = -x$, есть группа g^t поворотов фазовой плоскости на угол t вокруг начала координат.

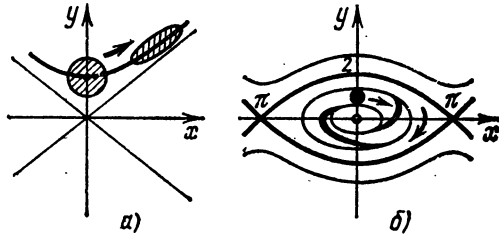


Рис. 15. Действие фазового потока на круг.

Задача. Покажите, что система с потенциальной энергией $U = -x^4$ никакого фазового потока не определяет.

Задача. Докажите, что если потенциальная энергия положительна, то фазовый поток существует.

Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии для доказательства неограниченной продолжимости решений.

Задача. Нарисовать образ круга $x^2 + (y-1)^2 < 1/4$ под действием преобразования g^t фазового потока уравнения: а) «перевернутый маятник» $\dot{x} = x$, б) «нелинейный маятник» $\dot{x} = -\sin x$.

Ответ — рис. 15.

* Единственное исключение составляет случай, когда период не зависит от энергии.

§ 5. Системы с двумя степенями свободы

Анализ общей потенциальной системы с двумя степенями свободы выходит за рамки возможностей современной науки. В этом параграфе рассматриваются простейшие примеры.

А. Определения. Под системой с двумя степенями свободы мы будем понимать систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = f(x), \quad x \in E^2,$$

где f — векторное поле на плоскости.

Система называется *потенциальной*, если существует функция $U: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f = -\partial U / \partial x$. Уравнение движения потенциальной системы имеет, таким образом, вид *)

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1)$$

Б. Закон сохранения энергии.

Теорема. Полная энергия потенциальной системы сохраняется

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x), \quad \dot{x}^2 = (\dot{x}, \dot{x}).$$

Утверждается: $\frac{dE}{dt} = 0$. Доказательство:

$$\frac{dE}{dt} = (\dot{x}, \ddot{x}) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \dot{x} \right) = \left(\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}, \dot{x} \right) = 0$$

в силу уравнения движения.

Следствие. Если в начальный момент суммарная энергия равна E , то вся траектория лежит в области, где $U(x) \leq E$, т. е. точка находится все время внутри потенциальной ямы $U(x_1, x_2) \leq E$.

Замечание. В системе с одной степенью свободы можно всегда ввести потенциальную энергию

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

Для систем с двумя степенями свободы это не так.

Задача. Привести пример системы вида $\ddot{x} = f(x)$, $x \in E^2$, которая не является потенциальной.

В. Фазовое пространство. Уравнение движения (1) можно записать в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1}, & \dot{y}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

*) В декартовых координатах на плоскости E^2

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

Фазовым пространством системы с двумя степенями свободы называется четырехмерное пространство с координатами x_1, x_2, y_1, y_2 .

Система (2) определяет векторное поле фазовой скорости в четырехмерном пространстве, и тем самым*) фазовый поток нашей системы (однопараметрическую группу диффеоморфизмов четырехмерного фазового пространства). Фазовые кривые системы (2) являются подмножествами четырехмерного фазового пространства. Все фазовое пространство разбивается на фазовые кривые. Проекция фазовых кривых из четырехмерного пространства на плоскость x_1, x_2 дают траектории нашей движущейся точки на плоскости x_1, x_2 . Эти траектории называют также орбитами. Орбиты могут иметь точки пересечения, тогда как фазовые кривые друг друга не пересекают. Уравнение закона сохранения энергии

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + U(x_1, x_2)$$

определяет трехмерную гиперповерхность в четырехмерном пространстве: $E(x_1, x_2, y_1, y_2) = E_0$; эта поверхность Π_{E_0} остается инвариантной относительно фазового потока: $g^t \Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}$. Можно сказать, что фазовый поток течет по поверхности уровня энергии. Векторное поле фазовой скорости касается в каждой точке поверхности Π_E . Следовательно, вся она составлена из фазовых кривых (рис. 16).

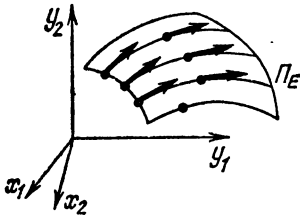


Рис. 16. Поверхность уровня энергии и фазовые кривые.

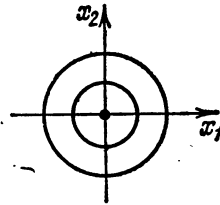


Рис. 17. Линии уровня потенциальной энергии сферического маятника.

Г. Пример 1 («малые колебания сферического маятника»). Пусть $U = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. Множества уровня потенциальной энергии на плоскости x_1, x_2 будут концентрическими окружностями (рис. 17).

Уравнения движения $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_2$ эквивалентны системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_1 &= -x_1, & \dot{y}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

*) При обычных ограничениях.

Эта система распадается на две независимых; иначе говоря, каждая из координат x_1, x_2 меняется со временем так же, как в системе с одной степенью свободы.

Решения имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, & x_2 &= c_3 \cos t + c_4 \sin t, \\ y_1 &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t, & y_2 &= -c_3 \sin t + c_4 \cos t. \end{aligned}$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$E = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) = \text{const},$$

т. е. поверхностью уровня P_E является сфера в четырехмерном пространстве.

Задача. Доказать, что фазовые кривые являются большими кругами этой сферы. (Большим кругом называется пересечение сферы и проходящей через ее центр двумерной плоскости.)

Задача. Доказать, что множество фазовых кривых на поверхности P_E составляет двумерную сферу. Точнее, формула $\omega = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ задает «отображение Хопфа» трехмерной сферы P_E на двумерную сферу (плоскость комплексного переменного ω , пополненную бесконечно удаленной точкой). Наши фазовые кривые — это прообразы точек при отображении Хопфа.

Задача. Найти проекции фазовых кривых на плоскость x_1, x_2 (т. е. нарисовать орбиты движения точки).

Д. Пример 2 («фигуры Лиссажу»). Рассмотрим еще один пример плоского движения («малые колебания с двумя степенями свободы»):

$$\ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2.$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_2^2.$$

Из закона сохранения энергии следует, что если в начальный момент времени полная энергия

$$\frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + U(x_1, x_2) = E,$$

то все движение будет происходить внутри эллипса $U(x_1, x_2) \leq E$.

Кроме того, наша система состоит из двух не связанных одномерных систем. Поэтому закон сохранения энергии выполняется отдельно для каждой из них: сохраняются величины

$$E_1 = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} x_1^2, \quad E_2 = \frac{1}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_2^2$$

$$(E = E_1 + E_2).$$

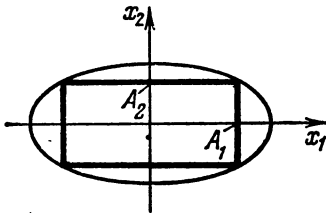


Рис. 18. Области $U \leq E$, $U_1 \leq E_1$ и $U_2 \leq E_2$.

Следовательно, изменение x_1 ограничено полосой $|x_1| \leq A_1$, $A_1 = \sqrt{2E_1(0)}$, и x_2 тоже колеблется в пределах полосы $|x_2| \leq A_2$. Пересечение этих двух полос определяет прямоугольник, в котором заключена орбита (рис. 18).

Задача. Доказать, что этот прямоугольник вписан в эллипс $U \leq E$. Общее решение наших уравнений есть $x_1 = A_1 \sin(t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$: движущаяся точка совершает колебание с частотой ω

и амплитудой A_1 по горизонтали и колебание с частотой ω и амплитудой A_2 по вертикали.

Чтобы нарисовать орбиту на плоскости x_1, x_2 , поступим следующим образом. Рассмотрим цилиндр с основанием $2A_1$ и ленту ширины $2A_2$. Нарисуем на ленте синусоиду с периодом $2\pi A_1/\omega$ и амплитудой A_2 и намотаем ленту

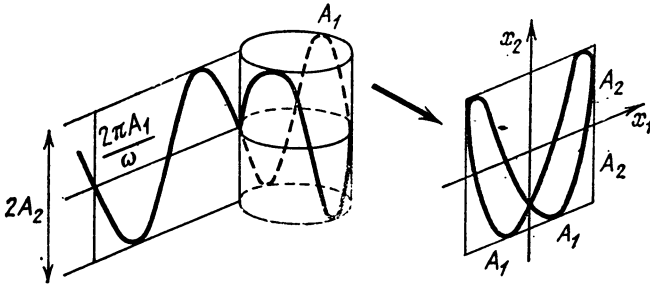


Рис. 19. Построение фигуры Лиссажу.

на цилиндр (рис. 19). Ортогональная проекция намотанной на цилиндр синусоиды на плоскость x_1, x_2 и даст искомую орбиту, называемую *фигурой Лиссажу*.

Фигуры Лиссажу удобно наблюдать на осциллографе, подавая два независимых гармонических колебания на горизонтальную и вертикальную развертки.

Вид фигуры Лиссажу очень сильно зависит от частоты ω . Если $\omega = 1$ (сферический маятник примера 1), то на цилиндре кривая — эллипс. Проекция этого эллипса на плоскость x_1, x_2 зависит от разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1$. При $\varphi_1 = \varphi_2$ получается отрезок диагонали прямоугольника, при малых $\varphi_2 - \varphi_1$ — сжатый к диагонали эллипс, вписанный в прямоугольник. При $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ получается эллипс с главными осями x_1, x_2 ; при увеличении $\varphi_2 - \varphi_1$ от $\pi/2$ до π эллипс сжимается ко второй диагонали, при дальнейшем увеличении $\varphi_2 - \varphi_1$ весь процесс повторяется сначала (рис. 20).

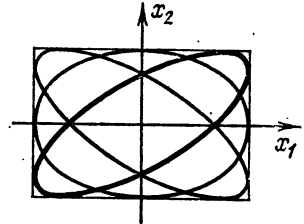


Рис. 20. Серия фигур Лиссажу с $\omega = 1$.

Пусть теперь частоты равны лишь приближенно: $\omega \approx 1$. Отрезок кривой, соответствующий $0 \leq t \leq 2\pi$, очень похож на эллипс. Следующий виток тоже напоминает эллипс, но у него сдвиг фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ на $2\pi(\omega - 1)$ больше, чем у исходного. Поэтому кривая Лиссажу с $\omega \approx 1$ — деформирующийся эллипс, медленно проходящий все фазы от сжатия в одну диагональ до сжатия в другую (рис. 21).

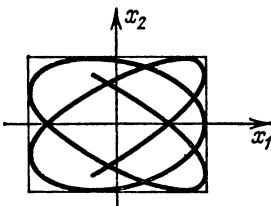


Рис. 21. Фигура Лиссажу с $\omega \approx 1$.

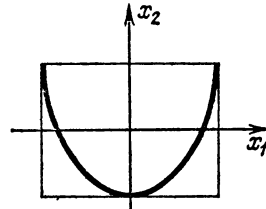


Рис. 22. Фигура Лиссажу с $\omega = 2$.

Если одна из частот вдвое больше другой ($\omega = 2$), то при некотором сдвиге фаз фигура Лиссажу превращается в дважды пройденную кривую (рис. 22).

Задача. Доказать, что эта кривая — парабола.

При увеличении сдвига фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ последовательно получаем кривые рис. 23.

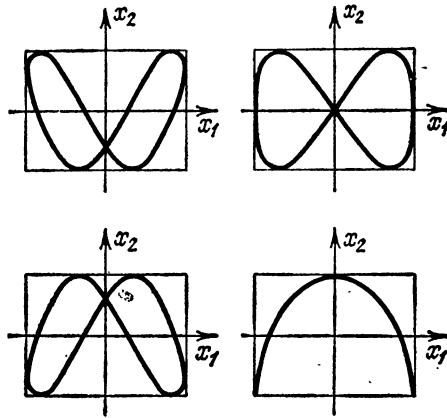


Рис. 23. Серия фигур Лиссажу с $\omega = 2$.

Вообще, если одна из частот в n раз больше другой ($\omega = n$), то среди соответствующих фигур Лиссажу есть график многочлена степени n (рис. 24); этот многочлен называется *многочленом Чебышева*.

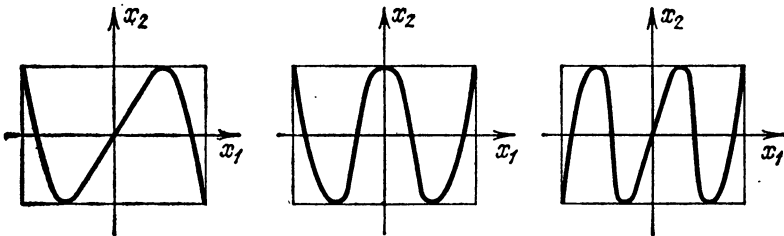


Рис. 24. Многочлены Чебышева.

Задача. Доказать, что если $\omega = m/n$, то фигура Лиссажу — замкнутая алгебраическая кривая, а если ω иррационально, то фигура Лиссажу заполняет прямоугольник всюду плотно. Что заполняет соответствующая фазовая траектория?

§ 6. Потенциальное силовое поле

В этом параграфе исследуется связь работы и потенциальной энергии.

А. Работа силового поля на пути. Напомню определение работы силы F на пути S . Работа постоянной силы F (например, силы, с которой мы тянем вверх груз) на пути $S = \overline{M_1 M_2}$ есть, по определению, скалярное произведение (рис. 25)

$$A = (F, S) = |F| |S| \cdot \cos \varphi.$$

Пусть дано векторное поле F и кривая l конечной длины. Приближим кривую l ломаной со звеньями ΔS_i и обозначим через

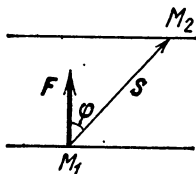


Рис. 25. Работа постоянной силы F на прямом пути S .



Рис. 26. Работа силового поля F на пути l .

F_i значение силы в какой-нибудь точке ΔS_i ; тогда работа поля F на пути l есть по определению (рис. 26)

$$A = \lim_{|\Delta S_i| \rightarrow 0} \sum (F_i, \Delta S_i).$$

В курсе анализа доказывается, что если поле непрерывно, а путь спрямляем, то предел существует. Он обозначается $\int (F, dS)$.

Б. Условия потенциальности поля.

Теорема. Векторное поле F потенциально тогда и только тогда, когда его работа по любому пути $M_1 M_2$ зависит только от концов пути и не зависит от формы пути.

Действительно, пусть работа поля F не зависит от пути. Тогда корректно определена функция точки M :

$$U(M) = - \int_{M_0}^M (F, dS).$$

Легко проверить, что

$$F = - \frac{\partial U}{\partial \vec{x}},$$

т. е. поле потенциально, а U — его потенциальная энергия. Конечно, потенциальная энергия определяется только с точностью до аддитивной постоянной $U(M_0)$, которую можно выбрать произвольно.

Обратно, пусть поле F потенциально и U — потенциальная энергия. Тогда легко проверяется, что

$$\int_{M_0}^M (F, dS) = -U(M) + U(M_0),$$

т. е. работа не зависит от формы пути.

Задача. Доказать, что векторное поле $F_1 = x_2, F_2 = -x_1$ не потенциально (рис. 27).

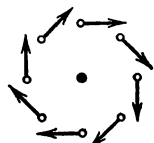


Рис. 27. Непотенциальное поле.

Задача. Потенциально ли поле, заданное на плоскости с исключенной точкой $F_1 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $F_2 = \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2}$? Доказать, что поле потенциально тогда и только тогда, когда его работа по любому замкнутому контуру равна нулю.

В. Центральное поле.

Определение. Векторное поле на плоскости E^2 называется *центральным* с центром в O , если оно инвариантно относительно группы движений*) плоскости, оставляющих точку O на месте.

Задача. Доказать, что все векторы центрального поля лежат на лучах, проходящих через O , а величина вектора поля в точке зависит только от расстояния точки до центра поля.

Полезно рассматривать также центральные поля, не определенные в точке O .

Пример. Ньютоновское поле $F = -k \frac{r}{|r|^3}$ центрально, а поля задач пункта Б — нет.

Теорема. Всякое центральное поле F потенциально, а его потенциальная энергия зависит только от расстояния до центра поля, $U = U(r)$.

Доказательство. Согласно предыдущей задаче $F(r) = -\Phi(r) e_r$, где r — радиус-вектор относительно O , r — его длина, e_r — его орт. Тогда

$$\int_{M_1}^{M_2} (F \cdot dS) = \int_{r(M_1)}^{r(M_2)} \Phi(r) dr,$$

а этот интеграл, очевидно, не зависит от пути.

Задача. Вычислить потенциальную энергию ньютоновского поля.

Замечание. Определения и теоремы этого параграфа непосредственно переносятся на евклидово пространство E^n любого числа измерений.

§ 7. Кинетический момент

В дальнейшем мы увидим, что инвариантность уравнений механической задачи относительно какой-либо группы преобразований всегда влечет за собой закон сохранения. Центральное поле инвариантно относительно группы вращений. Соответствующий первый интеграл носит название кинетического момента.

А. Определение. Движение материальной точки (массы 1) в центральном поле на плоскости определяется уравнением

$$\ddot{r} = \Phi(r) e_r,$$

где r — радиус-вектор с началом в центре поля O , r — его длина, e_r — его орт. Будем считать нашу плоскость вложенной в трехмерное ориентированное евклидово пространство.

*) В том числе и отражений.

Определение. Моментом количества движения (или кинетическим моментом) материальной точки единичной массы относительно точки O называется векторное произведение

$$M = [r, \dot{r}].$$

Вектор M перпендикулярен нашей плоскости и задается одним числом: $M = Mn$, где $n = [e_1, e_2]$ — вектор нормали, e_1 и e_2 — ориентирующий плоскость репер (рис. 28).

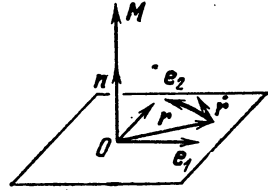


Рис. 28. Кинетический момент.

Замечание. Вообще, моментом вектора a , «приложенного в точке r » относительно точки O называют $[r, a]$, например, в школьном курсе статики рассматривался момент силы.

Б. Закон сохранения кинетического момента.

Лемма. Пусть a и b — два меняющихся со временем вектора в евклидовом ориентированном R^3 . Тогда

$$\frac{d}{dt} [a, b] = [\dot{a}, b] + [a, \dot{b}].$$

Доказательство. Это следует из определения производной.

Теорема (закон сохранения кинетического момента). При движении в центральном поле кинетический момент M относительно центра поля O не меняется со временем.

Доказательство. По определению

$$M = [r, \dot{r}].$$

По лемме

$$\dot{M} = [\dot{r}, \dot{r}] + [r, \ddot{r}].$$

Из уравнения движения ввиду центральности поля видно, что векторы \ddot{r} и r коллинеарны. Итак, $\dot{M} = 0$, ч. т. д.

В. Закон Кеплера. Впервые закон сохранения кинетического момента был найден Кеплером из наблюдений за движением Марса. Кеплер сформулировал этот закон в несколько ином виде.

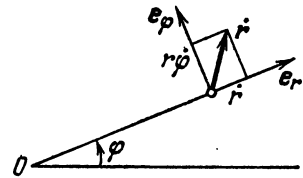


Рис. 29. Разложение вектора \dot{r} по базису e_r, e_ϕ .

Введем на нашей плоскости полярные координаты r, ϕ с полюсом в центре поля O . Рассмотрим в точке r с координатами $|r| = r; \phi$ два орта: e_r , направленный по радиусу-вектору, так что

$$r = r e_r,$$

и e_ϕ — ему перпендикулярный, направленный в сторону увеличения ϕ . Разложим вектор скорости \dot{r} по базису e_r, e_ϕ (рис. 29).

Лемма. Справедливо соотношение

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Доказательство. Очевидно, векторы \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ вращаются с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, т. е.

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r.$$

Дифференцируя равенство $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \text{ ч. т. д.}$$

Следовательно, кинетический момент есть

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}, \dot{r}\mathbf{e}_r] + [\mathbf{r}, r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi] = r\dot{\varphi}[\mathbf{r}, \mathbf{e}_\varphi] = r^2\dot{\varphi}[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi].$$

Таким образом, сохраняется величина

$$M = r^2\dot{\varphi}.$$

Эта величина имеет простой геометрический смысл.

Кеплер назвал *секториальной скоростью* C скорость изменения площади $S(t)$, замеченной радиусом-вектором (рис. 30):

$$C = \frac{dS}{dt}.$$

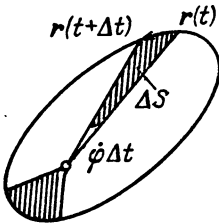


Рис. 30. Секториальная скорость.

Найденный Кеплером из наблюдений движения планет закон гласит:

В равные времена радиус-вектор заметает равные площади, так что секториальная скорость постоянна: $\frac{dS}{dt} = \text{const.}$

Это — одна из формулировок закона сохранения кинетического момента. Ибо

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \Delta t + o(\Delta t),$$

и, значит, секториальная скорость

$$C = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} M$$

вдвое меньше кинетического момента нашей точки массы I и, следовательно, постоянна.

Пример. Спутники связи «Молния» имеют сильно вытянутые орбиты. По закону Кеплера большую часть времени такой спутник проводит в дальней части орбиты и величина $\dot{\varphi}$ мала.

§ 8. Исследование движения в центральном поле

Закон сохранения кинетического момента позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. Благодаря этому движение в центральном поле можно исследовать полностью.

А. Сведение к одномерной задаче. Рассмотрим движение точки (массы 1) в центральном поле на плоскости:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad U = U(r).$$

Естественно перейти к полярным координатам r, φ .

По закону сохранения кинетического момента величина $M = \dot{\varphi}(t)r^2(t)$ постоянна (не зависит от t).

Теорема. При движении материальной точки единичной массы в центральном поле ее расстояние от центра поля меняется так, как r в одномерной задаче с потенциальной энергией

$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Доказательство. Дифференцируя доказанное в § 5 соотношение $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$, находим

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$

Ввиду центральности поля

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r.$$

Поэтому уравнение движения в полярных координатах принимает вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Но по закону сохранения кинетического момента

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2},$$

где M — не зависящая от t постоянная, определяемая начальными условиями. Поэтому

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{M^2}{r^4} \quad \text{или} \quad \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad \text{где} \quad V = U + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Величина $V(r)$ называется *эффективной потенциальной энергией*.

З а м е ч а н и е. Полная энергия в полученной одномерной задаче

$$E_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r)$$

совпадает с полной энергией в исходной задаче

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + U(r),$$

ибо

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Б. Интегрирование уравнений движения. Полная энергия в полученной одномерной задаче сохраняется. Следовательно, зависимость r от t определяется квадратурой

$$t = \sqrt{2(E - V(r))}, \quad \int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}.$$

Поскольку $\dot{\varphi} = M/r^2$, то $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M/r^2}{\sqrt{2(E - V(r))}}$, и уравнение орбиты в полярных координатах находится квадратурой:

$$\varphi = \int \frac{M/r^2 dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}.$$

В. Исследование орбит. Зафиксируем значение постоянной момента M . Изменение r со временем легко исследовать, нарисовав график эффективной потенциальной энергии $V(r)$ (рис. 31).

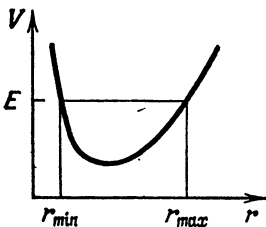


Рис. 31. График эффективной потенциальной энергии.

Пусть E — значение полной энергии. Вся орбита, соответствующая данным E и M , лежит в области $V(r) \leq E$. На границе этой области $V = E$, т. е. $\dot{r} = 0$. При этом скорость движущейся точки, вообще говоря, не равна нулю, так как $\dot{\varphi} \neq 0$ при $M \neq 0$.

Неравенство $V(r) \leq E$ задает на плоскости одну или несколько кольцевых областей:

$$0 \leq r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \leq \infty.$$

Если $0 < r_{\min} < r_{\max} < \infty$, то движение ограничено и происходит внутри кольца между окружностями с радиусами r_{\min} и r_{\max} .

Вид орбиты показан на рис. 32. Угол φ меняется монотонно, а r колеблется между r_{\min} и r_{\max} периодически. Точки, где $r = r_{\min}$ называются *перигентрами*, а где $r = r_{\max}$ — *апоцентрами* (если центр Земля — перигей и апогей, если Солнце — перигелий и афелий, если Луна — периселений и апоселений).

Каждый из лучей, ведущих из центра в апоцентр или в перигентр, является осью симметрии орбиты.

В общем случае орбита не замкнута: угол между последовательными перицентром и апоцентром дается интегралом

$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M/r^2 dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}.$$

Угол между двумя последовательными перицентрами вдвое больше.

Орбита замкнута, если угол Φ соизмерим с 2π , т. е. если $\Phi = 2\pi \frac{m}{n}$, где m и n целые.

Можно показать, что если угол Φ несоизмерим с 2π , то орбита заполняет кольцо всюду плотно (рис. 33).

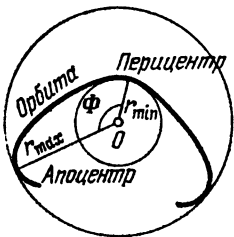


Рис. 32. Орбита точки в центральном поле.

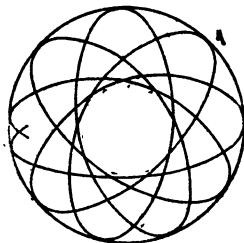


Рис. 33. Всюду плотная в кольце орбита.

Если $r_{\min} = r_{\max}$, т. е. E — значение V в точке минимума, то кольцо вырождается в окружность, которая и будет орбитой.

Задача. При каких α движение по круговой орбите в поле с потенциальной энергией $U = r^\alpha$, $-2 \leq \alpha < \infty$, устойчиво по Ляпунову?

Ответ. Только при $\alpha = 2$.

При несколько больших минимума V значениях E кольцо $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ будет очень узким, а орбита будет близка к окружности. В соответствующей одномерной задаче r будет совершать малые колебания вблизи точки минимума V .

Задача. Найти угол Φ для орбиты, близкой к круговой радиуса r .

Указание. См. пункт Г ниже.

Рассмотрим теперь случай $r_{\max} = \infty$. Если $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = U_\infty < \infty$, то возможен уход в бесконечность. Если начальная энергия E больше U_∞ , то точка уходит на бесконечность с конечной скоростью $\dot{r}_\infty = \sqrt{2(E - U_\infty)}$. Заметим, что если $U(r)$ стремится к своему пределу медленнее, чем r^{-2} , то эффективный потенциал V на бесконечности будет притягивающим (здесь предполагается, что потенциал U на бесконечности притягивающий).

Если $|U(r)|$ при $r \rightarrow 0$ не растет быстрее $M^2/2r^2$, то $r_{\min} > 0$ и орбита не подходит к центру. Если же $U(r) + M^2/2r^2 \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow 0$, то возможно «падение в центр поля». Попасть в центр поля можно даже за конечное время (например, в поле $U(r) = -1/r^3$).

Задача. Исследовать вид орбиты в случае, когда полная энергия равна значению эффективной энергии V в точке локального максимума.

Г. Центральные поля, в которых все ограниченные орбиты замкнуты. Из следующей цепочки задач вытекает, что все ограниченные орбиты в центральном поле замкнуты только в двух случаях:

$$U = ar^2, \quad a \geq 0 \quad \text{и} \quad U = -k/r, \quad k \geq 0.$$

Задача 1. Докажите, что угол Φ между перицентром и апоцентром равен полупериоду колебаний в одномерной системе с потенциальной энергией $W(x) = U\left(\frac{M}{x}\right) + \frac{x^2}{2}$.

Указание. Подстановка $x = M/r$ дает

$$\Phi = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - W)}}.$$

Задача 2. Найти угол Φ для орбиты, близкой к круговой радиуса r .

$$\text{Ответ. } \Phi \approx \Phi_{\text{кр}} = \pi \frac{M}{r^2 \sqrt{W''(r)}} = \pi \sqrt{\frac{U'}{3U' + rU''}}.$$

Задача 3. При каких U величина $\Phi_{\text{кр}}$ не зависит от радиуса r ?

Ответ. $U(r) = ar^\alpha$ ($\alpha \geq -2$, $\alpha \neq 0$) и $U(r) = b \log r$.

При этом $\Phi_{\text{кр}} = \pi/\sqrt{\alpha + 2}$ (логарифмический случай соответствует $\alpha = 0$).

Например, при $\alpha = 2$ имеем $\Phi_{\text{кр}} = \pi/2$, а при $\alpha = -1$ имеем $\Phi_{\text{кр}} = \pi$.

Задача 4. Пусть $U(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Найти $\lim_{E \rightarrow \infty} \Phi(E, M)$.

Ответ. $\pi/2$.

Указание. Подстановка $x = yx_{\max}$ приводит Φ к виду

$$\Phi = \int_{y_{\min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{2(W^*(1) - W^*(y))}}, \quad W^*(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x_{\max}^2} U\left(\frac{M}{yx_{\max}}\right).$$

При $E \rightarrow \infty$ имеем $x_{\max} \rightarrow \infty$, $y_{\min} \rightarrow 0$, и второе слагаемое в W^* можно откинуть.

Задача 5. Пусть $U(r) = -kr^{-\beta}$, $0 < \beta < 2$. Найти $\Phi_0 = \lim_{E \rightarrow 0} \Phi$.

Ответ. $\Phi_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^\beta - x^2}} = \frac{\pi}{2 - \beta}$. Заметим, что Φ_0 не зависит от M .

Задача 6. Найти все центральные поля, в которых ограниченные орбиты существуют и все замкнуты.

Ответ. $U = ar^2$ или $U = -k/r$.

Решение. Если все ограниченные орбиты замкнуты, то, в частности,

$$\Phi_{\text{кр}} = 2\pi \frac{m}{n} = \text{const.} \quad \text{Согласно задаче 3, } U = ar^\alpha \quad (\alpha \geq -2), \quad \text{либо } U = b \ln r,$$

($\alpha=0$). В обоих случаях $\Phi_{кр} = \pi/\sqrt{\alpha+2}$. Если $\alpha > 0$, то, согласно задаче 4, $\lim_{E \rightarrow \infty} \Phi(E, M) = \pi/2$. Итак, $\Phi_{кр} = \pi/2$, $\alpha=2$. Если $\alpha < 0$, то, согласно задаче 5, $\lim_{E \rightarrow -0} \Phi(E, M) = \pi/(2+\alpha)$. Итак, $\pi/(2+\alpha) = \pi/\sqrt{2+\alpha}$, $\alpha = -1$. В слу-

чае $\alpha=0$ находим $\Phi_{кр} = \pi/\sqrt{2}$, что несоизмеримо с 2π . Итак, все ограниченные орбиты могут быть замкнуты только в полях $U = ar^2$ или $U = -k/r$. В поле $U = ar^2$, $a > 0$, все орбиты замкнуты (это эллипсы с центром в O ; см. пример 1 § 3). В поле $U = -k/r$ все ограниченные орбиты также замкнуты и также эллиптически, как мы сейчас докажем.

Д. Кеплерова задача. Речь идет о движении в центральном поле с потенциалом $U = -k/r$, и, следовательно, $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2r^2}$ (рис. 34).

По общей формуле

$$\varphi = \int \frac{M/r^2 dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}.$$

Интегрируя, получаем

$$\varphi = \arcs \cos \frac{\frac{M}{r} - \frac{k}{M}}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{M^2}}}.$$

К этому выражению следовало бы прибавить произвольную константу. Мы считаем ее равной нулю, что эквивалентно выбору начала

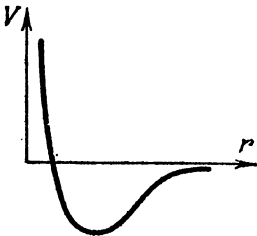


Рис. 34. Эффективный потенциал кеплеровой задачи.

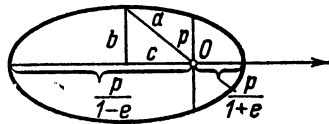


Рис. 35. Кеплеров эллипс.

отсчета угла φ от перигелия. Введем следующие обозначения

$$\frac{M^2}{k} = p, \quad \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2}} = e.$$

Теперь получаем $\varphi = \arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{e}$, т. е.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Это так называемое *фокальное уравнение* конического сечения. Движение ограничено (рис. 35) при $E < 0$. Тогда $e < 1$, т. е.

коническое сечение — эллипс. Величина p называется *параметром* эллипса, а e — *эксцентриситетом*. Первый закон Кеплера, открытый им экспериментально из наблюдений за движением Марса, состоит в том, что планеты описывают эллипсы, в фокусах которых — Солнце.

Если принять, что планеты движутся в центральном поле тяготения, то из первого закона Кеплера вытекает закон тяготения Ньютона: $U = -k/r$ (см. пункт Г выше).

Параметр и эксцентриситет связаны с полуосями соотношениями

$$2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}, \text{ т. е. } a = \frac{p}{1-e^2},$$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, где $c = ae$ — расстояние от центра до фокуса (см. рис. 35).

З а м е ч а н и е. Эллипс с малым эксцентриситетом очень похож на окружность*). Если расстояние фокуса от центра — первого порядка малости, то различие полуосей — второго: $b = a\sqrt{1-e^2} \approx \approx a\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$. Например, в эллипсе с большой полуосью 10 см и эксцентриситетом 0,1 разность полуосей составляет 0,5 мм, а расстояние между фокусом и центром — 1 см.

Эксцентриситеты орбит планет очень малы. Поэтому Кеплер сначала сформулировал свой I закон так: планеты движутся вокруг Солнца по окружностям, но Солнце находится не в центре.

II закон Кеплера: секториальная скорость постоянна — справедлив в любом центральном поле.

III закон Кеплера: время обращения по эллиптической орбите зависит только от величины большой оси.

Квадраты периодов обращения двух планет по разным эллиптическим орбитам относятся как кубы их больших полуосей**).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через T период обращения, через S — площадь, замеченную радиусом-вектором за время T . $2S = MT$, так как $M/2$ — секториальная скорость. Но площадь эллипса $S = \pi ab$, откуда $T = \frac{2\pi ab}{M}$. И так как $a = \frac{M^2/k}{2|E|} = \frac{k}{2|E|}$

$$\left(\text{из } a = \frac{p}{1-e^2}\right), b = \frac{M^2}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2|E|} \frac{M}{k}} = \frac{M}{\sqrt{2|E|}}, \text{ то } T = 2\pi \frac{k}{(\sqrt{2|E|})^3};$$

но $2|E| = \frac{k}{a}$, итак $T = 2\pi a^{3/2} k^{-1/2}$.

*) Капните каплю чая недалеко от центра стакана. Волны соберутся в симметричной точке. Причина в том, что, согласно фокальному определению эллипса, волны, вышедшие из одного фокуса эллипса, собираются в другом.

**) Под планетами понимаются здесь точки, находящиеся в центральном поле.

Заметим, что полная энергия E зависит, таким образом, только от большой полуоси орбиты a , и одинакова для всего семейства эллиптических орбит, от окружности радиуса a до отрезка длины $2a$.

Задача. При запуске спутника на круговую орбиту на расстоянии 300 км от Земли направление скорости отклонилось от расчетного на 1° в сторону к Земле. Как изменится перигей?

Ответ. Высота перигея уменьшится примерно на 110 км.

Указание. Отличие орбиты от окружности — второго порядка малости, и им можно пренебречь. Радиус имеет расчетное значение, так как начальная энергия имеет расчетное значение. Следовательно, орбита получается из расчетной поворотом на угол 1° (рис. 36).

Задача. Как изменится высота перигея, если набранная скорость будет на 1 м/сек меньше расчетной?

Задача. *Первой космической скоростью* называется скорость движения на круговой орбите, радиус которой близок к радиусу Земли. Найдите величину первой космической скорости v_1 и докажите, что $v_2 = \sqrt{2} v_1$ (ср. § 3, Б).

Ответ. 8,1 км/сек.

Задача*). Во время выхода в открытый космос космонавт А. Леонов бросил в сторону Земли заглушку от киноаппарата. Исследовать движение заглушки относительно космического корабля, считая скорость броска равной 10 м/сек.

Ответ. Заглушка будет двигаться относительно космонавта приблизительно по эллипсу с большой осью около 32 км и малой осью около 16 км. Центр эллипса расположен в 16 км впереди космонавта по орбите, а период обращения по эллипсу равен периоду движения по орбите.

Указание. Примем за единицу длины радиус круговой орбиты космического корабля, а единицу времени выберем так, чтобы период обращения по этой орбите был 2л. Мы должны изучить решения уравнения Ньютона

$$\ddot{r} = -r/r^3,$$

близкие к круговому решению $r_0 = 1$, $\varphi_0 = t$. Ищем эти решения в виде

$$r = r_0 + r_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad r_1 \ll 1, \quad \varphi_1 \ll 1.$$

По теореме о дифференцируемости решения по начальным условиям, функции $r_1(t)$ и $\varphi_1(t)$ с точностью до малых выше первого порядка по начальному отклонению удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений (уравнений в вариациях).

Подставляя выражения для r и φ в уравнение Ньютона, получаем после несложных вычислений уравнения в вариациях в виде

$$\ddot{r}_1 = 3r_1 + 2\dot{\varphi}_1, \quad \ddot{\varphi}_1 = -2r_1.$$

Решая эти уравнения при заданных начальных условиях ($r_1(0) = \varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{r}_1(0) = -1/800$), получаем приведенный выше ответ.

Отброшенные малые второго порядка дают эффект порядка 1/800 от полуценного (т. е. порядка десятков метров за один виток). Таким образом, через

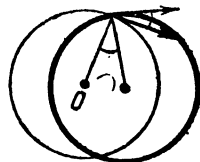


Рис. 36. Орбита, близкая к круговой.

*) Эта задача взята из увлекательной книги В. В. Белецкого «Очерки о движении космических тел», «Наука», М., 1972.

виток заглушка, описав тридцатикилометровый эллипс за полтора часа, возвращается к космическому кораблю со стороны, противоположной Земле, и проходит мимо на расстоянии нескольких десятков метров.

Разумеется, мы пренебрегли в этом расчете отличием орбиты от круговой, влиянием сил, отличных от силы тяготения, и т. п.

§ 9. Движение точки в трехмерном пространстве

В этом параграфе определяется кинетический момент относительно оси и доказывается, что при движении в осесимметричном поле он сохраняется.

Все результаты, полученные для движения в плоскости, легко переносятся на пространственные движения.

А. Потенциальное поле. Рассмотрим движение в потенциальном поле

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \text{ где } U = U(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in E^3.$$

Имеет место закон сохранения энергии:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \left(\text{где } E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) \right).$$

Б. Центральное поле. Закон сохранения момента количества движения $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$. При движении в центральном поле вектор \mathbf{M} не меняется:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0.$$

Всякое центральное поле потенциально (доказывается, как в двумерном случае), и

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = 0,$$

так как $\ddot{\mathbf{r}} = -\partial U/\partial \mathbf{r}$, а вектор $\partial U/\partial \mathbf{r}$ коллинеарен \mathbf{r} ввиду центральности поля.

Следствие. При движении в центральном поле всякая орбита плоская.

Доказательство. $(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = ([\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}], \mathbf{r}) = 0$, следовательно, $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{M}$, а так как $\mathbf{M} = \text{const}$, то вся орбита лежит в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{M} *). Итак, исследование орбит в центральном поле в пространстве сводится к плоской задаче, разобранный в предыдущем параграфе.

Задача. Исследовать движение в центральном поле в n -мерном евклидовом пространстве.

В. Осесимметричное поле. Определение. Векторное поле в E^3 имеет осевую симметрию, если оно инвариантно относительно

*) Случай $\mathbf{M} = 0$ оставляется читателю.

группы вращений пространства, оставляющих на месте каждую точку некоторой оси.

Задача. Докажите, что если поле осесимметрично и потенциально, то его потенциальная энергия имеет вид $U = U(r, z)$, где r, φ, z — цилиндрические координаты.

В частности, отсюда вытекает, что вектор поля лежит в плоскости, проходящей через ось z .

Примером такого поля может служить поле тяготения, созданное телом вращения.

Пусть z — ориентированная ортом e_z ось в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве E^3 , F — вектор евклидова линейного пространства R^3 , O — точка на оси z , $r = x - O \in R^3$ — радиус-вектор точки $x \in E^3$ относительно O (рис. 37).

Определение. Моментом M_z вектора F , приложенного в точке r , относительно оси z называется проекция на эту ось момента вектора F относительно какой-нибудь точки оси z :

$$M_z = (e_z, [r, F]).$$

Число M_z не зависит от выбора точки O на оси z .

Действительно, рассмотрим точку O' на оси, тогда по свойству смешанного произведения: $M'_z = (e_z, [r', F]) = ([e_z, r'], F) = ([e_z, r], F) = M_z$.

Замечание. M_z зависит от выбора направления оси z : если изменить e_z на $-e_z$, то M_z изменит знак.

Теорема. При движении в потенциальном поле с осевой симметрией вокруг оси z момент количества движения относительно оси z сохраняется.

Доказательство. $M_z = (e_z, [r, \dot{r}])$,

$$\dot{M}_z = (e_z, [\dot{r}, \dot{r}]) + (e_z, [r, \ddot{r}]) = 0,$$

так как $\ddot{r} = F$, следовательно, r и \ddot{r} лежат в плоскости, проходящей через ось z , следовательно $[r, \ddot{r}]$ перпендикулярно e_z .

Замечание. Доказательство сохраняет силу для всякого силового поля, у которого вектор силы F лежит в плоскости r и e_z .

§ 10. Движение системы n точек

В этом параграфе доказываются законы сохранения энергии, импульса и кинетического момента для системы материальных точек в E^3 .

А. Внутренние и внешние силы. Уравнениями Ньютона для движения системы n материальных точек с массами m_i и радиусами-векторами $r_i \in E^3$ называются уравнения

$$m_i \ddot{r}_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вектор F_i называется силой, действующей на i -ю точку.

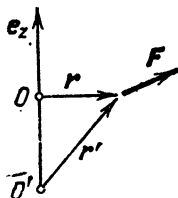


Рис. 37. Момент вектора F относительно оси.

Силы F_i определяются экспериментально. Наблюдения показывают, что часто в системе из двух точек эти силы равны по величине, действуют вдоль прямой, соединяющей точки, и противоположно направлены (рис. 38).

Такие силы называются *силами взаимодействия*. (Пример: силы всемирного тяготения).

Если все силы, действующие на точки системы, являются силами взаимодействия, то система называется *замкнутой*. По определению, в замкнутой системе сила, действующая на i -ю точку, есть

$$F_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ij}.$$

Вектор F_{ij} называется силой, с которой j -я точка действует на i -ю.

Так как силы F_{ij} и F_{ji} противоположны ($F_{ij} = -F_{ji}$), то можно записать их в виде $F_{ij} = f_{ij}e_{ij}$,



Рис. 38. Силы взаимодействия.

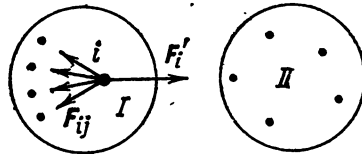


Рис. 39. Внутренние и внешние силы.

где $f_{ij} = f_{ji}$ определяет величину силы, а e_{ij} — орт направления от i -й точки на j -ю.

Если система не замкнута, то часто можно представить действующие на нее силы в виде

$$F_i = \sum F_{ij} + F'_i,$$

где F_{ij} — силы взаимодействия, а $F'_i(r_i)$ — так называемая *внешняя сила*.

Пример (рис. 39). Разобьем замкнутую систему на две части I и II. Сила F_i , приложенная к i -й точке системы I, определяется силами взаимодействия внутри системы I и силами, действующими на i -ю точку со стороны точек системы II, т. е.

$$F_i = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} F_{ij} + F'_i.$$

F'_i есть внешняя сила по отношению к системе I.

Б. Закон сохранения импульса.

Определение. *Импульсом* (или *количеством движения*) системы называется вектор

$$P = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i.$$

Теорема. *Скорость изменения количества движения системы равна сумме всех внешних сил, действующих на точки системы.*

Доказательство.

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i,j} F_{ij} + \sum_i F_i^e = \sum_i F_i^e.$$

Действительно, $\sum_{i,j} F_{ij} = 0$, так как для сил взаимодействия $F_{ij} = -F_{ji}$.

Следствие 1. *Количество движения замкнутой системы сохраняется.*

Следствие 2. *Если сумма внешних сил, действующих на систему, перпендикулярна оси x , то проекция P_x количества движения на ось x сохраняется: $P_x = \text{const}$.*

Определение. *Центром инерции системы называется точка*

$$r = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}.$$

Задача. Доказать, что центр инерции определен корректно, т. е. не зависит от выбора начала отсчета радиусов-векторов.

Количество движения системы равно количеству движения точки, лежащей в центре инерции системы и имеющей массу, равную $\sum m_i$.

В самом деле, $(\sum m_i) r = \sum (m_i r_i)$, откуда $(\sum m_i) \dot{r} = \sum m_i \dot{r}_i$.

Мы можем теперь сформулировать теорему о количестве движения как теорему о движении центра инерции.

Теорема. *Центр инерции системы движется так, как если бы все массы были сосредоточены в нем и все силы были приложены к нему.*

Доказательство. $(\sum m_i) \dot{r} = P$, поэтому $(\sum m_i) \ddot{r} = \frac{dP}{dt} = \sum_i F_i$.

Следствие. *Если система замкнута, то центр инерции ее движется равномерно и прямолинейно.*

В. Закон сохранения кинетического момента.

Определение. *Кинетический момент материальной точки относительно точки O есть момент вектора импульса относительно точки O :*

$$M = [r, m\dot{r}].$$

Кинетическим моментом системы относительно точки O называется сумма кинетических моментов точек системы:

$$M = \sum_{i=1}^n [r_i, m_i \dot{r}_i].$$

Теорема. *Скорость изменения кинетического момента системы равна сумме моментов внешних сил, действующих на точки системы.*

Доказательство.

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^n [\dot{r}_i, m_i \dot{r}_i] + \sum_{i=1}^n [r_i, m_i \ddot{r}_i].$$

Первое слагаемое равно нулю, а второе, согласно уравнениям Ньютона, равно

$$\sum_{i=1}^n [r_i, F_i] = \sum_{i=1}^n \left[r_i, \left(\sum_{i \neq j} F_{ij} + F_i' \right) \right] = \sum_{i=1}^n [r_i, F_i'].$$

Действительно, сумма моментов двух сил взаимодействия равна нулю, ибо

$$F_{ij} = -F_{ji}, [r_i, F_{ij}] + [r_j, F_{ji}] = [(r_i - r_j), F_{ij}] = 0.$$

Поэтому равна нулю сумма моментов всех сил взаимодействия:

$$\sum_{i=1}^n \left[r_i, \sum_{i \neq j} F_{ij} \right] = 0. \text{ Итак, } \frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^n [r_i, F_i'], \text{ ч. т. д.}$$

Следствие 1. (Закон сохранения кинетического момента). *Если система замкнута, то $M = \text{const}$.*

Обозначим сумму моментов внешних сил через $N = \sum_{i=1}^n [r_i, F_i']$.

Тогда по доказанной теореме $\frac{dM}{dt} = N$, откуда вытекает

Следствие 2. *Если момент внешних сил относительно оси z равен нулю, то M_z сохраняется.*

Г. Закон сохранения энергии.

Определение. *Кинетической энергией точки массы m называется*

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2}.$$

Определение. *Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий точек:*

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2},$$

где m_i — массы точек, \dot{r}_i — их скорости.

Теорема. *Приращение кинетической энергии системы равно сумме работ всех сил, действующих на точки системы.*

Доказательство.

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_i, m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{F}_i).$$

Поэтому

$$T(t) - T(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dT}{dt} dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t (\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{F}_i) dt = \sum_{i=1}^n A_i, \text{ ч. т. д.}$$

Конфигурационное пространство системы n материальных точек в E^3 есть прямое произведение n евклидовых пространств: $E^{3n} = E^3 \times \dots \times E^3$. Оно имеет само структуру евклидова пространства. Обозначим через $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ радиус-вектор точки конфигурационного пространства, а через $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$ — вектор силы. Предыдущую теорему можно записать в виде

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t_1)} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{F}) dt.$$

Иными словами:

Приращение кинетической энергии равно работе $3n$ -мерной «силы» \mathbf{F} на «пути» $\mathbf{r}(t)$ в конфигурационном пространстве.

Определение. Система называется *потенциальной* (или *консервативной*), если силы зависят только от положения точек системы: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, и работа \mathbf{F} на любом пути зависит только от начальной и конечной точек пути:

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \Phi(M_1, M_2).$$

Теорема. Для потенциальности системы необходимо и достаточно, чтобы существовала потенциальная энергия, т. е. такая функция $U(\mathbf{r})$, что

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Доказательство. См. § 4, Б.

Теорема. Полная энергия потенциальной системы $E = T + U$ при движении сохраняется: $E(t_1) = E(t_0)$.

Доказательство. По доказанному выше

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t_1)} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}(t_0)) - U(\mathbf{r}(t_1)), \text{ ч. т. д.}$$

Пусть все силы, действующие на точки системы, делятся на силы взаимодействия и внешние силы:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{\text{вн}},$$

где $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = f_{ij} \mathbf{r}_{ij}$.

Утверждение. Если силы взаимодействия зависят только от расстояний, $f_{ij} = f_{ij}(|r_i - r_j|)$, то они потенциальны.

Доказательство. Если система состоит всего из двух точек i, j , то, как легко проверить, потенциальная энергия взаимодействия дается формулой

$$U_{ij}(r) = - \int_{r_0}^r f_{ij}(\rho) d\rho.$$

Действительно, тогда

$$- \frac{\partial U_{ij}(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} = f_{ij} \frac{\partial |r_i - r_j|}{\partial r_i} = f_{ij} e_{ij}.$$

Поэтому потенциальная энергия взаимодействия всех точек будет

$$U(r) = \sum_{i>j} U_{ij}(|r_i - r_j|), \text{ ч. т. д.}$$

Если и внешние силы потенциальны, т. е. $F'_i = -\partial U'_i / \partial r_i$, то система потенциальна, и ее полная потенциальная энергия

$$U(r) = \sum_{i>j} U_{ij} + \sum_i U'_i.$$

Для такой системы сохраняется полная механическая энергия

$$E = T + U = \sum_i \frac{\dot{r}_i^2}{2} + \sum_{i>j} U_{ij} + \sum_i U'_i.$$

Если же система не потенциальна, то полная механическая энергия, вообще говоря, не сохраняется.

Определение. Уменьшение механической энергии, $E(t_0) - E(t_1)$, называется приращением *немеханической энергии* E' :

$$E'(t_1) - E'(t_0) = E(t_0) - E(t_1).$$

Теорема (закон сохранения энергии). Полная энергия $H = E + E'$ сохраняется.

Разумеется, эта теорема — очевидное следствие предыдущего определения. Ее значение состоит в том, что в конкретных физических системах для величины немеханической энергии E' найдены выражения через другие физические величины (температуру и т. п.).

Д. Пример. Задача двух тел. Пусть две точки с массами m_1, m_2 взаимодействуют с потенциалом U так, что уравнения движения имеют вид

$$m_1 \ddot{r}_1 = - \frac{\partial U}{\partial r_1}, \quad m_2 \ddot{r}_2 = - \frac{\partial U}{\partial r_2}, \quad U = U(|r_1 - r_2|).$$

Теорема. Изменение $r = r_1 - r_2$ в задаче двух тел такое же, как при движении точки массы $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в поле с потенциалом $U(|r|)$.

Обозначим через r_0 радиус-вектор центра инерции

$$r_0 = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}.$$

Согласно теореме о сохранении количества движения точка r_0 движется равномерно и прямолинейно.

Рассмотрим теперь вектор $r = r_1 - r_2$. Умножая первое из уравнений движения на m_2 , второе на m_1 и вычитая, находим $m_1 m_2 \ddot{r} = = - (m_1 + m_2) \frac{\partial U}{\partial r}$, где $U = U(|r_1 - r_2|) = = U(|r|)$.

В частности, в случае ньютоновского притяжения точки описывают вокруг их общего центра инерции конические сечения с фокусом в центре инерции (рис. 40).

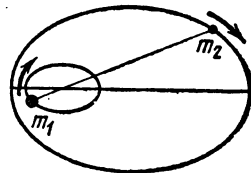


Рис. 40. Задача двух тел.

Задача. Определить большую полуось эллипса, который описывает центр Земли вокруг общего центра инерции Земли и Луны. Где расположен этот центр инерции: внутри Земли или вне? (Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли.)

§ 11. Соображения подобия

В некоторых случаях важную информацию можно получить, не решая уравнений движения, из одного их вида, используя так называемые соображения подобия и размерности. Сущность этих соображений состоит в том, что при изменении масштабов (времени, длины, массы и т. д.), при котором уравнения движения сохраняют свой вид.

А. Пример. Пусть $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Положим $t_1 = \alpha t$, $m_1 = \alpha^2 m$. Тогда $r(t_1)$ удовлетворяет уравнению $m_1 \frac{d^2 r}{dt_1^2} = - \frac{\partial U}{\partial r}$. Иными словами:

Если уменьшить массу точки в четыре раза, то она сможет пройти ту же орбиту в том же силовом поле вдвое быстрее).*

Б. Задача. Пусть потенциальная энергия центрального поля — однородная функция степени ν :

$$U(\alpha r) = \alpha^\nu U(r) \text{ для любого } \alpha > 0.$$

Доказать, что если кривая γ есть орбита движения, то гомотетичная кривая $\alpha\gamma$ также есть орбита (при соответствующих начальных условиях). Определить отношение времен обращения

*) Здесь предполагается, что U от m не зависит. В поле тяготения потенциальная энергия U пропорциональна m , и поэтому период не зависит от массы движущейся точки m .

по этим орбитам. Вывести отсюда изохронность колебаний маятника ($\nu = 2$) и III закон Кеплера ($\nu = -1$).

Задача. Считая, что радиус планеты в α раз меньше радиуса Земли, а масса в β раз меньше, найти, во сколько раз ускорение силы тяжести, а также первая и вторая космические скорости на ней меньше, чем на Земле.

Ответ. $\gamma = \beta\alpha^{-2}$, $\delta = \sqrt{\beta/\alpha}$.

Например, для Луны $\alpha \approx 3,7$, $\beta \approx 81$. Следовательно, ускорение силы тяжести составляет примерно 1/6 земного ($\gamma \approx 6$), а космические скорости — примерно 1/5 земных ($\delta \approx 4,7$).

Задача *). Животным пустыни приходится преодолевать большие расстояния между источниками воды. Как зависит максимальное время, которое может бежать животное, от размеров животного L ?

Ответ. Прямо пропорционально L .

Решение. Запас воды пропорционален объему тела, т. е. L^3 , испарение же — площади поверхности, т. е. L^2 . Поэтому максимальное время пробега* от одного источника до другого прямо пропорционально L .

Заметим, что максимальное расстояние, которое может пробежать животное, также растет пропорционально L (см. следующую задачу).

Задача *). Как зависит скорость бега животного по ровному месту и в гору от размеров животного L ?

Ответ. По ровному месту $\sim L^0$, в гору $\sim L^{-1}$.

Решение. Мощность, развиваемая животным, пропорциональна L^2 (к. п. д. мышц примерно постоянен — около 25%, остальные 75% химической энергии переходят в тепло; теплоотдача же пропорциональна поверхности тела, т. е. L^2 , значит, и полезная мощность пропорциональна L^2).

Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна квадрату скорости и площади поперечного сечения; затрачиваемая на ее преодоление мощность пропорциональна поэтому $v^2 L^2 v$. Итак, $v^3 L^2 \sim L^2$, следовательно, $v \sim L^0$. И действительно, скорость бега по ровному месту у животных не мельче зайца и не крупнее лошади практически не зависит от размера особи.

Для бега в гору необходима мощность $mgv \sim L^3 v$; поскольку развиваемая мощность $\sim L^2$, находим $v \sim L^{-1}$. И действительно, собака легко взбегает на холм, а площадь замедляет шаг.

Задача *). Как зависит от размеров животного высота прыжка?

Ответ. $\sim L^0$.

Решение. Нужная для прыжка на высоту h энергия пропорциональна $L^3 h$, а совершаемая силой мышц F работа пропорциональна FL . Сила F пропорциональна L^2 (так как прочность костей пропорциональна площади их сечения). Итак, $L^3 h \sim L^2 L$, т. е. высота прыжка не зависит от размеров животного. И действительно, тушканчик и кенгуру прыгают примерно на одинаковую высоту.

*) Дж. Смит, Математические идеи в биологии, «Мир», 1970.

ЧАСТЬ II

ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА

Лагранжева механика описывает движение механической системы при помощи конфигурационного пространства. Конфигурационное пространство механической системы имеет структуру дифференцируемого многообразия. На дифференцируемом многообразии действует группа диффеоморфизмов. Основные понятия и теоремы лагранжевой механики (даже если они и формулируются в терминах локальных координат) инвариантны относительно этой группы *).

Лагранжева механическая система задается многообразием («конфигурационным пространством») и функцией на его касательном расслоении («функцией Лагранжа»).

Каждая однопараметрическая группа диффеоморфизмов конфигурационного пространства, оставляющая неизменной функцию Лагранжа, определяет закон сохранения (т. е. первый интеграл уравнений движения).

Ньютонова потенциальная система — частный случай лагранжевой (конфигурационное пространство в этом случае евклидово, а функция Лагранжа равна разности кинетической и потенциальной энергий).

Лагранжева точка зрения позволяет исследовать до конца ряд важных задач механики, например в теории малых колебаний и в динамике твердого тела.

ГЛАВА 3

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

В этой главе показано, что движения ньютоновой потенциальной системы являются экстремалами вариационного принципа, так называемого «принципа наименьшего действия Гамильтона».

Из этого факта вытекает много важных следствий, например способ быстро писать уравнения движения в криволинейных системах координат, а также ряд качественных выводов, например теорема о возвращении в окрестность начальной точки.

*) И даже относительно более широкой группы преобразований, затрагивающих также и время.

В этой главе используется координатное n -мерное пространство. Вектор такого пространства x есть набор чисел (x_1, \dots, x_n) . Соответственно $\partial f/\partial x$ означает $(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$, $(a, b) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

§ 12. Вариационное исчисление

Для дальнейшего нам потребуются некоторые сведения из вариационного исчисления. Более подробное изложение см., например, в учебниках М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника «Курс вариационного исчисления», М. Л. 1938 или Г. Е. Шилова «Математический анализ. Специальный курс», Физматгиз, 1961.

Вариационное исчисление занимается отысканием экстремумов функций, область определения которых — бесконечномерное пространство: пространство кривых. Такие функции называются *функционалами*.

Примером функционала является, например, длина кривой на евклидовой плоскости

$$\gamma = \{t, x : x(t) = x; t_0 \leq t \leq t_1\},$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt.$$

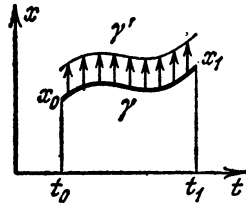


Рис. 41. Вариация кривой.

Вообще функционалом называется всякое отображение пространства кривых в числовую ось.

Рассмотрим «близкую» к γ кривую $\gamma' = \{t, x : x = x(t) + h(t)\}$. Будем обозначать ее $\gamma' = \gamma + h$. Рассмотрим приращение функционала Φ , $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$ (рис. 41).

А. Вариации.

Определение. Функционал Φ называется *дифференцируемым* *), если $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R$, где F зависит от h линейно (т. е. при фиксированном γ $F(h_1 + h_2) = F(h_1) + F(h_2)$, $F(ch) = cF(h)$), а $R(h, \gamma) = O(h^2)$ в том смысле, что из $|h| < \varepsilon$, $\left| \frac{dh}{dt} \right| < \varepsilon$ вытекает $|R| < C\varepsilon^2$. Линейная часть приращения, $F(h)$, называется *дифференциалом*.

Можно доказать, что если функционал Φ дифференцируем, то его дифференциал определен *однозначно*. Дифференциал функционала называют также его *вариацией*, а h называют *вариацией кривой*.

*) Следовало бы указать, на каком классе кривых определен функционал Φ и какое линейное пространство пробегает h . Можно считать, например, что в обоих случаях речь идет о бесконечно-дифференцируемых функциях.

Пример. Пусть $\gamma = \{t, x: x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ — кривая на плоскости t, x ; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $L = L(a, b, c)$ — дифференцируемая функция трех переменных. Составим функционал:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

Например, в частном случае $L = \sqrt{1 + b^2}$ получаем длину кривой γ .

Теорема. Функционал $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ дифференцируемый, и его дифференциал дается формулой

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} [L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t)] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + O(h^2) = F(h) + R, \end{aligned}$$

где $F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt$, $R = O(h^2)$. Интегрируя по частям, находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1}, \text{ ч. т. д.}$$

Б. Экстремали.

Определение. Экстремалью дифференцируемого функционала $\Phi(\gamma)$ называется такая кривая γ , что $F(h, \gamma) = 0$ при любом h .

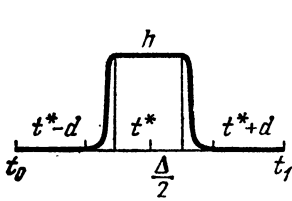
(Точно так же, как γ — стационарная точка функции, если в этой точке дифференциал равен нулю.)

Теорема. Чтобы кривая $\gamma: x = x(t)$ была экстремалью функционала $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ на пространстве кривых, проходящих через точки $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой $x(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Лемма. Если непрерывная функция $f(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, такова, что $\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt = 0$ для любой непрерывной *) функции $h(t)$, для которой $h(t_0) = h(t_1) = 0$, то $f(t) \equiv 0$.

Доказательство леммы. Пусть $f(t^*) > 0$, $t_0 < t^* < t_1$. В силу непрерывности $f(t) > c$ в некоторой окрестности Δ точки t^* : $t_0 < t^* - d < t < t^* + d < t_1$; пусть $h(t) = 0$ вне Δ , $h(t) > 0$ в Δ и $h(t) = 1$ в Δ ($t^* - \frac{d}{2} < t < t^* + \frac{d}{2}$). Тогда, очевидно,



$\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt \geq cd > 0$ (рис. 42). Полученное противоречие доказывает, что $f(t^*) = 0$ для всех $t_0 < t^* < t_1$, ч. т. д.

Доказательство теоремы. По предыдущей теореме

Рис. 42. Построение функции h .

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Если γ — экстремаль, то $F(h) = 0$ при всех h , для которых $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Поэтому при всех таких $h(t)$ $\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt = 0$, где $f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x}$. По лемме $f(t) \equiv 0$. Обратное, если $f(t) \equiv 0$, то, очевидно, $F(h) \equiv 0$, ч. т. д.

Пример. Проверим, что экстремали длины — прямые. Имеем:

$$L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c, \quad \dot{x} = c_1, \quad x = c_1 t + c_2.$$

В. Уравнение Эйлера — Лагранжа.

Определение. Уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

называется *уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала*

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt.$$

*) Или хотя бы для любой бесконечно дифференцируемой функции h .

Пусть теперь \mathbf{x} — вектор n -мерного координатного пространства \mathbf{R}^n , $\gamma = \{t, \mathbf{x}: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ — кривая $n+1$ -мерного пространства $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — функция $2n+1$ аргумента. Аналогично предыдущей доказывается

Теорема. *Чтобы кривая γ была экстремалью функционала $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$ на пространстве кривых $\mathbf{x}(t)$, соединяющих две данные точки (t_0, \mathbf{x}_0) , (t_1, \mathbf{x}_1) , необходимо и достаточно выполнение вдоль нее уравнения Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0.$$

Это — система n уравнений второго порядка, и решение зависит от $2n$ произвольных постоянных. Для нахождения их служат $2n$ условий $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$.

Задача. Приведите примеры, когда экстремалей, соединяющих две данные точки, много и когда их нет совсем.

Г. Важное замечание. *Свойство кривой γ быть экстремалью функционала не зависит от выбора системы координат.*

Например, один и тот же функционал — длина кривой — в декартовых и полярных координатах дается разными формулами

$$\Phi_{\text{дек}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt, \quad \Phi_{\text{пол}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} dt.$$

Экстремали одни и те же — прямые линии на плоскости. Уравнения прямых в декартовых и полярных координатах задаются различными функциями: $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$; $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Однако и те и другие функции удовлетворяют уравнению Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0,$$

только в первом случае $x_{\text{дек}} = x_1$, x_2 ; $L_{\text{дек}} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$, а во втором — $x_{\text{пол}} = r$, φ ; $L_{\text{пол}} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$.

Таким образом, мы легко можем написать дифференциальное уравнение семейства всех прямых в любых координатах.

Задача. Напишите дифференциальное уравнение семейства всех прямых в полярных координатах на плоскости.

§ 13. Уравнения Лагранжа

Здесь указан вариационный принцип, экстремальями которого являются решения ньютоновских уравнений движения потенциальной системы.

Сравним уравнения динамики Ньютона

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \quad (1)$$

с уравнением Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0.$$

А. Принцип наименьшего действия Гамильтона.

Теорема. Движения механической системы (1) совпадают с экстремальми функционала $\bar{\Phi}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt$, где $L = T - U$ — разность кинетической и потенциальной энергий.

Доказательство. Так как $U = U(\mathbf{r})$, $T = \sum m_i \frac{\dot{r}_i^2}{2}$, то имеем $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} = m_i \dot{r}_i$, $\frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$.

Следствие. Пусть (q_1, \dots, q_{3n}) — любые координаты в конфигурационном пространстве системы n материальных точек. Тогда изменение q со временем подчиняется уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \text{где } L = T - U.$$

Доказательство. По предыдущей теореме движение — экстремаль функционала $\int L dt$. Следовательно, в любой системе координат удовлетворяется записанное в этой системе координат уравнение Эйлера — Лагранжа, ч. т. д.

Определение. В механике приняты следующие наименования: $L(q, \dot{q}, t) = T - U$ — функция Лагранжа, лагранжиан, q_i — обобщенные координаты, \dot{q}_i — обобщенные скорости, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ — обобщенные импульсы, $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ — обобщенные силы, $\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$ — действие, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ — уравнения Лагранжа.

Последняя теорема называется «принципом наименьшего действия в форме Гамильтона» потому, что в некоторых случаях движение $q(t)$ является не только экстремалью, но и доставляет наименьшее значение функционалу действия $\int_{t_0}^{t_1} L dt$.

Б. Простейшие примеры.

Пример 1. Для свободной материальной точки в E^3

$$L = T = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2};$$

в декартовых координатах $q_i = r_i$ находим

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2).$$

Здесь обобщенные скорости — компоненты вектора скорости, обобщенные импульсы $p_i = m\dot{q}_i$ — компоненты вектора количества движения; уравнения

Лагранжа совпадают с уравнениями Ньютона $\frac{dp}{dt} = 0$. Экстремали являются прямыми линиями. Из принципа Гамильтона следует, что прямые являются не только кратчайшими (т. е. экстремалими длины $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} dt$), но и экстремалими действия $\int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) dt$.

Задача. Докажите, что этот экстремум есть минимум.

Пример 2. Рассмотрим движение в плоском центральном поле в полярных координатах $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$. Из соотношения $\dot{r} = \dot{r}e_r + \dot{\varphi}e_\varphi$ находим кинетическую энергию $T = \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ и лагранжиан $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$, $U = U(q_1)$.

Обобщенные импульсы будут $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, т. е.

$$p_1 = m\dot{r}, \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}.$$

Первое уравнение Лагранжа $\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1}$ принимает вид

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Это уравнение мы уже получили в § 8.

Так как $q_2 = \varphi$ не входит в L , имеем $\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$. Поэтому второе уравнение Лагранжа будет $\dot{p}_2 = 0$, $p_2 = \text{const}$. Это — закон сохранения кинетического момента.

В общем случае, когда поле не центральное, $U = U(r, \varphi)$, находим $p_2 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$.

Это уравнение можно переписать в виде $\frac{d}{dt}(M, e_z) = N$, где $N = ([r, F], e_z)$, $F = -\frac{\partial U}{\partial r}$. (Скорость изменения кинетического момента относительно оси z равна моменту силы F относительно оси z .)

Действительно, имеем $dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi = -(F, dr) = -(F, e_r) dr - r(F, e_\varphi) d\varphi$, поэтому $-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r(F, e_\varphi) = r([e_r, F], e_z) = ([r, F], e_z)$.

Разобранный пример подсказывает следующее обобщение закона сохранения кинетического момента.

Определение. Координата q_i называется *циклической*, если она не входит в функцию Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Теорема. *Обобщенный импульс, соответствующий циклической координате, сохраняется: $p_i = \text{const}$.*

Доказательство. Согласно уравнению Лагранжа,

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ ч. т. д.}$$

§ 14. Преобразование Лежандра

Преобразование Лежандра — вспомогательный математический прием, состоящий в переходе от функций на линейном пространстве к функциям на сопряженном пространстве. Преобразование Лежандра сходно проективной двойственности и тангенциальным координатам в алгебраической геометрии или построению сопряженного банахова пространства в анализе. Оно часто встречается в физике (например, при определении термодинамических величин).

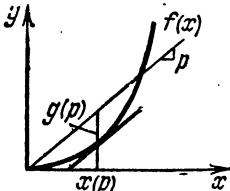


Рис. 43. Преобразование Лежандра.

А. Определение. Пусть $y = f(x)$ — выпуклая функция, $f''(x) > 0$.

Преобразованием Лежандра функции f называется новая функция g нового переменного p , которая строится следующим образом (рис. 43). Нарисуем на плоскости x, y график функции f . Пусть дано число p . Рассмотрим прямую $y = px$. Возьмем точку

$x = x(p)$, в которой кривая всего дальше от прямой по вертикали: функция $px - f(x) = F(p, x)$ в точке $x(p)$ имеет максимум по x при фиксированном p ; тогда $g(p) = F(p, x(p))$.

Точка $x(p)$ определяется из условия экстремума: $\partial F / \partial x = 0$, т.е. $f'(x) = p$. Ввиду выпуклости f такая точка $x(p)$ единственна*).

Б. Примеры.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$. Тогда $F(p, x) = px - x^2$, $x(p) = \frac{p}{2}$, $g(p) = \frac{1}{4}p^2$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \frac{mx^2}{2}$. Тогда $g(p) = \frac{p^2}{2m}$.

Пример 3. Пусть $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. Тогда $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ($\alpha > 1$, $\beta > 1$).

*) Если существует.

Задача. Покажите, что область определения g может оказаться одна точка, отрезок или луч, если функция f определена на всей оси x . Докажите, что если функция f определена на отрезке, то функция g определена на всей оси p .

Пример 4. Пусть $f(x)$ — выпуклая ломаная. Тогда $g(p)$ — тоже выпуклая ломаная, причем вершинам $f(x)$ соответствуют отрезки $g(p)$, а отрезкам $f(x)$ — вершины $g(p)$. Например, угол, изображенный на рис. 44, при преобразовании Лежандра переходит в отрезок.

В. Инволютивность. Будем считать функцию f нужное число раз дифференцируемой, а $f''(x) > 0$. Легко проверить, что преобразование Лежандра переводит выпуклые функции в выпуклые. Поэтому его можно применить дважды.

Теорема. Преобразование Лежандра инволютивно, т. е. его квадрат равен тождественному преобразованию: если f при преобразовании Лежандра переходит в g , то преобразование Лежандра от g будет снова f .

Доказательство. Чтобы сделать преобразование Лежандра функции g переменного p , мы должны, по определению, рассмотреть новое независимое переменное (обозначим его через x), составить функцию

$$G(x, p) = xp - g(p),$$

найти точку $p(x)$, в которой G имеет максимум:

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 0, \quad \text{т. е. } g'(p) = x,$$

и тогда преобразованием Лежандра $g(p)$ будет функция от x , равная $G(x, p(x))$.

Докажем, что $G(x, p(x)) = f(x)$. С этой целью заметим, что $G(x, p) = xp - g(p)$ имеет простой геометрический смысл: это ордината касательной к графику $f(x)$, имеющей наклон p , при абсциссе x (рис. 45). Действительно, при фиксированном p функция $G(x, p)$ есть линейная функция от x , причем $\partial G/\partial x = p$, и при $x = x(p)$ имеем $G(x, p) = xp - g(p) = f(x)$ по определению $g(p)$.

Зафиксируем теперь $x = x_0$ и будем менять p . Тогда значения $G(x, p)$ будут ординатами точек пересечения прямой $x = x_0$ с касательными к графику $f(x)$, имеющими разный наклон p . Из выпуклости графика следует, что все эти касательные лежат ниже кривой, а потому максимум $G(x, p)$ при фиксированном x (p_0) равен $f(x)$ (и достигается при $p = p(x_0) = f'(x_0)$), ч. т. д.

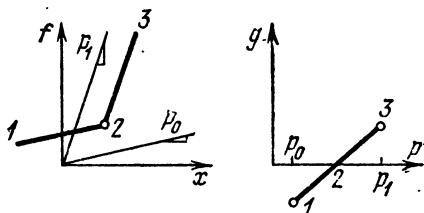


Рис. 44. Преобразование Лежандра переводит угол в отрезок.

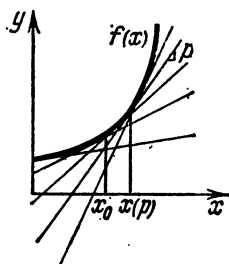


Рис. 45. Инволютивность преобразования Лежандра.

Следствие*). Пусть дано семейство прямых $y = px - g(p)$. Тогда огибающая имеет уравнение $y = f(x)$, где f — преобразование Лежандра функции g .

Г. Неравенство Юнга.

Определение. Две функции f, g , являющиеся преобразованиями Лежандра друг друга, называются двойственными по Юнгу.

По определению преобразования Лежандра, $F(x, p) = px - f(x) \leq g(p)$ при любых x, p . Отсюда вытекает неравенство Юнга

$$px \leq f(x) + g(p).$$

Пример 1. Если $f(x) = \frac{x^2}{2}$, то $g(p) = \frac{p^2}{2}$, и мы получаем известное неравенство $px \leq \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$ для всех x, p .

Пример 2. Если $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, то $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, и мы получаем неравенство Юнга

$$px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

для всех $x > 0, p > 0, \alpha > 1, \beta > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Д. Случай многих переменных. Пусть теперь $f(x)$ — выпуклая функция векторного переменного $x = (x_1, \dots, x_n)$ (т. е. квадратичная форма $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx, dx\right)$ положительно определена). Тогда преобразованием Лежандра называется функция $g(p)$ векторного переменного $p = (p_1, \dots, p_n)$, определенная аналогичными предыдущими равенствами $g(p) = F(p, x(p)) =$

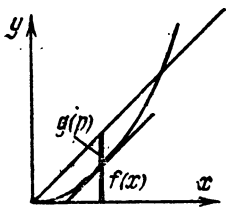


Рис. 46. Преобразование Лежандра квадратичной формы.

$$\max_x F(p, x), F(p, x) = (p, x) - f(x), p = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Все предыдущие рассуждения, в том числе неравенство Юнга, без изменений переносятся на этот случай.

Задача. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция в линейном пространстве \mathbb{R}^n . Обозначим через \mathbb{R}^{n*} сопряженное линейное пространство. Покажите, что предыдущие формулы задают вполне определенное отображение

$g: \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}$ (при условии, что линейная форма $df|_x$ пробегает все пространство \mathbb{R}^{n*} , когда x пробегает \mathbb{R}^n).

Задача. Пусть f — квадратичная форма: $f(x) = \sum f_{ij} x_i x_j$. Показать, что ее преобразование Лежандра есть снова квадратич-

*) Легко усмотреть, что это — теория «уравнения Клеро».

ная форма $g(p) = \sum g_{ij} p_i p_j$, причем значения обеих форм в соответствующих точках совпадают (рис. 46):

$$f(x(p)) = g(p), \quad g(p(x)) = f(x).$$

§ 15. Уравнения Гамильтона

После преобразования Лежандра лагранжева система дифференциальных уравнений второго порядка переходит в замечательно симметричную систему $2n$ уравнений первого порядка — систему *уравнений Гамильтона* (или *канонических уравнений*).

А. Эквивалентность уравнений Лагранжа и Гамильтона. Рассмотрим систему уравнений Лагранжа $\dot{p} = \partial L / \partial q$, где $p = \partial L / \partial \dot{q}$, заданную функцией Лагранжа $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, которую мы предположим выпуклой *) относительно второго аргумента \dot{q} .

Теорема. Система уравнений Лагранжа эквивалентна системе $2n$ уравнений первого порядка — уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= - \frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \end{aligned}$$

где $H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$ есть преобразование Лежандра функции Лагранжа, рассматриваемой как функция от \dot{q} .

Доказательство. По определению, преобразование Лежандра $L(q, \dot{q}, t)$ по \dot{q} есть функция $H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q})$, в которой \dot{q} выражено через p по формуле $p = \partial L / \partial \dot{q}$, и которая зависит еще от параметров q, t . Эта функция H называется функцией Гамильтона.

Полный дифференциал функции Гамильтона

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

равен полному дифференциалу $p\dot{q} - L$ при $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$:

$$dH = \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Оба выражения для dH должны совпадать. Поэтому

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = - \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Принимая во внимание уравнение Лагранжа $\dot{p} = \partial L / \partial q$, получаем уравнения Гамильтона.

*) В приложениях эта выпуклая функция будет обычно положительно определенной квадратичной формой.

Итак, если $q(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, то $(p(t), q(t))$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона. Обратное доказывается аналогичным образом. Итак, системы Лагранжа и Гамильтона эквивалентны, ч. т. д.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема относится ко всем вариационным задачам, а не только к лагранжевым уравнениям механики.

Б. Функция Гамильтона и энергия.

Пример. Пусть уравнения все-таки механические, и функция Лагранжа имеет обычный вид $L = T - U$, где кинетическая энергия T — квадратичная форма относительно \dot{q} :

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ji}(q, t); \quad U = U(q).$$

Теорема. При сделанных предположениях функция Гамильтона H есть полная энергия $H = T + U$.

Доказательство основано на лемме о преобразовании Лежандра квадратичной формы.

Лемма. Значения квадратичной формы $f(x)$ и ее преобразования Лежандра $g(p)$ в соответствующих точках совпадают: $f(x) = g(p)$.

Пример. Для формы $f(x) = x^2$ это известное свойство касательной к параболу. Для формы $f(x) = \frac{mx^2}{2}$ имеем $p = mx$ и $g(p) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mx^2}{2} = f(x)$.

Доказательство леммы. По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\frac{\partial f}{\partial x} x = 2f.$$

Следовательно, $g(p(x)) = px - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} x - f = 2f(x) - f(x) = f(x)$, ч. т. д.

Доказательство теоремы. Рассуждая, как в лемме, находим $H = p\dot{q} - L = 2T - (T - U) = T + U$, ч. т. д.

Пример. Для одномерного движения

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

В этом случае $T = \frac{1}{2} \dot{q}^2$, $U = U(q)$, $p = \dot{q}$, $H = \frac{p^2}{2} + U(q)$, и уравнения Гамильтона принимают вид

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

Этот пример позволяет быстро вспомнить, в каком из двух уравнений Гамильтона стоит знак минус.

Из теоремы об эквивалентности уравнений движения гамильтоновой системе вытекает ряд важных следствий. Например, закон сохранения энергии принимает простой вид:

Следствие 1. Справедливо равенство $dH/dt = \partial H/\partial t$ и, в частности, для систем, функция Гамильтона которых явно не зависит от времени ($\partial H/\partial t = 0$), выполняется закон сохранения функции Гамильтона: $H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = \text{const}$.

Доказательство. Рассмотрим изменение H вдоль траектории $H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t)$. Тогда в силу уравнений Гамильтона $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$, ч. т. д.

В. Циклические координаты. Рассматривая центральное поле, мы заметили, что введение полярных координат задача сводится к одномерной. Оказывается, всякая симметрия задачи, позволяющая выбрать систему координат \mathbf{q} так, чтобы от некоторых координат функция Гамильтона не зависела, позволяет найти некоторые первые интегралы и свести такую задачу к задаче с меньшим числом координат.

Определение. Если координата q_1 не входит в функцию Гамильтона $H(p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n; t)$, так что $\partial H/\partial q_1 = 0$, то такая координата называется *циклической* (термин происходит от частного случая — угловая координата φ в центральном поле). Очевидно, координата q_1 циклическая тогда и только тогда, когда она не входит в функцию Лагранжа ($\partial L/\partial q_1 = 0$). Из гамильтонова вида уравнений движения вытекает

Следствие 2. Пусть q_1 — циклическая координата. Тогда p_1 — первый интеграл. При этом изменение остальных координат со временем такое же, как в системе с $n-1$ независимой координатой q_2, \dots, q_n и с функцией Гамильтона

$$H(p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n, t, c),$$

зависящей от параметра $c = p_1$.

Доказательство. Положим $\mathbf{p}' = (p_2, \dots, p_n)$, $\mathbf{q}' = (q_2, \dots, q_n)$. Тогда система Гамильтона примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{q}' &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}'}, & \frac{d}{dt} q_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}' &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}'}, & \frac{d}{dt} p_1 &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение показывает, что $p_1 = \text{const}$. Поэтому в систему уравнений для \mathbf{p}' , \mathbf{q}' величина p_1 входит лишь как параметр в функции Гамильтона. После того как эта система $2n-2$ уравнений решена, уравнение для q_1 принимает вид

$$\frac{d}{dt} q_1 = f(t), \quad \text{где} \quad f(t) = \frac{\partial}{\partial p_1} H(p_1, \mathbf{p}'(t), \mathbf{q}'(t), t),$$

и легко интегрируется.

Почти все решенные в механике задачи решаются с помощью следствия 2.

Следствие 3. *Всякая система с двумя степенями свободы ($n=2$), имеющая циклическую координату, интегрируема. Ибо в этом случае система для p', q' одномерная и немедленно интегрируется с помощью интеграла $H(p', q') = c$.*

§ 16. Теорема Лиувилля

Фазовый поток гамильтоновых уравнений сохраняет фазовый объем. Отсюда вытекает, например, что устойчивость в гамильтоновой системе не может быть асимптотической.

Рассмотрим для простоты случай, когда функция Гамильтона времени явно не содержит: $H = H(p, q)$.

А. Фазовый поток.

Определение. $2n$ -мерное пространство с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ называется *фазовым пространством*.

Пример. В случае $n=1$ это — фазовая плоскость системы $\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, рассмотренной в лекции 1.

Так же, как в этом простейшем примере, правые части уравнений Гамильтона задают векторное поле: в каждой точке (p, q) фазового пространства приложен $2n$ -мерный вектор $(-\partial H/\partial q, \partial H/\partial p)$. Предположим, что каждое решение уравнений Гамильтона можно продолжить на всю ось времени*).

Определение. *Фазовым потоком* называется однопараметрическая группа преобразований фазового пространства

$$g^t: (p(0), q(0)) \rightarrow (p(t), q(t)),$$

где $p(t), q(t)$ — решение системы уравнений Гамильтона (рис. 47).

Задача. Доказать, что g^t — группа.

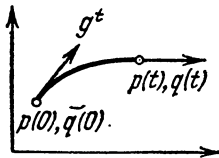


Рис. 47. Фазовый поток.

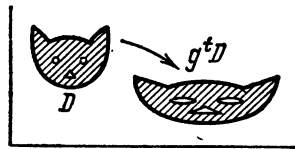


Рис. 48. Сохранение объема.

Б. Теорема Лиувилля. 1) *Фазовый поток сохраняет объем: для любой области D имеем (рис. 48)*

$$\text{объем } g^t D = \text{объем } D.$$

*) Например, для этого достаточно, чтобы множества уровня функции H были компактны.

Мы докажем несколько более общее предложение 2), также принадлежащее Лиувиллю.

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, решения которой продолжаются на всю ось времени. Пусть g^t — соответствующая группа преобразований:

$$g^t(x) = x + f(x)t + O(t^2) \quad (t \rightarrow 0). \quad (1)$$

Пусть $D(0)$ — область в пространстве $\{x\}$ и $v(0)$ — ее объем;

$$v(t) = \text{объем } D(t), \quad D(t) = g^t D(0).$$

2) Если $\text{div } f \equiv 0$, то g^t сохраняет объем: $v(t) = v(0)$.

В. Доказательство.

Лемма 1. Справедливо соотношение

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \int_{D(0)} \text{div } f \, dx \quad (dx = dx_1 \dots dx_n).$$

Доказательство. При любом t по определению якобиана

$$v(t) = \int_{D(0)} \det \frac{\partial g^t x}{\partial x} \, dx.$$

Вычисляя $\partial g^t x / \partial x$ по формуле (1), находим при $t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial g^t x}{\partial x} = E + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2).$$

Воспользуемся теперь известным алгебраическим фактом.

Лемма 2. Для любой матрицы $A = \|a_{ij}\|$ справедливо соотношение

$$\det |E + At| = 1 + t \text{tr } A + O(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

где $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ — след матрицы A (сумма диагональных элементов).

(Доказательство леммы 2 получается непосредственным раскрытием определителя: получается 1, n слагаемых с t , остальные с t^2 , t^3 и т. д.).

Итак,

$$\det \frac{\partial g^t x}{\partial x} = 1 + t \text{tr} \frac{\partial f}{\partial x} + O(t^2).$$

Но $\text{tr} \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \text{div } f$. Поэтому

$$v(t) = \int_{D(0)} [1 + t \text{div } f + O(t^2)] \, dx,$$

что и доказывает лемму 1.

Доказательство теоремы 2). Так как $t = t_0$ ничем не хуже $t = 0$, лемму 1 можно записать в виде

$$\frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \operatorname{div} f dx.$$

И если $\operatorname{div} f \equiv 0$, то и $\frac{dv}{dt} \equiv 0$, ч. т. д.

В частности, для системы Гамильтона имеем

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \equiv 0.$$

Теорема Лиувилля 1) доказана.

Задача. Распространить теорему Лиувилля на случай неавтономных систем ($H = H(p, q, t)$ или $f = f(x, t)$).

Задача. Докажите формулу Лиувилля $W = W_0 e^{\int \operatorname{tr} A dt}$ для определителя Вронского линейной системы $\dot{x} = A(t)x$.

Теорема Лиувилля имеет многочисленные приложения.

Задача. Доказать, что в гамильтоновой системе невозможны асимптотически устойчивое положение равновесия и асимптотически устойчивый предельный цикл в фазовом пространстве.

Особенно важные приложения теорема Лиувилля имеет в статистической механике.

Теорема Лиувилля позволяет применять к исследованию механических систем методы так называемой эргодической теории*). Приведу лишь простейший пример.

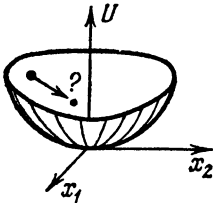


Рис. 49. Как будет двигаться шарик в несимметричной чашке, неизвестно; однако теорема Пуанкаре предсказывает возвращения в окрестность исходного положения.

Г. Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть g — сохраняющий объем непрерывное взаимно однозначное отображение, переводящее ограниченную область D евклидова пространства в себя: $gD = D$.

Тогда в любой окрестности U любой точки области D найдется точка $x \in U$, которая возвращается в область U , т. е. $g^n x \in U$ при некотором $n > 0$.

Эта теорема применима, например, к фазовому потоку g^t двумерной системы с растущим на бесконечности потенциалом $U(x_1, x_2)$; в этом случае инвариантная ограниченная область в фазовом пространстве дается условием (рис. 49)

$$D = \{p, q: T + U \leq E\}.$$

*) См., например, книгу: Халмош, Лекции по эргодической теории, ИЛ, 1959.

Теорему Пуанкаре можно усилить, доказав, что почти всякая движущаяся точка многократно возвращается к своему исходному положению. Это — один из немногих общих выводов о характере движения. Детали движения никому не известны уже в случае

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad x = (x_1, x_2).$$

Несколько парадоксальным выводом из теорем Пуанкаре и Лиувилля является следующее предсказание: если открыть перегородку, разделяющую камеру с газом и камеру с вакуумом, то через некоторое время молекулы газа снова соберутся в первой камере (рис. 50).

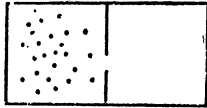


Рис. 50. Молекулы вернулись в первую камеру.

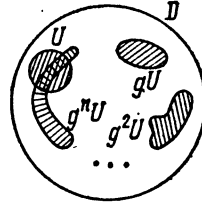


Рис. 51. Теорема о возвращении.

Разгадка парадокса в том, что «некоторое время» больше времени существования Солнечной системы.

Доказательство теоремы Пуанкаре. Рассмотрим образы окрестности U (рис. 51):

$$U, gU, g^2U, \dots, g^nU, \dots$$

Все они имеют одинаковый положительный объем. Если бы они не пересекались, объем D был бы бесконечен. Поэтому при некоторых $k \geq 0, l \geq 0, k > l$

$$g^k U \cap g^l U \neq \emptyset.$$

Следовательно, $g^{k-l}U \cap U \neq \emptyset$. Пусть $g^{k-l}x = y, x \in U, y \in U$. Тогда $x \in U, g^n x \in U$ ($n = k - l$), что и требовалось доказать.

Д. Приложения теоремы Пуанкаре.

Пример 1. Пусть D — окружность, g — поворот на угол α . Если $\alpha = 2\pi \frac{m}{n}$, то g^n — тождественное преобразование, и теорема очевидна. Если же α несоизмеримо с 2π , то теорема Пуанкаре дает

$$\forall \delta > 0, \exists n: |g^n x - x| < \delta \text{ (рис. 52).}$$

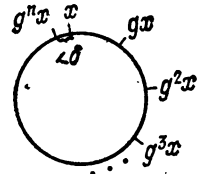
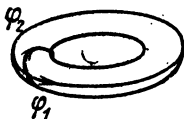


Рис. 52. Всюду плотное множество на окружности.

Отсюда легко вытекает

Теорема. Если $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{n}$, то множество точек вида $g^t x$ всюду плотно *) на окружности (k = 1, 2, ...).

Задача. Докажите, что всякая орбита движения в центральном поле с $U = r^4$ либо замкнута, либо всюду плотно заполняет кольцо между двумя окружностями.



Пример 2. Пусть D — двумерный тор, φ_1 и φ_2 — угловые координаты на нем (широта и долгота) (рис. 53).

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений на торе

Рис. 53. Тор.

$$\dot{\varphi}_1 = \alpha_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \alpha_2.$$

Очевидно, $\operatorname{div} f = 0$, и соответствующее движение

$$g^t : (\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 + \alpha_1 t, \varphi_2 + \alpha_2 t)$$

сохраняет объем $d\varphi_1 d\varphi_2$. Из теоремы Пуанкаре легко выводится

Теорема. Если α_1/α_2 иррационально, то «обмотка» тора $g^t(\varphi_1, \varphi_2)$ всюду плотна на торе.

Задача. Докажите, что если ω иррационально, то фигура Лиссажу $(x = \cos t, y = \cos \omega t)$ всюду плотна в квадрате $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Пример 3. Пусть D — n -мерный тор T^n , т. е. прямое произведение **) n окружностей:

$$D = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n = T^n.$$

Точка n -мерного тора задается n угловыми координатами $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, g^t — преобразование, сохраняющее объем

$$g^t : T^n \rightarrow T^n, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \alpha t.$$

Задача. При каких условиях на α всюду плотны: а) траектория $g^t \varphi$, б) траектория $g^{k\varphi}$ ($t \in \mathbb{R}$ принадлежит группе вещественных чисел \mathbb{R} , $k \in \mathbb{Z}$ — группе целых чисел \mathbb{Z}).

Преобразования примеров 1 — 3 тесно связаны с механикой. Но так как теорема Пуанкаре абстрактная, она имеет и не связанные с механикой приложения.

Пример 4. Рассмотрим первые цифры чисел 2^n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4 ...

Задача. Есть ли в этой последовательности цифра 7? и какая цифра встречается чаще: 7 или 8? И во сколько раз?

*) Множество A всюду плотно в B , если в каждой окрестности каждой точки B есть точка A .

**) Прямое произведение множеств A, B, \dots есть множество наборов точек (a, b, \dots) , $a \in A, b \in B, \dots$

ГЛАВА 4

ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА НА МНОГООБРАЗИЯХ

В этой главе вводятся понятия дифференцируемого многообразия и касательного расслоения. Функция Лагранжа, заданная на касательном расслоении, определяет на многообразии лагранжеву «голономную систему». Частными случаями являются системы материальных точек, стесненных голономными связями, например маятник или твердое тело.

§ 17. Голономные связи

В этом параграфе дано определение системы материальных точек, стесненной голономными связями.

А. Пример. Пусть γ — гладкая кривая на плоскости. Если в окрестности γ имеется очень сильное силовое поле, направленное к кривой, то движущаяся точка будет все время находиться вблизи γ . В предельном случае бесконечно сильного поля точка вынуждена оставаться на кривой γ . В этом случае говорят, что на систему наложена связь (рис. 54).



Рис. 54. Связь как бесконечно сильное поле

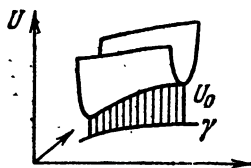


Рис. 55. Потенциальная энергия U_N .

Чтобы дать точную формулировку, введем в окрестности кривой γ криволинейные координаты q_1, q_2 : q_1 — вдоль кривой γ , q_2 — расстояние от кривой.

Рассмотрим систему с потенциальной энергией

$$U_N = Nq_2^2 + U_0(q_1, q_2),$$

зависящей от параметра N (который будет затем стремиться к бесконечности) (рис. 55).

Рассмотрим начальные условия на γ :

$$q_1(0) = q_1^0, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_1^0, \quad q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0.$$

Обозначим через $q_1 = \varphi(t, N)$ изменение координаты q_1 при движении с такими начальными условиями в поле U_N .

Теорема. При $N \rightarrow \infty$ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(t, N) = \psi(t).$$

Предельная функция $q_1 = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L_*}{\partial q_1},$$

где $L_*(q_1, \dot{q}_1) = T|_{q_2 = \dot{q}_2 = 0} - U_0|_{q_2 = 0}$ (T — кинетическая энергия движения вдоль γ).

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ система уравнений Лагранжа для q_1, q_2 порождает уравнение Лагранжа для $q_1 = \psi(t)$.

Точно такой же результат получится, если рассмотреть вместо плоскости $3n$ -мерное пространство конфигураций n точек, составляющих механическую систему, с метрикой

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n m_i dr_i^2$$

(m_i — массы), вместо кривой γ — подмногообразие $3n$ -мерного пространства, вместо q_1 — какие-нибудь координаты q_1 на γ , вместо q_2 — координаты q_2 в направлении, перпендикулярном γ . Если потенциальная энергия имеет вид

$$U = U_0(q_1) + Nq_2^2,$$

то при $N \rightarrow \infty$ движение на γ определяется уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа

$$L_* = T|_{q_2 = \dot{q}_2 = 0} - U_0|_{q_2 = 0}.$$

Б. Определение системы со связями. Мы не будем доказывать сформулированную теорему *) и не будем ею пользоваться. Она нужна нам лишь для того, чтобы оправдать следующее

О п р е д е л е н и е. Пусть γ — m -мерная поверхность в $3n$ -мерном конфигурационном пространстве точек r_1, \dots, r_n масс m_1, \dots, m_n . Пусть $q = (q_1, \dots, q_m)$ — какие-нибудь координаты на γ : $r_i = r_i(q)$. Система, описываемая уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad L = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}_i^2 + U(q),$$

*) Доказательство основывается на том, что вследствие сохранения энергии движущаяся точка не может удаляться от γ на расстояние, большее чем $cN^{-1/2}$, что стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

называется системой n точек, стесненной $3n - m$ идеальными голономными связями. Поверхность γ называется *конфигурационным пространством системы со связями*.

Если поверхность γ задается $k = 3n - m$ функционально независимыми уравнениями $f_1(r) = 0, \dots, f_k(r) = 0$, то говорят, что система стеснена связями $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$.

Голономную связь можно было бы определить и как предельный случай системы с большой потенциальной энергией. Значение этих связей для механики в том, что, как показывает эксперимент, многие механические системы с той или иной точностью относятся к этому классу.

Идеальные голономные связи в дальнейшем для краткости будем называть просто связями. Другие связи в этой книге рассматриваться не будут.

§ 18. Дифференцируемые многообразия

Конфигурационное пространство системы со связями является дифференцируемым многообразием. В этом параграфе приведены простейшие сведения о дифференцируемых многообразиях.

А. Определение дифференцируемого многообразия. На множестве M задана структура дифференцируемого многообразия, если M снабжено конечным или счетным набором карт, так что каждая точка изображена хотя бы на одной карте.

Картой называется открытая область U в евклидовом координатном пространстве $q = (q_1, \dots, q_n)$ вместе со своим взаимно однозначным отображением φ на некоторое подмножество M , $\varphi: U \rightarrow \varphi U \subset M$.

Если какая-нибудь точка M имеет изображения на двух картах U, U' сразу, то это должно быть справедливо для некоторых окрестностей V, V' этой точки на каждой из карт (рис. 56). Таким образом, возникает отображение $\varphi'^{-1}\varphi: V \rightarrow V'$ части одной карты $V \subset U$ на часть другой карты $V' \subset U'$.

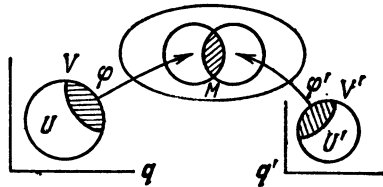


Рис. 56. Совместные карты.

Это — отображение области V координатного евклидова пространства q на область V' координатного евклидова пространства q' , и оно задается n функциями n переменных $q' = q'(q)$, ($q = q(q')$). Карты U, U' называются *совместными*, если эти функции дифференцируемы *).

*) Под дифференцируемостью здесь понимается r -кратная непрерывная дифференцируемость; точное значение r ($1 \leq r \leq \infty$) несущественно (можно считать, например, что $r = \infty$).

Атласом называется совокупность совместных друг с другом карт. Два атласа *эквивалентны*, если их объединение есть снова атлас.

Дифференцируемое многообразие есть класс эквивалентности атласов. Мы будем рассматривать только *связные* многообразия *). Тогда число n для всех карт одно и то же — оно называется *размерностью* многообразия.

Окрестностью точки многообразия называется образ при отображении $\varphi: U \rightarrow M$ окрестности изображения этой точки на карте U . Мы будем предполагать, что у каждых двух разных точек многообразия есть непересекающиеся окрестности.

Б. Примеры.

Пример 1. Евклидово пространство R^n есть многообразие, атлас которого состоит из единственной карты.

Пример 2. Сфера $S^2 = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ имеет структуру многообразия, атлас которого состоит, например, из двух карт $(U_i, \varphi_i, i=1, 2)$ в стереографической проекции (рис. 57). Аналогичная конструкция годится и для n -мерной сферы

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}): \sum x_i^2 = 1\}.$$

Пример 3. Рассмотрим плоский маятник. Конфигурационное пространство — окружность S^1 — есть многообразие. Обычный атлас доставляется угловой координатой $\varphi: R^1 \rightarrow S^1, U_1 = (-\pi, \pi), U_2 = (0, 2\pi)$ (рис. 58).

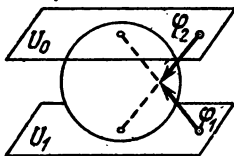


Рис. 57. Атлас сферы.

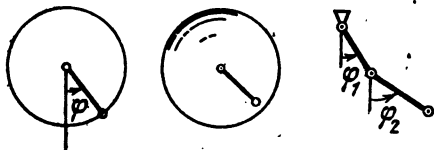


Рис. 58. Плоский, сферический и двойной плоский маятники.

Пример 4. Конфигурационное пространство «сферического» математического маятника есть двумерная сфера S^2 (рис. 58).

Пример 5. Конфигурационное пространство «плоского двойного маятника» есть прямое произведение двух окружностей, т. е. двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$ (рис. 58).

Пример 6. Конфигурационное пространство сферического двойного маятника есть прямое произведение двух сфер $S^2 \times S^2$.

Пример 7. Жесткий отрезок на плоскости q_1, q_2 имеет конфигурационным пространством многообразие $R^2 \times S^1$ с координатами q_1, q_2, q_3 (рис. 59).

Оно покрывается двумя картами.

Пример 8. Жесткий прямоугольный треугольник OAB , вращающийся вокруг вершины O . Положение треугольника задается тремя числами. Действительно, направление $OA \in S^2$ задается двумя числами, а если OA задано, можно еще вращать $OB \in S^1$ вокруг оси OA (рис. 60).

*) Многообразие связно, если его нельзя разбить на два непересекающихся.

С положением треугольника OAB можно связать ортонормированный правый репер $e_1 = \frac{OA}{|OA|}$, $e_2 = \frac{OB}{|OB|}$, $e_3 = [e_1, e_2]$. Соответствие взаимно однозначно, поэтому положение треугольника задается ортогональной матрицей третьего порядка с определителем 1.

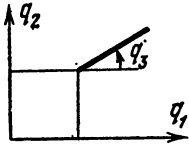


Рис. 59. Конфигурационное пространство отрезка на плоскости.

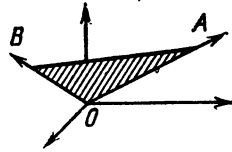


Рис. 60. Конфигурационное пространство треугольника.

Множество всех матриц третьего порядка есть девятимерное пространство \mathbb{R}^9 . Шесть условий ортогональности выделяют два трехмерных связных многообразия матриц с определителем $+1$ и -1 . Вращения трехмерного пространства (определитель $+1$) образуют группу, которая обозначается $SO(3)$.

Таким образом, *конфигурационное пространство треугольника OAB есть группа $SO(3)$.*

Задача. Показать, что многообразие $SO(3)$ гомеоморфно трехмерному вещественному проективному пространству.

Определение. Размерность конфигурационного пространства называется *числом степеней свободы*.

Пример 9. Рассмотрим систему из k шарнирно соединенных в замкнутую цепь стержней.

Задача. Сколько степеней свободы имеет эта система?

Пример 10. Вложенное многообразие. Говорят, что M есть вложенное в евклидово пространство E^n подмногообразие размерности k (рис. 61), если в окрестности U каждой точки $x \in M$ существуют $n-k$ функций $f_1: U \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_{n-k}: U \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что пересечение окрестности U с M задается уравнениями $f_1 = 0, \dots, f_{n-k} = 0$, и векторы $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_{n-k}$ в x линейно независимы.

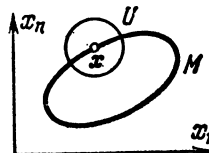


Рис. 61. Вложенное подмногообразие.

Легко ввести на M структуру многообразия, т. е. координаты в окрестности x (как?).

Можно доказать, что всякое многообразие можно вложить в евклидово пространство.

В примере 8 $SO(3)$ есть подмножество \mathbb{R}^9 .

Задача. Доказать, что $SO(3)$ вложено в \mathbb{R}^9 и тем самым проверить, что $SO(3)$ — многообразие.

В. Касательное пространство. Если M — вложенное в E^n k -мерное многообразие, то в каждой точке x оно имеет k -мерное

касательное пространство TM_x . А именно, TM_x есть ортогональное дополнение к $\{\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_{n-k}\}$ (рис. 62). Векторы касательного пространства TM_x с началом в x называются касательными векторами к M в x . Эти векторы можно определить и непосредственно, как векторы скорости кривых на M :

$$\dot{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}, \quad \text{где } \varphi(0) = x, \varphi(t) \in M.$$

Определение касательного вектора можно дать и во внутренних терминах, не обращаясь к вложению M в E^n .

Назовем две кривые $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ на многообразии *эквивалентными*, если $\varphi(0) = \psi(0) = x$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{t} = 0$ на какой-

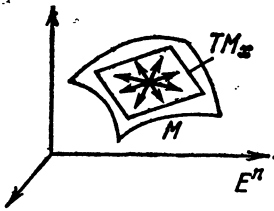


Рис. 62. Касательное пространство.

нибудь карте. Тогда это же соотношение касания верно на любой карте (доказатель).

Определение. *Касательным вектором* к многообразию M в точке x называется класс эквивалентности кривых $\varphi(t)$, $\varphi(0) = x$.

Легко определить операции умножения касательного вектора на число и сложения касательных векторов. Множество касательных векторов к M в x образует *линейное пространство* TM_x . Это пространство и называется *касательным пространством* к M в x .

Для вложенных многообразий введенное определение совпадает с предыдущим. Но его преимущество в том, что оно годится и для абстрактных, никуда не вложенных многообразий M .

Определение. Пусть U — карта атласа M с координатами q_1, \dots, q_n . Тогда *компонентами* касательного вектора к кривой $q = \varphi(t)$ называются числа ξ_1, \dots, ξ_n , где $\xi_i = \left. \frac{d\varphi_i}{dt} \right|_{t=0}$.

Г. Касательное расслоение. Объединение касательных пространств к многообразию M в разных точках $\bigcup_{x \in M} TM_x$ имеет естественную структуру дифференцируемого многообразия, размерность которого вдвое больше размерности M .

Это многообразие называется *касательным расслоением* многообразия M и обозначается TM . Точка TM — это вектор ξ , касающийся M в какой-нибудь точке x . Локальные координаты на TM строятся следующим образом. Пусть q_1, \dots, q_n — локальные координаты на многообразии M , ξ_1, \dots, ξ_n — компоненты касательного вектора в этой системе координат. Тогда $2n$ чисел $(q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ задают на TM локальную систему координат.

Отображение $p: TM \rightarrow M$, сопоставляющее каждому касательному вектору ξ ту точку $x \in U$, в которой вектор касается M ($\xi \in TM_x$), называется *естественной проекцией*. Прообраз точки $x \in M$ при естественной проекции $p^{-1}(x)$ есть касательное пространство TM_x . Это пространство называется *слоем расслоения над точкой x* .

Д. Риманово многообразие. Если M — вложенное в евклидово пространство многообразие, то метрика евклидова пространства позволяет измерять на M длины кривых, углы между векторами, объемы и т. п.

Все эти величины выражаются через длину касательных векторов, т. е. через положительно определенную квадратичную форму, заданную на каждом касательном пространстве TM_x (рис. 63):

$$TM_x \rightarrow \mathbb{R}; \quad \xi \rightarrow \langle \xi, \xi \rangle.$$

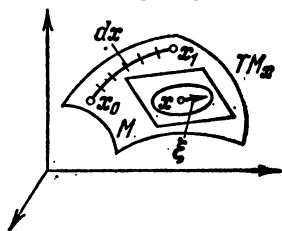


Рис. 63. Риманова метрика.

Например, длина кривой γ на многообразии выражается через эту форму

как $l(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\langle dx, dx \rangle}$, или если кривая задана параметрически:

$$\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M, \quad t \rightarrow x(t) \in M,$$

то $l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle} dt$.

Определение. Дифференцируемое многообразие M с фиксированной положительно определенной квадратичной формой $\langle \xi, \xi \rangle$ в каждом касательном пространстве TM_x называется *римановым многообразием*. Эта квадратичная форма называется *римановой метрикой*.

Замечание. Пусть U — карта атласа M с координатами q_1, \dots, q_n . Тогда риманова метрика задается формулой

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) dq_i dq_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

где dq_i — координаты касательного вектора.

Функции $a_{ij}(q)$, разумеется, предполагаются дифференцируемыми нужное число раз.

Е. Производная отображения. Пусть $f: M \rightarrow N$ — отображение многообразия M в многообразие N . Отображение f называется *дифференцируемым*, если в локальных координатах на M и на N оно задается дифференцируемыми функциями.

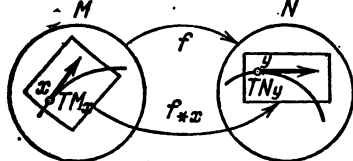
Определение. *Производной* дифференцируемого отображения $f: M \rightarrow N$ в точке $x \in M$ называется линейное отображение

касательных пространств

$$f_{*x}: TM_x \rightarrow TN_{f(x)},$$

которое задается следующим образом (рис. 64).

Пусть $v \in TM_x$. Рассмотрим кривую $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi(0) = x$, с вектором скорости $\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0} = v$. Тогда $f_{*x}v$ есть вектор скорости кривой $f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow N$,



$$f_{*x}v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi(t)).$$

Рис. 64. Производная отображения.

Задача. Докажите, что вектор $f_{*x}v$ зависит не от кривой φ , но лишь от вектора v .

Задача. Докажите, что отображение $f_{*x}: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ линейное.

Задача. Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$ — координаты в окрестности точки $x \in M$, а $y = (y_1, \dots, y_n)$ — координаты в окрестности точки $y \in N$. Пусть ξ — набор компонент вектора v , а η — набор компонент вектора $f_{*x}v$. Покажите, что

$$\eta = \frac{\partial y}{\partial x} \xi, \quad \text{т. е.} \quad \eta_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \xi_j.$$

Объединяя отображения f_{*x} при всех x , получаем единое отображение всего касательного расслоения

$$f_*: TM \rightarrow TN, \quad f_*v = f_{*x}v \quad \text{для} \quad v \in TM_x.$$

Задача. Докажите, что f_* — дифференцируемое отображение.

Задача. Пусть $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow K$, $h = g \circ f: M \rightarrow K$. Докажите, что $h_* = g_* \circ f_*$.

§ 19. Лагранжева динамическая система

В этом параграфе определяется лагранжева динамическая система на многообразии. Система с голономными связями является частным случаем.

А. Определение лагранжевой системы. Пусть M — дифференцируемое многообразие, TM — его касательное расслоение, $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Отображение $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ называется движением в лагранжевой системе с конфигурационным многообразием M и функцией Лагранжа L , если γ есть экстремаль функционала

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma}) dt,$$

где $\dot{\gamma}$ — вектор скорости, $\dot{\gamma}(t) \in TM_{\gamma(t)}$.

Пример. Пусть M — область в координатном пространстве с координатами $q = (q_1, \dots, q_n)$. Функция Лагранжа $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ записывается в виде функции $2n$ координат $L(q, \dot{q})$. Как доказано в § 12, изменение координат движущейся точки со временем удовлетворяет уравнениям Лагранжа.

Следствие. Изменение локальных координат $q = (q_1, \dots, q_n)$ точки $\gamma(t)$ при движении в лагранжевой системе на многообразии M удовлетворяет уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

где $L(q, \dot{q})$ — выражение функции $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ через координаты q и \dot{q} на TM .

Особенно часто встречается следующий частный случай.

Б. Натуральная система. Пусть M — риманово многообразие. Кинетической энергией называется квадратичная форма на каждом касательном пространстве

$$T = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle, \quad v \in TM_x.$$

Потенциальной энергией называется дифференцируемая функция $U: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение. Лагранжева система на римановом многообразии называется *натуральной*, если функция Лагранжа равна разности кинетической и потенциальной энергий, $L = T - U$.

Пример. Рассмотрим две точки масс m_1, m_2 , соединенные отрезком длины l на плоскости x, y . Тогда конфигурационное многообразие трех измерений

$$M = \mathbb{R}^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

определяется в четырехмерном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$ двух свободных точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ условием $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = l$ (рис. 65).

В касательном пространстве к четырехмерному пространству (x_1, x_2, y_1, y_2) есть квадратичная форма

$$m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Наше трехмерное многообразие, как вложенное в четырехмерное, снабжается римановой метрикой. Полученная голономная система и называется в механике отрезком постоянной длины на плоскости x, y . Кинетическая энергия дается формулой

$$T = m_1 \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}{2}.$$

В. Система с голономными связями. В § 17 мы определили систему материальных точек, стесненных голономными связями. Покажем, что эта система является натуральной.

Действительно, рассмотрим конфигурационное многообразие M системы со связями как вложенное в $3n$ -мерное конфигурационное

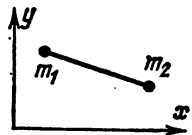


Рис. 65. Отрезок на плоскости.

пространство системы свободных точек. Метрику в $3n$ -мерном пространстве зададим квадратичной формой $\sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2$.

Тогда соответствующая вложенному риманову многообразию M и потенциальной энергии U натуральная система совпадает с системой, определенной в § 17 или с предельным случаем системы с потенциалом $\dot{U} + Nq_2^2$, $N \rightarrow \infty$, быстро растущим вне M .

Г. Рецепт решения задач со связями. 1. Найти конфигурационное многообразие и ввести в нем координаты q_1, \dots, q_k (в окрестности каждой точки, вообще говоря, свби).

2. Выразить кинетическую энергию $T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$ в виде квадратичной формы относительно обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

3. Составить функцию Лагранжа $L = T - U(q)$ и решать уравнения Лагранжа.

Пример. Рассмотрим движение материальной точки массы 1 по поверхности вращения в трехмерном пространстве. Можно показать, что орбиты суть геодезические на поверхности. В цилиндрических координатах r, φ, z поверхность задается (локально) в виде $r = r(z)$ или $z = z(r)$. Соответственно кинетическая энергия имеет вид (рис. 66)

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} [(1 + r_z'^2) \dot{z}^2 + r^2(z) \dot{\varphi}^2] \text{ в координатах } \varphi, z;$$

$$= \frac{1}{2} [(1 + z_r'^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] \text{ в координатах } r, \varphi.$$

(Использовано соотношение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$.)

Функция Лагранжа $L = T$. В обеих системах координат φ — циклическая координата. Соответствующий импульс сохраняется; $p_\varphi = r^2 \dot{\varphi}$ — не что иное, как z -компонента момента количества движения. Так как система имеет две степени свободы, знания циклической координаты φ достаточно, чтобы проинтегрировать задачу до конца (см. следствие 3 § 15, стр. 60).

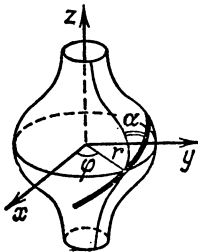


Рис. 66. Поверхность вращения.

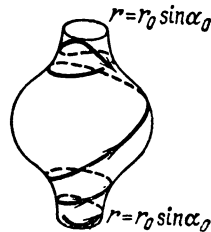


Рис. 67. Геодезические на поверхности вращения.

Ясное представление о виде орбит проще получить, рассуждая немного по-другому. Обозначим через α угол орбиты с меридианом. Имеем: $r\dot{\varphi} = v \sin \alpha$, где v — величина вектора скорости (рис. 66).

Но по закону сохранения энергии $H=L=T$ сохраняется. Следовательно, $|\sigma| = \text{const}$. Поэтому закон сохранения p_φ принимает вид

$$r \sin \alpha = \text{const}$$

(«теорема Клеро»).

Это соотношение показывает, что движение происходит в области $|\sin \alpha| < 1$, т. е. $r \geq r_0 \sin \alpha_0$. Кроме того, наклон орбиты к меридиану увеличивается при уменьшении радиуса r . Достигнув наименьшего возможного $r = r_0 \sin \alpha_0$, орбита отражается и возвращается в область с большим r (рис. 67).

Задача. Доказать, что все геодезические на нарисованной поверхности вращения делятся на три класса: меридианы, замкнутые кривые, и геодезические, всюду плотные в кольце $r \geq c$.

Задача. Исследовать поведение геодезических на поверхности тора $((r-R)^2 + z^2 = \rho^2)$.

Д. Неавтономные системы. Лагранжева неавтономная система отличается от автономной, которую мы рассматривали до сих пор, дополнительной зависимостью функции Лагранжа от времени:

$$L: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L = L(q, \dot{q}, t).$$

В частности, в неавтономной натуральной системе от времени может зависеть как кинетическая, так и потенциальная энергия:

$$T: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad U: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T = T(q, \dot{q}, t), \quad U = U(q, t).$$

Система n материальных точек, стесненных голономными связями, зависящими от времени, определяется при помощи меняющегося со временем подмногообразия конфигурационного пространства свободной системы. Такое многообразие задается отображением

$$i: M \times \mathbb{R} \rightarrow E^{3n}, \quad i(q, t) = x,$$

которое при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ определяет вложение $M \rightarrow E^{3n}$. Рецепт п. Г остается в силе для неавтономных систем.

Пример. Движение бусинки по вертикальной окружности радиуса r (рис. 68), вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через центр O окружности. Многообразие M — окружность. Обозначим через q угловую координату на окружности, отсчитываемую от верхней точки.

Пусть x, y, z — декартовы координаты в E^3 с началом O и вертикальной осью z . Пусть φ — угол плоскости окружности с плоскостью xOz . По условию $\varphi = \omega t$. Отображение $i: M \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$ задается формулой

$$i(q, t) = (r \sin q \cos \omega t, r \sin q \sin \omega t, r \cos q).$$

Из этой формулы (а проще — из «прямоугольного бесконечно малого треугольника») находим

$$T = \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 \sin^2 q + r^2 \dot{q}^2), \quad U = mgr \cos q.$$

На наше счастье функция Лагранжа $L = T - U$ оказалась не зависящей от t , хотя связь и зависит от времени. Кроме того, функция Лагранжа оказалась

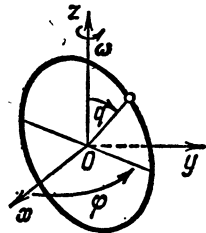


Рис. 68. Бусинка на вращающейся окружности.

такой же, как в одномерной системе с кинетической энергией

$$T_0 = \frac{M}{2} \dot{q}^2, \quad M = mr^2,$$

и с потенциальной энергией

$$V = A \cos q - B \sin^2 q, \quad A = mgr, \quad B = \frac{m}{2} \omega^2 r^2.$$

Вид фазового портрета зависит от соотношения между A и B . При $2B < A$ (т. е. при таком медленном вращении окружности, что $\omega^2 r < g$) нижнее положение бусинки ($q = \pi$) устойчиво и характер движения в общем такой же, как в случае математического маятника ($\omega = 0$).

При $2B > A$, т. е. при достаточно быстром вращении окружности, нижнее положение бусинки становится неустойчивым, зато появляются два устойчивых

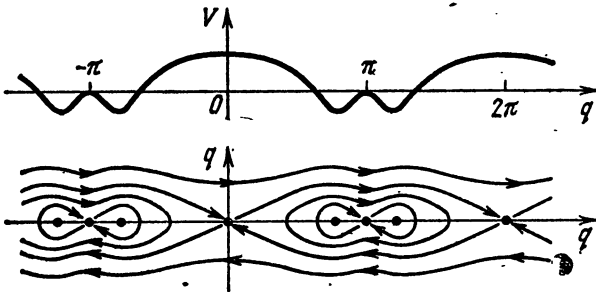


Рис. 69. Эффективная потенциальная энергия и фазовая плотность бусинки.

положения бусинки на окружности, $\cos q = -\frac{A}{2B} = -\frac{g}{\omega^2 r}$. Поведение бусинки при всевозможных начальных условиях ясно из вида фазовых кривых на плоскости q, \dot{q} (рис. 69).

§ 20. Теорема Э. Нётер

Различные законы сохранения (импульса, момента и т. д.) являются частными случаями одной общей теоремы: всякой однопараметрической группе диффеоморфизмов конфигурационного многообразия лагранжевой системы, сохраняющих функцию Лагранжа, соответствует первый интеграл уравнений движения.

А. Формулировка теоремы. Пусть M — гладкое многообразие, $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая числовая функция на его касательном расслоении TM . Пусть $h: M \rightarrow M$ — гладкое отображение.

Определение. Лагранжова система (M, L) допускает отображение h , если для любого касательного вектора $v \in TM$

$$L(h_* v) = L(v).$$

Пример. Пусть $M = \{(x_1, x_2, x_3)\}$, $L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3)$. Система допускает сдвиг $h: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + s, x_2, x_3)$ вдоль оси x_1 и не допускает, вообще говоря, сдвигов вдоль оси x_2 .

Теорема Нётер. Если система (M, L) допускает однопараметрическую группу диффеоморфизмов $h^s: M \rightarrow M, s \in \mathbb{R}, h^0 = E$, то соответствующая L система уравнений Лагранжа имеет первый интеграл $I: TM \rightarrow \mathbb{R}$.

В локальных координатах q на M интеграл I записывается в виде

$$I(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s(q)}{ds} \Big|_{s=0}.$$

Б. Доказательство. Пусть сначала $M = \mathbb{R}^n$ — координатное пространство. Пусть $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow M, q = \Phi(t)$ — решение уравнений Лагранжа. Так как h_* сохраняет L , то сдвиг решения, $h^s \cdot \Phi: \mathbb{R} \rightarrow M$ при любом s также удовлетворяет уравнениям Лагранжа*). Рассмотрим отображение $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, q = \Phi(s, t) = h^s(\Phi(t))$ (рис. 70).

Будем обозначать производные по t точками, а по s штрихами. По условию

$$0 = \frac{\partial L(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\Phi}', \quad (1)$$

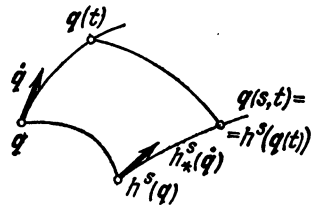


Рис. 70. К теореме Нётер.

где частные производные L взяты в точке $q = \Phi(s, t), \dot{q} = \dot{\Phi}(s, t)$.

Как мы подчеркнули выше, при любом фиксированном значении s отображение $\Phi|_{s=\text{const}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)) \right] = \frac{\partial L}{\partial q} (\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)).$$

Введем обозначение $F(s, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t))$ и подставим $\frac{\partial F}{\partial t}$ в (1) вместо $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

Записывая \dot{q}' в виде $\frac{d}{dt} q'$, находим

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) q' + \frac{\partial L}{\partial q} \left(\frac{d}{dt} q' \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q' \right) = \frac{dI}{dt}, \text{ ч. т. д.}$$

Замечание. Первый интеграл $I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q'$ определен выше с помощью локальных координат q . Оказывается, величина $I(\Phi)$ не зависит от выбора координатной системы q .

) Авторы некоторых учебников ошибочно утверждают, что верно и обратное, т. е. если h^s переводит решения в решения, то h_^s сохраняет L .

Действительно, I есть скорость изменения $L(\vartheta)$, когда вектор $\vartheta \in TM_x$ меняется внутри TM_x со скоростью $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h^s \mathbf{x}$. Итак, $I(\vartheta)$ есть корректно определенная в целом функция касательного вектора $\vartheta \in TM_x$. Тем самым теорема Нётер доказана и в случае, когда M — многообразие.

В. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим систему материальных точек с массами m_i :

$$L = \sum m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} - U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_i = x_{i1} \mathbf{e}_1 + x_{i2} \mathbf{e}_2 + x_{i3} \mathbf{e}_3,$$

стесненную связями $f_j(\mathbf{x}) = 0$. Предположим, что система допускает сдвиги вдоль оси \mathbf{e}_1 :

$$h^s: \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + s \mathbf{e}_1 \text{ при всех } i.$$

Иными словами, связи допускают движение системы как целого вдоль оси \mathbf{e}_1 , и потенциальная энергия при этом не меняется.

Из теоремы Нётер заключаем:

Если система допускает сдвиги вдоль оси \mathbf{e}_1 , то проекция ее центра инерции на ось \mathbf{e}_1 движется прямолинейно и равномерно.

Действительно, $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h^s \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_1$. Согласно замечанию в конце пункта Б, сохраняется величина

$$I = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \mathbf{e}_1 = \sum m_i \dot{\mathbf{x}}_i,$$

т. е. первая компонента P_1 вектора импульса. Для систем без связей мы это уже доказывали раньше.

Пример 2. Если система допускает вращения вокруг оси \mathbf{e}_1 , то сохраняется кинетический момент относительно этой оси

$$M_1 = \sum_i ([\mathbf{x}_i, m_i \dot{\mathbf{x}}_i], \mathbf{e}_1).$$

Действительно, легко проверить, что если h^s — поворот вокруг оси \mathbf{e}_1 на угол s , то $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h^s \mathbf{x}_i = [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i]$, откуда $I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i] = \sum_i (m_i \dot{\mathbf{x}}_i, [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i]) = \sum_i ([\mathbf{x}_i, m_i \dot{\mathbf{x}}_i], \mathbf{e}_1)$.

Задача 1. Пусть частица движется в поле однородной винтовой линии $\mathbf{x} = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = c\varphi$. Найти соответствующий этой винтовой симметрии закон сохранения.

Ответ. В любой системе, допускающей винтовые движения, оставляющие на месте нашу винтовую линию, сохраняется величина $I = cP_3 + M_3$.

Задача 2. Пусть твердое тело движется по инерции. Доказать, что его центр инерции движется прямолинейно и равномерно. Если центр инерции покоится, то кинетический момент относительно него сохраняется.

Задача 3. Какие величины сохраняются при движении тяжелого твердого тела, закрепленного в некоторой точке O ? В частности, если тело симметрично относительно проходящей через O оси?

Задача 4. Распространить теорему Нётер на неавтономные лагранжевы системы.

Указание. Пусть $M_1 = M \times \mathbb{R}$ — расширенное конфигурационное многообразие (прямое произведение конфигурационного многообразия M на ось времени \mathbb{R}).

Определим функцию $L_1: TM_1 \rightarrow \mathbb{R}$ как $L dt/d\tau$, т. е. в локальных координатах q, t на M_1 зададим ее формулой

$$L_1\left(q, t, \frac{dq}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}\right) = L\left(q, \frac{dq}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau}, t\right) \frac{dt}{d\tau}.$$

Применим теорему Нётер к лагранжевой системе (M_1, L_1) .

Если L_1 допускает преобразования $h^s: M_1 \rightarrow M_1$, то мы найдем первый интеграл $I_1: TM_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Поскольку $\int L dt = \int L_1 d\tau$, это приводит к первому интегралу $I: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ исходной системы. Если в локальных координатах (q, t) на M_1 имеем $I_1 = I_1\left(q, t, \frac{dq}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}\right)$, то $I(q, \dot{q}, t) = I_1(q, t, \dot{q}, 1)$.

В частности, если L не зависит явно от времени, то L_1 допускает сдвиги по времени $h^s(q, t) = (q, t + s)$. Соответствующий первый интеграл I есть интеграл энергии.

§ 21. Принцип Даламбера

Здесь дается новое определение системы материальных точек, стесненной голономными связями, и доказывается его эквивалентность определению, данному в § 17.

А. Пример. Рассмотрим голономную систему (M, L) , где M — поверхность в трехмерном пространстве $\{x\}$:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x).$$

В механических терминах: «материальная точка x массы m вынуждена оставаться на гладкой поверхности M ».

Рассмотрим движение точки $x(t)$. Если бы выполнялось уравнение Ньютона $m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$, то в отсутствие внешних сил ($U=0$) траектория была бы прямой и не могла бы лежать на поверхности M .

С точки зрения Ньютона это указывает на присутствие новой силы, «вынуждающей точку оставаться на поверхности».

Определение. Величина

$$R = m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}$$

называется *силой реакции связи* (рис. 71).

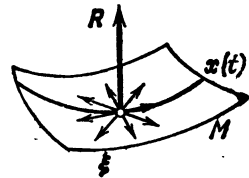


Рис. 71. Реакция связи.

С учетом силы реакции $R(t)$ уравнения Ньютона, очевидно, справедливы:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + R.$$

Физический смысл силы реакции R становится ясным, если мы рассмотрим нашу систему со связью как предел систем с потенциальной энергией $U + NU_1$, $N \rightarrow \infty$, $U_1(x) = \rho^2(x, M)$. При больших N потенциал связи NU_1 обуславливает быстропеременную силу $F = -N \frac{\partial U_1}{\partial x}$; при предельном переходе ($N \rightarrow \infty$) остается среднее значение R силы F по колебаниям x около M . Сила F перпендикулярна к поверхности M . Поэтому сила реакции R перпендикулярна M : $(R, \xi) = 0$ для всякого касательного вектора ξ .

Б. Формулировка принципа Даламбера — Лагранжа. В механике касательные вектора к конфигурационному многообразию называются *виртуальными перемещениями*. Принцип Даламбера — Лагранжа гласит:

$$\left(m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}, \xi \right) = 0$$

для всякого виртуального перемещения ξ , или еще иначе: *работа силы реакции на любом виртуальном перемещении равна нулю.*

Для системы из материальных точек x_i с массами m_i силы реакции R_i определяются как $R_i = m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}$, а принцип Даламбера имеет вид $\sum (R_i, \xi_i) = 0$, или $\sum \left(\left(m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), \xi_i \right) = 0$, т. е.:

сумма работ сил реакций на любом виртуальном перемещении $\{\xi_i\} \in TM_x$ равна нулю.

Указанное выше свойство связей называют *идеальностью*.

Если определять систему с голономной связью как предел при $N \rightarrow \infty$, то принцип Даламбера — Лагранжа становится теоремой; ее доказательство намечено выше для простейшего случая.

Можно, однако, *определять* идеальную голономную связь при помощи принципа Даламбера — Лагранжа.

Таким образом, имеется три определения голономной системы со связями:

- 1) Предел систем с потенциальной энергией $U + NU_1$, $N \rightarrow \infty$.
- 2) Голономная система (M, L) , где M — гладкое подмногообразие конфигурационного пространства системы без связей, L — лагранжиан.
- 3) Система, удовлетворяющая принципу Даламбера — Лагранжа.

Все три определения математически эквивалентны.

Доказательство утверждений 1) \Rightarrow 2) и 1) \Rightarrow 3) намечено выше и в деталях проводиться не будет. Мы докажем, что 2) \Leftrightarrow 3).

В. Эквивалентность принципа Даламбера — Лагранжа и вариационного принципа. Пусть M — подмногообразие евклидова пространства $M \subset \mathbb{R}^N$, и $x: \mathbb{R} \rightarrow M$ — кривая; $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Определение. Кривая x называется *условной экстремалью* функционала действия

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - U(x) \right\} dt,$$

если дифференциал $\delta\Phi = 0$ при условии, что для сравнения берутся близкие кривые*), соединяющие x_0 с x_1 на M .

Мы будем писать

$$\delta_M \Phi = 0. \quad (1)$$

Очевидно, уравнение (1) эквивалентно уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad L = \frac{\dot{x}^2}{2} - U(x), \quad x = x(q),$$

в каждой локальной системе координат q на M .

Теорема. Чтобы кривая $x: \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^N$ была условной экстремалью действия (т. е. удовлетворяла уравнению (1)), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению Даламбера

$$\left(\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}, \xi \right) = 0, \quad \forall \xi \in TM_x. \quad (2)$$

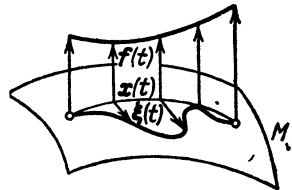


Рис. 72. Лемма о нормальном поле.

Лемма. Пусть $f: \{t: t_0 \leq t \leq t_1\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ — непрерывное векторное поле. Если для каждого непрерывного касательного к M векторного поля ξ вдоль x ($\xi(t) \in TM_{x(t)}$, $\xi(t)$ обращается в 0 при $t = t_0, t_1$), имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \xi(t) dt = 0,$$

то поле $f(t)$ в каждой точке $x(t)$ перпендикулярно поверхности M (т. е. $(f(t), h) = 0$ для каждого вектора $h \in TM_{x(t)}$) (рис. 72).

Доказательство леммы повторяет рассуждения, с помощью которых выводились уравнения Эйлера — Лагранжа в § 12.

Доказательство теоремы. Сравним значения Φ на двух кривых $x(t)$ и $x(t) + \xi(t)$, $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$. Получим, интегрируя по частям:

$$\delta\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left(x \dot{\xi} - \frac{\partial U}{\partial x} \xi \right) dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \xi dt.$$

*) Строго говоря, чтобы определить вариацию $\delta\Phi$, нужно определить структуру области линейного пространства в множестве близких к x кривых на M . Это можно сделать при помощи координат на M ; причем свойство быть условной экстремалью от выбора системы координат не зависит.

Из этой формулы видно*), что уравнение (1) $\delta_M \Phi = 0$ эквивалентно совокупности уравнений

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right) \xi dt = 0 \quad (3)$$

для всех касательных векторных полей $\xi(t) \in TM_{x(t)}$, $\xi(t_0) = -\xi(t_1) = 0$. По лемме (где надо положить $f = \ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}$) совокупность уравнений (3) эквивалентна уравнению Даламбера — Лагранжа (2), ч. т. д.

Г. Замечания.

Замечание 1. Выведем из доказанной теоремы принцип Даламбера — Лагранжа для системы из n точек $x_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$, с массами m_i , с голономными связями.

В координатах $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_i = \sqrt{m_i} x_i\}$ кинетическая энергия принимает вид $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{x}}}^2$.

По доказанной теореме экстремали принципа наименьшего действия удовлетворяют условию

$$\left(\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \xi \right) = 0$$

(принцип Даламбера — Лагранжа) для точки в \mathbb{R}^{3n} : $3n$ -мерная сила реакции ортогональна многообразию M в метрике T). Возвращаясь к координатам x_i , получаем

$$0 = \left(\sqrt{m_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial \sqrt{m_i} x_i}; \sqrt{m_i} \xi_i \right) = \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}, \xi_i \right),$$

т. е. принцип Даламбера — Лагранжа в указанной раньше форме: сумма работ сил реакции на виртуальном перемещении равна нулю.

Замечание 2. Принципу Даламбера — Лагранжа можно придать несколько иную форму, если обратиться к статике. *Положением равновесия* называется такая точка x_0 , которая является орбитой движения: $x(t) \equiv x_0$.

Пусть материальная точка движется по гладкой поверхности M под действием силы $f = -\partial U / \partial x$.

Теорема. Чтобы точка x_0 поверхности M была положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы сила была ортогональна поверхности: $(f(x_0), \xi) = 0$ для всех $\xi \in TM_{x_0}$.

Это следует из уравнения Даламбера — Лагранжа ввиду $x = 0$.

Определение. $-m\ddot{x}$ называется силой инерции. Теперь принцип Даламбера — Лагранжа принимает такой вид:

*) Расстояние точки $x(t) + \xi(t)$ до M второго порядка малости по сравнению с $\xi(t)$.

Теорема. Если к действующим силам добавить силы инерции, то x станет положением равновесия.

Действительно, уравнение Даламбера

$$(-m\ddot{x} + f, \xi) = 0$$

выражает, согласно предыдущей теореме, тот факт, что x есть положение равновесия системы с силами $-m\ddot{x} + f$.

Совершенно аналогичные предложения справедливы и для системы точек:

Если $x = \{x_i\}$ — положение равновесия, то сумма работ действующих сил на виртуальном перемещении равна нулю.

Если к действующим силам добавить силы инерции $-m_i\ddot{x}_i(t)$, то положение $x(t)$ станет положением равновесия.

Итак, задача о движении приводится к задаче о равновесии под действием других сил.

Замечание 3. До сих пор мы не рассматривали случаи, когда связи зависят от времени. Все сказанное выше переносится на такие связи без изменений.

Пример. Рассмотрим бусинку, скользящую по стержню, наклоненному под углом α к вертикальной оси и вращающемуся равномерно, с угловой скоростью ω , вокруг этой оси (весом пренебрежем). За координату q примем расстояние от точки O (рис. 73). Кинетическая энергия и лагранжиан:

$$L = T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2,$$

$$r = q \sin \alpha.$$

Уравнение Лагранжа: $m\ddot{q} = m\omega^2 q \sin^2 \alpha$.

Сила реакции в каждый момент времени ортогональна виртуальным перемещениям (т. е. направлению стержня), но вовсе не ортогональна действительной траектории.

Замечание 4. Из уравнения Даламбера — Лагранжа легко выводятся законы сохранения. Например, если среди виртуальных перемещений есть сдвиг вдоль оси x_1

$$\xi_i = e_1,$$

то сумма работ сил реакции на этом перемещении равна нулю:

$$\sum (R_i, e_1) = \left(\sum R_i, e_1 \right) = 0.$$

Будем теперь рассматривать силы реакции как внешние силы. Тогда замечаем, что сумма первых компонент внешних сил равна нулю. Значит, сохраняется первая компонента P_1 вектора количества движения.

Этот же результат мы получили выше из теоремы Нётер.

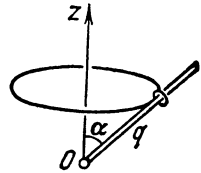


Рис. 73. Бусинка на вращающемся стержне.

Замечание 5. Подчеркнем еще раз, что голономность той или иной физической связи (с той или иной степенью точности) есть вопрос эксперимента. С математической точки зрения голономность связей есть постулат физического происхождения; его можно вводить в разных эквивалентных формах, например в виде принципа наименьшего действия (1) или принципа Даламбера — Лагранжа (2) — но при определении связей речь всегда идет о новых, по сравнению с уравнениями Ньютона, экспериментальных фактах.

Замечание 6. Наша терминология несколько отличается от принятой в учебниках механики, где принцип Даламбера — Лагранжа распространяется на более широкий класс систем («неголономные системы с идеальными связями»). В этой книге мы не будем рассматривать неголономные системы. Замечу только, что примером неголономной системы является катящийся по плоскости без скольжения шар. В касательном пространстве к конфигурационному многообразию неголономной системы в каждой точке фиксировано подпространство, которого должен касаться вектор скорости.

Замечание 7. Если система состоит из материальных точек, соединенных стержнями, шарнирами и т. п., то может возникнуть соблазн говорить о силе реакции той или иной отдельной связи.

Мы определили суммарную «силу реакции всех связей» R_i для каждой материальной точки m_i . Понятие силы реакции отдельной связи определить *нельзя*, как видно уже из простого примера балки, опирающейся на три колонны. Если попытаться определить силы реакции колонн R_1, R_2, R_3 предельным переходом (считая колонны очень жесткими пружинами), то мы убедимся, что результат зависит от распределения жесткости.

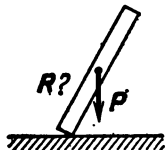


Рис. 74. Сила реакции стола.

Задачи в задачниках подобраны так, чтобы это затруднение не встречалось.

Задача. Стержень веса P , наклоненный к поверхности стола под углом 60° , начинает падать без начальной скорости (рис. 74). Найди силу реакции стола в начальный момент, считая стол: а) абсолютно гладким, б) абсолютно шероховатым. (В первом случае голономная связь удерживает конец стержня на плоскости стола, а во втором — в данной точке.)

ГЛАВА 5

КОЛЕБАНИЯ

Поскольку линейные уравнения легко решать и исследовать, теория линейных колебаний является самым разработанным отделом механики. Во многих нелинейных задачах линеаризация приводит к удовлетворительному приближенному решению. Даже когда это не так, исследование линеаризованной задачи часто является первым шагом при изучении соответствия движений нелинейной системы и ее линейной модели.

§ 22. Линеаризация

Здесь дано определение малых колебаний.

А. Положения равновесия.

Определение. Точка x_0 называется *положением равновесия* системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

если $x(t) \equiv x_0$ есть решение этой системы. Иными словами, $f(x_0) = 0$, т. е. в точке x_0 векторное поле $f(x)$ обращается в нуль.

Пример. Рассмотрим натуральную динамическую систему с функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}) = T - U$, $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \geq 0$, $U = U(q)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad q = (q_1, \dots, q_n). \quad (2)$$

Уравнения Лагранжа можно записать в виде системы $2n$ уравнений первого порядка вида (1). Постараемся найти положения равновесия.

Теорема. Точка $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ тогда и только тогда будет положением равновесия системы (2), когда $\dot{q}_0 = 0$, а точка q_0 — критическая точка потенциальной энергии, т. е.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_0} = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q}.$$

Из (2) видно, что при $\dot{q} = 0$ будет $\frac{\partial T}{\partial q} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 0$. Поэтому $q = q_0$ есть решение в случае (3) и только в этом случае, ч. т. д.

Б. Устойчивость положений равновесия. Займемся теперь исследованием движений при начальных условиях, близких к положению равновесия.

Теорема. Если точка q_0 есть строгий локальный минимум потенциальной энергии U , то положение равновесия $q = q_0$ устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть $U(q_0) = h$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ содержащая q_0 связанная компонента множества $\{q: U(q) \leq h + \varepsilon\}$ будет сколь угодно малой окрестностью точки q_0 (рис. 75). При этом связанная компонента соответствующей области $\{p, q: E(p, q) \leq h + \varepsilon\}$ ($p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ — импульс, $E = T + U$ — полная энергия) в фазовом пространстве p, q будет сколь угодно малой окрестностью точки $p = 0$, $q = q_0$.

Но область $\{p, q: E \leq h + \varepsilon\}$ инвариантна относительно фазового потока по закону сохранения энергии. Значит, при достаточно близких к $(0, q_0)$ начальных условиях $p(0)$, $q(0)$ вся фазовая траектория $p(t)$, $q(t)$ близка к $(0, q_0)$, ч. т. д.

Задача. Может ли положение равновесия $q = q_0$, $p = 0$ быть асимптотически устойчивым?

Задача. Докажите, что в аналитической системе с одной степенью свободы положение равновесия q_0 , не являющееся точкой строгого локального минимума потенциальной энергии, неустойчиво по Ляпунову. Приведите пример бесконечно дифференцируемой системы, где это не так.

Замечание. Кажется правдоподобным, что в аналитической системе с n степенями свободы положение равновесия, не являющееся точкой минимума, неустойчиво, но это не доказано.

В. Линеаризация дифференциального уравнения. Вернемся теперь к общей системе (1). При исследовании решений системы (1), близких к положению равновесия x_0 , часто пользуются *линеаризацией*. Предположим, что $x_0 = 0$ (общий случай приводится к этому сдвигом системы координат). Тогда первый член ряда Тейлора f линейный:

$$f(x) = Ax + R_2(x), \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0, \quad R_2 = O(x^2),$$

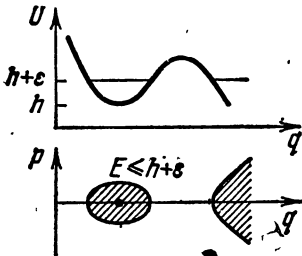


Рис. 75. Устойчивое положение равновесия.

где линейный оператор A в координатах x_1, \dots, x_n задается матрицей a_{ij} :

$$(Ax)_i = \sum_j a_{ij}x_j; \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Определение. Переход от системы (1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in TR_0^n) \quad (4)$$

называется *линеаризацией* системы (1).

Задача. Докажите, что линеаризация — корректно определенная операция: оператор A не зависит от системы координат.

Преимущество линеаризованной системы состоит в том, что она линейна и потому немедленно решается:

$$y(t) = e^{At}y(0), \quad \text{где } e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$$

Зная решения линеаризованной системы (4), можно сказать кое-что о решениях исходной системы (1). При достаточно малых x разница между линеаризованной и исходной системами $R_2(x)$ мала по сравнению с x . Поэтому в течение долгого времени решения $y(t)$, $x(t)$ обеих систем с начальным условием $y(0) = x(0) = x_0$ остаются близкими. Точнее, легко доказывается следующая

Теорема. Для любого $T > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|x(0)| < \delta$, то $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ для всех t из интервала $0 < t < T$.

Г. Линеаризация лагранжевой системы. Обратимся снова к лагранжевой системе (2) и постараемся ее линеаризовать в окрестности положения равновесия $q = q_0$. Для упрощения формул выберем координаты так, чтобы $q_0 = 0$.

Теорема. Чтобы линеаризовать лагранжеву систему (2) в окрестности положения равновесия $q = 0$, достаточно заменить кинетическую энергию $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$ ее значением при $q = 0$,

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(0),$$

а потенциальную энергию $U(q)$ — ее квадратичной частью

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=0}.$$

Доказательство. Приведем систему Лагранжа к виду (1), используя канонические переменные p, q :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H(p, q) = T + U.$$

Так как $p=q=0$ есть положение равновесия, то разложения правых частей в ряд Тейлора в нуле начинаются с линейных по p , q членов. Так как правые части — частные производные, то эти *линейные* члены определяются *квадратичными* членами H_2 разложения $H(p, q)$. Но H_2 есть в точности функция Гамильтона системы с лагранжианом $L_2 = T_2 - U_2$, так как, очевидно, $H_2 = T_2(p) + U_2(q)$. Итак, *линеаризованные уравнения движения* суть уравнения движения для описанной в теореме системы с $L_2 = T_2 - U_2$, ч. т. д.

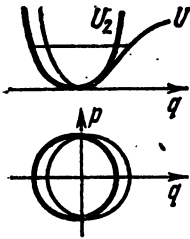


Рис. 76. Линеаризация

Пример. Рассмотрим систему с одной степенью свободы:

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2, \quad U = U(q).$$

Пусть $q = q_0$ — устойчивое положение равновесия: $\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0} = 0$, $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} > 0$ (рис. 76).

Как мы знаем из фазового портрета, при близких к $q = q_0$, $p = 0$ начальных условиях решение периодически, с периодом τ , зависящим, вообще говоря, от начальных условий. Из предыдущих двух теорем вытекает

Следствие. Период τ колебаний вблизи положения равновесия q_0 стремится при уменьшении амплитуды колебаний к пределу $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, где $\omega_0^2 = \frac{b}{a}$,

$$b = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0}, \quad a = a(q_0).$$

Действительно, для линеаризованной системы $T_2 = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$, $U_2 = \frac{1}{2} b q^2$ (считаем $q_0 = 0$). Решения уравнения Лагранжа $\ddot{q} = -\omega_0^2 q$ имеют период $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$q = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

при любой начальной амплитуде.

Д. Малые колебания.

Определение. Движения в линеаризованной системе ($L_2 = T_2 - U_2$) называются *малыми колебаниями* *) вблизи положения равновесия $q = q_0$. В одномерной задаче числа τ_0 , ω_0 называются *периодом малых колебаний* и *частотой малых колебаний*.

*) В случае, когда положение равновесия неустойчиво, мы будем говорить о «неустойчивых малых колебаниях», хотя движение при этом и не имеет колебательного характера.

Пример. Найти период малых колебаний бусинки массы 1 на проволоке $y = U(x)$ в поле тяжести с $g = 1$ вблизи положения равновесия $x = x_0$ (рис. 77).
Решение. Имеем

$$U = mgy = U(x),$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Пусть x_0 — устойчивое положение равновесия: $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_0} = 0$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_0} > 0$. Тогда частота малых колебаний ω определяется формулой

$$\omega^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_0},$$

ибо для линеаризованной системы $T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2$,

$$U_2 = \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \quad (q = x - x_0).$$

Задача. Показать, что не только малые колебания, но и все движение бусинки в точности эквивалентно движению в некоторой одномерной системе с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q).$$

Указание. Принять за q длину вдоль проволоки.

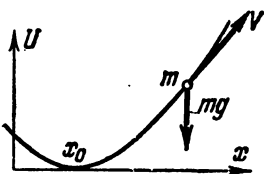


Рис. 77. Бусинка на проволоке.

§ 23. Малые колебания

Здесь показано, что лагранжева система, совершающая малые колебания, распадается в прямое произведение систем с одной степенью свободы.

А. Задача о паре форм. Рассмотрим подробнее задачу о малых колебаниях. Иными словами, рассмотрим систему, у которой кинетическая и потенциальная энергия — квадратичные формы

$$T = \frac{1}{2} (A\dot{q}, \dot{q}), \quad U = \frac{1}{2} (Bq, q), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Кинетическая энергия — положительно определенная форма.

Чтобы проинтегрировать уравнения Лагранжа, выберем разумным образом координаты.

Как известно из линейной алгебры, пару квадратичных форм (Aq, q) , (Bq, q) , первая из которых положительно определена, можно привести к главным осям единой линейной заменой координат*):

$$Q = Cq, \quad Q = (Q_1, \dots, Q_n).$$

*) Если угодно, можно ввести евклидову структуру, приняв первую форму за скалярный квадрат, и затем ортогональным в смысле этой евклидовой структуры преобразованием привести вторую форму к главным осям.

При этом координаты Q можно выбрать так, что форма (Aq, q) приведет к сумме квадратов (Q, Q) . Пусть Q — такие координаты; тогда, так как $\dot{Q} = C\dot{q}$, имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i^2. \quad (2)$$

Числа λ_i называются *собственными числами формы B относительно A* .

Задача. Докажите, что собственные числа B относительно A удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\det |B - \lambda A| = 0, \quad (3)$$

все корни которого, таким образом, вещественны (матрицы A и B симметричны, $A > 0$).

Б. Собственные колебания. В координатах Q система Лагранжа распадается на n независимых уравнений

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i. \quad (4)$$

Итак доказана

Теорема. Система, совершающая малые колебания, есть прямое произведение n одномерных систем, совершающих малые колебания.

Для каждой одномерной системы могут представиться три случая:

Случай 1. $\lambda = \omega^2 > 0$; решение $Q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ (колебания).

Случай 2. $\lambda = 0$; решение $Q = C_1 + C_2 t$ (безразличное равновесие).

Случай 3. $\lambda = -k^2 < 0$; решение $Q = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt$ (неустойчивость).

Следствие. Пусть одно из собственных чисел (3) положительно: $\lambda = \omega^2 > 0$. Тогда система (1) может совершать периодическое колебание вида

$$q(t) = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \xi, \quad (5)$$

где ξ — соответствующий λ собственный вектор (рис. 78):

$$B\xi = \lambda A\xi.$$

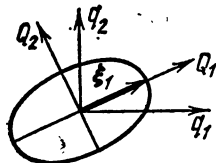


Рис. 78. Собственные колебания.

Это колебание — произведение одномерного движения $Q_i = C_1 \cos \omega_i t + C_2 \sin \omega_i t$ и тривиальных движений $Q_j = 0$ ($j \neq i$).

Определение. Периодическое движение (5) называется *собственным колебанием* системы (1), а число ω называется *собственной частотой*.

Замечание. Собственные колебания и частоты называют также главными или нормальными. Неположительным λ также соответствуют собственные векторы; соответствующие движения для краткости мы тоже будем называть «собственными колебаниями», хотя они и не периодичны; соответствующие «собственные частоты» — мнимые.

Задача. Доказать, что число линейно независимых настоящих собственных колебаний равно положительному индексу инерции потенциальной энергии $\frac{1}{2}(Bq, q)$.

Теперь результат можно сформулировать так:

Теорема. Система (1) имеет n собственных колебаний, направления которых попарно ортогональны в смысле скалярного произведения, заданного кинетической энергией A .

Действительно, система координат Q в силу (2) ортогональна в смысле скалярного квадрата (Aq, q) .

В. Разложение по собственным колебаниям. Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. Всякое малое колебание есть сумма собственных колебаний.

Сумма собственных колебаний, вообще говоря, не периодична (вспомним фигуры Лиссажу!).

Для разложения движения в сумму собственных колебаний достаточно спроектировать начальные условия q, \dot{q} на собственные направления ξ_k и решить соответствующие одномерные задачи (4).

Итак, уравнения Лагранжа для системы (1) можно решать следующим образом. Вначале ищем собственные колебания в виде $q = e^{i\omega t} \xi$. Подставляя это в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} A \dot{q} = Bq,$$

находим

$$(B - \omega^2 A) \xi = 0.$$

Из характеристического уравнения (3) находим n собственных чисел $\lambda_k = \omega_k^2$. Им соответствуют n попарно ортогональных собственных векторов ξ_k . Общее решение в случае $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$q(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n C_k e^{i\omega_k t} \xi_k.$$

Замечание. Этот результат справедлив и тогда, когда среди собственных чисел λ есть кратные.

Таким образом, в лагранжевой системе, в отличие от общей системы линейных дифференциальных уравнений, резонансные члены вида $t \sin \omega t$ и т. п. не возникают даже в случае кратных собственных чисел.

Г. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим систему из двух одинаковых математических маятников длин $l_1 = l_2 = l$, масс $m_1 = m_2 = m$ в поле тяготения с $g = 1$. Пусть маятники соединены невесомой пружиной, длина которой равна расстоянию между точками подвеса (рис. 79). Обозначим через q_1, q_2 углы отклонения маятников. Тогда для малых колебаний $T = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $U = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2 +$

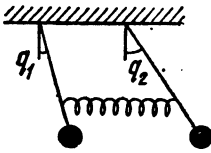


Рис. 79. Связанные одинаковые маятники.

$+ \alpha (q_1 - q_2)^2)$, где $\frac{\alpha}{2} (q_1 - q_2)^2$ — потенциальная энергия упругости пружины. Положим

$$Q_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$q_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}},$$

и обе формы приведены к главным осям:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2), \quad U = \frac{1}{2} (\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2),$$

где $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\alpha}$ (рис. 80). Итак, два собственных колебания следующие (рис. 81):

1) $Q_2 = 0$, т. е. $q_1 = q_2$: оба маятника движутся синфазно с прежней частотой 1, пружина не работает,

2) $Q_1 = 0$, т. е. $q_1 = -q_2$: маятники движутся в противофазе с увеличенной благодаря действию пружины частотой $\omega_2 > 1$.

Пусть теперь пружина очень слаба: $\alpha \ll 1$. Тогда появляется интересный эффект перекачки энергии.

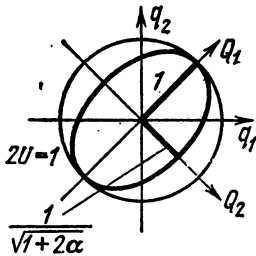


Рис. 80. Конфигурационное пространство связанных маятников.

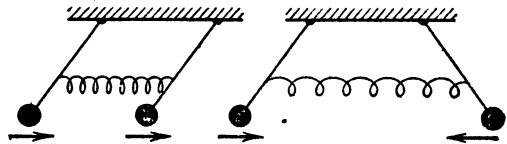


Рис. 81. Собственные колебания связанных маятников.

Пример 2. Пусть в начальный момент маятники покоятся, и одному из них сообщена скорость $\dot{q}_1 = v$. Показать, что через некоторое время T первый маятник будет почти неподвижен, а вся энергия перейдет второму.

Из начальных условий следует $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$. Поэтому $Q_1 = c_1 \sin t$, $Q_2 = c_2 \sin \omega t$, $\omega = \sqrt{1 + 2\alpha} \approx 1 + \alpha$ ($\alpha \ll 1$). Но $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Поэтому

$c_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{v}{\omega \sqrt{2}}$, и наше решение имеет вид

$$q_1 = \frac{v}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right), \quad q_2 = \frac{v}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right),$$

или, пренебрегая слагаемым $v \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \sin \omega t$, малым вместе с α

$$q_1 \approx \frac{v}{2} (\sin t + \sin \omega t) = v \cos \epsilon t \sin \omega t,$$

$$q_2 \approx \frac{v}{2} (\sin t - \sin \omega t) = -v \cos \omega' t \sin \epsilon t,$$

$$\epsilon = \frac{\omega - 1}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad \omega' = \frac{\omega + 1}{2} \approx 1.$$

Величина $\epsilon \approx \frac{\alpha}{2}$ мала, вместе с α , поэтому q_1 испытывает колебания частоты $\omega' \approx 1$ с медленно меняющейся амплитудой $v \cos \epsilon t$ (рис. 82).

Через время $T = \frac{\pi}{2\epsilon} \approx \frac{\pi}{\alpha}$ будет колебаться практически один второй маятник, через $2T$ — опять один первый и т. д. («биения») (рис. 83).

Пример 3. Исследовать собственные колебания двух разных маятников ($m_1 \neq m_2, l_1 \neq l_2, g=1$), соединенных пружиной с энергией $\frac{1}{2} \alpha (q_1 - q_2)^2$ (рис. 84). Как ведут себя собственные частоты при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow \infty$?

Имеем

$$T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2),$$

$$U = m_1 l_1 \frac{q_1^2}{2} + m_2 l_2 \frac{q_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2} (q_1 - q_2)^2.$$

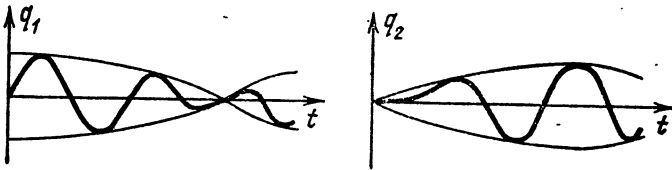


Рис. 83. Биения.

Поэтому (рис. 85)

$$A = \begin{vmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} m_1 l_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha \end{vmatrix},$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$\det |B - \lambda A| = \det \begin{vmatrix} m_1 l_1 + \alpha - \lambda m_1 l_1^2 & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha - \lambda m_2 l_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$a \lambda^2 - (b_0 + b_1 \alpha) \lambda + (c_0 + c_1 \alpha) = 0,$$

где

$$a = m_1 m_2 l_1 l_2^2,$$

$$b_0 = m_1 l_1 m_2 l_2 (l_1 + l_2), \quad b_1 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2,$$

$$c_0 = m_1 m_2 l_1 l_2, \quad c_1 = m_1 l_1 + m_2 l_2.$$

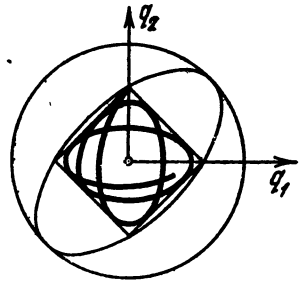


Рис. 82. Биения: траектория в конфигурационном пространстве.

Это — уравнение гиперболы на плоскости α, λ (рис. 86). При $\alpha \rightarrow 0$ (слабая пружина) частоты стремятся к частотам свободных маятников ($\omega_{1,2}^2 = l_{1,2}^{-1}$); при $\alpha \rightarrow \infty$ (очень сильная пружина) одна из частот стремится к ∞ , а вторая — к собственной частоте ω_∞ маятника из двух масс на одном стержне (рис. 87):

$$\omega_\infty^2 = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}.$$

Задача. Исследовать собственные колебания плоского двойного маятника (рис. 88).

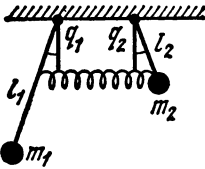


Рис. 84. Связанные маятники.

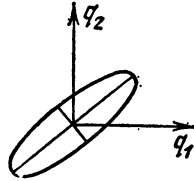


Рис. 85. Потенциальная энергия сильно связанных маятников.

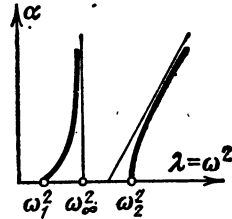


Рис. 86. Зависимость собственных частот от жесткости пружины.

Задача. Найти вид траектории малых колебаний материальной точки на плоскости, находящейся в центре правильного треугольника и соединённой одинаковыми пружинами с вершинами (рис. 89).

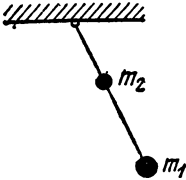


Рис. 87. Предельный случай маятников, связанных бесконечно жесткой пружиной.

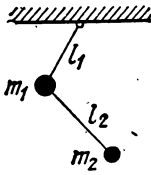


Рис. 88. Двойной маятник.

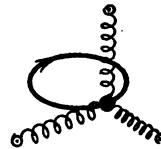


Рис. 89. Система о бесконечным множеством собственных колебаний.

Решение. При повороте на 120° система переходит в себя. Следовательно, все направления собственные, а обе собственные частоты одинаковы: $U = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$. Значит, траектории — эллипсы (см. рис. 20).

§ 24. О поведении собственных частот

Здесь доказаны теоремы Релея — Куранта — Фишера о поведении собственных частот системы при увеличении жесткости и при наложении связи.

А. Поведение собственных частот при изменении жесткости.

Рассмотрим совершающую малые колебания систему с кинетической и потенциальной энергиями

$$T = \frac{1}{2} (Aq, \dot{q}) > 0, \quad U = \frac{1}{2} (Bq, q) > 0 \quad \text{для всех } q, \quad q \neq 0.$$

Определение. Система с такой же кинетической энергией и потенциальной энергией U' называется *более жесткой*, если

$$U' = \frac{1}{2} (B'q, q) \geq \frac{1}{2} (Bq, q) = U \quad \text{для всех } q.$$

Мы хотим выяснить, как изменятся собственные частоты при увеличении жесткости системы.

Задача. Рассмотрите одномерный случай.

Теорема 1. При увеличении жесткости все собственные частоты увеличиваются, т. е. если $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ — собственные частоты менее жесткой системы, а $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_n$ — более жесткой, то $\omega_1 \leq \omega'_1$; $\omega_2 \leq \omega'_2$; ...; $\omega_n \leq \omega'_n$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. Не нарушая общности, можно считать, что $A = E$, т. е. что мы рассматриваем евклидову структуру, заданную кинетической энергией $T = \frac{1}{2} (\dot{q}, \dot{q})$. Каждой системе сопоставим эллипсоид: $\mathcal{E}: (Bq, q) = 1$, $\mathcal{E}': (B'q, q) = 1$. Очевидна

Лемма 1. Если система U' жестче системы U , то соответствующий ей эллипсоид \mathcal{E}' лежит внутри \mathcal{E} .

Столь же очевидна

Лемма 2. Главные полуоси эллипсоида обратны собственным частотам ω_i :

$$\omega_i = \frac{1}{a_i}.$$

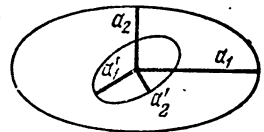


Рис. 90. Полуоси внутреннего эллипсоида меньше.

Поэтому теорема 1 эквивалентна следующему геометрическому утверждению (рис. 90).

Теорема 2. Если эллипсоид \mathcal{E} с полуосями $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ содержит эллипсоид \mathcal{E}' с полуосями $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n$ с тем же центром, то полуоси внутреннего эллипсоида меньше:

$$a_1 \geq a'_1, a_2 \geq a'_2, \dots, a_n \geq a'_n.$$

Пример. При увеличении жесткости α пружины, сбединяющей маятника примера 3 § 23 потенциальная энергия растет, и по теореме 1 собственные частоты растут: $\frac{d\omega_i}{d\alpha} > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда жесткость пружины стремится к бесконечности: $\alpha \rightarrow \infty$. Тогда в пределе маятника жестко связаны и получается система с одной степенью свободы; предельная собственная частота $-\omega_1 < -\omega_\infty < \omega_2$.

Б. Поведение собственных частот при наложении связи. Вернемся к общей системе с n степенями свободы, и пусть $T = \frac{1}{2} (\dot{q}, \dot{q})$, $U = \frac{1}{2} (Bq, q)$, $q \in R^n$ — кинетическая и потенциальная энергия системы, совершающей малые колебания.

Пусть $R^{n-1} \subset R^n$ — $n-1$ -мерное подпространство в R^n (рис. 91). Рассмотрим систему с $n-1$ степенями свободы ($q \in R^{n-1}$), у которой кинетическая и потенциальная энергии равны ограничению T и U на R^{n-1} . Говорят, что эта система получена из исходной *умножением линейной связи*.

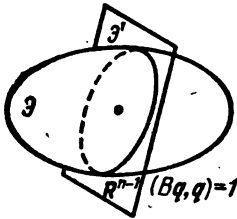


Рис. 91. Линейная связь.

Пусть исходная система имела n собственных частот $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$, а система со связью — $n-1$ собственную частоту

$$\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-1}.$$

Теорема 3. *Собственные частоты системы со связью разделяют собственные частоты исходной системы (рис. 92):*

$$\omega_1 \leq \omega'_1 \leq \omega_2 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega_{n-1} \leq \omega'_{n-1} \leq \omega_n.$$

В соответствии с леммой 2 эта теорема эквивалентна следующему геометрическому утверждению.

Теорема 4. *Рассмотрим сечение n -мерного эллипсоида $\mathcal{E} = \{q : (Bq, q) = 1\}$ с полюсами $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ гиперплоскостью*



Рис. 92. Разделение частот.

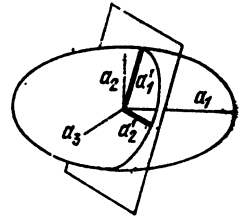


Рис. 93. Полуоси сечения разделяют полуоси эллипсоида.

R^{n-1} . Тогда полуоси $n-1$ -мерного эллипсоида — сечения \mathcal{E} разделяют полуоси эллипсоида \mathcal{E} (рис. 93):

$$a_1 \geq a'_1 \geq a_2 \geq a'_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a'_{n-1} \geq a_n.$$

В. Экстремальные свойства собственных чисел.

Теорема 5. *У любого сечения эллипсоида \mathcal{E} с полюсами $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ k -мерным подпространством R^k малая полуось меньше или равна a_k :*

$$a_k = \max_{\{R^k\}} \min_{x \in R^k \cap \mathcal{E}} \|x\|$$

(верхняя грань достигается на подпространстве, натянутом на полуоси $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$).

*Доказательство**). Рассмотрим подпространство R^{n-k+1} , натянутое на оси $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$. Его размерность равна

*) Полезно представлять себе случай $n=3, k=2$.

$n - k + 1$. Поэтому оно пересекается с \mathbb{R}^k . Пусть x — точка пересечения, лежащая на эллипсоиде \mathcal{E} . Тогда $\|x\| \leq a_k$, поскольку $x \in \mathbb{R}^{n-k+1}$. Так как $\|x\|$ не меньше длины малой полуоси эллипсоида $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}^k$, последняя не больше a_k , ч. т. д.

Доказательство теоремы 2. Маленькая полуось каждого k -мерного сечения внутреннего эллипсоида $\mathbb{R}^k \cap \mathcal{E}$ не больше меньшей оси $\mathbb{R}^k \cap \mathcal{E}$. По теореме 5

$$a'_k = \max_{\{\mathbb{R}^k\}} \min_{x \in \mathbb{R}^k \cap \mathcal{E}} \|x\| \leq \max_{\{\mathbb{R}^k\}} \min_{x \in \mathbb{R}^k \cap \mathcal{E}} \|x\| = a_k, \text{ ч. т. д.}$$

Доказательство теоремы 4. Неравенство $a'_k \leq a_k$ следует из теоремы 5, так как при вычислении a_k максимум берется по более широкому множеству. Чтобы доказать неравенство $a'_k \geq a_{k+1}$, пересечем \mathbb{R}^{n-1} с любым $k+1$ -мерным подпространством \mathbb{R}^{k+1} . Пересечение имеет размерность не меньше k . Малая полуось эллипсоида $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}^{k+1}$ не меньше малой полуоси $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}^k$. По теореме 5

$$\begin{aligned} a'_k &= \max_{\{\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{n-1}\}} \min_{x \in \mathbb{R}^k \cap \mathcal{E}} \|x\| \geq \max_{\{\mathbb{R}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n\}} \min_{x \in \mathbb{R}^{k+1} \cap \mathcal{E}} \|x\| \geq \\ &\geq \max_{\{\mathbb{R}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n\}} \min_{x \in \mathbb{R}^{k+1} \cap \mathcal{E}} \|x\| = a_{k+1}, \end{aligned}$$

ч. т. д.

Теоремы 1 и 3 непосредственно вытекают из доказанных.

Задача. Докажите, что если, не меняя потенциальной энергии системы, увеличить кинетическую (например, сохранив пружины, увеличить массы), то каждая собственная частота уменьшится.

Задача. Докажите, что при ортогональном проектировании эллипсоида, лежащего в одном подпространстве евклидова пространства, на другое подпространство все его полуоси уменьшаются.

Задача. Пусть квадратичная форма $A(\varepsilon)$ на евклидовом пространстве \mathbb{R}^n непрерывно дифференцируемо зависит от параметра ε . Покажите, что каждое собственное число дифференцируемо зависит от ε , и найдите производные.

Ответ. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — собственные числа $A(0)$. Каждому собственному числу λ_i кратности ν_i отвечает подпространство \mathbb{R}^{ν_i} . Производные собственных чисел $A(\varepsilon)$ в 0 равны собственным числам сужений формы $B = \left. \frac{dA}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ на \mathbb{R}^{ν_i} .

В частности, если все собственные числа $A(0)$ простые, то их производные равны диагональным элементам матрицы B в собственном базисе $A(0)$.

Из утверждения этой задачи следует, что при увеличении формы ее собственные числа растут. Мы получаем таким образом, новое доказательство теоремы 1 и 2.

Задача. Как меняется высота звучания колокола при появлении трещины?

§ 25. Параметрический резонанс

Если параметры системы периодически меняются со временем, то положение равновесия может сделаться неустойчивым, даже если оно и устойчиво при каждом фиксированном значении параметра. Благодаря такой неустойчивости можно раскачиваться на качелях.

А. Динамические системы, параметры которых меняются со временем периодически.

Пример 1. Качели, у которых длина эквивалентного математического маятника $l(t)$ меняется со временем периодически: $l(t+T) = l(t)$ (рис. 94).

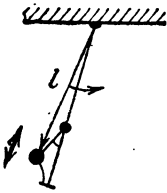


Рис. 94. Качели.

Пример 2. Маятник в поле с периодически меняющейся силой тяжести (например Луна) описывается уравнением Хилла

$$\ddot{q} = -\omega^2(t)q, \quad \omega(t+T) = \omega(t). \quad (1)$$

Пример 3. Маятник с периодически вертикально колеблющейся точкой подвеса также описывается уравнением вида (1).

Для систем с периодически меняющимися параметрами правые части уравнений движения — периодические функции t . Уравнения движения можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f(x, t+T) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

с периодическими правыми частями. Например, уравнение (1) можно записать в виде системы

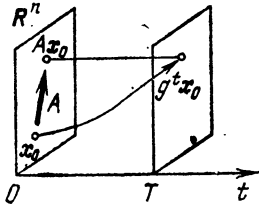


Рис. 95. Отображение за период.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1, \end{aligned} \right\} \omega(t+T) = \omega(t). \quad (3)$$

Б. Отображение за период. Напомню общие свойства систем (2). Обозначим через $g^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображение, переводящее $x \in \mathbb{R}^n$ в значение в момент t $g^t x = \varphi(t)$ решения φ системы (2) с начальным условием $\varphi(0) = x$ (рис. 95).

Отображения g^t не образуют группы: вообще говоря,

$$g^{t+s} \neq g^t g^s \neq g^s g^t.$$

Задача. Докажите, что $\{g^t\}$ группа тогда и только тогда, когда правые части f не зависят от t .

Задача. Докажите, что если T — период f , то $g^{T+s} = g^s \cdot g^T$ и, в частности, $g^{nT} = (g^T)^n$, так что отображения g^{nT} образуют группу (n — целые).

Отображение $g^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ играет важную роль в дальнейшем; мы назовем его *отображением за период* и обозначим через

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Ax(0) = x(T).$$

Пример. Для систем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

которые можно считать периодическими с любым периодом T , отображение A есть поворот и гиперболический поворот (рис. 96).

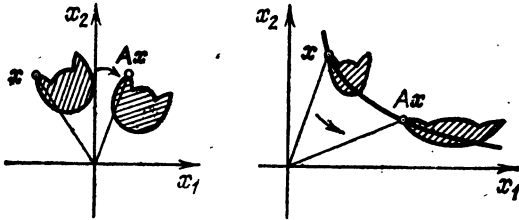


Рис. 96. Поворот и гиперболический поворот.

Теорема. 1) Точка x_0 есть неподвижная точка отображения A ($Ax_0 = x_0$) тогда и только тогда, когда решение с начальным условием $x(0) = x_0$ периодическое с периодом T .

2) Периодическое решение $x(t)$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда неподвижная точка x_0 отображения A устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива)*).

3) Если система (2) линейна, т. е. $f(x, t) = f(t)x$ — линейная функция x , то отображение A линейно.

4) Если система (2) гамильтонова, то отображение A сохраняет объем: $\det A = 1$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из соотношения $g^{T+s} = g^s A$. Утверждение 3) вытекает из того, что сумма решений линейной системы есть снова решение. Утверждение 4) вытекает из теоремы Лиувилля.

Применим доказанную теорему к отображению A фазовой плоскости $\{(x_1, x_2)\}$, на себя, соответствующему уравнению (1) и системе (3). Так как система (3) линейна и гамильтонова ($H = \frac{x_1^2}{2} + \omega^2 \frac{x_2^2}{2}$), получаем

* Неподвижная точка x_0 отображения A устойчива по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчива), если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, так что из $|x - x_0| < \delta$ вытекает $|A^n x - A^n x_0| < \varepsilon$ для всех $0 < n < \infty$ сразу (соответственно $A^n x - A^n x_0 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

Следствие. *Отображение A линейно и сохраняет площади ($\det A = 1$). Для устойчивости нулевого решения уравнения (1) необходима и достаточна устойчивость отображения A .*

Задача. Доказать, что поворот плоскости — устойчивое отображение, а гиперболический поворот — неустойчивое.

В. Линейные отображения плоскости на себя, сохраняющие площадь.

Теорема. Пусть A — матрица сохраняющего площадь линейного отображения плоскости на себя ($\det A = 1$). Тогда отображение A устойчиво, если $|\operatorname{tr} A| < 2$, и неустойчиво, если $|\operatorname{tr} A| > 2$ ($\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$).

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа A . Они удовлетворяют характеристическому уравнению $\lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + 1 = 0$ с вещественными коэффициентами $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = 1$.

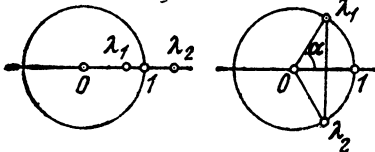


Рис. 97. Собственные числа отображения A .

Корни λ_1, λ_2 этого вещественного квадратного уравнения вещественны при $|\operatorname{tr} A| > 2$ и комплексно-сопряжены при $|\operatorname{tr} A| < 2$.

В первом случае одно из собственных чисел больше, а другое меньше единицы по модулю; отображение A есть гиперболический поворот и неустойчиво (рис. 97).

Во втором случае собственные числа лежат на единичной окружности (рис. 97):

$$1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2.$$

Отображение A эквивалентно повороту на угол α (где $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$), т. е. приводится к повороту соответствующим выбором координат на плоскости. Поэтому оно устойчиво, ч. т. д.

Таким образом, весь вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения вида (1) свелся к вычислению следа матрицы A . К сожалению, вычислить этот след явно удастся лишь в специальных случаях. Его всегда можно найти приближенно, численно интегрируя уравнение на отрезке $0 \leq t \leq T$. В важном случае, когда $\omega(t)$ близка к постоянной, помогают простые общие соображения.

Г. Сильная устойчивость.

Определение. Нулевое решение гамильтоновой линейной системы *сильно устойчиво*, если оно устойчиво, и у всякой достаточно близкой линейной гамильтоновой системы нулевое решение тоже устойчиво *).

*) Расстояние между линейными системами с периодическими коэффициентами $\dot{x} = B_1(t)x$, $\dot{x} = B_2(t)x$ определяется как максимум расстояния между операторами $B_1(t)$ и $B_2(t)$ по t .

Из предыдущих двух теорем вытекает

Следствие. Если $|\operatorname{tr} A| < 2$, то нулевое решение сильно устойчиво.

Ибо если $|\operatorname{tr} A| < 2$, то для отображения A' , соответствующего достаточно близкой системе, тоже выполнено условие $|\operatorname{tr} A'| < 2$, ч. т. д.

Применим это к системе с почти постоянными (мало меняющимися) коэффициентами. Рассмотрим, например, уравнение

$$\ddot{x} = -\omega^2 (1 + \varepsilon a(t)) x, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (4)$$

где $a(t + 2\pi) = a(t)$, например $a(t) = \cos t$ (рис. 98). (Маятник, частота которого колеблется около ω с малой амплитудой и с периодом 2π .) *)

Каждую систему (4) будем изображать точкой на плоскости параметров $\varepsilon, \omega > 0$. Очевидно, устойчивые системы с $|\operatorname{tr} A| < 2$

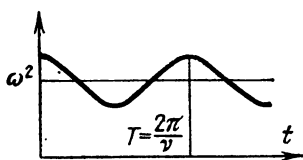


Рис. 98. Мгновенная частота как функция времени.

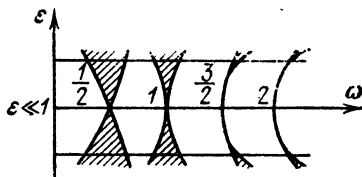


Рис. 99. Зоны параметрического резонанса

образуют на плоскости (ω, ε) открытое множество, так же как и неустойчивые системы с $|\operatorname{tr} A| > 2$ (рис. 99).

Граница устойчивости дается уравнением $|\operatorname{tr} A| = 2$.

Теорема. Все точки оси ω , исключая целые и полуцелые точки $\omega = \frac{k}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$, соответствуют сильно устойчивым системам (4).

Таким образом, множество неустойчивых систем может подходить к оси ω только в точках $\omega = k/2$. Иными словами, раскачать качели малым периодическим изменением длины можно лишь в том случае, когда один период изменения длины близок к целому числу полупериодов собственных колебаний, — результат, всем известный из эксперимента.

Доказательство сформулированной теоремы основано на том, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (4) имеет постоянные коэффициенты и явно решается.

Задача. Вычислить для системы (4) с $\varepsilon = 0$ матрицу преобразования A за период $T = 2\pi$ в базисе x, \dot{x} .

*) В случае $a(t) = \cos(t)$ уравнение (4) называется уравнением Маттье.

Решение. Общее решение:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Частное решение с начальным условием $x = 1, \dot{x} = 0$:

$$x = \cos \omega t, \quad \dot{x} = -\omega \sin \omega t.$$

Частное решение с начальным условием $x = 0, \dot{x} = 1$:

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{x} = \cos \omega t.$$

Ответ.

$$A = \begin{vmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{vmatrix}.$$

Поэтому $|\operatorname{tr} A| = |2 \cos 2\omega\pi| < 2$, если $\omega \neq \frac{k}{2}, k = 0, 1, \dots$, и теорема вытекает из предыдущего следствия.

Более внимательный анализ *) показывает, что, вообще говоря, (и при $a(t) = \cos t$) вблизи точек $\omega = \frac{k}{2}, k = 1, 2, \dots$, область неустойчивости (заштрихованная на рис. 99) действительно подходит к оси ω .

Таким образом, при $\omega \approx \frac{k}{2}, k = 1, 2, \dots$, нижнее положение равновесия идеализированных качелей (4) неустойчиво и они раскачиваются при сколь угодно малом периодическом изменении длины. Это явление называется *параметрическим резонансом*. Характерной особенностью параметрического резонанса является то, что он сильнее всего проявляется в случае, когда частота изменения параметров ν (в уравнении (4) — $\nu = 1$) вдвое больше собственной частоты ω .

З а м е ч а н и е. Теоретически параметрический резонанс наблюдается при бесконечном наборе соотношений $\omega/\nu \approx k/2, k = 1, 2, \dots$. Практически наблюдаемы обычно лишь случаи, когда k невелико ($k = 1, 2$, реже 3). Дело в том, что

а) При больших k область неустойчивости подходит к оси ω узким языком и для резонансной частоты ω получаются очень жесткие пределы ($\sim \varepsilon^k$ для гладкой функции $a(t)$ в (4)).

б) Сама неустойчивость слабо выражена при больших k , так как $|\operatorname{tr} A| - 2$ невелик и собственные числа близки к единице при больших k .

*) См., например, разобранную ниже задачу.

в) Сколь угодно малое трение приводит к тому, что для возникновения параметрического резонанса имеется минимальное значение амплитуды ε_k (при меньших ε колебания затухают). С ростом k ε_k быстро растет (рис. 100).

Заметим также, что для уравнений (4) в неустойчивом случае величина x растет неограниченно.

В реальных системах колебания достигают лишь конечной амплитуды, так как при больших x само линеаризованное уравнение (4) теряет силу и нужно учитывать нелинейные эффекты.

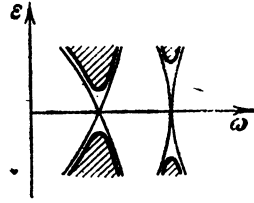


Рис. 100. Влияние трения на параметрический резонанс.

Задача. Найти вид областей устойчивости на плоскости ε, ω для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} = -f^2(t)x, \quad f(t) = \begin{cases} \omega + \varepsilon, & 0 < t < \pi, \\ \omega - \varepsilon, & \pi < t < 2\pi, \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1, \\ f(t + 2\pi) = f(t).$$

Решение. Из решения предыдущей задачи следует, что $A = A_2 A_1$, где

$$A_k = \begin{vmatrix} c_k & \frac{1}{\omega_k} s_k \\ -\omega_k s_k & c_k \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} c_k = \cos \pi \omega_k, \\ s_k = \sin \pi \omega_k, \\ \omega_{1,2} = \omega \pm \varepsilon. \end{matrix}$$

Поэтому граница зоны устойчивости имеет уравнение

$$|\operatorname{tr} A| = \left| 2c_1 c_2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) s_1 s_2 \right| = 2. \quad (5)$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, имеем $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega + \varepsilon}{\omega - \varepsilon} \approx 1$. Введем обозначение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2(1 + \Delta).$$

Тогда, как легко сосчитать, $\Delta = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} + O(\varepsilon^4) \ll 1$. Пользуясь соотношениями $2c_1 c_2 = \cos 2\pi\varepsilon + \cos 2\pi\omega$, $2s_1 s_2 = \cos 2\pi\varepsilon - \cos 2\pi\omega$, перепишем уравнение (5) в виде

$$-\Delta \cos 2\pi\varepsilon + (2 + \Delta) \cos 2\pi\omega = \pm 2,$$

или

$$\cos 2\pi\omega = \frac{2 + \Delta \cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}, \quad (6_1)$$

$$\cos 2\pi\omega = \frac{-2 + \Delta \cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}. \quad (6_2)$$

В первом случае $\cos 2\pi\omega \approx 1$. Поэтому положим

$$\omega = k + a, \quad |a| \ll 1; \quad \cos 2\pi\omega = \cos 2\pi a = 1 - 2\pi^2 a^2 + O(a^4).$$

Перепишем уравнение (6₁) в виде

$$\cos 2\pi\omega = 1 - \frac{\Delta}{2 + \Delta} (1 - \cos 2\pi\epsilon)$$

или $2\pi^2 a^2 + O(\epsilon^4) = \Delta\pi^2 \epsilon^2 + O(\epsilon^4)$.

Подставляя значение $\Delta = \frac{2\epsilon^2}{\omega^2} + O(\epsilon^4)$, находим

$$a = \pm \frac{\epsilon^2}{\omega^2} + o(\epsilon^2), \text{ т. е. } \omega = k \pm \frac{\epsilon^2}{k^2} + o(\epsilon^2).$$

Аналогично решается уравнение (6₂); в результате получаем

$$\omega = k + \frac{1}{2} \pm \frac{\epsilon}{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)} + o(\epsilon).$$

Итак, ответ имеет вид, изображенный на рис. 101.

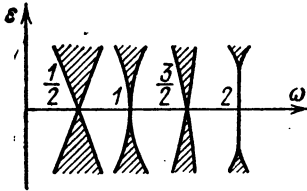


Рис. 101. Зоны параметрического резонанса для $l = \omega \pm \epsilon$.

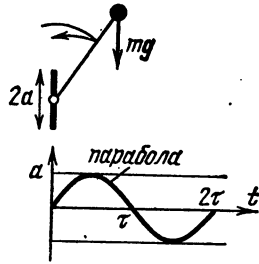


Рис. 102. Перевернутый маятник с колеблющейся точкой подвеса

Д. Устойчивость перевернутого маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса.

Задача. Может ли верхнее, обычно неустойчивое, положение равновесия маятника стать устойчивым, если точка подвеса колеблется в вертикальном направлении (рис. 102)?

Пусть длина маятника l , амплитуда колебаний точки подвеса $a \ll l$, период колебаний точки подвеса 2τ , причем в течение каждого полупериода ускорение точки подвеса *постоянно* и равно $\pm c$ (тогда $c = \frac{8a}{\tau^2}$). Оказывается, при достаточно быстрых колебаниях подвеса ($\tau \ll 1$) верхнее положение равновесия становится устойчивым.

Решение. Уравнение движения можно записать в виде $\ddot{x} = (\omega^2 \pm d^2)x$ (знак меняется через время τ), где $\omega^2 = g/l$, $d^2 = c/l$. Если колебания подвеса достаточно быстры, то $d^2 > \omega^2$ ($d^2 = \frac{8a}{l\tau^2}$).

Аналогично предыдущей задаче. $A = A_2 A_1$, где

$$A_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} k\tau & \frac{1}{k} \operatorname{sh} k\tau \\ k \operatorname{sh} k\tau & \operatorname{ch} k\tau \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} \cos \Omega\tau & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{vmatrix},$$

$$k^2 = d^2 + \omega^2, \quad \Omega^2 = d^2 - \omega^2.$$

Условие устойчивости $|\operatorname{tr} A| < 2$ имеет поэтому вид

$$\left| 2 \operatorname{ch} k\tau \cos \omega\tau + \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} \right) \operatorname{sh} k\tau \sin \omega\tau \right| < 2. \quad (7)$$

Покажем, что условие это выполнено при достаточно быстрых колебаниях точки подвеса, т. е. когда $c \gg g$. Введем безразмерные переменные ε , μ :

$$\frac{a}{l} = \varepsilon^2 \ll 1, \quad \frac{g}{c} = \mu^2 \ll 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} k\tau &= 2\sqrt{2} \varepsilon \sqrt{1+\mu^2}, & \Omega\tau &= 2\sqrt{2} \varepsilon \sqrt{1-\mu^2}, \\ \frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} &= \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} - \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}} = 2\mu^2 + O(\mu^4). \end{aligned}$$

Поэтому при малых ε , μ справедливы разложения с ошибкой $o(\varepsilon^4 + \mu^4)$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} k\tau &= 1 + 4\varepsilon^2(1+\mu^2) + \frac{2}{3}\varepsilon^4 + \dots, & \cos \Omega\tau &= 1 - 4\varepsilon^2(1-\mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \dots, \\ \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} \right) \operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau &= 16\varepsilon^2\mu^2 + \dots \end{aligned}$$

Итак, условие устойчивости (7) принимает вид

$$2 \left(1 - 16\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2\mu^2 + \dots \right) + 16\varepsilon^2\mu^2 < 2,$$

т. е., пренебрегая малыми высшего порядка, $\frac{2}{3}16\varepsilon^4 \geq 32\mu^2\varepsilon^2$ или $\mu < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$,

или еще $\frac{g}{c} < \frac{a}{3l}$. Это условие можно переписать в виде

$$N > \sqrt{\frac{3}{32}} \omega \frac{l}{a} \approx 0,3\omega \frac{l}{a} \quad \left(\sqrt{\frac{3}{32}} \approx 0,31 \right),$$

где $N = \frac{1}{2\tau}$ — число колебаний точки подвеса в единицу времени. Например, если длина маятника $l = 20$ см, а амплитуда колебаний точки подвеса $a = 1$ см, то

$$N > 0,31 \sqrt{\frac{980}{20}} \cdot 20 \approx 43 \quad (\text{колебаний в секунду}).$$

Например, верхнее положение устойчиво, если число колебаний подвеса в секунду больше 50

ГЛАВА 6

ТВЕРДОЕ ТЕЛО

В этой главе подробно исследуются несколько весьма частных механических задач. Эти задачи включаются в курсы классической механики по традиции, основанной на том, что они решены Эйлером и Лагранжем, а также на том обстоятельстве, что мы живем в трехмерном евклидовом пространстве и большинство механических систем с конечным числом степеней свободы, с которыми приходится встречаться, состоит из твердых тел.

§ 26. Движение в подвижной системе координат

В этом параграфе определяется угловая скорость.

А. Подвижные системы координат. Рассмотрим лагранжеву систему, которая в координатах q, t описывается функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$. Часто бывает полезно перейти к подвижной системе координат $Q = Q(q, t)$.

Чтобы записать уравнения движения в подвижной системе, достаточно выразить через новые координаты функцию Лагранжа.

Теорема. Если траектория $\gamma: q = \Phi(t)$ уравнений Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ записывается в локальных координатах Q, t ($Q = Q(q, t)$), в виде $\gamma: Q = \Phi(t)$, то функция $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L'}{\partial Q}$, где $L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$:

Доказательство. Траектория γ является экстремалью: $\delta \int_{\gamma} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$. Следовательно, $\delta \int_{\gamma} L'(Q, \dot{Q}, t) dt = 0$ и $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, ч. т. д.

Б. Движения, вращения, поступательные движения. Рассмотрим, в частности, важный случай, когда q — декартов радиус-вектор точки относительно инерциальной системы координат k (которую мы будем называть неподвижной), а Q — декартов радиус-вектор той же точки относительно подвижной системы координат K .

Определение. Пусть k, K — ориентированные линейные евклидовы пространства.

Движением K относительно k называется гладко зависящее от t отображение

$$D_t: K \rightarrow k,$$

сохраняющее метрику и ориентацию (рис. 103).

Определение. Движение D_t называется *вращением*, если оно переводит начало координат K в начало координат k , т. е. если D_t — линейный оператор.

Теорема. Всякое движение D_t однозначно разлагается в произведение вращения $B_t: K \rightarrow k$ и сдвига $C_t: k \rightarrow k$:

$$D_t = C_t B_t,$$

где $C_t q = q + r(t)$, ($q, r \in k$).

Доказательство. Положим $r(t) = D_t O$, $B_t = C_t^{-1} D_t$. Тогда $B_t O = O$, ч. т. д.

Определение. Движение D_t называется *поступательным*, если соответствующее ему отображение $B_t: K \rightarrow k$ от t не зависит: $B_t = B_0 = B$, $D_t Q = BQ + r(t)$.

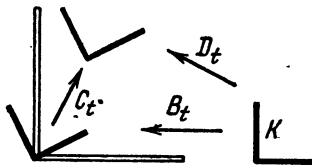


Рис. 103. Движение D_t разлагается в произведение вращения B_t и сдвига C_t .

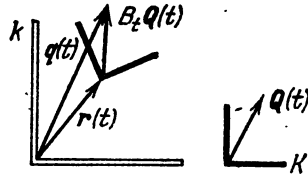


Рис. 104. Радиус-вектор точки относительно неподвижной (q) и подвижной (Q) систем координат.

Мы будем называть k *неподвижной системой координат*, K — *подвижной*, $q(t) \in k$ — *радиусом-вектором движущейся точки относительно неподвижной системы*; $Q(t)$ называется *радиусом-вектором точки относительно подвижной системы*, если (рис. 104)

$$q(t) = D_t Q(t) = B_t Q(t) + r(t). \quad (1)$$

Предостережение. Вектор $B_t Q(t) \in k$ не следует путать с $Q(t) \in K$ — они лежат в разных пространствах!

В. Сложение скоростей. Выразим теперь «абсолютную скорость» \dot{q} через относительное движение $Q(t)$ и движение системы координат D_t . Из формулы (1) находим, дифференцируя по t , формулу сложения скоростей

$$\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q} + \dot{r}. \quad (2)$$

Чтобы выяснить смысл входящих в (2) трех слагаемых, рассмотрим вначале частные случаи.

Случай поступательного движения ($\dot{B} = 0$). В этом случае уравнение (2) дает $\dot{q} = B\dot{Q} + \dot{r}$. Иначе говоря, доказана

Теорема. Если подвижная система K движется относительно k поступательно, то абсолютная скорость равна сумме относительной скорости и скорости движения системы K :

$$v = v' + v_0, \quad (3)$$

где

$v = \dot{q} \in k$ — абсолютная скорость,

$v' = B\dot{Q} \in k$ — относительная скорость (не путать с $\dot{Q} \in K!$),

$v_0 = \dot{r} \in k$ — скорость движения подвижной системы координат.

Г. Угловая скорость. В случае вращения системы K связь между относительной и абсолютной скоростями не столь проста. Рассмотрим сначала случай, когда наша точка покоится относительно K (т. е. $\dot{Q} = 0$), а система координат K вращается (т. е. $r = 0$). В этом случае движение точки $q(t)$ называется *переносным вращением*.

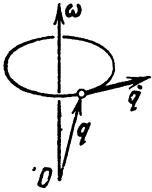


Рис. 105.
Угловая скорость

Пример. Вращение с постоянной угловой скоростью $\omega \in k$. Пусть $U(t): k \rightarrow k$ — поворот пространства k вокруг оси ω на угол $|\omega|t$. Тогда $B(t) = U(t)B(0)$ называется *равномерным вращением K с угловой скоростью ω* .

Очевидно, в этом случае скорость переносного движения точки q дается формулой (рис. 105)

$$\dot{q} = [\omega, q].$$

Вернемся теперь к общему случаю вращения K ($r = 0$, $\dot{Q} = 0$).

Теорема. В каждый момент времени t существует вектор $\omega(t) \in k$, через который переносная скорость выражается по формуле

$$\dot{q} = [\omega, q], \quad \forall q \in k. \quad (4)$$

Вектор ω называется *мгновенной угловой скоростью*; очевидно, он определен равенством (4) однозначно.

Следствие. Пусть твердое тело K вращается вокруг неподвижной точки O пространства k . Тогда в каждый момент времени существует *мгновенная ось вращения* — такая прямая в теле, проходящая через O , что скорости ее точек в данный момент равны 0 . Скорости остальных точек перпендикулярны этой прямой и пропорциональны расстоянию до нее.

Мгновенная ось вращения в пространстве k задается своим вектором ω ; в K соответствующий вектор обозначается через $\Omega = B^{-1}\omega \in K$; Ω называется *вектором угловой скорости в теле*.

Пример. Угловая скорость Земли направлена от центра к Северному полюсу и равна $\frac{2\pi}{3600 \cdot 24} \text{ сек}^{-1} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$.

Доказательство теоремы. Согласно (2) имеем

$$\dot{q} = \dot{B}Q.$$

Поэтому, если мы выразим Q через q , получим $\dot{q} = \dot{B}B^{-1}q = Aq$, где $A = \dot{B}B^{-1}: k \rightarrow k$ — линейный оператор из k в k .

Лемма 1. Оператор A — кососимметрический: $A' + A = 0$.

Доказательство. Поскольку $B: K \rightarrow k$ — ортогональный оператор из одного евклидова пространства в другое, его сопряженный совпадает с обратным, $B' = B^{-1}: k \rightarrow K$. Дифференцируя по t соотношение $BB' = E$, получаем

$$\dot{B}B' + B\dot{B}' = 0, \quad \dot{B}B^{-1} + (\dot{B}B^{-1})' = 0, \quad \text{ч. т. д.}$$

Лемма 2. Всякий кососимметрический оператор A в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве есть оператор векторного умножения на фиксированный вектор:

$$Aq = [\omega, q] \text{ для всех } q \in \mathbb{R}^3.$$

Доказательство. Все кососимметрические операторы $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ образуют линейное пространство. Размерность его равна 3, так как кососимметрическая 3×3 матрица определяется тремя своими наддиагональными элементами.

Оператор векторного умножения на ω линеен и кососимметричен. Операторы векторного умножения на всевозможные векторы трехмерного пространства ω образуют линейное подпространство пространства всех кососимметрических операторов.

Размерность этого подпространства равна 3. Поэтому подпространство, образованное векторными умножениями, совпадает с пространством всех кососимметрических операторов, ч. т. д.

Окончание доказательства теоремы. Согласно леммам 1, 2

$$\dot{q} = Aq = [\omega, q], \quad \text{ч. т. д.}$$

В декартовых координатах оператор A задается кососимметрической матрицей; обозначим ее элементы через $\pm \omega_{1, 2, 3}$:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

При таком обозначении элементов вектор $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ будет собственным с собственным значением 0. Применяя A к вектору $q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$, получаем непосредственной выкладкой

$$Aq = [\omega, q].$$

Д. Переносная скорость. *Случай чисто вращательного движения.* Пусть теперь система K вращается ($r=0$), а точка в системе K движется ($\dot{Q} \neq 0$). Из (2) находим (рис. 106)

$$\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q} = [\omega, q] + v'.$$

Иначе говоря, доказана

Теорема. *Если подвижная система K вращается относительно $O \in k$, то абсолютная скорость равна сумме относительной и переносной скорости вращения:*

$$\left. \begin{aligned} v &= v' + v_n, \\ \text{где} \\ v &= \dot{q} \in k - \text{абсолютная скорость,} \\ v' &= B\dot{Q} \in k - \text{относительная скорость,} \\ v_n &= \dot{B}Q = [\omega, q] \in k - \text{переносная скорость вращения.} \end{aligned} \right\} (5)$$

Наконец, общий случай можно свести к двум предыдущим, рассматривая вспомогательную подвижную систему K_1 , движущуюся поступательно относительно k и относительно которой K движется, вращаясь вокруг $O \in K_1$. Можно также и из формулы (2) усмотреть, что

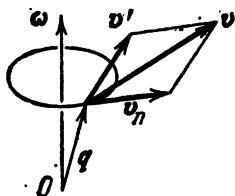


Рис. 106. Сложение скоростей.

$$v = v' + v_n + v_0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} v &= \dot{q} \in k - \text{абсолютная скорость,} \\ v' &= B\dot{Q} \in k - \text{относительная скорость,} \\ v_n &= \dot{B}Q = [\omega, q - r] \in k - \text{переносная скорость вращения,} \\ v_0 &= \dot{r} \in k - \text{скорость движения подвижной системы координат.} \end{aligned} \right\}$$

Задача. Покажите, что угловая скорость твердого тела не зависит от выбора начала координат подвижной системы K в теле.

Задача. Покажите, что самое общее перемещение твердого тела есть винтовое перемещение, т. е. произведение поворота на угол φ вокруг некоторой оси и сдвига на h вдоль нее.

Задача На столе лежат часы. Найти угловую скорость часовой стрелки: а) относительно Земли, б) относительно инерциальной системы координат.

Указание. Если даны три системы координат k, K_1, K_2 , то угловая скорость K_2 относительно k равна сумме угловых скоростей K_1 относительно k и K_2 относительно K_1 . Ибс

$$(E + A_1 t + \dots)(E + A_2 t + \dots) = E + (A_1 + A_2) t + \dots$$

§ 27. Силы инерции. Сила Кориолиса

Уравнения движения в неинерциальной системе координат отличаются от уравнений движения в инерциальной системе дополнительными слагаемыми, называемыми силами инерции. Это позволяет экспериментально обнаруживать неинерциальность (например, вращение Земли вокруг ее оси).

А. Поступательно движущаяся система координат.

Теорема. В системе координат K , движущейся поступательно относительно инерциальной k , движение механических систем происходит так, как если бы система координат была инерциальной, но на каждую точку массы m действовала дополнительная «сила инерции» $F = -m\ddot{r}$, где \ddot{r} — ускорение системы K .

Доказательство. Если $Q = q - r(t)$, то $m\ddot{Q} = m\ddot{q} - m\ddot{r}$. Влияние поступательного движения системы координат сводится, таким образом, к появлению дополнительного однородного силового поля $-mW$, где W — ускорение начала координат, ч. т. д.

Пример 1. Ракета при старте имеет направленное вверх ускорение \ddot{r} (рис. 107). В соответствии с этим система координат K , связанная с ракетой, не инерциальна, и наблюдатель, находящийся внутри, может обнаружить появление силового поля $-mW$, и измерить силы инерции, например, пружинными весами. В этом случае сила инерции называется *перегрузкой*.

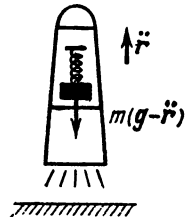


Рис. 107. Перегрузка.

Пример 2. При прыжке с вышки прыгун имеет ускорение g , направленное вниз. В соответствии с этим сумма сил инерции и веса равна нулю; пружинные весы показывают, что вес любого предмета равен нулю, поэтому такое состояние называется *невесомостью*. Точно так же при свободном баллистическом полете спутника наблюдается невесомость, так как сила инерции противоположна силе притяжения Землей.

Пример 3. Если точка подвеса маятника движется с ускорением $W(t)$, то маятник движется так, как если бы ускорение силы тяжести g было переменным и равным $g - W(t)$.

Б. Вращающаяся система координат. Пусть $B_i: K \rightarrow k$ — вращение системы координат K относительно неподвижной системы координат k . Будем обозначать через $Q(t) \in K$ радиус-вектор движущейся точки в подвижной системе координат, а через $q(t) = B_i Q(t) \in k$ — в неподвижной. Вектор угловой скорости вращения в подвижной системе координат обозначим, как в § 26, через Ω .

Предположим, что в системе координат k движение точки q подчиняется уравнению Ньютона $m\ddot{q} = f(q, \dot{q})$.

Теорема. Во вращающейся системе координат движение происходит так, как если бы на каждую движущуюся точку Q массы m действовали три дополнительные «силы инерции»:

- сила инерции вращения $-m[\Omega, Q]$,
- сила Кориолиса $-2m[\Omega, \dot{Q}]$,
- центробежная сила $-m[\Omega, [\Omega, Q]]$.

Итак,

$$m\ddot{Q} = F - m[\dot{\Omega}, Q] - 2m[\Omega, \dot{Q}] - m[\Omega, [\Omega, Q]],$$

где

$$BF(Q, \dot{Q}) = f(BQ, (B\dot{Q})).$$

Первая из трех сил инерции наблюдается лишь в случае неравномерного вращения; вторая и третья присутствуют и при равномерном вращении.

Центробежная сила (рис. 108) направлена всегда от мгновенной оси вращения Ω , и равна по величине $|\Omega|^2 r$, где r — расстояние до этой оси. Эта сила не зависит от скорости относительного движения и действует даже на покоящиеся в системе координат K тела.

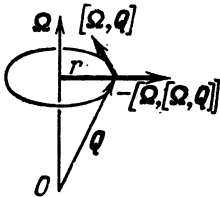


Рис. 108. Центробежная сила инерции.

Сила Кориолиса зависит от скорости \dot{Q} . В северном полушарии Земли она отклоняет всякое движущееся по Земле тело вправо, и падающее — на восток.

Доказательство теоремы. Заметим, что для любого вектора $X \in K$ имеем $\dot{B}X = B[\Omega, X]$. Действительно, согласно § 26, $\dot{B}X = [\omega, x] = [B\Omega, BX]$. Это равно $B[\Omega, X]$, так как оператор B сохраняет метрику и ориентацию, а потому и векторное произведение.

Из $q = BQ$ заключаем, что $\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q} = B(\dot{Q} + [\Omega, Q])$. Дифференцируя еще раз, находим

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \dot{B}(\dot{Q} + [\Omega, Q]) + B(\ddot{Q} + [\dot{\Omega}, Q] + [\Omega, \dot{Q}]) = \\ &= B([\Omega, (\dot{Q} + [\Omega, Q])] + \ddot{Q} + [\dot{\Omega}, Q] + [\Omega, \dot{Q}]) = \\ &= B(\ddot{Q} + 2[\Omega, \dot{Q}] + [\Omega, [\Omega, Q]] + [\dot{\Omega}, Q]), \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

(Мы еще раз воспользовались соотношением $\dot{B}X = B[\Omega, X]$; на этот раз $X = \dot{Q} + [\Omega, Q]$.)

Рассмотрим подробнее влияние вращения Земли на лабораторные эксперименты. Так как Земля вращается практически равномерно, можно считать $\dot{\Omega} = 0$. Центробежная сила наибольшее значение имеет на экваторе, где она достигает $\frac{\Omega^2 \rho}{g} \approx \frac{(7,3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{9,8} \approx \frac{3}{1000}$ веса. Однако в пределах лаборатории она меняется мало, и потому для ее наблюдения приходится путешествовать.

В соответствии со сказанным, в пределах лаборатории вращение Земли проявляется лишь в виде силы Кориолиса: в системе координат Q , связанной с Землей, с большой точностью

$$\frac{d}{dt} m\dot{Q} = mg + 2m[\dot{Q}, \Omega]$$

(центробежная сила учтена в g).

Пример 1. Камень брошен (без начальной скорости) в шахту глубиной 250 м на широте Ленинграда ($\lambda = 60^\circ$). Насколько он отклонится от вертикали? Решаем уравнение

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{g} + 2[\dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\Omega}]$$

последовательными приближениями, учитывая, что $\Omega \ll 1$. Положим (рис. 109)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2, \quad \text{где } \dot{\mathbf{Q}}_2(0) = \mathbf{Q}_2(0) = 0, \quad \text{а } \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1(0) + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}.$$

Для \mathbf{Q}_2 получим тогда

$$\ddot{\mathbf{Q}}_2 = 2[\mathbf{g}t, \boldsymbol{\Omega}] + O(\Omega^2), \quad \mathbf{Q}_2 \approx \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}, \boldsymbol{\Omega}] \approx \frac{2t}{3}[\mathbf{h}, \boldsymbol{\Omega}], \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}t^2}{2}.$$

Отсюда видно, что камень отклонится на Восток примерно на

$$\frac{2t}{3} |\mathbf{h}| |\boldsymbol{\Omega}| \cos \lambda \approx \frac{2 \cdot 7}{3} \cdot 250 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2} \text{ м} \approx 4 \text{ см}.$$

Задача. Насколько сила Кориолиса отклонит от падения обратно в жерло пушенный вертикально вверх в Ленинграде снаряд, если он поднялся на 1 км?

Пример 2. Маятник Фуко.

Рассмотрим малые колебания математического маятника с учетом силы Кориолиса. Пусть оси e_x, e_y, e_z системы координат, связанной с Землей, направлены: e_z — вверх, e_x, e_y — в горизонтальной плоскости (рис. 110). В приближении малых колебаний $\dot{z} = 0$ (по сравнению

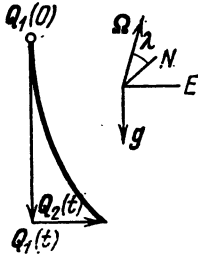


Рис. 109. Отклонение падающего камня силой Кориолиса.

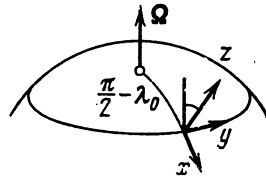


Рис. 110. Система координат для исследования движения маятника Фуко.

с \dot{x}, \dot{y}), поэтому горизонтальная составляющая силы Кориолиса будет $2m\dot{y}\Omega_z e_x - 2m\dot{x}\Omega_z e_y$. Отсюда получаем уравнения движения

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + 2\dot{y}\Omega_z, \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - 2\dot{x}\Omega_z \end{cases} \quad (\Omega_z = |\boldsymbol{\Omega}| \sin \lambda_0, \text{ где } \lambda_0 \leftarrow \text{широга}).$$

Если положить $x + iy = w$, то $\dot{w} = \dot{x} + i\dot{y}$, $\ddot{w} = \ddot{x} + i\ddot{y}$, и два уравнения сводятся к одному комплексному

$$\ddot{w} + i2\Omega_z \dot{w} + \omega^2 w = 0.$$

Решаем его: $w = e^{\lambda t}$, $\lambda^2 + 2i\Omega_z \lambda + \omega^2 = 0$, $\lambda = -i\Omega_z \pm i\sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2}$. Но $\Omega_z^2 \ll \omega^2$. Поэтому $\sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2} = \omega + O(\Omega_z^2)$, откуда, пренебрегая Ω_z^2 ,

$$\lambda \approx -i\Omega_z \pm i\omega$$

или, с той же точностью,

$$w = e^{-i\Omega_z t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}).$$

При $\Omega_z = 0$ получаются обычные гармонические колебания сферического маятника. Мы видим, что влияние силы Кориолиса приводит к вращению всей картины с угловой скоростью $-\Omega_z$, где $|\Omega_z| = |\Omega| \sin \lambda_0$.

В частности, если начальные условия соответствуют плоскому движению ($y(0) = \dot{y}(0) = 0$), то плоскость качаний будет поворачиваться с угловой скоростью $-\Omega_z$ относительно земной системы координат (рис. 111).

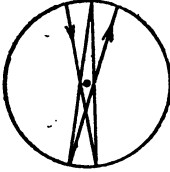


Рис. 111. Траектория маятника Фуко.

На полюсе плоскость качаний за сутки совершает один оборот (и неподвижна относительно невращающейся с Землей системы координат). На широте Москвы (56°) за сутки плоскость качаний повернется на 0,83 оборота, т. е. за час — на $12,5^\circ$.

Задача. Река течет со скоростью 3 км/час. При каком радиусе кривизны излучины сила Кориолиса, простирающаяся от вращения Земли, больше центробежной силы, определяемой поворотом реки?

Ответ. Радиус кривизны должен быть не меньше величин порядка 10 км для рек средних широт.

Решение этой задачи объясняет, почему большие реки Северного полушария (например, Волга в среднем течении) подмывают в основном правый берег, в то время как на реках типа Москвы-реки с их крутыми излучинами малого радиуса кривизны подмывается попеременно то левый, то правый (внешний по излучине) берег

§ 28. Твердое тело

В этом параграфе определяются твердое тело и его тензор инерции, эллипсоид инерции, моменты инерции и оси инерции.

А. Конфигурационное многообразие твердого тела.

Определение. *Твердым телом* называется система материальных точек, стесненных голономной связью, выражающейся в том, что расстояния между точками постоянны:

$$|x_i - x_j| = r_{ij} = \text{const.} \quad (1)$$

Теорема. *Конфигурационное многообразие твердого тела есть шестимерное многообразие, а именно $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ (прямое произведение трехмерного пространства \mathbb{R}^3 и группы $\text{SO}(3)$ его вращений), если только в теле есть три точки не на одной прямой.*

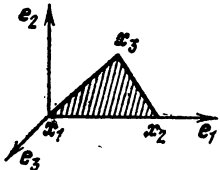


Рис. 112. Конфигурационное многообразие твердого тела.

Доказательство. Пусть x_1 , x_2 и x_3 — три точки тела, не лежащие на прямой. Рассмотрим правый ортонормированный репер, у которого первый вектор направлен как $x_2 - x_1$, а второй — в сторону x_3 в плоскости x_1, x_2, x_3 (рис. 112). Из условий $|x_i - x_j| = r_{ij}$ ($i = 1, 2, 3$) следует, что положение всех точек тела однозначно определено положением x_1, x_2, x_3 , последнее же задано положением репера. Наконец, пространство реперов в \mathbb{R}^3 есть

$\mathbb{R}^3 \times SO(3)$, так как каждый репер получается из фиксированного вращением и сдвигом *).

Задача. Найти конфигурационное пространство твердого тела, все точки которого лежат на прямой.

Ответ: $\mathbb{R}^3 \times S^2$.

Определение. *Твердое тело с неподвижной точкой O* есть система материальных точек, стесненных, кроме связей (1), связью $x_1 = O$.

Очевидно, его конфигурационное многообразие — трехмерная группа вращений $SO(3)$.

Б. Законы сохранения. Рассмотрим задачу о движении свободного твердого тела по инерции, вне силовых полей. Примером (приближенно) может служить кувыркивание космического аппарата

Система допускает все поступательные перемещения: они не меняют функции Лагранжа. По теореме Нётер существуют три первых интеграла: три компоненты вектора количества движения. Или, иначе, доказана

Теорема. *При свободном движении твердого тела его центр инерции движется равномерно и прямолинейно.*

Но тогда мы можем рассмотреть инерциальную систему координат, в которой центр инерции неподвижен. Итак, получено

Следствие. *Свободное твердое тело вращается около центра инерции так, как если бы центр инерции был закреплен в неподвижной точке O .*

Тем самым задача сведена к задаче с тремя степенями свободы о движении твердого тела вокруг неподвижной точки O . Исследуем подробнее эту задачу (не обязательно предполагая, что O есть центр инерции тела).

Функция Лагранжа выдерживает все вращения вокруг точки O . По теореме Нётер существуют три соответствующих первых интеграла: три компоненты вектора кинетического момента. Сохраняется также полная энергия системы $E = T$ (она сводится здесь к кинетической). Итак, доказана

Теорема. *В задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки O при отсутствии внешних сил имеется четыре первых интеграла: M_x, M_y, M_z, E .*

Из этой теоремы можно без всяких вычислений получить качественные выводы о движении.

Положение и скорость тела определяется точкой шестимерного многообразия $T SO(3)$ — касательного расслоения конфигурационного многообразия $SO(3)$. Первые интегралы M_x, M_y, M_z, E

* Строго говоря, конфигурационное пространство твердого тела есть $\mathbb{R}^3 \times O(3)$, а $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ — лишь одна из двух связных компонент этого многообразия, соответствующая определенной ориентации тела.

суть четыре функции на многообразии $TSO(3)$ размерности 6. Можно проверить, что в общем случае (если тело не обладает особой симметрией) эти четыре функции независимы. Поэтому четыре уравнения

$$M_x = C_1, \quad M_y = C_2, \quad M_z = C_3, \quad E = C_4 > 0$$

определяют двумерное подмногообразие V_c в шестимерном многообразии $TSO(3)$.

Это многообразие инвариантно: если начальные условия движения задают точку на многообразии V_c , то во все время движения точка $TSO(3)$, соответствующая положению и скорости тела, остается на V_c .

Поэтому многообразие V_c допускает касательное векторное поле (а именно, поле скоростей движения на $TSO(3)$); при $C_4 > 0$ это поле не может иметь особых точек. Далее, легко проверить, что V_c компактно (использовать E) и ориентируемо (так как $TSO(3)$ ориентируемо)*).

В топологии доказывается, что все связные ориентируемые компактные двумерные многообразия суть сферы с n ручками, $n \geq 0$ (рис. 113).



Рис. 113. Двумерные компактные связные ориентируемые многообразия.

Из них только тор ($n = 1$) допускает касательное векторное поле без особых точек.

Итак, инвариантное многообразие V_c есть двумерный тор (или несколько торов).

Мы увидим в дальнейшем, что на этом торе можно так выбрать угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2 \pmod{2\pi}$, что движение изображающей точки по V_c будет задаваться уравнениями $\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c)$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2(c)$.

* Легко доказываются следующие утверждения.

1. Пусть $f_1, \dots, f_k: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функции на ориентированном многообразии M . Рассмотрим множество V , заданное уравнениями $f_1 = c_1, \dots, f_k = c_k$. Предположим, что градиенты f_1, \dots, f_k в каждой точке V линейно независимы. Тогда V ориентируемо.

2. Прямое произведение ориентируемых многообразий ориентируемо.

3. Касательное расслоение $TSO(3)$ есть прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Многообразию, касательное расслоение которого является прямым произведением, называется *параллелизуемым*. Группа $SO(3)$ (как и всякая группа Ли) параллелизуема.

4. Параллелизуемое многообразие ориентируемо.

Из 1—4 вытекает ориентируемость $SO(3)$, $TSO(3)$ и V_c .

Иными словами, вращение твердого тела представляет собой наложение двух периодических движений с разными, вообще говоря, периодами: если частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то тело никогда не возвращается к пройденному состоянию движения. Величины частот ω_1 и ω_2 зависят от начальных условий s .

В. Оператор инерции. Перейдем теперь к количественной теории и введем следующие обозначения. Пусть k — неподвижная, K — вращающаяся вместе с телом вокруг точки O система координат: в ней тело покоится. Каждый вектор в пространстве K переводится в пространство k оператором B . Соответствующие векторы пространств K и k мы будем обозначать одинаковыми буквами: прописными для K , строчными для k . Так, например (рис. 114):

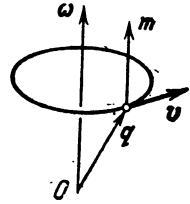


Рис. 114. Радиус-вектор, вектор скорости, угловая скорость и кинетический момент точки тела в пространстве.

- $q \in k$ — радиус-вектор точки в пространстве,
- $Q \in K$ — ее же радиус-вектор в теле, $q = BQ$,
- $v \in k$ — вектор скорости точки в пространстве,
- $V \in K$ — тот же вектор в теле, $v = BV$,
- $\omega \in k$ — угловая скорость в пространстве,
- $\Omega \in K$ — угловая скорость в теле, $\omega = B\Omega$,
- $m \in k$ — кинетический момент в пространстве,
- $M \in K$ — кинетический момент в теле, $m = BM$.

Так как оператор $B: K \rightarrow k$ сохраняет метрику и ориентацию, он сохраняет скалярные и векторные произведения.

По определению угловой скорости (§ 26)

$$v = [\omega, q].$$

По определению кинетического момента точки массы m относительно O ,

$$m = [q, m\mathbf{v}] = m[q, [\omega, q]].$$

Итак,

$$M = m[Q, [\Omega, Q]].$$

Возникает линейный оператор, переводящий Ω в M :

$$A: K \rightarrow K, \quad A\Omega = M.$$

Этот оператор зависит еще от точки тела (Q) и ее массы (m).

Лемма. Оператор A симметрический.

Доказательство. При любых $X \in K$, $Y \in K$ ввиду соотношения $([a, b], c) = ([c, a], b)$ имеем

$$(AX, Y) = m([Q, [X, Q]], Y) = m([Y, Q], [X, Q]),$$

а последнее выражение симметрично относительно X и Y , ч. т. д.

Подставляя вместо X и Y вектор угловой скорости Ω и замечая, что $[\Omega, Q]^2 = V^2 = v^2$, получаем

Следствие. *Кинетическая энергия точки тела есть квадратичная форма относительно вектора угловой скорости Ω , а именно:*

$$T = \frac{1}{2} (A\Omega, \Omega) = \frac{1}{2} (M, \Omega).$$

Симметрический оператор A называется *оператором* (или тензором) *инерции точки Q* .

Если тело состоит из многих точек Q_i с массами m_i , то, суммируя, получаем:

Теорема. *Кинетический момент M твердого тела относительно неподвижной точки O линейно зависит от угловой скорости Ω , т. е. существует линейный оператор $A: K \rightarrow K$, $A\Omega = M$. Оператор A симметричен.*

Кинетическая энергия тела есть квадратичная форма относительно угловой скорости Ω ,

$$T = \frac{1}{2} (A\Omega, \Omega) = \frac{1}{2} (M, \Omega).$$

Доказательство. По определению, кинетический момент тела равен сумме моментов его точек:

$$M = \sum_i M_i = \sum_i A_i \Omega = A\Omega, \quad \text{где } A = \sum_i A_i.$$

Так как оператор инерции каждой точки A_i по лемме симметрический, оператор A также симметрический. Для кинетической энергии, по определению, получаем

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} (M_i, \Omega) = \frac{1}{2} (M, \Omega) = \frac{1}{2} (A\Omega, \Omega), \text{ ч. т. д.}$$

Г. *Оси инерции.* Как всякий симметрический оператор, A имеет три взаимно ортогональных собственных направления. Пусть $e_1, e_2, e_3 \in K$ — их орты, I_1, I_2, I_3 — собственные числа. В базисе e_i оператор инерции и кинетическая энергия имеют особенно простой вид:

$$M_i = I_i \Omega_i, \\ T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2).$$

Оси e_i называются *осями инерции* тела в точке O .

Конечно, если не все числа I_1, I_2, I_3 различны, то оси инерции e_i определены неоднозначно. Выясним подробнее смысл собственных чисел I_1, I_2, I_3 .

Теорема. При вращении твердого тела, закрепленного в точке O , с угловой скоростью $\Omega = \Omega e$ ($\Omega = |\Omega|$) вокруг оси e кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_e \Omega^2, \quad \text{где } I_e = \sum_i m_i r_i^2$$

и r_i означает расстояние i -й точки до оси e (рис. 115).

Доказательство. По определению, $T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$, но

$$|v_i| = \Omega r_i, \quad \text{поэтому } T = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \Omega^2, \quad \text{ч. т. д.}$$

Число I_e зависит от направления e оси вращения Ω в теле.

Определение. I_e называется моментом инерции тела относительно оси e :

$$I_e = \sum_i m_i r_i^2.$$

Сравнивая два полученных выражения для T , получаем

Следствие. Собственные числа I_i оператора инерции A суть моменты инерции тела относительно осей инерции e_i .

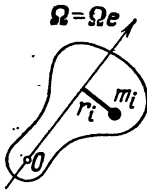


Рис. 115. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси.



Рис. 116. Эллипсоид инерции.

Д. Эллипсоид инерции. Чтобы изучить зависимость момента инерции I_e от направления оси e в теле, рассмотрим векторы $e/\sqrt{I_e}$, где орт e пробегает единичную сферу.

Теорема. Векторы $e/\sqrt{I_e}$ образуют эллипсоид в K .

Доказательство. Если $\Omega = e/\sqrt{I_e}$, то квадратичная форма $T = \frac{1}{2} (A\Omega, \Omega)$ равна $1/2$. Поэтому $\{\Omega\}$ есть множество уровня положительно определенной квадратичной формы, т. е. эллипсоид, ч. т. д. Можно сказать, что эллипсоид этот составлен из векторов угловой скорости Ω , для которых кинетическая энергия равна $1/2$.

Определение. Эллипсоид $\{\Omega: (A\Omega, \Omega) = 1\}$ называется эллипсоидом инерции тела в точке O (рис. 116).

В осях инерции e_i его уравнение имеет вид

$$I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 = 1.$$

Итак, *главные оси эллипсоида инерции направлены по осям инерции, а их длины обратно пропорциональны $\sqrt{I_i}$.*

Замечание. Если тело вытянуто вдоль какой-нибудь оси, то момент инерции относительно этой оси мал, следовательно, эллипсоид инерции тоже вытянут вдоль этой оси, так что эллипсоид инерции повторяет некоторые черты тела.

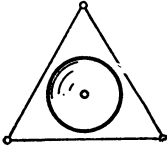


Рис. 117. Эллипсоид инерции равностороннего треугольника.

Если тело имеет проходящую через O ось симметрии порядка k (так что оно совмещается с собой при повороте вокруг нее на $2\pi/k$), то и эллипсоид инерции имеет такую же симметрию относительно этой оси. Но у трехосных эллипсоидов не бывает осей симметрии порядка $k > 2$. Поэтому всякая ось симметрии тела порядка $k > 2$ есть ось вращения эллипсоида инерции и, следовательно, его главная ось.

Пример. Эллипсоид инерции трех точек массы m в вершинах равностороннего треугольника относительно центра O есть эллипсоид вращения вокруг нормали к плоскости треугольника (рис. 117).

Если же имеется несколько таких осей, то эллипсоид инерции — шар, и любая ось — главная.

Задача. Провести через центр куба прямую так, чтобы сумма квадратов ее расстояний от вершин куба была: а) наибольшей, б) наименьшей.

Заметим теперь, что эллипсоид инерции (или оператор инерции, или моменты инерции I_1, I_2, I_3) полностью определяет вращательные свойства нашего тела: если мы рассмотрим два тела с одинаковыми эллипсоидами инерции, то при одинаковых начальных условиях они будут двигаться одинаково (так как у них одинаковые функции Лагранжа $L = T$).

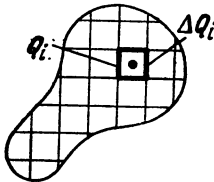


Рис. 118. Сплошное твердое тело.

Итак, *пространство всех твердых тел с точки зрения динамики вращения вокруг O трехмерно*, из скольких бы точек тела ни состояли.

Мы можем даже рассматривать «сплошное твердое тело плотности $\rho(Q)$ », имея в виду предел при $\Delta Q \rightarrow 0$ последовательности тел из конечного числа точек Q_i с массами $\rho(Q_i)\Delta Q_i$ (рис. 118) или, что сводится к тому же, любое тело с моментами инерции

$$I_e = \iiint \rho(Q) r^2(Q) dQ,$$

где r — расстояние от Q до оси e .

Пример. Найти оси и моменты инерции однородной плоской пластинки $|x| \leq a, |y| \leq b, z=0$ относительно O .

Решение. Так как пластинка имеет три плоскости симметрии, эллипсоид инерции имеет те же плоскости симметрии и, значит, оси инерции x, y, z . Далее,

$$I_x = \int_{-a}^a \int_{-b}^b x^2 \rho \, dx \, dy = \frac{ma^2}{3},$$

точно так же

$$I_y = \frac{mb^2}{3};$$

очевидно, $I_z = I_x + I_y$.

Задача. Доказать, что моменты инерции любого тела удовлетворяют неравенствам треугольника

$$I_3 \leq I_2 + I_1, \quad I_2 \leq I_1 + I_3, \quad I_1 \leq I_2 + I_3,$$

причем равенство может иметь место только для плоского тела.

Задача. Найти оси и моменты инерции однородного эллипсоида массы m с полуосями a, b, c относительно центра O .

Указание. Рассмотрите сначала шар.

Задача. Доказать теорему Штейнера:

Моменты инерции любого твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр инерции, связаны соотношением

$$I = I_0 + mr^2,$$

где m — масса тела, r — расстояние между осями, I_0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции.

Таким образом, момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции, меньше момента инерции относительно любой параллельной оси.

Задача. Найти оси и моменты инерции однородного тетраэдра относительно его вершины.

Задача. Нарисовать вектор кинетического момента M для тела с заданным эллипсоидом инерции, вращающегося с данной угловой скоростью Ω .

Ответ. M имеет направление нормали к эллипсоиду инерции в точке на оси Ω (рис. 119).

Задача. От твердого тела, закрепленного в неподвижной точке O , отрезали кусок (рис. 120). Как изменятся главные моменты инерции?

Ответ. Все три главных момента уменьшатся.

Указание. Ср. § 24.

Задача. К твердому телу с моментами инерции $I_1 > I_2 > I_3$ добавили малую массу ϵ в точке $Q = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Найти изменение I_1 и e_1 с погрешностью $O(\epsilon^2)$.

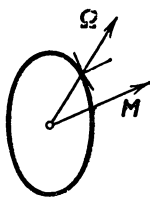


Рис. 119. Угловая скорость, эллипсоид инерции и кинетический момент

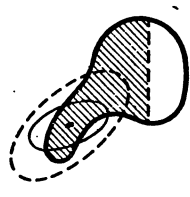


Рис. 120. Поведение моментов инерции при уменьшении тела.

Решение. Центр инерции сместится на расстояние порядка ε . Следовательно, моменты инерции старого тела относительно параллельных осей, проходящих через старый и новый центры инерции, различаются на величину порядка ε^2 . В то же время добавление массы меняет момент инерции относительно любой фиксированной оси на величину порядка ε . Поэтому при вычислениях с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ мы можем пренебрегать смещением центра инерции.

Итак, кинетическая энергия после добавления малой массы принимает вид

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \varepsilon [\Omega, Q]^2 + O(\varepsilon^2),$$

где $T_0 = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$ — кинетическая энергия исходного тела. Ищем собственное число $I_1(\varepsilon)$ и собственный вектор $e_1(\varepsilon)$ оператора инерции в виде рядов Тейлора по ε . Приравнявая коэффициенты при ε в соотношении $A(\varepsilon)e_1(\varepsilon) = I_1(\varepsilon)e_1(\varepsilon)$, находим с погрешностью $O(\varepsilon^2)$:

$$I_1(\varepsilon) \approx I_1 + \varepsilon (x_2^2 + x_3^2), \quad e_1(\varepsilon) \approx e_1 + \varepsilon \left(\frac{x_1 x_2}{I_2 - I_1} e_2 + \frac{x_1 x_3}{I_3 - I_1} e_3 \right).$$

Из формулы для $I_1(\varepsilon)$ видно, что изменение главных моментов инерции (в первом приближении по ε) такое же, как если бы ни центр, ни оси инерции не менялись. Формула для $e_1(\varepsilon)$ показывает, как меняется направление главных осей: ближайшая большая полуось эллипсоида инерции приближается к добавляемой точке, а малая — удаляется от нее. Далее, добавление малой массы на одной из главных плоскостей эллипсоида инерции поворачивает две оси, лежащие в этой плоскости, и не меняет направление третьей оси. Появление разностей моментов инерции в знаменателе связано с тем, что у эллипсоида вращения главные оси не определены. Если эллипсоид инерции близок к эллипсоиду вращения (скажем, $I_1 \approx I_2$), то добавление малой массы может сильно повернуть главные оси e_1 и e_2 в натянутой на них плоскости.

§ 29. Уравнения Эйлера. Описание движения по Пуансо

Здесь исследуется движение твердого тела вокруг неподвижной точки в отсутствие внешних сил и тем самым движение свободного твердого тела. Движение оказывается двухчастотным.

А. Уравнение Эйлера. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O . Пусть M — вектор кинетического момента тела относительно O в теле, Ω — вектор угловой скорости в теле, A — оператор инерции ($A\Omega = M$); векторы Ω , M принадлежат подвижной системе координат K (§ 26). Вектор кинетического момента тела относительно O в пространстве $m = VM$ сохраняется при движении (§ 28, Б).

Значит, вектор M в теле ($M \in K$) должен двигаться так, чтобы вектор $m = VM(t)$ при изменении t не менялся.

Теорема. *Имеет место соотношение*

$$\frac{dM}{dt} = [M, \Omega]. \quad (1)$$

Доказательство. Применим формулу (5) § 26 для скорости движения относительно неподвижного пространства k «точки» $M(t) \in K$. Получаем

$$\dot{m} = B\dot{M} + [\omega, m] = B(\dot{M} + [\Omega, M]).$$

Но так как момент относительно пространства m сохраняется ($\dot{m} = 0$), то $\dot{M} + [\Omega, M] = 0$, ч. т. д.

Соотношение (1) называется *уравнением Эйлера*. Так как $M = A\Omega$, (1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно M (или относительно Ω). Если

$$\Omega = \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2 + \Omega_3 e_3, \quad M = M_1 e_1 + M_2 e_2 + M_3 e_3,$$

разложения Ω и M по осям инерции в O , то $M_i = I_i \Omega_i$ и (1) принимает вид системы трех уравнений

$$\frac{dM_1}{dt} = a_1 M_2 M_3, \quad \frac{dM_2}{dt} = a_2 M_3 M_1, \quad \frac{dM_3}{dt} = a_3 M_1 M_2, \quad (2)$$

где $a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}$, $a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}$, $a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}$, или же вид системы трех уравнений для трех компонент угловой скорости

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3,$$

$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1,$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2.$$

Замечание. Если на тело действуют внешние силы, сумма моментов которых относительно O равна n в неподвижной системе координат и N в подвижной ($n = BN$), то

$$\dot{m} = n$$

и уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{dM}{dt} = [M, \Omega] + N.$$

Б. Исследование решений уравнения Эйлера.

Лемма. Уравнение Эйлера (2) имеет два квадратичных первых интеграла

$$2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \quad \text{и} \quad M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Доказательство. E сохраняется по закону сохранения энергии, а M^2 — по закону сохранения момента m , так как $m^2 = M^2 = M^2$. Лемма доказана.

Итак, M лежит на пересечении эллипсоида со сферой. Чтобы разобраться в строении кривых пересечения, зафиксируем эллипсоид $E > 0$ и будем менять радиус сферы M (рис. 121).

Предположим для определенности, что $I_1 > I_2 > I_3$. Полуоси эллипсоида будут $\sqrt{2EI_1} > \sqrt{2EI_2} > \sqrt{2EI_3}$. Если радиус сферы M

меньше меньшей полуоси или больше большей ($M < \sqrt{2EI_3}$ или $M > \sqrt{2EI_1}$), то пересечение пусто, и таким значениям E и M никакое действительное движение не отвечает. Если радиус сферы равен малой полуоси, то пересечение состоит из двух точек. При увеличении радиуса ($\sqrt{2EI_3} < M < \sqrt{2EI_2}$) получаются две кривые вокруг концов малой полуоси. Точно также, если радиус сферы равен большой полуоси, получаются ее концы, а если немного меньше, — то две близкие к концам большой полуоси замкнутые кривые. Наконец, если $M = \sqrt{2EI_2}$, пересечение состоит из двух окружностей.

Каждый из шести концов полуосей эллипсоида есть отдельная траектория уравнений Эйлера (2) — стационарное положение вектора M . Ему соответствует постоянное значение вектора угловой скорости, направленного вдоль одной из осей инерции e_i ; при этом Ω остается все время коллинеарным M . Поэтому вектор угловой скорости сохраняет свое положение ω в пространстве коллинеарным m : тело просто вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной в пространстве оси инерции e_i .

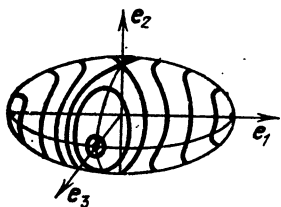


Рис. 121. Траектории уравнений Эйлера на поверхности уровня энергии.

Определение. Движение тела, при котором его угловая скорость остается постоянной ($\omega = \text{const}$, $\Omega = \text{const}$), называется **стационарным вращением**.

Доказана

Теорема. *Твердое тело, закрепленное в точке O , допускает стационарное вращение вокруг любой из трех своих осей инерции e_1 , e_2 , e_3 .*

Если, как мы предполагали, $I_1 > I_2 > I_3$, то правая часть уравнения Эйлера больше нигде в O не обращается, т. е. других стационарных вращений нет.

Исследуем теперь устойчивость стационарных решений уравнения Эйлера (по Ляпунову).

Теорема. *Стационарные решения $M = M_1 e_1$ и $M = M_3 e_3$ уравнений Эйлера, соответствующие большей и меньшей осям инерции, устойчивы, а решение, соответствующее средней оси ($M = M_2 e_2$), неустойчиво.*

Действительно, при малом отклонении начального условия от $M_1 e_1$ или $M_3 e_3$ траектория будет малой замкнутой кривой, а при малом отклонении от $M_2 e_2$ — большой.

Задача. Устойчивы ли по Ляпунову стационарные вращения тела вокруг большой и малой осей инерции?

Ответ. Нет.

В. Описание движения по Пуансо. Мы хорошо представляем себе движение векторов момента и угловой скорости в теле (M и Ω) — оно периодически, если $M \neq \sqrt{2E\bar{I}_i}$.

Чтобы увидеть, как вращается тело *в пространстве*, рассмотрим его эллипсоид инерции

$$\mathfrak{E} = \{ \Omega : (A\Omega, \Omega) = 1 \} \subset K,$$

где $A : \Omega \rightarrow M$ — симметрический оператор инерции тела, закрепленного в O .

В каждый момент времени эллипсоид \mathfrak{E} занимает в неподвижном пространстве k положение $B_i\mathfrak{E}$.

Теорема (Пуансо). *Эллипсоид инерции катится без скольжения по неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору момента m* (рис. 122).

Доказательство. Рассмотрим плоскость π , перпендикулярную вектору момента m и касательную к эллипсоиду инерции $B_i\mathfrak{E}$. Таких плоскостей всего две, и в точке касания нормаль к эллипсоиду параллельна m .

Но эллипсоид инерции \mathfrak{E} имеет в точке Ω нормаль $\text{grad}(A\Omega, \Omega) = 2A\Omega = 2M$. Поэтому в точках $\pm \xi = \frac{\omega}{\sqrt{2T}}$ пересечения оси ω с $B_i\mathfrak{E}$ нормаль к $B_i\mathfrak{E}$ как раз коллинеарна m .

Итак, плоскость π касается $B_i\mathfrak{E}$ в точках на мгновенной оси вращения, $\pm \xi$. Но скалярное произведение ξ с неподвижным вектором m равно $\pm \frac{1}{\sqrt{2T}}(m, \omega) = \pm \sqrt{2T}$ и потому постоянно. Итак, расстояние плоскости π от O не меняется, т. е. плоскость π неподвижна.

Так как точка касания лежит на мгновенной оси вращения, ее скорость равна нулю. Значит, эллипсоид $B_i\mathfrak{E}$ катится по π без скольжения, ч. т. д.

Следствие. *При близких к стационарному вращению вокруг большой (или малой) оси инерции начальных условиях угловая скорость остается всегда близкой к своему начальному положению не только в теле (Ω), но и в пространстве (ω).*

Рассмотрим теперь траекторию точки касания на неподвижной плоскости π . Когда на эллипсоиде точка касания сделает полный оборот, начальные условия повторятся с той лишь разницей, что тело повернется на некоторый угол α вокруг оси m . Второй

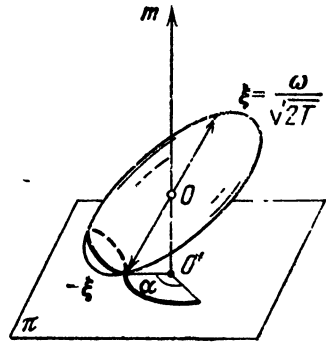


Рис. 122. Качение эллипсоида инерции по неподвижной плоскости

оборот будет в точности подобен первому; если $\alpha = 2\pi \frac{p}{q}$, движение в целом периодически, если же угол несоизмерим с 2π , то тело никогда не вернется в исходное состояние.

Точка касания замедляет при этом на плоскости π всюду плотно кольцо с центром O' (рис. 123).

Задача. Докажите, что связанные компоненты инвариантных двумерных многообразий V_c (§ 28, Б) в шестимерном пространстве $TSO(3)$ — торы и на них можно выбрать координаты $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ так, чтобы $\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c), \dot{\varphi}_2 = \omega_2(c)$.

Указание. За φ_1 принять фазу периодического изменения M .

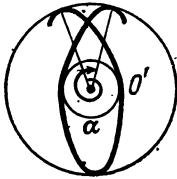


Рис. 123. Траектория точки касания на неподвижной плоскости.

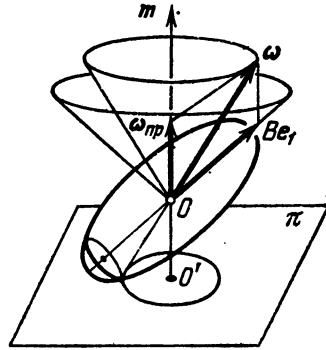


Рис. 124. Качение эллипсоида вращения по неподвижной плоскости.

Рассмотрим важный частный случай, когда эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения:

$$I_2 = I_3 \neq I_1.$$

В этом случае ось эллипсоида, B_e1 , мгновенная ось вращения ω и вектор m всегда лежат в одной плоскости. Углы между ними и величина вектора ω сохраняются, точка касания описывает и на эллипсоиде, и на плоскости окружности; оси вращения (ω) и симметрии (B_e1) с одинаковой угловой скоростью описывают конусы вокруг вектора момента m (рис. 124).

Это движение вокруг m называется *прецессией*.

Задача. Найти угловую скорость прецессии.

Ответ. Разложим вектор угловой скорости ω по направлениям векторов момента m и оси тела B_e1 . Первая компонента и даст угловую скорость прецессии $\omega_{пр} = M/I_2$.

Указание. Представить движение тела в виде произведения поворота вокруг оси момента и последующего поворота вокруг оси тела. Угловая скорость произведения обоих движений равна сумме векторов их угловых скоростей.

Замечание. Твердое тело, закрепленное в точке O , в отсутствие внешних сил, представляет собой лагранжеву систему, конфигурационным пространством которой является группа, а именно $SO(3)$, причем функция Лагранжа инвариантна относительно левых сдвигов.

Можно показать, что значительная часть эйлеровой теории твердого тела использует только это обстоятельство, а потому сохраняет силу для произвольной левоинвариантной лагранжевой системы на произвольной группе Ли.

В частности, применяя эту теорию к группе диффеоморфизмов римановой области D , сохраняющих элемент объема, можно получить основные теоремы гидродинамики идеальной жидкости.

§ 30. Волчок Лагранжа

Здесь рассмотрено движение осесимметричного твердого тела, закрепленного в неподвижной точке, в однородном силовом поле. Движение это состоит из трех периодических процессов: вращения, прецессии и нутации.

А. Углы Эйлера. Рассмотрим твердое тело, закрепленное в неподвижной точке O и подверженное действию силы веса mg . Задача о движении такого «тяжелого твердого тела» в общем случае до сих пор не решена и в некотором смысле неразрешима.

В этой задаче с тремя степенями свободы известны лишь два первых интеграла: интеграл энергии $E = T + U$ и проекция кинетического момента на вертикаль M_z .

Есть важный частный случай, когда задачу можно полностью решить — случай *симметричного волчка*. Симметричным или лагранжевым волчком называют закрепленное в неподвижной точке O твердое тело, у которого эллипсоид инерции в O есть эллипсоид вращения и центр тяжести лежит на оси вращения e_3 (рис. 125).

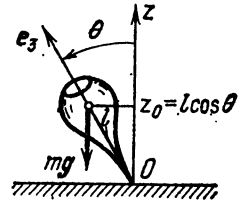


Рис. 125. Волчок Лагранжа.

В этом случае поворот вокруг оси e_3 не меняет функции Лагранжа, и по теореме Нётер должен существовать дополнительный к E и M_z первый интеграл (как мы увидим, им оказывается проекция M_3 вектора момента на ось e_3).

Если удастся ввести три координаты так, чтобы среди них были углы вращения вокруг оси z и вокруг оси волчка, то эти координаты будут циклическими, и задача с тремя степенями свободы сведется к задаче с одной степенью свободы (для третьей координаты).

Такой выбор координат в конфигурационном пространстве $SO(3)$ возможен; эти координаты φ, ψ, θ называются *углами Эйлера* и образуют в $SO(3)$ локальную систему координат, подобную географическим координатам на сфере: с особенностями у полюсов и многозначностью на одном меридиане.

Введем следующие обозначения (рис. 126):

e_x, e_y, e_z — орты правой декартовой неподвижной системы координат в неподвижной точке O .

e_1, e_2, e_3 — орты связанной с телом правой подвижной системы координат, направленные по осям инерции тела в O .

$I_1 = I_2 \neq I_3$ — моменты инерции тела в точке O .

e_N — орт оси $[e_z, e_3]$, называемой «линия узлов». (Все векторы — в «неподвижном пространстве» k .)

Чтобы перевести неподвижный репер (e_x, e_y, e_z) в подвижный (e_1, e_2, e_3) , нужно выполнить три поворота:

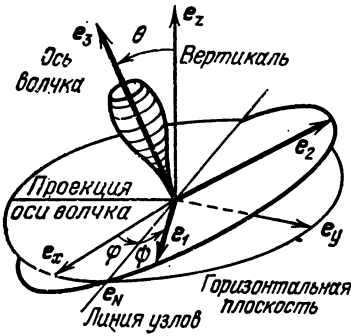


Рис. 126. Углы Эйлера.

1) на угол φ вокруг оси e_z . При этом e_z остается на месте, а e_x переходит в e_N .

2) на угол θ вокруг оси e_N . При этом e_z переходит в e_3 , а e_N остается на месте.

3) на угол ψ вокруг оси e_3 . При этом e_N переходит в e_1 , а e_3 остается на месте.

В результате всех трех вращений e_x переходит в e_1 , а e_z в e_3 , поэтому e_y переходит в e_2 .

Углы φ, ψ, θ называются *углами Эйлера*. Легко доказывается

Теорема. Каждой тройке чисел φ, θ, ψ предыдущая конструкция сопоставляет вращение трехмерного пространства $B(\varphi, \theta, \psi) \in SO(3)$, переводящее репер (e_x, e_y, e_z) в репер (e_1, e_2, e_3) . При этом отображение $(\varphi, \theta, \psi) \rightarrow B(\varphi, \theta, \psi)$ задает локальные координаты

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi$$

в конфигурационном пространстве волчка $SO(3)$.

Подобно географической долготе, φ и ψ можно считать углами mod 2π ; при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ отображение $(\varphi, \theta, \psi) \rightarrow B$ имеет особенность типа полюса.

Б. Вычисление функции Лагранжа. Выразим функцию Лагранжа через координаты φ, θ, ψ и их производные.

Потенциальная энергия, очевидно, равна

$$U = \iiint zg \, dm = mgz_0 = mgl \cos \theta,$$

где z_0 — высота центра тяжести над O (рис. 125).

Сосчитаем кинетическую энергию. Здесь полезна маленькая хитрость: рассмотрим частный случай, когда $\varphi = \psi = 0$.

Лемма. Угловая скорость волчка выражается через производные углов Эйлера по формуле

$$\omega = \dot{\theta} e_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta) e_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) e_3,$$

если $\varphi = \psi = 0$.

Доказательство. Рассмотрим скорость точки волчка, занимающей в момент времени t положение r . Через время dt эта точка займет положение (с точностью до $(dt)^2$)

$$B(\varphi + d\varphi, \theta + d\theta, \psi + d\psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) r,$$

где $d\varphi = \dot{\varphi} dt$, $d\theta = \dot{\theta} dt$, $d\psi = \dot{\psi} dt$.

Следовательно, с той же точностью вектор перемещения есть сумма трех слагаемых

$$B(\varphi + d\varphi, \theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) r - r = [\omega_\varphi, r] dt,$$

$$B(\varphi, \theta + d\theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) r - r = [\omega_\theta, r] dt,$$

$$B(\varphi, \theta, \psi + d\psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) r - r = [\omega_\psi, r] dt$$

(угловые скорости ω_φ , ω_θ и ω_ψ определены этими формулами).

Поэтому скорость точки r есть $v = [\omega_\varphi + \omega_\theta + \omega_\psi, r]$. Итак, угловая скорость тела есть

$$\omega = \omega_\varphi + \omega_\theta + \omega_\psi,$$

где слагаемые определены предыдущими формулами.

Остается разложить по e_1, e_2, e_3 векторы $\omega_\varphi, \omega_\theta$ и ω_ψ . До сих пор мы не пользовались тем, что $\varphi = \psi = 0$. Если $\varphi = \psi = 0$, то

$$B(\varphi + d\varphi, \theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$$

есть просто вращение вокруг оси e_z на угол $d\varphi$, так что

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi} e_z.$$

Далее, $B(\varphi, \theta + d\theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$ есть в случае $\varphi = \psi = 0$ просто вращение вокруг оси $e_N = e_x = e_1$ на угол $d\theta$, так что

$$\omega_\theta = \dot{\theta} e_1.$$

Наконец, $B(\varphi, \theta, \psi + d\psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$ есть вращение на угол $d\psi$ вокруг оси e_3 , поэтому

$$\omega_\psi = \dot{\psi} e_3.$$

Окончательно, при $\varphi = \psi = 0$ получаем

$$\omega = \dot{\varphi} e_z + \dot{\theta} e_1 + \dot{\psi} e_3.$$

Но очевидно при $\varphi = \psi = 0$

$$e_z = e_3 \cos \theta + e_2 \sin \theta.$$

Итак, компоненты угловой скорости по осям инерции e_1, e_2, e_3 суть

$$\omega_1 = \dot{\theta}, \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \quad \text{ч. т. д.}$$

Поскольку $T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$, кинетическая энергия при $\varphi = \psi = 0$ дается формулой

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2.$$

Но кинетическая энергия от φ и ψ зависеть не может: это циклические координаты, и не меняющим T выбором начала отсчета φ и ψ мы всегда можем сделать $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Итак, полученная формула для кинетической энергии справедлива при всех φ , ψ .

Мы получаем, таким образом, функцию Лагранжа

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta.$$

Г. Исследование движения. Циклическим координатам φ , ψ соответствуют первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_z = \dot{\varphi}(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \psi I_3 \cos \theta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = M_3 = \dot{\psi} I_3 \cos \theta + \psi I_3.$$

Теорема. Наклон θ оси болтика к вертикали меняется со временем так же, как в одномерной системе с энергией

$$E' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф}}(\theta),$$

где эффективная потенциальная энергия дается формулой

$$U_{\text{эфф}} = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta.$$

Доказательство. В соответствии с общей теорией выразим $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ через M_z и M_3 . Получим полную энергию системы в виде

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{M_z^2}{2I_1} + mgl \cos \theta + \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}$$

и

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}.$$

Постоянный по θ член $\frac{M_z^2}{2I_1} = E - E'$ на уравнение для θ не влияет. Теорема доказана.

Чтобы изучить полученную одномерную систему, удобно сделать замену $\cos \theta = u$ ($-1 \leq u \leq 1$).

Обозначая, кроме того,

$$\frac{M_z}{I_1} = a, \quad \frac{M_3}{I_1} = b, \quad \frac{2E'}{I_1} = \alpha, \quad \frac{2mgl}{I_1} = \beta > 0,$$

мы можем переписать закон сохранения энергии E' в виде

$$\dot{u}^2 = f(u), \text{ где } f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2,$$

и закон изменения азимута φ в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

Заметим, что $f(u)$ — полином третьей степени, $f(+\infty) = +\infty$, а $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$, если только $a \neq \pm b$. С другой стороны, действительному движению отвечают лишь такие постоянные a , b , α , β , при которых $f(u) \geq 0$ при некоторых $-1 \leq u \leq 1$.

Итак, $f(u)$ имеет ровно два вещественных корня u_1 , u_2 на отрезке $-1 \leq u \leq 1$ (и один при $u > 1$, рис. 127).

Следовательно, наклон оси волчка θ меняется периодически между двумя предельными значениями θ_1 , θ_2 (рис. 128).

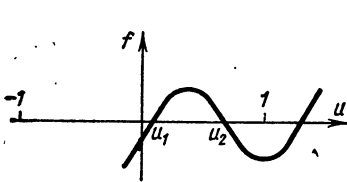


Рис. 127. График функции $f(u)$.

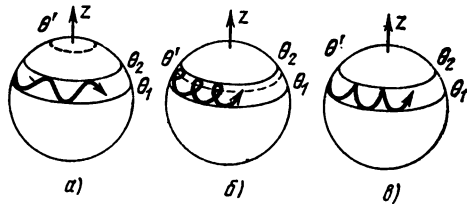


Рис. 128. След оси волчка на единичной сфере

Это периодическое изменение наклона называется *нутацией*.

Рассмотрим теперь движение оси волчка по азимуту. Точка пересечения оси с единичной сферой движется в кольце между параллелями θ_1 и θ_2 . При этом изменение азимута оси определяется уравнением

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

Если корень u' уравнения $a = bu$ лежит вне (u_1, u_2) , то угол φ меняется монотонно и ось чертит на единичной сфере кривую типа синусоиды (рис. 128, а).

Если корень u' уравнения $a = bu$ лежит внутри (u_1, u_2) , то скорость изменения φ на параллелях θ_1 и θ_2 противоположна, и ось чертит на сфере кривую с петлями (рис. 128, б).

Если же корень u' уравнения $a = bu$ лежит на краю (скажем, $u' = u_2$), то ось чертит кривую с острями (рис. 128, в).

Последний случай, хотя и исключительный, наблюдается всякий раз, когда мы отпускаем ось запущенного с наклоном θ_2 волчка без начальной скорости: волчок сперва падает, но потом вновь поднимается.

Азимутальное движение оси волчка называется *прецессией*. Окончательное движение волчка состоит из вращения вокруг собственной оси, нутации и прецессии. Каждое из трех движений имеет свою частоту. Если частоты несоизмеримы, то волчок никогда не возвращается в начальное состояние, хотя и подходит к нему сколь угодно близко.

§ 31. Спящий волчок и быстрый волчок

Полученные в § 30 формулы сводят решение уравнений движения волчка к эллиптическим квадратурам. Однако качественные выводы о движении обычно проще получать, не обращаясь к квадратурам.

В этом параграфе исследуется устойчивость вертикально стоящего волчка и даны приближенные формулы для движения быстро запущенного волчка.

А. Спящий волчок. Рассмотрим сперва частное решение уравнений движения, при котором ось волчка все время вертикальна ($\theta = 0$) и угловая скорость постоянна («спящий» волчок). В этом случае, очевидно, $M_z = M_3 = I_3 \omega_3$ (рис. 129).

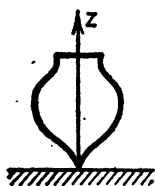


Рис. 129. Спящий волчок.

Задача. Показать, что стационарное вращение вокруг вертикали всегда неустойчиво по Ляпунову.

Мы рассмотрим движение *оси волчка*, а не самого волчка. Будет ли ось волчка устойчиво оставаться вблизи вертикали, т. е. будет ли θ оставаться малым? Разложим эффективную потенциальную энергию системы

$$U_{\text{эфф}} = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

в ряд по степеням θ . Находим

$$U_{\text{эфф}} = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} \frac{\theta^4}{4} + \dots - mgl \frac{\theta^2}{2} + \dots = C + A\theta^2 + \dots, \quad A = \frac{\omega_3^2 I_3^2}{8I_1} - \frac{mgl}{2}.$$

Если $A > 0$, положение равновесия $\theta = 0$ одномерной системы устойчиво, а если $A < 0$, — неустойчиво. Итак, *условие устойчивости имеет вид*

$$\omega_3^2 > \frac{4mglI_1}{I_3^2}.$$

Когда трение уменьшает скорость спящего волчка ниже этого предела, он просыпается.

Задача. Докажите, что при $\omega_3^2 > \frac{4mglI_1}{I_3^2}$ ось спящего волчка устойчива и относительно таких возмущений, которые меняют значения M_z , M_3 , а не только θ .

Б. Быстрый волчок. Волчок называется *быстрым*, если кинетическая энергия его вращения велика по сравнению с потенциальной:

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \gg mgl.$$

Из соображений подобия ясно, что увеличение угловой скорости в N раз в точности эквивалентно уменьшению веса в N^2 раз.

Теорема. Если, сохраняя начальное положение волчка, увеличить в N раз угловую скорость, то траектория волчка будет в точности такой же, как если бы угловая скорость осталась прежней, а ускорение силы тяжести g уменьшилось в N^2 раз. При этом в случае большей угловой скорости траектория, разумеется, пройдёт в N раз быстрее*).

Таким образом, мы можем исследовать случай $g \rightarrow 0$, и применять полученные результаты для изучения случая $\omega \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сперва случай $g = 0$, т. е. движение симметричного волчка в отсутствие силы тяжести. Сравним два описания этого движения: по Лагранжу (§ 30, Г) и по Пуансо (§ 29, В).

Рассмотрим вначале уравнение Лагранжа для изменения угла наклона оси волчка θ .

Лемма. В отсутствие силы тяжести угол θ_0 , для которого $M_x = M_3 \cos \theta_0$, является устойчивым положением равновесия уравнения движения оси волчка.

Частота малых колебаний θ около этого положения равновесия равна

$$\omega_{\text{путь}} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1}.$$

Доказательство. В отсутствие силы тяжести эффективная потенциальная энергия сводится к

$$U_{\text{эфф}} = \frac{(M_x - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}.$$

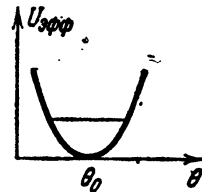


Рис. 130. Эффективная потенциальная энергия волчка

Эта неотрицательная функция имеет нулевой минимум при угле $\theta = \theta_0$, определенном условием $M_x = M_3 \cos \theta_0$ (рис. 130).

Итак, угол наклона θ_0 оси волчка к вертикали — устойчивый стационарный: при малом отклонении начального наклона θ от θ_0 будут происходить периодические колебания θ около θ_0 (нутация). Частоту этих колебаний легко определить по общей формуле: частота малых колебаний в одномерной системе с энергией

$$E = \frac{ax^2}{2} + U(x), \quad U(x_0) = \min U(x)$$

*) Обозначим через $\varphi_g(t, \xi)$ положение волчка в момент времени t при начальном условии $\xi \in TS(3)$ и ускорении силы тяжести g . Тогда теорема утверждает, что

$$\varphi_g(t, N\xi) = \varphi_{N^{-2}g}(Nt, \xi).$$

определяется формулой (§ 22, Г)

$$\omega^2 = \frac{U''(x_0)}{a}.$$

Энергия одномерной системы, описывающей колебания наклона оси волчка, есть

$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф}}.$$

При $\theta = \theta_0 + x$ находим $M_z - M_3 \cos \theta = M_3 (\cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + x)) = M_3 x \sin \theta_0 + O(x^2)$

$$U_{\text{эфф}} = \frac{M_3^2 \cdot x^2 \cdot \sin^2 \theta_0}{2I_1 \sin^2 \theta_0} + o(x^2) = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} x^2 + \dots$$

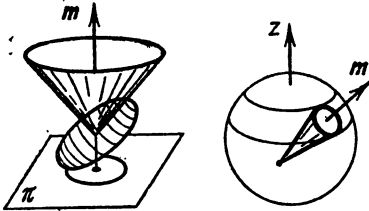
откуда получаем для частоты нутации выражение

$$\omega_{\text{нут}} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1}, \text{ ч. т. д.}$$

Из формулы $\phi = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$ видно, что при $\theta = \theta_0$ азимут оси также не меняется со временем: ось неподвижна. Азимутальное движение оси при малом отклонении θ от θ_0 можно было бы также изучить с помощью этой формулы, но мы поступим иначе.

Движение волчка в отсутствие силы тяжести можно рассматривать как движение по Пуансо. Следовательно, ось волчка равномерно вращается вокруг вектора кинетического момента, сохраняющего свое положение в пространстве.

Рис. 131. Сравнение описаний движения волчка по Лагранжу и по Пуансо



Итак, ось волчка описывает на сфере окружность, центр которой соответствует вектору кинетического момента (рис. 131).

З а м е ч а н и е. Таким образом, то движение оси волчка, которое по Лагранжу называется *нутацией*, в описании движения Пуансо называется *прецессией*.

Разумеется, полученная выше формула для частоты малой нутации $\omega_{\text{нут}} = I_3 \omega_3 / I_1$ согласуется с формулой частоты прецессии $\omega = M / I_1$ в движении по Пуансо: когда амплитуда нутации стремится к нулю, $I_3 \omega_3 \rightarrow M$.

В. Волчок в слабом поле. Перейдем теперь к случаю, когда сила веса не отсутствует, но очень мала (при этом значения M_z , M_3 фиксированы). В этом случае к эффективной потенциальной энергии добавляется слагаемое $mgl \cos \theta$, малое вместе с производными. Покажем, что это слагаемое мало меняет частоту нутации.

Лемма. Пусть функция $f(x)$ имеет минимум при $x=0$ и тейлоровское разложение $f(x) = A \frac{x^2}{2} + \dots$, $A > 0$. Пусть функция $h(x)$ имеет в 0 тейлоровское разложение $h(x) = B + Cx + \dots$. Тогда при достаточно малом ε функция $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon h(x)$ имеет минимум в близкой к 0 точке (рис. 132)

$$x_\varepsilon = -\frac{C\varepsilon}{A} + O(\varepsilon^2).$$

При этом $f''_\varepsilon(x_\varepsilon) = A + O(\varepsilon)$.

Действительно, имеем $f'_\varepsilon(x) = Ax + C\varepsilon + O(x^2)$, и результат получается применением к $f'_\varepsilon(x)$ теоремы о неявной функции.

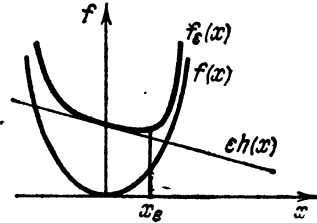


Рис. 132. Перемещение минимума при малом изменении функции.

Согласно лемме эффективная потенциальная энергия при малых g имеет близкую к θ_0 точку минимума θ_g , причем в этой точке U'' мало отличается от $U''(\theta_0)$. Следовательно, частота малой нутации около θ_0 близка к полученному при $g=0$ значению:

$$\lim_{g \rightarrow 0} \omega_{\text{нут}} = \frac{I_3}{I_1} \omega_3.$$

Г. Быстро запущенный волчок. Рассмотрим теперь специальные начальные условия, когда мы отпускаем ось волчка без начального толчка из положения с наклоном θ_0 к вертикали.

Теорема. Если в начальный момент ось волчка неподвижна ($\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$) и волчок быстро вращается вокруг своей оси ($\omega_3 \rightarrow \infty$), наклоненной к вертикали под углом θ_0 ($M_z = M_3 \cos \theta_0$), то асимптотически при $\omega_3 \rightarrow \infty$:

- 1) частота нутации пропорциональна угловой скорости;
- 2) амплитуда нутации обратно пропорциональна квадрату угловой скорости;
- 3) частота прецессии обратно пропорциональна угловой скорости;
- 4) справедливы асимптотические формулы (при $\omega_3 \rightarrow \infty$)

$$\omega_{\text{нут}} \sim \frac{I_3}{I_1} \omega_3, \quad a_{\text{нут}} \sim \frac{I_1 mgl}{I_3^2 \omega_3^2} \sin \theta_0, \quad \omega_{\text{прец}} \sim \frac{mgl}{I_3 \omega_3}$$

(здесь $f(\omega_3) \sim g(\omega_3)$, если $\lim_{\omega_3 \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 1$).

Для доказательства перейдем к случаю, когда начальная угловая скорость фиксирована, но $g \rightarrow 0$.

Истолковывая затем полученные формулы с помощью подобия (см. пункт Б), получим сформулированную теорему.

Мы уже знаем из § 30, Г, что при наших начальных условиях ось волчка чертит на сфере кривую с острыми.

Применим лемму к нахождению точки минимума θ_g эффективной потенциальной энергии. Положим (рис. 133)

$$\theta = \theta_0 + x, \quad \cos \theta = \cos \theta_0 - x \sin \theta_0 + \dots$$

Тогда получим, как выше, тейлоровские разложения по x

$$U_{\text{эфф}}|_{g=0} = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} x^2 + \dots, \quad mgl \cos \theta = mgl \cos \theta_0 - x mgl \sin \theta_0 + \dots$$

Применяя лемму к $f = U_{\text{эфф}}|_{g=0}$, $g = \varepsilon$, $h = ml \cos(\theta_0 + x)$, находим, что минимум эффективной потенциальной энергии $U_{\text{эфф}}$ достигается при угле наклона

$$\theta_g = \theta_0 + x_g, \quad x_g = \frac{I_1 m l \sin \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2} g + O(g^2).$$

Итак, наклон оси волчка θ будет колебаться около θ_g (рис. 134). Но в начальный момент $\theta = \theta_0$, а $\dot{\theta} = 0$. Значит, θ_0 соответствует наивысшему

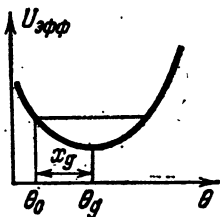


Рис. 133. Определение амплитуды нутации.

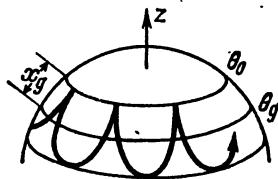


Рис. 134. Движение оси волчка.

положению оси волчка. Итак, при малых g амплитуда нутации асимптотически равна

$$a_{\text{нут}} \sim x_g \sim \frac{I_1 m l \sin \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2} g \quad (g \rightarrow 0).$$

Теперь найдем прецессионное движение оси. Из общей формулы

$$\dot{\varphi} = \frac{M_x - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

при $M_x = M_3 \cos \theta$, $\theta = \theta_0 + x$, находим $M_x - M_3 \cos \theta = M_3 x \sin \theta_0 + \dots$, поэтому

$$\dot{\varphi} \approx \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} x + \dots$$

Но x колеблется от 0 до $2x_g$ гармонически (с точностью до $O(g^2)$). Поэтому среднее за период нутации значение скорости прецессии асимптотически равно

$$\bar{\dot{\varphi}} \sim \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} x_g \sim \frac{mgl}{I_3 \omega_3} \quad (g \rightarrow 0).$$

Задача. Доказать, что

$$\lim_{g \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\frac{mgl}{I_3 \omega_3}} = 1.$$

ЧАСТЬ III

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Гамильтонова механика — это геометрия в фазовом пространстве. Фазовое пространство имеет структуру симплектического многообразия. На симплектическом многообразии действует группа симплектических диффеоморфизмов. Основные понятия и теоремы гамильтоновой механики (даже если они и формулируются в терминах локальных симплектических координат) инвариантны относительно этой группы (и относительно более широкой группы преобразований, затрагивающих также и время).

Гамильтонова механическая система задается четномерным многообразием («фазовым пространством»), симплектической структурой, на нем («интегральным инвариантом Пуанкаре») и функцией на нем («функцией Гамильтона»). Каждая однопараметрическая группа симплектических диффеоморфизмов фазового пространства, сохраняющих функцию Гамильтона, связана с первым интегралом уравнений движения.

Лагранжева механика включается в гамильтонову как частный случай (фазовое пространство в этом случае есть касательное расслоение конфигурационного, а функция Гамильтона — преобразование Лежандра функции Лагранжа).

Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачу о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т. п.).

ГЛАВА 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Дифференциальные внешние формы возникают при обобщении на многомерный случай таких понятий, как работа поля на пути и поток жидкости через поверхность.

Гамильтонову механику нельзя понять без дифференциальных форм. Нужные нам сведения о дифференциальных формах — это внешнее умножение, внешнее дифференцирование, интегрирование и формула Стокса.

§ 32. Внешние формы

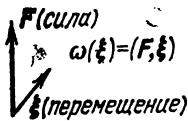
Здесь определены внешние алгебраические формы.

А. 1-формы. Пусть \mathbf{R}^n — n -мерное вещественное линейное пространство *). Векторы этого пространства будем обозначать через ξ, η, \dots

Определение. *Формой степени 1* (или, короче, *1-формой*) называется линейная функция от вектора, $\omega: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2 \omega(\xi_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n.$$

Напомним основные факты об 1-формах, известные из линейной алгебры. Множество всех 1-форм превращается в вещественное линейное пространство, если определить сумму форм формулой



$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi),$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda \omega)(\xi) = \lambda \omega(\xi).$$

Рис. 135. Работа силы — 1-форма от перемещения.

Пространство 1-форм на \mathbf{R}^n само n -мерно и называется также сопряженным пространством, $(\mathbf{R}^n)^*$.

Пусть в \mathbf{R}^n выбрана линейная система координат, x_1, \dots, x_n . Каждая координата, например x_i , сама является 1-формой. Эти n 1-форм линейно независимы. Поэтому каждая 1-форма ω имеет вид

$$\omega = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

Значение ω на векторе ξ равно

$$\omega(\xi) = a_1 x_1(\xi) + \dots + a_n x_n(\xi),$$

где $x_1(\xi), \dots, x_n(\xi)$ — компоненты вектора ξ в выбранной системе координат.

Пример. Если в евклидовом \mathbf{R}^3 дано однородное силовое поле F , то его работа A на перемещении ξ есть 1-форма от ξ (рис. 135).

*) Существенно отметить, что мы не фиксируем в \mathbf{R}^n никакой специальной евклидовой структуры. В некоторых примерах такая структура используется; тогда это специально оговорено («евклидово \mathbf{R}^n »).

Б. 2-формы.

Определение. Внешней формой степени 2 (или, короче, 2-формой) называется функция от пары векторов, $\omega^2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которая билинейна и кососимметрична:

$$\begin{aligned} \omega^2(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \xi_3) &= \lambda_1 \omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2 \omega^2(\xi_2, \xi_3), \\ \omega^2(\xi_1, \xi_2) &= -\omega^2(\xi_2, \xi_1), \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Пример 1. Пусть $S(\xi_1, \xi_2)$ — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах ξ_1, ξ_2 ориентированной евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , т. е.

$$S(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \text{ где } \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2, \\ \xi_2 &= \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2, \end{aligned}$$

где e_1, e_2 — базис, задающий ориентацию \mathbb{R}^2 .

Легко видеть, что $S(\xi_1, \xi_2)$ есть 2-форма (рис. 136).

Пример 2. Пусть v — однородное поле скоростей жидкости в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве (рис. 137). Тогда

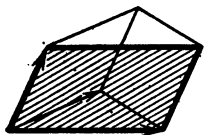


Рис. 136. Ориентированная площадь — 2-форма.

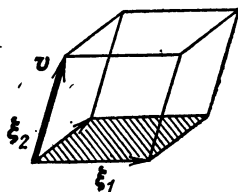


Рис. 137. Поток жидкости через площадку — 2-форма.

поток жидкости через площадь параллелограмма ξ_1, ξ_2 есть билинейная кососимметрическая функция от ξ_1, ξ_2 , т. е. 2-форма

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = (v, \xi_1, \xi_2).$$

Пример 3. Ориентированная площадь проекции параллелограмма со сторонами ξ_1, ξ_2 в евклидовом \mathbb{R}^3 на плоскость x_1, x_2 есть 2-форма.

Задача 1. Докажите, что для всякой 2-формы ω^2 в \mathbb{R}^n имеем

$$\omega^2(\xi, \xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Решение. Ввиду кососимметричности $\omega^2(\xi, \xi) = -\omega^2(\xi, \xi)$.

Множество всех 2-форм в \mathbb{R}^n превращается в вещественное линейное пространство, если определить сложение форм формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1, \xi_2) + \omega_2(\xi_1, \xi_2),$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda\omega)(\xi_1, \xi_2) = \lambda\omega(\xi_1, \xi_2).$$

Задача 2. Докажите, что это пространство конечномерно, и найдите его размерность.

Ответ. $\frac{n(n-1)}{2}$; базис указан ниже.

В. k -формы.

Определение. Внешней формой степени k , или k -формой, называется функция от k векторов, которая k -линейна и кососимметрична:

$$\omega(\lambda_1 \xi_1' + \lambda_2 \xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_k) = \lambda_1 \omega(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_k) + \lambda_2 \omega(\xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_k),$$

$$\omega(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) = (-1)^v \omega(\xi_1, \dots, \xi_k), \text{ где } v = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \\ & \text{четная} \\ 1, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \\ & \text{нечетная.} \end{cases}$$

Пример 1. Ориентированный объем параллелепипеда с ребрами ξ_1, \dots, ξ_n в ориентированном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n есть n -форма (рис. 138)

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

где $\xi_i = \xi_{i1}e_1 + \dots + \xi_{in}e_n$ и e_1, \dots, e_n — базис \mathbb{R}^n .

Пример 2. Пусть \mathbb{R}^k — k -мерная ориентированная плоскость в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Тогда k -мерный ориентированный объем проекции параллелепипеда с ребрами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ на \mathbb{R}^k есть k -форма на \mathbb{R}^n .

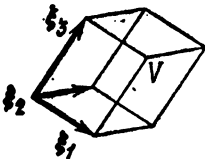


Рис. 138. Ориентированный объем — 3-форма.

Множество всех k -форм в \mathbb{R}^n становится вещественным линейным пространством, если ввести в нем операции сложения

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi),$$

$$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n,$$

и умножения на число

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi).$$

Задача 3. Доказать, что это линейное пространство конечномерно и найти его размерность.

Ответ. C_n^k ; базис указан ниже.

Г. Внешнее произведение двух 1-форм. Введем теперь еще одну операцию: внешнее умножение форм. Если ω^k — k -форма и ω^l — l -форма в \mathbb{R}^n , то их внешнее произведение $\omega^k \wedge \omega^l$ будет $k+l$ -формой. Вначале определим внешнее произведение 1-форм, сопоставляя каждой паре 1-форм ω_1, ω_2 в \mathbb{R}^n некоторую 2-форму $\omega_1 \wedge \omega_2$ в \mathbb{R}^n .

Пусть ξ — вектор \mathbb{R}^n . Имея две 1-формы ω_1 и ω_2 , можно определить отображение \mathbb{R}^n на плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, сопоставляя $\xi \in \mathbb{R}^n$

вектор $\omega(\xi)$ с компонентами $\omega_1(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ на плоскости с координатами ω_1 , ω_2 (рис. 139).

Определение. Значение внешнего произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$ на паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ есть ориентированная площадь образа параллелограмма со сторонами ξ_1, ξ_2 на плоскости ω_1, ω_2 :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{vmatrix}.$$

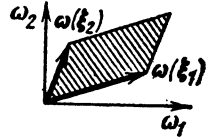
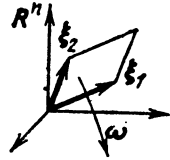


Рис. 139. Определение внешнего произведения двух 1-форм.

Задача 4. Доказать, что $\omega_1 \wedge \omega_2$ действительно есть 2-форма.

Задача 5. Доказать, что отображение

$$(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2$$

билинейно и кососимметрично:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1,$$

$$(\lambda' \omega'_1 + \lambda'' \omega''_1) \wedge \omega_2 = \lambda' \omega'_1 \wedge \omega_2 + \lambda'' \omega''_1 \wedge \omega_2.$$

Указание. Определитель билинеен и кососимметричен не только по строкам, но и по столбцам.

Пусть теперь в \mathbb{R}^n выбрана система линейных координат, т. е. заданы n независимых 1-форм x_1, \dots, x_n . Эти формы мы будем называть базисными.

Внешние произведения базисных форм суть 2-формы $x_i \wedge x_j$. Ввиду кососимметричности, $x_i \wedge x_i = 0$, $x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i$. Геометрический смысл формы $x_i \wedge x_j$ очень прост: ее значение на паре векторов ξ_1, ξ_2 равно ориентированной площади проекции параллелограмма ξ_1, ξ_2 на координатную плоскость x_i, x_j параллельно остальным координатным направлениям.

Задача 6. Докажите, что $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ форм $x_i \wedge x_j$ ($i < j$) линейно независимы.

В частности, в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) площадь проекции на плоскость (x_1, x_2) есть $x_1 \wedge x_2$, на плоскость (x_2, x_3) — $-x_2 \wedge x_3$, на плоскость (x_3, x_1) — $x_3 \wedge x_1$.

Задача 7. Докажите, что все 2-формы в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) исчерпываются формами

$$Px_2 \wedge x_3 + Qx_3 \wedge x_1 + Rx_1 \wedge x_2.$$

Задача 8. Докажите, что каждая 2-форма в n -мерном пространстве с координатами x_1, \dots, x_n однозначно представляется в виде

$$\omega^2 = \sum_{i < j} a_{ij} x_i \wedge x_j.$$

Указание. Пусть e_i — i -й базисный вектор, т. е. $x_i(e_i) = 1$, $x_j(e_i) = 0$, $j \neq i$. Рассмотрим значения формы ω^2 на паре e_i, e_j . Тогда

$$a_{ij} = \omega^2(e_i, e_j).$$

Д. Внешние одночлены. Пусть теперь даны k 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k$. Определим их внешнее произведение $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$.

Определение. Положим

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \dots & \omega_k(\xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1(\xi_k) & \dots & \omega_k(\xi_k) \end{vmatrix}.$$

Иными словами, значение произведения 1-форм на параллелепипеде ξ_1, \dots, ξ_k равно ориентированному объему образа параллелепипеда в ориентированном евклидовом координатном пространстве \mathbb{R}^k при отображении $\xi \rightarrow (\omega_1(\xi), \dots, \omega_k(\xi))$.

Задача 9. Докажите, что $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ есть k -форма.

Задача 10. Докажите, что операция внешнего умножения 1-форм задает полилинейное кососимметрическое отображение

$$(\omega_1, \dots, \omega_k) \rightarrow \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

Иными словами,

$$(\lambda' \omega_1 + \lambda'' \omega_1') \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k = \lambda' \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k + \lambda'' \omega_1' \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k,$$

$$\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} = (-1)^v \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k, \text{ где } v = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка} \\ & i_1, \dots, i_k \text{ четная,} \\ 1, & \text{если перестановка} \\ & i_1, \dots, i_k \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь в \mathbb{R}^n систему координат, заданную базисными формами x_1, \dots, x_n . Внешнее произведение k базисных форм

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_m \leq n,$$

есть ориентированный объем проекции k -параллелепипедов на k -плоскость $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ параллельно остальным координатным направлениям.

Задача 11. Докажите, что если среди индексов i_1, \dots, i_k есть два одинаковых, то форма $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$ равна нулю.

Задача 12. Докажите, что формы

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \text{ где } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

линейно независимы.

Число таких форм, очевидно, C_n^k . Мы будем называть их *базисными k -формами*.

Задача 13. Докажите, что каждая k -форма в \mathbb{R}^n однозначно представляется в виде линейной комбинации базисных:

$$\omega^k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}.$$

Указание. $a_{i_1 \dots i_k} = \omega^k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$.

Из результата этой задачи следует, что размерность линейного пространства k -форм в \mathbb{R}^n равна C_n^k . В частности, при $k = n$, $C_n^k = 1$, откуда вытекает

Следствие. *Всякая n -форма в \mathbb{R}^n есть либо ориентированный объем параллелепипеда при некотором выборе единицы объема, либо нуль:*

$$\omega^n = a \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_n.$$

Задача 14. Доказать, что всякая k -форма в \mathbb{R}^n при $k > n$ равна нулю.

Переходим теперь к умножению k -формы ω^k на l -форму ω^l . Пусть вначале даны два одночлена

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k, \quad \omega^l = \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l},$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{k+l}$ — 1-формы. Их произведение $\omega^k \wedge \omega^l$ мы определим как одночлен

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}) = \\ = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}. \end{aligned}$$

Задача 15. Докажите, что умножение одночленов ассоциативно:

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$$

и косокоммутативно:

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k.$$

Указание. Чтобы переставить каждый из l множителей ω^l вперед, нужно k инверсий с k множителями ω^k .

Замечание. Полезно запомнить, что косокоммутативность означает коммутативность, если хотя бы одна из степеней k, l четная, а антикоммутативность, если обе степени k, l нечетные.

§ 33. Внешнее умножение

Здесь определяется операция внешнего умножения форм и доказывается, что она косокоммутативна, дистрибутивна и ассоциативна.

А. Определение внешнего произведения. Мы определим теперь внешнее умножение произвольной k -формы ω^k на произвольную l -форму ω^l . Результат $\omega^k \wedge \omega^l$ будет $k+l$ -формой. Операция умножения окажется:

1) косокоммутативной: $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k,$

2) дистрибутивной: $(\lambda_1 \omega_1^k + \lambda_2 \omega_2^k) \wedge \omega^l = \lambda_1 \omega_1^k \wedge \omega^l + \lambda_2 \omega_2^k \wedge \omega^l,$

3) ассоциативной: $(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m).$

Определение. *Внешним произведением $\omega^k \wedge \omega^l$ k -формы ω^k в \mathbb{R}^n на l -форму ω^l в \mathbb{R}^n называется $k+l$ -форма в \mathbb{R}^n , значение которой на $k+l$ векторах $\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l} \in \mathbb{R}^n$ равно*

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum (-1)^v \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}), \quad (1)$$

где $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_l; (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ — перестановка номеров $(1, 2, \dots, k+l)$, а

$$v = \begin{cases} 1, & \text{если эта перестановка нечетна,} \\ 0, & \text{если эта перестановка четна.} \end{cases}$$

Иными словами, каждое разбиение $k+l$ векторов ξ_1, \dots, ξ_{k+l} , на две группы (из k и из l векторов) дает одно слагаемое в нашей сумме (1). Это слагаемое равно произведению значения k -формы ω^k на k векторах первой группы на значение l -формы ω^l на l векторах второй группы, со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, как упорядочены векторы в группах. Если они упорядочены так, как написанные подряд k векторов первой группы и l векторов второй образуют четную перестановку векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+l}$, то берется знак $+$, а если нечетную — знак $-$.

Пример. Если $k=2$, то разбиений всего два: ξ_1, ξ_2 и ξ_2, ξ_1 . Поэтому

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_2(\xi_1)\omega_1(\xi_2),$$

в согласии с определением умножения 1-форм из § 32.

Задача 1. Доказать, что приведенное выше определение действительно определяет некоторую $k+l$ -форму (т. е. что значение $(\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l})$ зависит от векторов ξ полилинейно и кососимметрично).

Б. Свойства внешнего произведения.

Теорема. *Определенное выше внешнее умножение форм косocomмутативно, дистрибутивно и ассоциативно. Для одночленов оно совпадает с умножением, определенным в § 32.*

Доказательство косocomмутативности основано на простейших свойствах четных и нечетных перестановок (см. задачу в конце § 32) и предоставляется читателю.

Дистрибутивность следует из того, что каждое слагаемое в (1) линейно относительно ω^k и ω^l .

Доказательство ассоциативности требует несколько больше комбинаторики; так как соответствующие рассуждения уже проводились в курсе алгебры при доказательстве теоремы Лапласа о разложении определителя по минорам столбцов, можно воспользоваться этой теоремой*).

Начнем со следующего замечания: *Если ассоциативность доказана для слагаемых, то она верна и для суммы, т. е.*

$$\left. \begin{aligned} (\omega'_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega'_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) \\ (\omega''_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega''_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) \end{aligned} \right\} \text{влечет } ((\omega'_1 + \omega''_1) \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \\ = (\omega'_1 + \omega''_1) \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

*) Прямое доказательство ассоциативности (содержащее также доказательство теоремы Лапласа) состоит в проверке согласованности знаков в тождестве

$$\begin{aligned} & ((\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+m}) = \\ & = \sum \pm \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}) \omega^m(\xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_m}), \end{aligned}$$

где $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_l$, $h_1 < \dots < h_m$; $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l, h_1, \dots, h_m)$ — перестановка чисел $(1, \dots, k+l+m)$.

Ибо в силу дистрибутивности, которая уже доказана, имеем

$$\begin{aligned} ((\omega_1 + \omega_1') \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= ((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3) + ((\omega_1' \wedge \omega_2) \wedge \omega_3), \\ (\omega_1 + \omega_1') \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) &= (\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)) + (\omega_1' \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)). \end{aligned}$$

Но мы уже знаем из § 32 (задача 12), что всякая форма в \mathbf{R}^n есть сумма одночленов. Поэтому достаточно доказать ассоциативность умножения одночленов.

Так как пока не доказана эквивалентность определения умножения k 1-форм из § 32 с общим определением (1), мы будем временно обозначать умножение k 1-форм символом $\overline{\wedge}$, так что наши одночлены имеют вид

$$\omega^k = \omega_1 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} \omega_k, \quad \omega^l = \omega_{k+1} \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} \omega_{k+l},$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{k+l}$ — 1-формы.

Лемма. Внешнее произведение двух одночленов есть одночлен:

$$\begin{aligned} (\omega_1 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} \omega_{k+l}) &= \\ &= \omega_1 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} \omega_k \overline{\wedge} \omega_{k+1} \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} \omega_{k+l}. \end{aligned}$$

Доказательство. Вычислим значения левой и правой частей на $k+l$ векторах ξ_1, \dots, ξ_{k+l} . Значение правой части равно определителю $\det |\omega_i(\xi_j)|$ порядка $k+l$. Значение левой части по формуле (1) равно сумме произведений

$$\sum_{\substack{\pm \\ 1 \leq i \leq k}} \det |\omega_i(\xi_m)| \cdot \det |\omega_i(\xi_{j_m})|$$

миноров первых k столбцов определителя порядка $k+l$ на дополнительные миноры. Теорема Лапласа о разложении по минорам первых k столбцов как раз и утверждает, что эта сумма с тем же правилом выбора знаков, что в определении (1), равна определителю $\det |\omega_i(\xi_j)|$. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что операции $\overline{\wedge}$ и \wedge совпадают. Действительно, мы получаем последовательно

$$\begin{aligned} \omega_1 \overline{\wedge} \omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_2, \\ \omega_1 \overline{\wedge} \omega_2 \overline{\wedge} \omega_3 &= (\omega_1 \overline{\wedge} \omega_2) \wedge \omega_3 = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3, \\ \omega_1 \overline{\wedge} \omega_2 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} \omega_k &= (\dots ((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3) \wedge \dots \wedge \omega_k). \end{aligned}$$

Из очевидной ассоциативности $\overline{\wedge}$ -умножения k 1-форм следует поэтому ассоциативность \wedge -умножения одночленов. Тем самым, в силу сделанного выше замечания, ассоциативность доказана и в общем случае.

Задача 2. Докажите, что внешний квадрат 1-формы или вообще формы нечетного порядка равен нулю: $\omega^k \wedge \omega^k = 0$, если k нечетно.

Пример 1. Рассмотрим в \mathbb{R}^{2n} систему координат $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ и 2-форму $\omega^2 = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$.

[Геометрически эта форма ω^2 означает сумму площадей ориентированных проекций параллелограмма на n координатных двумерных плоскостей $(p_1, q_1); \dots; (p_n, q_n)$. В дальнейшем мы увидим, что 2-форма ω^2 имеет основное значение для гамильтоновой механики. Можно показать, что всякая невырожденная *) 2-форма в \mathbb{R}^{2n} имеет вид в некоторой системе координат (p_1, \dots, q_n) .]

Задача 3. Найти внешний квадрат 2-формы ω^2 .

Ответ. $\omega^2 \wedge \omega^2 = -2 \sum_{i > j} p_i \wedge p_j \wedge q_i \wedge q_j$.

Задача 4. Найти внешнюю k -ю степень ω^2 .

Ответ. $\underbrace{\omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^2}_k = \pm k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} p_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_k} \wedge q_{i_1} \wedge \dots \wedge q_{i_k}$.

В частности,

$$\underbrace{\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^2}_n = \pm n! p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \dots \wedge q_n$$

есть, с точностью до множителя, объем $2n$ -мерного параллелепипеда в \mathbb{R}^{2n} .

Пример 2. Рассмотрим теперь ориентированное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Каждому вектору $A \in \mathbb{R}^3$ сопоставим 1-форму ω_A^1 , полагая

$$\omega_A^1(\xi) = (A, \xi) \quad (\text{скалярное произведение}),$$

и 2-форму ω_A^2 , полагая

$$\omega_A^2(\xi_1, \xi_2) = (A, \xi_1, \xi_2) \quad (\text{смешанное произведение}).$$

Задача 5. Доказать, что отображения $A \rightarrow \omega_A^1$ и $A \rightarrow \omega_A^2$ устанавливают изоморфизмы линейного пространства \mathbb{R}^3 векторов A с линейными пространствами 1-форм в \mathbb{R}^3 и 2-форм в \mathbb{R}^3 . Если в \mathbb{R}^3 выбрана ортонормированная, ориентированная система координат (x_1, x_2, x_3) , то

$$\omega_A^1 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \quad \omega_A^2 = A_1 x_2 \wedge x_3 + A_2 x_3 \wedge x_1 + A_3 x_1 \wedge x_2.$$

Замечание. Итак, выписанные изоморфизмы не зависят от выбора ортонормированной и ориентированной системы координат (x_1, x_2, x_3) . Но они зависят от выбора евклидовой структуры \mathbb{R}^3 , а изоморфизм $A \rightarrow \omega_A^2$ также и от ориентации (входящей неявно в определение смешанного произведения).

Задача 6. Доказать, что в силу установленных изоморфизмов внешнее умножение 1-форм превращается в векторное умножение векторов \mathbb{R}^3 , т. е. что

$$\omega_A^1 \wedge \omega_B^1 = \omega_{[A, B]}^1 \quad \text{для любых } A, B \in \mathbb{R}^3.$$

Таким образом, внешнее умножение форм можно рассматривать как перенос на многомерный случай векторного умножения в \mathbb{R}^3 . Только в многомерном случае произведение не есть вектор того же пространства: пространство 2-форм в \mathbb{R}^n изоморфно \mathbb{R}^n только при $n=3$.

Задача 7. Доказать, что в силу установленных изоморфизмов внешнее умножение 1-формы на 2-форму превращается в скалярное умножение векторов \mathbb{R}^3 :

$$\omega_A^1 \wedge \omega_B^2 = (A, B) x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

В. Поведение при отображениях. Пусть $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, и ω^k — внешняя k -форма на \mathbb{R}^n . Тогда на \mathbb{R}^m возникнет

*) Билинейная форма ω^2 невырождена, если $\forall \xi \neq 0, \exists \eta: \omega^2(\xi, \eta) \neq 0$.

кает k -форма $f^* \omega^k$, значение которой на k векторах $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ равно значению ω^k на их образах:

$$(f^* \omega^k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega^k(f\xi_1, \dots, f\xi_k).$$

Задача 8. Проверить, что $f^* \omega^k$ — внешняя форма.

Задача 9. Проверить, что f^* — линейный оператор из пространства k -форм на \mathbb{R}^n в пространство k -форм на \mathbb{R}^m (звездочка *сверху* указывает, что f^* действует в сторону, противоположную f).

Задача 10. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Проверить, что $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Задача 11. Проверить, что f^* сохраняет внешнее умножение:

$$f^*(\omega^k \wedge \omega^l) = (f^* \omega^k) \wedge (f^* \omega^l).$$

§ 34. Дифференциальные формы

Здесь дано определение дифференциальной формы на дифференцируемом многообразии.

А. Дифференциальные 1-формы. Простейшим примером дифференциальной формы является дифференциал функции.

Пример. Рассмотрим функцию $y = f(x) = x^2$. Ее дифференциал $df = 2x dx$ зависит от точки x и от «приращения аргумента», т. е. от касательного вектора ξ к оси x . Зафиксируем точку x . Тогда дифференциал функции в точке x , $df|_x$, зависит от ξ линейно. Так, если $x=1$ и координата касательного вектора ξ равна 1, то $df=2$, а если координата ξ равна 10, то $df=20$ (рис. 140).

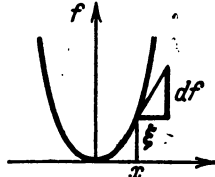


Рис. 140. Дифференциал функции.

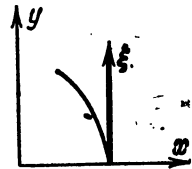


Рис. 141. К задаче 1.

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, заданная на многообразии M (можно представлять себе «функцию многих переменных» $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Дифференциал $df|_x$ функции f в точке x есть линейное отображение

$$df_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}$$

касательного пространства к M в точке x в вещественную прямую. Напомню определение этого отображения.

Пусть $\xi \in TM_x$ — вектор скорости кривой $x(t): \mathbb{R} \rightarrow M, x(0) = x, \dot{x}(0) = \xi$. Тогда, по определению,

$$df_x(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x(t)).$$

Задача 1. Пусть ξ — вектор скорости плоской кривой $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ при $t=0$. Вычислить значение дифференциалов dx, dy функций x, y на векторе ξ (рис. 141).

Ответ.

$$dx|_{1,0}(\xi) = 0, \quad dy|_{1,0}(\xi) = 1.$$

Заметим, что дифференциал функции f в точке $x \in M$ есть 1-форма df_x на касательном пространстве TM_x .

Дифференциал df функции f на многообразии M есть гладкое отображение касательного расслоения TM в прямую

$$df: TM \rightarrow \mathbb{R} \quad (TM = \bigcup_x TM_x).$$

Это отображение линейно на каждом касательном пространстве $TM_x \subset TM$ и дифференцируемо.

Определение. Дифференциальной формой степени 1 (или 1-формой) на многообразии M называется гладкое отображение

$$\omega: TM \rightarrow \mathbb{R}$$

касательного расслоения многообразия M в прямую, линейное на каждом касательном пространстве TM_x .

Можно сказать, что дифференциальная 1-форма на M есть алгебраическая 1-форма на TM_x , «дифференцируемая по x ».

Задача 2. Докажите, что всякая дифференциальная 1-форма на прямой является дифференциалом некоторой функции.

Задача 3. На окружности и на плоскости найти дифференциальные 1-формы, не являющиеся дифференциалами никаких функций.

Б. Общий вид дифференциальных 1-форм в \mathbb{R}^n . Рассмотрим в качестве многообразия M линейное пространство с координатами x_1, \dots, x_n . Напомним, что компонентами $\xi_1 \dots \xi_n$ касательного вектора $\xi \in TR_x^n$ называются значения дифференциалов координат dx_1, \dots, dx_n на векторе ξ . Эти n 1-форм на TR_x^n линейно независимы. Итак, 1-формы dx_1, \dots, dx_n образуют базис в n -мерном пространстве 1-форм на TR_x^n .

Следовательно, всякая 1-форма в TR_x^n однозначно записывается в виде $a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$, где a_i — вещественные коэффициенты.

Пусть теперь ω — произвольная дифференциальная 1-форма в \mathbb{R}^n . В каждой точке x она однозначно разлагается по базису dx_1, \dots, dx_n . Отсюда вытекает

Теорема. Всякая дифференциальная 1-форма в пространстве \mathbb{R}^n с выбранной системой координат x_1, \dots, x_n однозначно записывается в виде

$$\omega = a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n,$$

где коэффициенты $a_i(x)$ — гладкие функции.

Задача 4. Вычислить значения форм $\omega_1 = dx_1$, $\omega_2 = x_1 dx_2$, $\omega_3 = dr^2$ ($r^2 = x_1^2 + x_2^2$) на векторах ξ_1, ξ_2, ξ_3 (рис. 142).

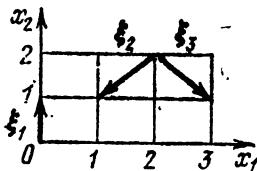


Рис. 142. К задаче 4.

Ответ.

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ω_1	0	-1	1
ω_2	0	-2	-2
ω_3	0	-8	0

Задача 5. Пусть x_1, \dots, x_n — функции на многообразии M , образующие локальную координатную систему в некоторой области. Докажите, что каждая 1-форма в этой области однозначно записывается в виде $\omega = a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n$.

В. Дифференциальные k -формы.

Определение. Дифференциальной k -формой $\omega^k|_x$ в точке x многообразия M называется внешняя k -форма на касательном пространстве TM_x к M в x , т. е. k -линейная кососимметричная функция от k векторов ξ_1, \dots, ξ_k , касательных к M в x .

Если такая форма $\omega^k|_x$ задана в каждой точке x многообразия M и если она дифференцируема, то говорят, что дана k -форма ω^k на многообразии M .

Задача 6. Ввести естественную структуру дифференцируемого многообразия в множество, элемент которого — набор k векторов, касающихся M в какой-нибудь точке x .

Дифференциальная k -форма есть гладкое отображение полученного многообразия в прямую.

Можно сказать, что k -форма на M есть внешняя k -форма на TM_x , «зависящая дифференцируемым образом от x ».

Сложение, умножение на число и внешнее умножение форм на M определяются поточечно: в каждой точке $x \in M$ надо сложить, умножить на число или внешне перемножить соответствующие алгебраические внешние формы на касательном пространстве TM_x .

Задача 7. Докажите, что все k -формы на M образуют линейное пространство (бесконечной размерности, если k не превосходит размерности M).

Дифференциальные формы можно умножать не только на числа, но и на функции. Множество C^∞ дифференциальных k -форм имеет, таким образом, естественную структуру модуля над кольцом бесконечно дифференцируемых вещественных функций на M .

Д. Общий вид дифференциальных k -форм в \mathbb{R}^n . Рассмотрим в качестве многообразия M линейное пространство \mathbb{R}^n с фиксированными координатными функциями x_1, \dots, x_n : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Зафиксируем точку x . Мы видели выше, что n 1-форм dx_1, \dots, dx_n образуют базис в пространстве 1-форм на касательном пространстве TR_x^n .

Рассмотрим внешние произведения базисных форм

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k.$$

В § 32 мы видели, что эти C_n^k k -форм образуют базис в пространстве внешних k -форм на TR_x^n . Следовательно, каждая внешняя k -форма на TR_x^n однозначно записывается в виде

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Пусть теперь ω^k — произвольная дифференциальная k -форма в пространстве R^n . В каждой точке x она однозначно разлагается по выписанному выше базису. Отсюда вытекает

Теорема. Всякая дифференциальная k -форма в пространстве R^n с выбранной системой координат x_1, \dots, x_n однозначно записывается в виде

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где $a_{i_1 \dots i_k}(x)$ — гладкие функции на R^n .

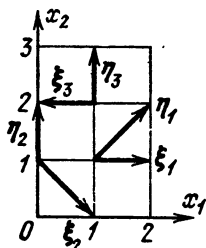


Рис. 143. К задаче 8.

Задача 8. Вычислить значения форм $\omega_1 = dx_1 \wedge dx_2$, $\omega_2 = x_1 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 dx_2 \wedge dx_1$, $\omega_3 = r dr \wedge d\varphi$ (где $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$) на парах векторов (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) (рис. 143).

Ответ.

	(ξ_1, η_1)	(ξ_2, η_2)	(ξ_3, η_3)
ω_1	1	1	-1
ω_2	2	1	-3
ω_3	1	1	-1

Задача 9. Вычислить значения форм $\omega_1 = dx_2 \wedge dx_3$, $\omega_2 = x_1 dx_3 \wedge dx_2$, $\omega_3 = dx_3 \wedge dr^2$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, на паре векторов $\xi = (1, 1, 1)$, $\eta = (1, 2, 3)$, приложенных в точке $x = (2, 0, 0)$.

Ответ. $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -2$, $\omega_3 = -8$.

Задача 10. Пусть $x_1, \dots, x_n: M \rightarrow R$ — функции на многообразии, образующие локальную координатную систему в некоторой области. Докажите, что каждая дифференциальная форма в этой области однозначно записывается в виде

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Пример. Замена переменных в форме. Пусть в \mathbb{R}^3 имеются две системы координат: x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 . Пусть ω — 2-форма в \mathbb{R}^3 . Тогда по последней теореме в системе x -координат ω записывается в виде $\omega = X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2$, где X_1, X_2, X_3 — функции от x_1, x_2, x_3 , и в системе y -координат — в виде $\omega = Y_1 dy_2 \wedge dy_3 + Y_2 dy_3 \wedge dy_1 + Y_3 dy_1 \wedge dy_2$, где Y_1, Y_2, Y_3 — функции от y_1, y_2, y_3 .

Задача 11. Зная вид формы в x -координатах (т. е. X_i) и формулы замены переменных, $x = x(y)$, найти вид формы в y -координатах, т. е. найти Y .

Решение. Имеем $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_i}{\partial y_3} dy_3$. Поэтому

$$dx_2 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 \right) \wedge \left(\frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \right),$$

откуда

$$Y_3 = X_1 \left| \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_1, y_2)} \right| + X_2 \left| \frac{D(x_3, x_1)}{D(y_1, y_2)} \right| + X_3 \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} \right| \text{ и т. д.}$$

Е. Добавление. Дифференциальные формы в трехмерном пространстве. Пусть M — трехмерное ориентированное риманово многообразие (во всех дальнейших примерах M — евклидово трехмерное пространство \mathbb{R}^3). Пусть x_1, x_2, x_3 — локальные координаты, и пусть квадрат элемента длины имеет вид

$$ds^2 = E_1 dx_1^2 + E_2 dx_2^2 + E_3 dx_3^2$$

(т. е. система координат триортгональная).

Задача 12. Найти E_1, E_2, E_3 для декартовых координат x, y, z , цилиндрических координат r, φ, z и сферических координат R, φ, θ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 (рис. 144).

Ответ.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = dR^2 + R^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2.$$

Обозначим через e_1, e_2, e_3 орты координатных направлений. Эти три вектора образуют базис в касательном пространстве.

Задача 13. Найти значения форм dx_1, dx_2, dx_3 на векторах e_1, e_2, e_3 .

Ответ. $dx_i(e_i) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}$, остальные 0. В частности, в декартовой системе

$dx(e_x) = dy(e_y) = dz(e_z) = 1$; в цилиндрической $dr(e_r) = dz(e_z) = 1, d\varphi(e_\varphi) = 1/r$ (рис. 145); в сферической $dR(e_R) = 1, d\varphi(e_\varphi) = \frac{1}{R \cos \theta}, d\theta(e_\theta) = \frac{1}{R}$.

Метрика и ориентация многообразия M снабжают касательное пространство к M в каждой точке структурой евклидова ориентиро-

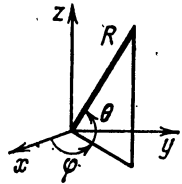


Рис. 144. К задаче 12.

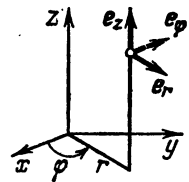


Рис. 145. К задаче 13.

ванного трехмерного пространства. В смысле этой структуры мы будем говорить о скалярных, векторных и смешанных произведениях.

Задача 14. Вычислить $[e_1, e_2]$, (e_R, e_θ) и (e_z, e_x, e_y) .

Ответ. $e_3, 0, 1$.

В ориентированном трехмерном евклидовом пространстве каждому вектору A соответствуют 1-форма ω_A^1 и 2-форма ω_A^2 , определяемые условиями

$$\omega_A^1(\xi) = (A, \xi), \quad \omega_A^2(\xi, \eta) = (A, \xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3.$$

Соответствие между векторными полями и формами не зависит от системы координат, но лишь от евклидовой структуры и ориентации. Поэтому каждому векторному полю A на нашем многообразии M соответствуют дифференциальная 1-форма ω_A^1 на M и дифференциальная 2-форма ω_A^2 на M .

Формулы перехода от полей к формам и обратно имеют в каждой системе координат свой специальный вид. Пусть в координатах x_1, x_2, x_3 , описанных выше, векторное поле имеет вид

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$

(компоненты A_i — гладкие функции на многообразии M). Соответствующая 1-форма ω_A^1 разлагается по базису dx_i , а соответствующая 2-форма ω_A^2 — по базису $dx_i \wedge dx_j$.

Задача 15. Зная компоненты векторного поля A , найти разложения 1-формы ω_A^1 и 2-формы ω_A^2 .

Решение. Имеем $\omega_A^1(e_1) = (A, e_1) = A_1$. В то же время $(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3)(e_1) = a_1 dx_1(e_1) = a_1 / \sqrt{E_1}$. Отсюда находим $a_1 = A_1 \sqrt{E_1}$, так что

$$\omega_A^1 = A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3.$$

Точно так же имеем $\omega_A^1(e_2, e_3) = (A, e_2, e_3) = A_1$. В то же время

$$(\alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 dx_1 \wedge dx_2)(e_2, e_3) = \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}}.$$

Отсюда $\alpha_1 = A_1 \sqrt{E_2 E_3}$, т. е.

$$\omega_A^2 = A_1 \sqrt{E_2 E_3} dx_2 \wedge dx_3 + A_2 \sqrt{E_3 E_1} dx_3 \wedge dx_1 + A_3 \sqrt{E_1 E_2} dx_1 \wedge dx_2.$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в \mathbb{R}^3 векторному полю

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z = A_r e_r + A_\varphi e_\varphi + A_z e_z = A_R e_R + A_\varphi e_\varphi + A_\theta e_\theta$$

отвечает 1-форма

$$\begin{aligned} \omega_A^1 &= A_x dx + A_y dy + A_z dz = A_r dr + r A_\varphi d\varphi + A_z dz = \\ &= A_R dR + R \cos \theta A_\varphi d\varphi + R A_\theta d\theta \end{aligned}$$

и 2-форма

$$\begin{aligned} \omega_A^2 &= A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy = \\ &= r A_r d\varphi \wedge dz + A_\varphi dz \wedge dr + r A_z dr \wedge d\varphi = \\ &= R^2 \cos \theta A_R d\varphi \wedge d\theta + R A_\varphi d\theta \wedge dR + R \cos \theta A_z dR \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Примером векторного поля на многообразии M является градиент функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Напомним, что градиентом функции называется векторное поле $\text{grad } f$, соответствующее дифференциалу:

$$\omega_{\text{grad } f} = df, \text{ т. е. } df(\xi) = (\text{grad } f, \xi), \forall \xi.$$

Задача 16. Найти компоненты градиента функции в базисе e_1, e_2, e_3 .

Решение. Имеем $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$. Согласно предыдущей задаче

$$\text{grad } f = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3.$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y + \frac{\partial f}{\partial z} e_z = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} e_z = \\ &= \frac{\partial f}{\partial R} e_R + \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta. \end{aligned}$$

§ 35. Интегрирование дифференциальных форм

Здесь определены понятия цепи, границы цепи и интеграла формы по цепи.

Интеграл дифференциальной формы есть многомерное обобщение таких понятий, как поток жидкости через поверхность или работа силы на пути.

А. Интеграл 1-формы по пути. Начнем с интегрирования 1-формы ω^1 на многообразии M . Пусть $\gamma: [0 \leq t \leq 1] \rightarrow M$ — гладкое отображение («путь интегрирования»). Интеграл формы ω^1 на пути γ определяется как предел интегральных сумм. Каждая интегральная сумма составляется из значений формы ω^1 на касательных векторах ξ_i (рис. 146):

$$\int_\gamma \omega^1 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega^1(\xi_i).$$

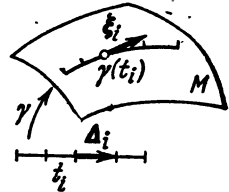


Рис. 146. Интегрирование 1-формы по пути.

Касательные вектора ξ_i строятся следующим образом. Отрезок $0 \leq t \leq 1$ точками t_i делится на части $\Delta_i: t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Отрезок Δ_i можно рассматривать как касательный вектор Δ_i к оси t в точке t_i . Его образ в касательном пространстве к M в точке $\gamma(t_i)$ и есть

$$\xi_t = d\gamma|_{t_i}(\Delta_i) \in TM_{\gamma(t_i)}.$$

При стремлении наибольшего из отрезков Δ_i к нулю интегральные суммы имеют предел. Он и называется интегралом 1-формы ω^1 по пути γ .

Замысел определения интеграла k -формы по k -мерной поверхности аналогичен. Поверхность интегрирования разбивается на

малые криволинейные k -мерные параллелепипеды (рис. 147); эти параллелепипеды заменяются параллелепипедами в касательном пространстве, сумма значений формы на параллелепипедах касательного пространства стремится к интегралу при измельчении разбиения. Рассмотрим вначале частный случай.

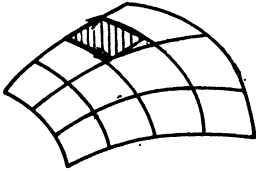


Рис. 147. Интегрирование 2-формы по поверхности.

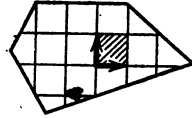


Рис. 148. Интегрирование k -формы в k -мерном пространстве.

Б. Интеграл k -формы в k -мерном ориентированном евклидовом пространстве \mathbb{R}^k . Пусть x_1, \dots, x_k — ориентирующая система координат в \mathbb{R}^k . Тогда всякая k -форма в \mathbb{R}^k пропорциональна форме $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, т. е. имеет вид $\omega^k = \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, где $\varphi(x)$ — гладкая функция.

Пусть D — выпуклый ограниченный многогранник в \mathbb{R}^k (рис. 148). По определению, интегралом формы ω^k по D называется интеграл функции φ :

$$\int_D \omega^k = \int_D \varphi(x) dx_1, \dots, dx_k,$$

где интеграл справа понимается как предел обычных римановых интегральных сумм.

Такое определение является реализацией намеченного выше замысла, так как в рассматриваемом случае касательное пространство к многообразию отождествляется с многообразием.

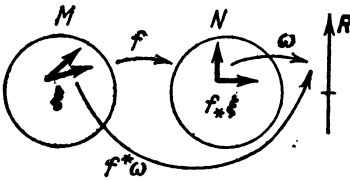


Рис. 149. Форма на N индуцирует форму на M .

Задача 1. Докажите, что $\int_D \omega^k$ зависит от ω^k линейно.

Задача 2. Докажите, что если разбить D на два выпуклых многогранника, D_1 и D_2 , то $\int_D \omega^k = \int_{D_1} \omega^k + \int_{D_2} \omega^k$.

В общем случае (k -форма в n -мерном пространстве) отождествить элементы разбиения с касательными параллелепипедами не так просто; ниже мы сведем этот случай к рассмотренному.

В. Поведение дифференциальных форм при отображениях. Пусть $f: M \rightarrow N$ — дифференцируемое отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N и ω — дифференциальная k -форма на N (рис. 149).

Тогда на M также возникает определенная k -форма; она обозначается через $f^*\omega$ и определяется соотношением

$$(f^*\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(f_*\xi_1, \dots, f_*\xi_k)$$

при любых касательных векторах $\xi_1, \dots, \xi_k \in TM_x$. Здесь f_* есть дифференциал отображения f .

Иными словами, значение формы $f^*\omega$ на векторах ξ_1, \dots, ξ_k равно значению формы ω на образах этих векторов.

Пример. Если $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ и $\omega = dy$, то

$$f^*\omega = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2.$$

Задача 3. Докажите, что $f^*\omega$ есть k -форма на M .

Задача 4. Докажите, что отображение f^* сохраняет операции над формами:

$$f^*(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1f^*(\omega_1) + \lambda_2f^*(\omega_2),$$

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2).$$

Задача 5. Пусть $g: L \rightarrow M$ — дифференцируемое отображение. Докажите, что $(fg)^* = g^*f^*$.

Задача 6. Пусть D_1 и D_2 — два компактных выпуклых многогранника в ориентированном k -мерном пространстве \mathbb{R}^k и $f: D_1 \rightarrow D_2$ — дифференцируемое отображение, осуществляющее диффеоморфное *, сохраняющее ориентацию отображение внутренности D_1 на внутренность D_2 . Тогда для любой дифференциальной k -формы ω^k в D_2

$$\int_{D_1} f^*\omega^k = \int_{D_2} \omega^k.$$

Указание. Это — теорема о замене переменной в кратном интеграле:

$$\int_{D_1} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \varphi(y(x)) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_{D_2} \varphi(y) dy_1 \dots dy_n.$$

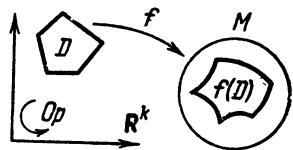


Рис. 150. Сингулярный k -мерный полиэдр

Г. Интегрирование k -формы на n -мерном многообразии. Пусть ω — дифференциальная k -форма на n -мерном многообразии M .

Пусть D — ограниченный выпуклый k -мерный многогранник в k -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^k (рис. 150).

Роль «пути интегрирования» будет играть k -мерный кусок **) σ в M , представляющий собой тройку $\sigma = (D, f, Op)$, состоящую из

- 1) выпуклого многогранника $D \subset \mathbb{R}^k$,
- 2) дифференцируемого отображения

$$f: D \rightarrow M,$$

- 3) ориентации \mathbb{R}^k , обозначаемой Op .

*) То есть взаимно-однозначное и взаимно-дифференцируемое.

**) Кусок σ называют обычно *сингулярным k -мерным полиэдром*.

Определение. Интегралом k -формы ω по k -мерному куску σ называется интеграл соответствующей формы по многограннику

$$\int_{\sigma} \omega = \int_D f^* \omega.$$

Задача 7. Докажите, что интеграл зависит от формы линейно:

$$\int_{\sigma} \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 = \lambda_1 \int_{\sigma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\sigma} \omega_2$$

k -мерный кусок, отличающийся от σ лишь выбором ориентации $O\sigma$, называется *противоположным* σ и обозначается $-\sigma$ или $-1 \cdot \sigma$ (рис. 151).



Задача 8. Докажите, что при изменении ориентации интеграл меняет знак:

$$\int_{-\sigma} \omega = - \int_{\sigma} \omega.$$

Рис. 151. К задаче 8.

Д. Цепи. Множество $f(D)$ не обязательно является гладким подмногообразием M . Оно может иметь «самопересечения», любые «складки» и вырождаться даже в точку. Однако уже в одномерном случае ясно, что неудобно ограничиваться контурами интегрирования, состоящими из одного куска: полезны также контуры, составленные из нескольких кусков, которые могут проходиться в ту или иную сторону по несколько раз. Аналогичное понятие в многомерном случае называется *цепью*.

Определение. *Цепь размерности k на многообразии M* состоит из конечного набора k -мерных ориентированных кусков $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ в M и целых чисел m_1, \dots, m_r , называемых *кратностями* (кратности могут быть положительными, отрицательными или нулями). Цепь обозначается

$$c_k = m_1 \sigma_1 + \dots + m_r \sigma_r.$$

При этом вводятся естественные отождествления

$$m_1 \sigma + m_2 \sigma = (m_1 + m_2) \sigma,$$

$$m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 = m_2 \sigma_2 + m_1 \sigma_1, \quad 0\sigma = 0, \quad c_k + 0 = c_k.$$

Задача 9. Докажите, что множество всех k -мерных цепей в многообразии M становится коммутативной группой, если определить сложение цепей формулой

$$\begin{aligned} (m_1 \sigma_1 + \dots + m_r \sigma_r) + (m'_1 \sigma'_1 + \dots + m'_r \sigma'_r) = \\ = m_1 \sigma_1 + \dots + m_r \sigma_r + m'_1 \sigma'_1 + \dots + m'_r \sigma'_r. \end{aligned}$$

Е. Пример: граница многогранника. Пусть D — ориентированный, выпуклый k -мерный многогранник в k -мерном евклидовом

пространстве \mathbf{R}^k . *Границей* D называется $k-1$ -мерная цепь ∂D в \mathbf{R}^k , определенная следующим образом (рис. 152).

Кусками σ_i цепи ∂D являются $k-1$ -мерные грани D_i многогранника D вместе с отображениями $f_i: D_i \rightarrow \mathbf{R}^k$ вложения граней в \mathbf{R}^k и ориентациями Op_i , определенными ниже; кратности же равны 1:

$$\partial D = \sum \sigma_i, \quad \sigma_i = (D_i, f_i, \text{Op}_i).$$

Правило ориентации граней. Пусть e_1, \dots, e_k — ориентирующий репер \mathbf{R}^k . Пусть D_i — одна из граней D . Выберем внутреннюю точку D_i и построим в ней вектор n внешней нормали к многограннику D . *Ориентирующим грань D_i репером* будет такой репер f_1, \dots, f_{k-1} , в D_i , для которого репер (n, f_1, \dots, f_{k-1}) ориентирован *правильно* (т. е. как репер e_1, \dots, e_k).

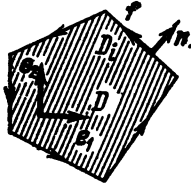


Рис. 152. Ориентация грани.



Рис. 153. Граница цепи.

Граница цепи определяется аналогичным образом. Пусть $\sigma = (D, f, \text{Op})$ — k -мерный кусок в многообразии M . Его границей $\partial\sigma$ называется $k-1$ -цепь: $\partial\sigma = \sum \sigma_i$, составленная из кусков $\sigma_i = (D_i, f_i, \text{Op}_i)$, где D_i — $k-1$ -мерные грани D , Op_i — ориентации, выбранные согласно приведенному выше правилу, f_i — ограничение отображения $f: D \rightarrow M$ на грань D_i .

Границей ∂c_k k -мерной цепи c_k в M называется сумма границ кусков цепи c_k с кратностями (рис. 153):

$$\partial c_k = \partial (m_1 \sigma_1 + \dots + m_r \sigma_r) = m_1 \partial \sigma_1 + \dots + m_r \partial \sigma_r.$$

Очевидно, ∂c_k есть $k-1$ -цепь на M .*

Задача 10. Доказать, что граница границы любой цепи равна нулю: $\partial \partial c_k = 0$.

Указание. Ввиду линейности ∂ достаточно доказать $\partial \partial D = 0$ для выпуклого многогранника D . Остается проверить, что каждая $k-2$ -мерная грань D входит в цепь $\partial \partial D$ дважды с разными знаками. Это достаточно проверить для $k=2$ (плоские сечения).

*) Мы считаем здесь $k > 1$. Одномерные цепи включаются в общую схему, если принять следующие определения: нульмерная цепь состоит из набора точек с кратностями; граница ориентированного отрезка \overline{AB} есть $B - A$ (точка B с кратностью 1, A с кратностью -1); граница точки пуста.

Ж. Интеграл формы по цепи. Пусть теперь ω^k есть k -форма на многообразии M , а c_k — k -цепь на M , $c_k = \sum m_i \sigma_i$. Интегралом формы ω^k по цепи c_k называется сумма интегралов по кускам с учетом кратностей

$$\int_{c_k} \omega^k = \sum m_i \int_{\sigma_i} \omega^k.$$

Задача 11. Докажите, что интеграл линейно зависит от формы:

$$\int_{c_k} \omega_1^k + \omega_2^k = \int_{c_k} \omega_1^k + \int_{c_k} \omega_2^k.$$

Задача 12. Докажите, что интегрирование фиксированной формы ω^k по цепям c_k определяет гомоморфизм группы цепей в прямую.

Пример 1. Пусть M есть плоскость $\{(p, q)\}$, форма ω^1 есть $p dq$, цепь c_1 состоит из одного куска σ_1 с кратностью 1:

$$[0 \leq t \leq 2\pi] \xrightarrow{f} (p = \cos t, \quad q = \sin t).$$

Тогда

$$\int_{c_1} p dq = \pi.$$

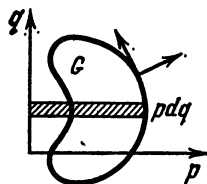


Рис. 154. Интеграл формы $p dq$ по границе области равен площади области.

Вообще, если цепь c_1 представляет границу области G (рис. 154), то $\int_{c_1} p dq$ равен площади G со знаком +

или — в зависимости от того, ориентирована ли пара векторов (внешняя нормаль, ориентирующий вектор границы) так же, как базисная пара (орт p , орт q), или наоборот.

Пример 2. Пусть M есть ориентированное трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Тогда каждая 1-форма в M соответствует некоторому векторному полю A ($\omega^1 = \omega_A^1$), где

$$\omega_A^1(\xi) = (A, \xi).$$

Интеграл формы ω_A^1 по цепи c_1 , представляющей ориентированную кривую l , называется циркуляцией поля A по кривой l :

$$\int_{c_1} \omega_A^1 = \int_l (A, dt).$$

Каждая 2-форма в M также соответствует некоторому полю A ($\omega^2 = \omega_A^2$, где $\omega_A^2(\xi, \eta) = (A, \xi \wedge \eta)$).

Интеграл формы ω_A^2 по цепи c_2 , представляющей ориентированную поверхность S , называется потоком поля A через поверхность S :

$$\int_{c_2} \omega_A^2 = \int_S (A, dn).$$

Задача 13. Найти поток поля $A = \frac{1}{R^2} e_R$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ориентированную векторами e_x, e_y в точке $z = 1$. Найти поток того же поля через поверхность эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2 = 1$, ориентированную так же.

Указание. См. стр. 169.

Задача 14. Пусть в $2n$ -мерном пространстве $R^{2n} = \{(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)\}$ дана 2-цепь c_2 , представляющая ориентированную двумерную поверхность S с краем l . Найти

$$\int_{c_2} dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n \text{ и } \int p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n.$$

Ответ. Сумма ориентированных площадей проекций S на координатные двумерные плоскости p_i, q_i .

§ 36. Внешнее дифференцирование

Здесь определяется внешнее дифференцирование k -форм и доказывается формула Стокса: интеграл производной формы по цепи равен интегралу самой формы по границе этой цепи.

А. Пример: дивергенция векторного поля. Внешняя производная k -формы ω на многообразии M есть $k+1$ -форма $d\omega$ на том же многообразии. Переход от формы к ее внешней производной аналогичен образованию дифференциала функции или дивергенции векторного поля. Напомню определение дивергенции.

Пусть A — векторное поле в евклидовом ориентированном трехмерном пространстве R^3 и S — граница параллелепипеда Π с ребрами ξ_1, ξ_2, ξ_3 при вершине x : $S = \partial\Pi$ (рис. 155). Рассмотрим поток поля A через поверхность S («наружу»):

$$F(\Pi) = \int_S (A, dn).$$

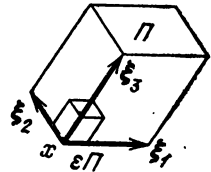


Рис. 155 К определению дивергенции векторного поля.

Если параллелепипед Π очень мал, то поток F приблизительно пропорционален произведению объема параллелепипеда, $V = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, на «плотность источников» в точке x . Иными словами, существует предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\epsilon\Pi)}{\epsilon^3 V},$$

где $\epsilon\Pi$ — параллелепипед с ребрами $\epsilon\xi_1, \epsilon\xi_2, \epsilon\xi_3$. Этот предел не зависит от выбора параллелепипеда Π , но лишь от точки x , и называется *дивергенцией* поля A в x , $\text{div } A$.

Чтобы перейти к многомерному случаю, заметим, что «поток A через элемент поверхности» есть 2-форма, которую мы обозначили ω_A^2 . Дивергенция же есть плотность в выражении 3-формы

$$\omega^3 = \text{div } A \, dx \wedge dy \wedge dz, \\ \omega^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{div } A \cdot V(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

характеризующей «источники в элементарном параллелепипеде».

Внешняя производная $d\omega^k$ k -формы ω^k на n -мерном многообразии M определяется как главная полилинейная часть интеграла ω^k по границе $k+1$ -мерного параллелепипеда.

Б. Определение внешней производной. Определим значение формы $d\omega$ на $k+1$ векторе ξ_1, \dots, ξ_{k+1} , касающемся M в x . Рассмотрим для этого какую-нибудь систему координат в окрестности точки x на M , т. е. диффеоморфное отображение f окрестности точки 0 в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n на окрестность точки x в M (рис. 156).

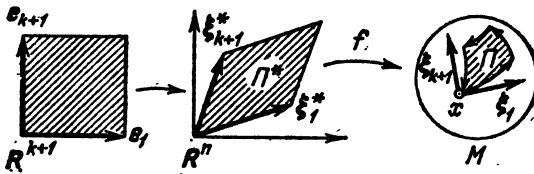


Рис. 156. Криволинейный параллелепипед Π .

Прообразы векторов $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in TM_x$ при дифференциале f лежат в касательном пространстве к \mathbb{R}^n в 0 . Это касательное пространство естественно отождествляется с \mathbb{R}^n , поэтому можно считать прообразы векторами

$$\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^* \in \mathbb{R}^n.$$

Натянем на эти векторы в \mathbb{R}^n параллелепипед Π^* (строго говоря, надо рассмотреть стандартный ориентированный куб в \mathbb{R}^{k+1} и его линейное отображение на Π^* , переводящее ребра e_1, \dots, e_{k+1} в $\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^*$, как $k+1$ -мерный кусок в \mathbb{R}^n).

Отображение f переводит параллелепипед Π в $k+1$ -мерный кусок Π на M («криволинейный параллелепипед»). Граница куска Π есть k -мерная цепь, $\partial\Pi$. Рассмотрим интеграл формы ω^k по границе $\partial\Pi$ параллелепипеда Π :

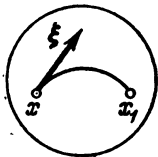


Рис. 157. Интеграл по границе одномерного параллелепипеда — это приращение функции.

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \int_{\partial\Pi} \omega^k.$$

Пример. Будем называть 0-формой на M гладкую функцию $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$. Интегралом 0-формы φ по 0-цепи $c_0 = \sum m_i A_i$ (где m_i — целые, A_i — точки M) назовем

$$\int_{c_0} \varphi = \sum m_i \varphi(A_i).$$

Тогда предыдущее определение дает «приращение» $F(\xi_1) = \varphi(x_1) - \varphi(x)$ (рис. 157) функции φ , а главная линейная часть $F(\xi_1)$ в 0 есть просто дифференциал функции φ .

Задача 1. Докажите, что функция $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$ кососимметрична по ξ .

Оказывается, главная $k+1$ -линейная часть «приращения» $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$ есть внешняя $k+1$ -форма на касательном пространстве TM_x к M в x . Эта форма не зависит от системы координат, с помощью которой определялся криволинейный параллелепипед Π . Она называется *внешней производной* формы ω^k (в точке x) и обозначается $d\omega^k$.

В. Теорема о внешней производной.

Теорема. На TM_x существует и единственна $k+1$ -форма Ω , которая является главной $k+1$ -линейной частью в 0 интеграла по границе криволинейного параллелепипеда $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$: т. е.

$$F(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1}) = \varepsilon^{k+1} \Omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + o(\varepsilon^{k+1}) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (1)$$

Форма Ω не зависит от выбора системы координат, участвующей в определении F .

Если в локальной системе координат x_1, \dots, x_n на M форма ω^k записывается в виде

$$\omega^k = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

то форма Ω записывается в виде

$$\Omega = d\omega^k = \sum da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы я приведу для случая формы $\omega^1 = a(x_1, x_2) dx_1$ на плоскости x_1, x_2 . В общем случае доказательство совершенно аналогичное, но выкладки несколько длиннее.

Считаем значение F , т. е. интеграл ω^1 по границе параллелограмма Π со сторонами ξ , η и вершиной в 0 (рис. 158). Цепь $\partial\Pi$ задается отображениями отрезка $0 \leq t \leq 1$ на плоскость $t \rightarrow \xi t$, $t \rightarrow \xi + \eta t$, $t \rightarrow \eta t$, $t \rightarrow \eta + \xi t$ с кратностями 1, 1, -1 , -1 . Поэтому

$$\int_{\partial\Pi} \omega^1 = \int_0^1 [a(\xi t) - a(\xi t + \eta)] \xi_1 - [a(\eta t) - a(\eta t + \xi)] \eta_1 dt,$$

где $\xi_1 = dx_1(\xi)$, $\eta_1 = dx_1(\eta)$, $\xi_2 = dx_2(\xi)$, $\eta_2 = dx_2(\eta)$ — компоненты векторов ξ , η . Но

$$a(\xi t + \eta) - a(\xi t) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \eta_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \eta_2 + O(\xi^2, \eta^2)$$

(производные берутся при $x_1 = x_2 = 0$). Точно так же

$$a(\eta t + \xi) - a(\eta t) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \xi_2 + O(\xi^2, \eta^2).$$

Подставляя эти выражения в интеграл, находим

$$F(\xi, \eta) = \int_{\partial\Pi} \omega^1 = \frac{\partial a}{\partial x_2} (\xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2) + o(\xi^2, \eta^2).$$

Главная билинейная часть F , как обещано в (1), оказалась значением внешней 2-формы

$$\Omega = \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1$$

на паре векторов ξ, η . При этом полученная форма дается формулой (2), ибо

$$da \wedge dx_1 = \frac{\partial a}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 = \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1.$$

Наконец, если систему координат x_1, x_2 заменить другой

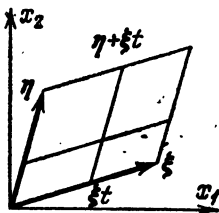


Рис. 158. К теореме о внешней производной.

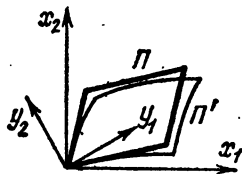


Рис. 159. Независимость внешней производной от системы координат.

(рис. 159), то параллелограмм Π заменится близким криволинейным параллелограммом Π' , так что разница значений интегралов $\int_{\Pi} \omega^1 - \int_{\Pi'} \omega^1$ будет малой выше второго порядка (проверьте!), ч. т. д.

Задача 2. Провести доказательство теоремы в общем случае.

Задача 3. Доказать формулы дифференцирования суммы и произведения

$$\begin{aligned} d(\omega^k \wedge \omega^l) &= d\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l, \\ d(\omega_1 + \omega_2) &= d\omega_1 + d\omega_2. \end{aligned}$$

Задача 4. Доказать, что дифференциал дифференциала равен нулю: $dd=0$.

Задача 5. Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, ω — k -форма на N . Докажите, что $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Г. Формула Стокса. Одним из важнейших следствий теоремы о внешней производной является формула Ньютона — Лейбница — Гаусса — Грина — Остроградского — Стокса — Пуанкаре:

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega, \quad (3)$$

где c — любая $k+1$ -цепь на многообразии M , а ω — любая k -форма на многообразии M .

Доказательство этой формулы достаточно провести для случая, когда цепь состоит из одного куска σ . Предположим сна-

чала, что этот кусок σ задается ориентированным параллелепипедом $\Pi \subset \mathbb{R}^{k+1}$ (рис. 160).

Разобьем Π на N^{k+1} малых равных параллелепипедов Π_i , подобных Π . Тогда, очевидно,

$$\int_{\partial \Pi} \omega = \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i, \text{ где } F_i = \int_{\partial \Pi_i} \omega.$$

По формуле (1) имеем

$$F_i = d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i) + o(N^{-(k+1)}),$$

где $\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i$ — ребра Π_i . Но $\sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i)$

есть интегральная сумма для $\int_{\Pi} d\omega$. Легко проверить, что $o(N^{-(k+1)})$ — равномерное, поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i) = \int_{\Pi} d\omega.$$

Окончательно находим

$$\int_{\partial \Pi} \omega = \sum F_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum F_i = \int_{\Pi} d\omega.$$

Отсюда автоматически следует формула (3) для любой цепи, многогранники которой — параллелепипеды.

Чтобы доказать формулу (3) для любого выпуклого многогранника D , достаточно доказать ее для симплекса $*$), так как D всегда можно разбить на симплексы (рис. 161):

$$D = \sum D_i, \quad \partial D = \sum \partial D_i.$$

Докажем формулу (3) для симплекса. Заметим, что k -мерный ориентированный куб можно дифференцируемо отобразить на k -мерный ориентированный симплекс так, что:

1) внутренность куба диффеоморфно и с сохранением ориентации переходит во внутренность симплекса;

*) Двумерный симплекс есть треугольник, трехмерный — тетраэдр, k -мерный — выпуклая оболочка $k+1$ точки в \mathbb{R}^n , не лежащей в $k-1$ -мерной плоскости.

Пример. $\left\{ x \in \mathbb{R}^k : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i \leq 1 \right\}$.

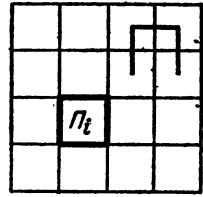


Рис. 160. Доказательство формулы Стокса для параллелепипеда.

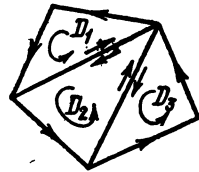


Рис. 161. Разбиение выпуклого многогранника на симплексы.

2) внутренности некоторых $k-1$ -мерных граней куба диффеоморфно и с сохранением ориентации переходят во внутренности граней симплекса; образы остальных $k-1$ -мерных граней куба лежат в $k-2$ -мерных гранях симплекса.

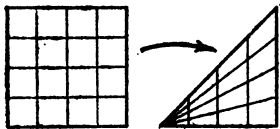


Рис. 162. Доказательство формулы Стокса для симплекса.

Например, для $k=2$ такое отображение куба $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ на треугольник дается формулами $y_1 = x_1, y_2 = x_1 x_2$ (рис. 162). Теперь формула (3) для симплекса вытекает из доказанной формулы (3) для куба и теоремы о замене переменной (см. стр. 155).

Пример 1. Рассмотрим в R^{2n} с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ 1-форму

$$\omega^1 = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n = p dq.$$

Тогда $d\omega^1 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n = dp \wedge dq$, поэтому

$$\iint_{c_2} dp \wedge dq = \int_{\partial c_2} p dq.$$

В частности, если c_2 — замкнутая поверхность ($\partial c_2 = 0$), то $\iint_{c_2} dp \wedge dq = 0$.

Д. Пример 2. Векторный анализ. В трехмерном ориентированном римановом пространстве M всякому векторному полю A соответствует 1-форма ω_A^1 и 2-форма ω_A^2 . Поэтому внешнее дифференцирование можно рассматривать как векторную операцию.

Внешнему дифференцированию 0-форм (функций), 1-форм и 2-форм отвечают операции градиента, ротора и дивергенции, определенные соотношениями

$$df = \omega_{\text{grad } f}^1, \quad d\omega_A^1 = \omega_{\text{rot } A}^2, \quad \partial\omega_A^2 = \text{div } A \omega^3$$

(форма ω^3 — элемент объема на M). Итак, из (3) вытекает

$$f(y) - f(x) = \int_l \text{grad } f \cdot dl, \quad \text{если } \partial l = y - x,$$

$$\int_l A dl = \iint_S \text{rot } A \cdot dn, \quad \text{если } \partial D = S.$$

$$\iint_S A dn = \iiint_D \text{div } A \omega^3, \quad \text{если } \partial D = S.$$

Задача 5. Докажите, что

$$\begin{aligned}\operatorname{div} [A, B] &= (\operatorname{rot} A, B) - (\operatorname{rot} B, A), \\ \operatorname{rot} aA &= [\operatorname{grad} a, A] + a \operatorname{rot} A, \\ \operatorname{div} aA &= (\operatorname{grad} a, A) + a \operatorname{div} A.\end{aligned}$$

Указание. По формуле дифференцирования произведения форм

$$d(\omega^2_{[A, B]}) = d(\omega^1_A \wedge \omega^1_B) = d\omega^1_A \wedge \omega^1_B - \omega^1_A \wedge d\omega^1_B.$$

Задача 6. Докажите, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$.

Указание. $dd = 0$.

Е. Добавление 1. Векторные операции в триортогональной системе. Пусть x_1, x_2, x_3 — триортогональная система координат в M , $ds^2 = E_1 dx_1^2 + E_2 dx_2^2 + E_3 dx_3^2$ и e_i — координатные орты (см. стр. 151).

Задача 8. Зная компоненты векторного поля $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$, найти компоненты его ротора.

Решение. Согласно стр. 152,

$$\omega^1_A = A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3.$$

Поэтому

$$d\omega^1_A = \left(\frac{\partial A_3 \sqrt{E_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2 \sqrt{E_2}}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \dots = \omega^2_{\operatorname{rot} A}.$$

По стр. 152 находим

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} A &= \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}} \left(\frac{\partial A_3 \sqrt{E_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2 \sqrt{E_2}}{\partial x_3} \right) e_1 + \dots = \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \begin{vmatrix} \sqrt{E_1} e_1 & \sqrt{E_2} e_2 & \sqrt{E_3} e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 \sqrt{E_1} & A_2 \sqrt{E_2} & A_3 \sqrt{E_3} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в R^3 :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} A &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) e_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) e_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) e_z = \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial r A_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) e_z = \\ &= \frac{1}{R \cos \theta} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi \cos \theta}{\partial \theta} \right) e_R + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial R A_\theta}{\partial R} \right) e_\varphi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R A_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right) e_\theta.\end{aligned}$$

Задача 9. Найти дивергенцию поля $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$.

Решение. $\omega^3_A = A_1 \sqrt{E_2 E_3} dx_2 \wedge dx_3 + \dots$. Следовательно,

$$d\omega^3_A = \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 \sqrt{E_2 E_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \dots$$

По определению дивергенции,

$$d\omega^3_A = \operatorname{div} A \sqrt{E_1 E_2 E_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Значит,

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} A_1 \sqrt{E_2 E_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 \sqrt{E_3 E_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} A_3 \sqrt{E_1 E_2} \right).$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{R^2 \cos \theta} \left(\frac{\partial R^2 \cos \theta A_R}{\partial R} + \frac{\partial R A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R \cos \theta A_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Задача 10. Оператором Лапласа на M называется оператор $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. Найти его выражение в координатах x_i .

Ответ.

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\frac{E_2 E_3}{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \dots \right].$$

В частности, в \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{R^2 \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \cos \theta \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ж. Добавление 2. Замкнутые формы и циклы. Поток несжимаемой жидкости (без источников) через край области D равен нулю. Сформулируем многомерный аналог этого очевидного предложения.

Многомерный аналог потока без источников называется *замкнутой формой*.

Поле A не имеет источников, если $\operatorname{div} A = 0$.

Определение. Дифференциальная форма ω на многообразии M *замкнута*, если ее внешняя производная равна нулю: $d\omega = 0$.

В частности, 2-форма ω_A^* , отвечающая полю без источников A , замкнута. Из формулы Стокса (3) сразу следует

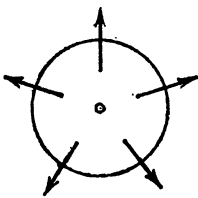


Рис. 163. Поле A .

Теорема. Интеграл замкнутой формы ω^k по границе любой $k+1$ -мерной цепи c_{k+1} равен нулю:

$$\int_{\partial c_{k+1}} \omega^k = 0, \text{ если } d\omega^k = 0.$$

Задача 11. Докажите, что дифференциал формы всегда замкнут.

С другой стороны, существуют замкнутые формы, не являющиеся дифференциалами.

Например, рассмотрим в качестве многообразия M трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 без точки O : $M = \mathbb{R}^3 - O$, а в качестве 2-формы — поток поля $A = \frac{1}{R^2} e_R$ (рис. 163). Легко убедиться, что $\operatorname{div} A = 0$, так что наша 2-форма ω_A^* замкнута. В то же время

поток через любую сферу с центром в O равен 4π . Покажем, что интеграл дифференциала формы по сфере должен равняться нулю.

Определение. Циклом на многообразии M называется цепь, граница которой равна нулю.

Ориентированную поверхность нашей сферы можно рассматривать как цикл. Из формулы Стокса (3) сразу следует

Теорема. Интеграл дифференциала по любому циклу равен нулю:

$$\int_{c_{k+1}} d\omega^k = 0, \text{ если } \partial c_{k+1} = 0.$$

Итак, наша 2-форма ω^2 не есть дифференциал никакой 1-формы. Существование на многообразии M замкнутых форм, не являющихся дифференциалами, связано с топологическими свойствами M . Можно показать, что в линейном пространстве всякая замкнутая k -форма есть дифференциал некоторой $k+1$ -формы («лемма Пуанкаре»).

Задача 12. Докажите лемму Пуанкаре для 1-форм.

Указание. Рассмотрите $\int_{x_0}^{x_1} \omega^1 = \varphi(x_1)$.

Задача 13. Докажите, что в линейном пространстве интеграл замкнутой формы по любому циклу равен нулю.

Указание. Построить $k+1$ -цепь, границей которой является данный цикл (рис. 164).

А именно, для любой цепи c рассмотрите «конус над c с вершиной O ». Если обозначить операцию построения конуса через p , то

$$\partial \cdot p + p \cdot \partial = 1 \quad (\text{тождественное преобразование}).$$

Поэтому, если цепь c замкнута, то $\partial(p \cdot c) = c$.

Задача. Докажите, что в линейном пространстве всякая замкнутая форма является полным дифференциалом.

Указание. Воспользоваться конической конструкцией. Пусть ω^k — дифференциальная k -форма в \mathbb{R}^n . Определим дифференциальную $k-1$ -форму («конус над ω ») $p\omega^k$ следующим образом: для любой цепи c_{k-1}

$$\int_{c_{k-1}} p\omega^k = \int_{p c_k} \omega^k.$$

Легко проверить, что $k-1$ форма $p\omega^k$ существует и единственна; ее значение на векторах ξ_1, \dots, ξ_{k-1} , касательных к \mathbb{R}^n в x , равно

$$(p\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \int_0^1 \omega_{t \cdot x}(x, t\xi_1, \dots, t\xi_{k-1}) dt.$$

Легко проверить, что

$$d \cdot p + p \cdot d = 1 \quad (\text{тождественное преобразование}).$$

Поэтому, если форма ω^k замкнута, то $d(p\omega^k) = \omega^k$.

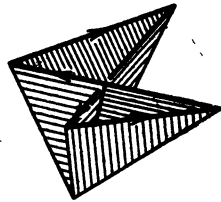


Рис. 164. Конус над циклом.

Задача. Пусть X — векторное поле на M , а ω — дифференциальная k -форма. Определим дифференциальную $k-1$ -форму (так называемое *внутреннее произведение* X на ω) $i_X\omega$ соотношением

$$(i_X\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \omega(X, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}).$$

Докажите формулу гомотопии

$$i_X d + di_X = L_X,$$

где L_X — оператор дифференцирования по направлению поля X .

[Действие оператора L_X на формы определяется с помощью фазового потока $\{g^t\}$ поля X соотношением

$$(L_X\omega)(\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega(g_*^t \xi).$$

Оператор L_X называют *производной Ли* или *производной рыбака*: поток несет мимо рыбака всевозможные дифференциально-геометрические объекты, а рыбак сидит на месте и их дифференцирует.]

Указание. Обозначим через H «оператор гомотопии», сопоставляющий k -цепи $\gamma: \sigma \rightarrow M$ $k+1$ -цепь $H\gamma: (I \times \sigma) \rightarrow M$ по формуле $(H\gamma)(t, x) = g^t\gamma(x)$ (где $I = [0, 1]$). Тогда

$$g^1\gamma - \gamma = \partial(H\gamma) + H(\partial\gamma).$$

Задача. Докажите формулу дифференцирования векторного произведения в трехмерном евклидовом пространстве (или римановом многообразии):

$$\text{rot}[a, b] = [a, b] + a \text{ div } b - b \text{ div } a$$

(где $[a, b] = L_a b$ — скобка Пуассона векторных полей, см. § 39).

Указание. Если τ — элемент объема, то

$$i_{\text{rot}[a, b]}\tau = dt_a i_b \tau, \text{ div } a = dt_a \tau, [a, b] = L_a b$$

пользуясь этими соотношениями и не забывая, что $d\tau = 0$, легко вывести формулу для $\text{rot}[a, b]$ из формулы гомотопии.

3. Добавление 3. Когомологии и гомологии. Все k -формы на M образуют линейное пространство, замкнутые k -формы — его подпространство, а дифференциалы $k+1$ -форм — подпространство пространства замкнутых форм. Фактор-пространство

$$(\text{замкнутые формы})/(\text{дифференциалы}) = H^k(M, \mathbf{R})$$

называется *k-мерной группой когомологий* многообразия M . Элементом этой группы является класс замкнутых форм, отличающихся друг от друга лишь на дифференциал.

Задача 14. Доказать, что для окружности S^1 имеем $H^1(S^1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Размерность пространства $H^k(M, \mathbf{R})$ называется *k-мерным числом Бетти* многообразия M .

Задача 15. Найти одномерное число Бетти тора $T^2 = S^1 \times S^1$.

Поток жидкости (без источников) через поверхности двух концентрических сфер одинаков. Вообще, при интегрировании

замкнутой формы по k -мерному циклу можно заменять цикл на другой при условии, что их разность есть граница $k+1$ -мерной цепи («пленки», рис. 165):

$$\int_a \omega^k = \int_b \omega^k,$$

если $a - b = \partial c_{k+1}$ и $d\omega^k = 0$.



Рис. 165. Гомологичные циклы.

Такие два цикла a, b Пуанкаре назвал *гомологичными*.

При надлежащем определении *) группы цепей на многообразии M и лежащих в ней подгрупп циклов и границ (т. е. циклов, гомологичных нулю), фактор-группа

$$(\text{циклы})/(\text{границы}) = H_k(M)$$

называется *k -мерной группой гомологий M* .

Элементом этой группы является класс гомологичных друг другу циклов.

Ранг этой группы также равен k -мерному числу Бетти многообразия M («теорема Де Рама»).

*) Нашу группу $\{c_k\}$ следует для этого уменьшить, отождествив между собой куски, отличающиеся лишь выбором параметризации f и выбором многогранников D . В частности, можно считать, что D — всегда один и тот же симплекс или куб. Далее, следует считать равным нулю всякий k -мерный кусок (D, f, Op) , если он вырожден, т. е. $f = f_2 \cdot f_1$, где $f_1: D \rightarrow D'$ и D' имеет меньше чем k измерений.

ГЛАВА 8

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Симплектическая структура на многообразии — это замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на нем. Фазовые пространства механических систем имеют естественные симплектические структуры.

На симплектическом многообразии, как и на римановом, имеется естественный изоморфизм между векторными полями и 1-формами. Векторное поле на симплектическом многообразии, соответствующее дифференциалу функции, называется гамильтоновым векторным полем. Векторное поле на многообразии задает фазовый поток: однопараметрическую группу диффеоморфизмов. Фазовый поток гамильтонова векторного поля на симплектическом многообразии сохраняет симплектическую структуру фазового пространства.

Векторные поля на многообразии образуют алгебру Ли. Гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии также образуют алгебру Ли. Операции в этих алгебрах называются скобками Пуассона.

§ 37. Симплектическая структура на многообразии

Здесь определены симплектические многообразия, гамильтоновы векторные поля на них и стандартная симплектическая структура в касательном расслоении.

А. Определение. Пусть M^{2n} — четномерное дифференцируемое многообразие.

Симплектической структурой на M^{2n} называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма ω^2 на M^{2n} :

$$d\omega^2 = 0, \quad \forall \xi \neq 0 \quad \exists \eta : \omega^2(\xi, \eta) \neq 0 \quad (\xi, \eta \in TM_x).$$

Пара (M^{2n}, ω^2) называется *симплектическим многообразием*.

Пример. Рассмотрим линейное пространство \mathbb{R}^{2n} с координатами p_i, q_i , и пусть $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Задача. Проверить, что $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2)$ — симплектическое многообразие.

При $n=1$ пара (\mathbb{R}^2, ω^2) есть пара (плоскость, площадь).

Следующий пример объясняет появление симплектических многообразий в динамике. Наряду с касательным расслоением дифференцируемого многообразия часто полезно рассматривать двойственное ему кокасательное.

Б. Кокасательное расслоение и его симплектическая структура. Пусть V — дифференцируемое n -мерное многообразие. 1-форма на касательном пространстве к V в точке x называется *кокасательным вектором* к V в точке x . Множество всех кокасательных к V в точке x векторов образует n -мерное линейное пространство, сопряженное к касательному пространству TV_x . Это линейное пространство кокасательных векторов обозначается через T^*V_x и называется *кокасательным пространством* к многообразию V в точке x .

Объединение кокасательных пространств к многообразию во всех его точках называется *кокасательным расслоением* V и обозначается через T^*V . Множество T^*V имеет естественную структуру дифференцируемого многообразия размерности $2n$. Точка из T^*V — это 1-форма на касательном пространстве к V в какой-либо точке из V . Если q — набор n локальных координат точки из V , то такая форма задается своими n компонентами p . Вместе $2n$ чисел p, q составляют набор локальных координат точки T^*V .

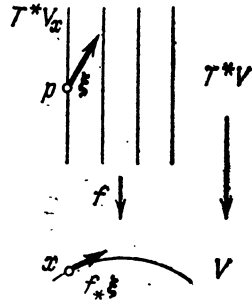


Рис. 166. 1-форма p dq на кокасательном расслоении.

Существует естественная проекция $f : T^*V \rightarrow V$ (сопоставляющая каждой 1-форме на TV_x точку x). Проекция f является дифференцируемым отображением на. Прообраз точки $x \in V$ при отображении f есть кокасательное пространство T^*V_x .

Теорема. *Кокасательное расслоение T^*V имеет естественную симплектическую структуру. В описанных выше локальных координатах эта структура задается формулой*

$$\omega^2 = dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Доказательство. Вначале мы определим на T^*V замечательную 1-форму. Пусть $\xi \in T(T^*V)_p$ — вектор, касательный к кокасательному расслоению в точке $p \in T^*V_x$ (рис. 166). Производная $f_* : T(T^*V) \rightarrow TV$ естественной проекции $f : T^*V \rightarrow V$ переводит ξ в вектор $f_*\xi$, касательный к V в точке x . Определим 1-форму ω^1 на T^*V соотношением $\omega^1(\xi) = p(f_*\xi)$. В описанных выше локальных координатах эта форма имеет вид $\omega^1 = p dq$. Согласно примеру пункта А замкнутая 2-форма $\omega^2 = d\omega^1$ не выродена.

Замечание. Рассмотрим лагранжеву механическую систему с конфигурационным многообразием V и функцией Лагранжа L . Легко сообразить, что лагранжева «обобщенная скорость» \dot{q} — касательный к конфигурационному

многообразию V вектор, а «обобщенный импульс» $p = \partial L / \partial \dot{q}$ — кокасательный. Поэтому фазовое « p, q »-пространство лагранжевой задачи — это кокасательное расслоение конфигурационного многообразия. Итак, предыдущая теорема показывает, что фазовое пространство механической задачи имеет естественную структуру симплектического многообразия.

З а д а ч а. Покажите, что преобразование Лежандра не зависит от системы координат: оно сопоставляет функции $L: TV \rightarrow \mathbb{R}$ на касательном расслоении функцию $H: T^*V \rightarrow \mathbb{R}$ на кокасательном.

В. Гамильтоны векторные поля. Риманова структура на многообразии устанавливает изоморфизм между пространствами касательных векторов и 1-форм. Симплектическая структура также устанавливает подобный изоморфизм.

О п р е д е л е н и е. Сопоставим вектору ξ , касательному к симплектическому многообразию (M^{2n}, ω^2) в точке x , 1-форму ω_x^ξ на TM_x по формуле

$$\omega_x^\xi(\eta) = \omega^2(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in TM_x.$$

З а д а ч а. Доказать, что соответствие $\xi \rightarrow \omega_x^\xi$ есть изоморфизм линейных $2n$ -мерных пространств векторов и 1-форм.

П р и м е р. В $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ будем отождествлять векторы и 1-формы в соответствии с евклидовой структурой $(x, x) = p^2 + q^2$. Тогда соответствие $\xi \rightarrow \omega_x^\xi$ задает преобразование $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

З а д а ч а. Вычислить матрицу этого преобразования в базисе p, q .

Отвечт.
$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать через I построенный выше изоморфизм $I: T^*M_x \rightarrow TM_x$.

Пусть теперь H — функция на симплектическом многообразии M^{2n} . Тогда dH есть дифференциальная 1-форма на M , и ей соответствует в каждой точке некоторый касательный к M вектор. Мы получаем таким образом на M векторное поле $I dH$.

О п р е д е л е н и е. Векторное поле $I dH$ называется *гамильтоновым векторным полем*, H — *функцией Гамильтона*.

П р и м е р. Если $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$, то мы получаем поле фазовой скорости канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = I dH(x) \Leftrightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

§ 38. Гамильтоны фазовые потоки и их интегральные инварианты

Теорема Лиувилля утверждает, что фазовый поток сохраняет объемы. Пуанкаре нашел целый ряд дифференциальных форм, сохраняемых гамильтоновым фазовым потоком.

А. Гамильтоны фазовые потоки сохраняют симплектическую структуру. Пусть (M^{2n}, ω^2) — симплектическое многообразие, $H: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция. Предположим, что соответствующее H гамильтоново векторное поле $I dH$ задает однопараметрическую

группу диффеоморфизмов $g^t : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x = l \, dH(x).$$

Группа g^t называется *гамильтоновым фазовым потоком с функцией Гамильтона H* .

Теорема. *Гамильтонов фазовый поток сохраняет симплектическую структуру:*

$$(g^t)^* \omega^2 = \omega^2.$$

В случае $n=1$, $M^{2n} = \mathbb{R}^2$ эта теорема означает, что фазовый поток g^t сохраняет площади (теорема Лиувилля).

Для доказательства теоремы полезно ввести следующие обозначения (рис. 167).

Пусть M — произвольное многообразие, c — k -цепь в M , $g^t : M \rightarrow M$ — однопараметрическое семейство дифференцируемых отображений. Построим $k+1$ -цепь Jc в M , называемую *следом цепи c при гомотопии g^t* , $0 \leq t \leq \tau$.

Пусть (D, \cdot, Op) — один из кусков цепи c . В цепи Jc ему будет соответствовать кусок (D', f', Op') , где $D' = I \times D$ — прямое произведение отрезка $0 \leq t \leq \tau$ на D , отображение $f' : D' \rightarrow M$ выражается через $f : D \rightarrow M$ по формуле $f'(t, x) = g^t f(x)$, и ориентация Op' пространства \mathbb{R}^{k+1} , содержащего D' , задается репером e_0, e_1, \dots, e_k , где e_0 — орт оси t , а e_1, \dots, e_k — ориентирующий репер D .

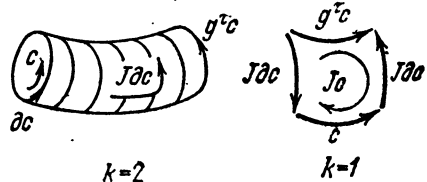


Рис. 167. След цепи при гомотопии.

Можно сказать, что Jc — это цепь, которую c замечает при гомотопии g^t , $0 \leq t \leq \tau$. Граница цепи Jc состоит из «торцов», образованных начальным и конечным положениями c , и «боковой поверхности», замеченной границей c .

Легко проверить, что при указанном выборе ориентаций

$$\partial(Jc_k) = g^\tau c_k - c_k - Jdc_k.$$

Лемма. *Пусть γ — 1-цепь в симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) . Пусть g^t — фазовый поток на M с функцией Гамильтона H . Тогда*

$$\frac{d}{d\tau} \int_{J\gamma} \omega^2 = \int_{g^\tau \gamma} dH.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть цепь γ из одного куска $f : [0, 1] \rightarrow M$.

Введем обозначения

$$f'(s, t) = g^t f(s), \quad \xi = \partial f' / \partial s, \quad \eta = \partial f' / \partial t \in TM_{f'(s, t)}.$$

По определению интеграла

$$\int_{\gamma} \omega^2 = \int_0^1 \int_0^{\tau} \omega^2(\eta, \xi) dt ds.$$

Но по определению фазового потока η есть вектор гамильтонова поля с функцией Гамильтона H (в точке $f'(s, t)$). По определению гамильтонова поля $\omega^2(\eta, \xi) = dH(\xi)$. Итак,

$$\int_{\gamma} \omega^2 = \int_0^{\tau} \left(\int_{g^t \gamma} dH \right) dt.$$

Лемма доказана.

Следствие. Если цепь γ замкнута ($\partial\gamma = 0$), то $\int_{\gamma} \omega^2 = 0$.

Действительно, $\int_{\gamma} dH = \int_{\partial\gamma} H = 0$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим любую 2-цепь α .

Имеем

$$0 \stackrel{1}{=} \int_{Jc} d\omega^2 \stackrel{2}{=} \int_{\partial Jc} \omega^2 \stackrel{3}{=} \int_{g^{\tau}c} \omega^2 - \int_c \omega^2 - \int_{J\partial c} \omega^2 \stackrel{4}{=} \int_{g^{\tau}c} \omega^2 - \int_c \omega^2$$

(1 — ввиду замкнутости ω^2 , 2 — формула Стокса, 3 — формула (1), 4 — предыдущее следствие, $\gamma = \partial c$). Итак, интегралы формы ω^2 по любой цепи c и по ее образу $g^{\tau}c$ одинаковы, что и требовалось доказать.

Задача. Всякая ли однопараметрическая группа диффеоморфизмов M^{2n} , сохраняющая симплектическую структуру, является гамильтоновым фазовым потоком?

Указание. См. § 40.

Б. Интегральные инварианты. Пусть $g: M \rightarrow M$ — дифференцируемое отображение.

Определение. Дифференциальная k -форма ω называется *интегральным инвариантом* отображения g , если интегралы ω по любой k -мерной цепи c и по ее образу при отображении g одинаковы:

$$\int_{gc} \omega = \int_c \omega.$$

Пример. Если $M = \mathbb{R}^2$, а $\omega^2 = dp \wedge dq$ — элемент площади, то ω^2 является интегральным инвариантом всякого отображения g с якобианом 1.

Задача. Докажите, что форма ω^k является интегральным инвариантом отображения g тогда и только тогда, когда $g^* \omega^k = \omega^k$.

Задача. Докажите, что если формы ω^k и ω^l — интегральные инварианты отображения g , то форма $\omega^k \wedge \omega^l$ — также интегральный инвариант g .

Теорему пункта А можно сформулировать так:

Теорема. *Задающая симплектическую структуру форма ω^2 является интегральным инвариантом гамильтонова фазового потока.*

Рассмотрим теперь внешние степени формы ω^2 ,

$$(\omega^2)^2 = \omega^2 \wedge \omega^2, (\omega^2)^3 = \omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^2, \dots$$

Следствие. *Каждая из форм $(\omega^2)^2, (\omega^2)^3, \dots$ является интегральным инвариантом гамильтонова фазового потока.*

Задача. Пусть размерность симплектического многообразия (M^{2n}, ω^2) равна $2n$. Покажите, что $(\omega^2)^k = 0$ при $k > n$, а $(\omega^2)^n$ — невырожденная $2n$ -форма на M^{2n} .

Определим элемент объема на M^{2n} при помощи $(\omega^2)^n$. Тогда гамильтонов фазовый поток сохраняет объемы, и мы получаем из предыдущего следствия теорему Лиувилля.

Пример. Рассмотрим координатное симплектическое пространство $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$, $\omega^2 = dp \wedge dq = \sum dp_i \wedge dq_i$. В этом случае форма $(\omega^2)^k$ пропорциональна форме

$$\omega^{2k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} dp_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \dots \wedge dq_{i_k}.$$

Интеграл формы ω^{2k} равен сумме ориентированных объемов проекций на координатные плоскости $(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}, q_{i_1}, \dots, q_{i_k})$.

Отображение $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ называется *каноническим*, если оно имеет ω^2 интегральным инвариантом. Каждая из форм $\omega^4, \omega^6, \dots, \omega^{2n}$ является интегральным инвариантом всякого канонического отображения. Следовательно, при каноническом отображении сохраняется сумма ориентированных площадей проекций на координатные плоскости $(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}, q_{i_1}, \dots, q_{i_k})$, $1 \leq k \leq n$. В частности, канонические отображения сохраняют объемы.

Гамильтонов фазовый поток, заданный уравнениями $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ состоит из канонических отображений g^t .

Рассмотренные выше интегральные инварианты называют также *абсолютными*.

Определение. Дифференциальная k -форма ω называется *относительным интегральным инвариантом* отображения $g: M \rightarrow M$, если

$$\int_{g \circ c} \omega = \int_c \omega$$

для всякой замкнутой k -цепи c .

Теорема. Пусть ω — относительный интегральный инвариант отображения g , тогда $d\omega$ — абсолютный интегральный инвариант g .

Доказательство. Пусть $c - k + 1$ -цепь. Тогда

$$\int_c d\omega \stackrel{1}{=} \int \omega \stackrel{2}{=} \int_{g\partial c} \omega \stackrel{3}{=} \int_{\partial g c} \omega \stackrel{4}{=} \int_{g c} d\omega.$$

(1 и 4 — формула Стокса, 2 — определение относительного инварианта, 3 — определение границы).

Пример. Каноническое отображение $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ имеет относительным интегральным инвариантом 1-форму

$$\omega^1 = p dq = \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Действительно, всякая замкнутая цепь c в \mathbb{R}^{2n} является границей некоторой цепи σ , и мы находим

$$\int_{g c} \omega^1 \stackrel{1}{=} \int_{g\partial\sigma} \omega^1 \stackrel{2}{=} \int_{\partial g\sigma} \omega^1 \stackrel{3}{=} \int_{g\sigma} d\omega^1 \stackrel{4}{=} \int_{\sigma} d\omega^1 \stackrel{5}{=} \int_{\partial\sigma} \omega^1 \stackrel{6}{=} \int_c \omega^1.$$

(1 и 6 — определение σ , 2 — определение ∂ , 3 и 5 — формула Стокса, 4 — каноничность g и выкладка $d\omega^1 = d(p dq) = dp \wedge dq = \omega^2$).

Задача. Пусть $d\omega^k$ — абсолютный интегральный инвариант отображения $g: M \rightarrow M$. Вытекает ли из этого, что ω^k — относительный интегральный инвариант?

Ответ. Нет, если в M есть k -мерные замкнутые цепи, не являющиеся границами.

В. Закон сохранения энергии. Теорема. *Функция H является первым интегралом гамильтонова фазового потока с функцией Гамильтона H .*

Доказательство. Производная H по направлению вектора η равна значению dH на векторе η . По определению гамильтонова поля $\eta = I dH$ находим

$$dH(\eta) = \omega^2(\eta, I dH) = \omega^2(\eta, \eta) = 0.$$

Задача. Докажите, что 1-форма dH является интегральным инвариантом фазового потока с функцией Гамильтона H .

§ 39. Алгебра Ли векторных полей

Каждой паре векторных полей на многообразии сопоставляется новое векторное поле, называемое их скобкой Пуассона. Скобка Пуассона превращает линейное пространство бесконечно дифференцируемых векторных полей на многообразии в алгебру Ли.

А. Алгебра Ли. Примером алгебры Ли является трехмерное ориентированное евклидово линейное пространство, снабженное операцией векторного умножения. Векторное произведение билинейно, кососимметрично и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [C, A], B] = 0.$$

Определение. *Алгеброй Ли* называется линейное пространство L вместе с билинейной кососимметричной операцией $L \times L \rightarrow L$, удовлетворяющей тождеству Якоби.

Операция обычно обозначается квадратными скобками и называется *коммутатором*.

Задача. Докажите, что множество $n \times n$ -матриц становится алгеброй Ли, если определить коммутатор как $[A, B] = AB - BA$.

Б. Векторные поля и дифференциальные операторы. Пусть M — гладкое многообразие, A — гладкое векторное поле на M : в каждой точке $x \in M$ задан касательный вектор $A(x) \in TM_x$. С каждым таким векторным полем связаны следующие два объекта.

1. *Однопараметрическая группа диффеоморфизмов* *), или *поток* $A^t: M \rightarrow M$, для которого A есть поле скоростей (рис. 168):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A^t x = A(x).$$

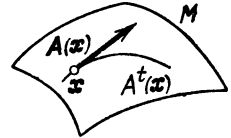


Рис. 168. Группа диффеоморфизмов, заданная векторным полем.

2. *Дифференциальный оператор первого порядка* L_A . Речь идет о дифференцировании функций по направлению поля A : для всякой функции $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ *производная по направлению* A есть новая функция $L_A \varphi$, значение которой в точке x есть

$$(L_A \varphi)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(A^t x).$$

Задача. Докажите, что оператор L_A линейный:

$$L_A(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 L_A \varphi_1 + \lambda_2 L_A \varphi_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Докажите формулу Лейбница $L_A(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 L_A \varphi_2 + \varphi_2 L_A \varphi_1$.

Пример. Пусть (x_1, \dots, x_n) — локальные координаты на M . В этой системе координат вектор $A(x)$ задается компонентами $(A_1(x), \dots, A_n(x))$; поток A^t задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = A_1(x), \dots, \dot{x}_n = A_n(x)$$

и, следовательно, производная $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ по направлению A есть

$$L_A \varphi = A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

Можно сказать, что оператор L_A в координатах (x_1, \dots, x_n) имеет вид

$$L_A = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

а это и есть общий вид линейного дифференциального оператора первого порядка в координатном пространстве.

Задача. Докажите, что соответствие между векторными полями A , потоками A^t и дифференцированиями L_A взаимно однозначно.

*) По теоремам существования, единственности и дифференцируемости теории обыкновенных дифференциальных уравнений группа A^t определена, если многообразие M компактно. В общем случае отображения A^t определены лишь в окрестности x и лишь для малых t ; этого достаточно для дальнейших конструкций.

В. Скобка Пуассона векторных полей. Пусть на многообразии M даны два векторных поля A и B . Соответствующие потоки A^t и B^s , вообще говоря, не коммутируют: $A^t B^s \neq B^s A^t$ (рис. 169).

Задача. Привести пример.

Решение. Поля $A = e_1$, $B = x_1 e_2$ на плоскости (x_1, x_2) .

Для измерения степени некоммутируемости двух потоков A^t , B^s рассмотрим точки $A^t B^s x$ и $B^s A^t x$. Чтобы оценить различие между этими точками, сравним значение в них какой-нибудь гладкой функции φ , заданной на многообразии M . Разность

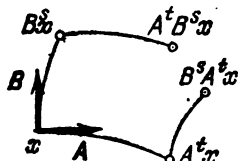


Рис. 169. Некоммутирующие потоки.

$$\Delta(t, s; x) = \varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x)$$

есть, очевидно, дифференцируемая функция, обращающаяся в 0 при $s=0$ и при $t=0$. Поэтому первый отличный от 0-член ряда Тейлора Δ по s и t в 0 содержит st , а другие члены второй степени исчезают. Сосчитаем этот главный билинейный член Δ в 0.

Лемма 1. *Смешанная производная Δ по s, t в 0 равна коммутатору дифференцирований по направлениям A и B :*

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=t=0} \varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x) = (L_B L_A \varphi - L_A L_B \varphi)(x).$$

Доказательство. По определению L_A ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi(A^t B^s x) = (L_A \varphi)(B^s x).$$

Если обозначить функцию $L_A \varphi$ через ψ , то по определению L_B

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \psi(B^s x) = (L_B \psi)(x).$$

Итак,

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=t=0} \varphi(A^t B^s x) = (L_B L_A \varphi)(x),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь возникший коммутатор дифференцирований $L_B L_A - L_A L_B$. На первый взгляд это — дифференциальный оператор второго порядка.

Лемма 2. *Оператор $L_B L_A - L_A L_B$ есть линейный дифференциальный оператор первого порядка.*

Доказательство. Пусть (A_1, \dots, A_n) ; (B_1, \dots, B_n) — компоненты полей A, B в локальной системе координат (x_1, \dots, x_n) на M . Тогда

$$L_B L_A \varphi = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = \sum_{i,j=1}^n B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi + \sum_{i,j=1}^n B_i A_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Если вычесть $L_A L_B \varphi$, то слагаемое со вторыми производными φ пропадет, и мы получим

$$(L_B L_A - L_A L_B) \varphi = \sum_{i,j=1}^n \left(B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Итак, лемма доказана.

Но поскольку каждый линейный дифференциальный оператор первого порядка задается векторным полем, наш оператор $L_B L_A - L_A L_B$ также соответствует некоторому векторному полю C .

Определение. Скобкой Пуассона или коммутатором двух векторных полей A, B на многообразии M называется *) векторное поле C , для которого

$$L_C = L_B L_A - L_A L_B.$$

Скобка Пуассона двух векторных полей обозначается

$$C = [A, B].$$

Задача. Пусть поля A, B заданы в координатах x_i компонентами (A_i, B_i) . Найти компоненты из скобки Пуассона.

Решение. При доказательстве леммы 2 уже доказана формула

$$[A, B]_j = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}.$$

Задача. Пусть A_1 — векторное поле линейных скоростей твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω_1 , а A_2 — с угловой скоростью ω_2 вокруг точки O . Найти скобку Пуассона $[A_1, A_2]$.

Г. Тожество Якоби.

Теорема. Скобка Пуассона превращает линейное пространство векторных полей на многообразии M в алгебру Ли.

Доказательство. Линейность и косимметричность скобки Пуассона очевидны. Докажем тождество Якоби. Имеем по определению скобки Пуассона

$$\begin{aligned} L_{[[A, B], C]} &= L_C L_{[A, B]} - L_{[A, B]} L_C = \\ &= L_C L_B L_A - L_C L_A L_B + L_A L_B L_C - L_B L_C L_A. \end{aligned}$$

Всего в сумме $L_{[[A, B], C]} + L_{[[B, C], A]} + L_{[[C, A], B]}$ будет 12 слагаемых. Каждое слагаемое войдет в сумму дважды с противоположными знаками. Теорема доказана.

*) Во многих книгах принимается другой знак. Наш знак согласован со знаком коммутатора в теории групп Ли (см. пункт В).

Д. Условие коммутативности потоков. Пусть A, B — векторные поля на многообразии M .

Теорема. Два потока A^t, B^s коммутируют тогда и только тогда, когда скобка Пуассона соответствующих векторных полей $[A, B]$ равна нулю.

Доказательство. Если $A^t B^s \equiv B^s A^t$, то по лемме 1 $[A, B] = 0$. Если $[A, B] = 0$, то по лемме 1 для любой функции φ в любой точке x

$$\varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x) = o(s^2 + t^2), \quad s \rightarrow 0, t \rightarrow 0.$$

Мы покажем, что отсюда вытекает $\varphi(A^t B^s x) = \varphi(B^s A^t x)$ при достаточно малых s и t .

Применяя это соотношение к локальным координатам ($\varphi = x_1, \dots, \varphi = x_n$), получим $A^t B^s \equiv B^s A^t$.

Рассмотрим прямоугольник $0 \leq t \leq t_0, 0 \leq s \leq s_0$ (рис. 170) на плоскости (t, s) . Каждому пути, ведущему из $(0, 0)$ в (t_0, s_0) и состоящему из конечного числа отрезков координатных направлений, сопоставим произведение преобразований потоков A^t и B^s . Каждому отрезку $t_1 \leq t \leq t_2$ сопоставим $A^{t_2-t_1}$, отрезку $s_1 \leq s \leq s_2$ — $B^{s_2-s_1}$; применять преобразования будем в порядке, в каком идут отрезки от $(0, 0)$.

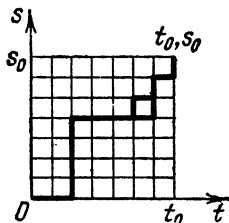


Рис. 170. К доказательству коммутативности потоков.

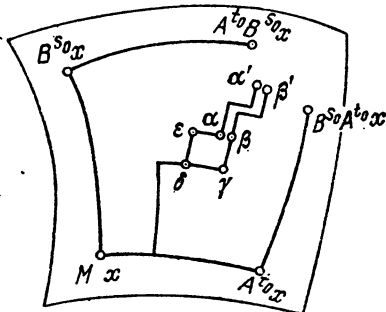


Рис. 171. Криволинейный четырехугольник в виде x .

Так, например, сторонам $(0 \leq t \leq t_0, s = 0)$ и $(t = t_0, 0 \leq s \leq s_0)$ отвечает произведение $B^{s_0} A^{t_0}$, а сторонам $(t = 0, 0 \leq s \leq s_0)$ и $(s = s_0, 0 \leq t \leq t_0)$ — произведение $A^{t_0} B^{s_0}$.

Кроме того, мы сопоставим каждому такому пути на плоскости (t, s) путь на многообразии M , выходящий из точки x , составленный из траекторий потоков A^t и B^s (рис. 171). Если пути на плоскости (t, s) соответствует преобразование $A^{t_1} B^{s_1} \dots A^{t_n} B^{s_n}$, то на многообразии M соответствующий путь заканчивается в точке $A^{t_1} B^{s_1} \dots A^{t_n} B^{s_n} x$.

Наша цель — доказать, что все эти пути в действительности заканчиваются в одной точке $A^{t_0} B^{s_0} x = B^{s_0} A^{t_0} x$.

Разобьем отрезки $(0 \leq t \leq t_0)$ и $(0 \leq s \leq s_0)$ на N равных частей так, что весь прямоугольник разделится на N^2 маленьких прямоугольников. Переход от сторон $(0, 0) - (0, t_0) - (s_0, t_0)$ к сторонам $(0, 0) - (s_0, 0) - (s_0, t_0)$ можно совершить в N^2 шагов, в каждом из которых пара соседних сторон маленького прямоугольника заменяется другой парой (рис. 172).

На многообразии M этому маленькому прямоугольнику соответствует, вообще говоря, незамкнутый криволинейный четырехугольник $\beta\alpha\beta\alpha'$ (рис. 171). Рассмотрим расстояние *) между его вершинами α, β , соответствующими наибольшим значениям t и s . Как мы видели выше (стр. 180), $\rho(\alpha, \beta) \leq C_1 N^{-3}$ (где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от N). Используя теорему дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по начальным данным, отсюда нетрудно вывести оценку расстояния между концами α', β' путей $x\delta\beta\beta'$ и $x\delta\alpha\alpha'$ на многообразии M : $\rho(\alpha', \beta') < C_2 N^{-3}$, где постоянная $C_2 > 0$ снова не зависит от N . Но весь переход от $B^s A^t \circ x$ к $A^t B^s \circ x$ мы разбили на N^2 таких шагов. Итак, $\rho(A^t \circ B^s \circ x, B^s \circ A^t \circ x) \leq N^2 C_2 N^{-3} \approx \Delta N$. Следовательно, $A^t \circ B^s \circ x = B^s \circ A^t \circ x$.

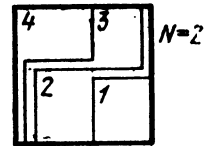


Рис. 172. Переход от одной пары сторон к другой.

Е. Добавление. Алгебра Ли группы Ли. Группой Ли называется группа G , являющаяся дифференцируемым многообразием, причем операции (умножение и обращение) — дифференцируемые отображения $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$.

Касательное пространство к группе Ли G в единице TG_e имеет естественную структуру алгебры Ли; она определяется следующим образом.

Каждому касательному вектору $A \in TG_e$ отвечает однопараметрическая подгруппа $A^t \in G$ с вектором скорости $A = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A^t$.

Степень некоммутативности двух подгрупп A^t, B^s измеряется произведением $A^t B^s A^{-t} B^{-s}$. Оказывается, существует одна-единственная подгруппа C^r , для которой

$$\rho(A^t B^s A^{-t} B^{-s}, C^{st}) = o(s^2 + t^2) \text{ при } s, t \rightarrow 0.$$

Соответствующий вектор $C = \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} C^r$ называется коммутатором Ли $C = [A, B]$ векторов A и B .

Можно проверить, что введенная таким образом в касательное пространство TG_e операция коммутирования превращает его в алгебру Ли (т. е. операция билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби). Эта алгебра называется алгеброй Ли группы Ли G .

Задача. Вычислить операцию коммутирования в алгебре Ли группы $SO(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства.

Лемма 1 показывает, что скобку Пуассона векторных полей можно определять как коммутатор Ли для «бесконечномерной группы Ли» всех диффеоморфизмов многообразия **) M .

С другой стороны, коммутатор Ли можно определять с помощью скобок Пуассона векторных полей на группе Ли G .

*) В какой-нибудь римановой метрике M .

**) Знак в определении скобки Пуассона векторных полей выбран исходя из этого соображения.

Пусть $g \in G$. Правым сдвигом R_g называется отображение $R_g: G \rightarrow G$, $R_g h = hg$. Дифференциал R_g в точке g отображает TG_g в TG_g . Таким образом, каждому вектору $A \in TG_g$ соответствует целое векторное поле на группе: оно составлено из всех правых сдвигов $(R_g)_* A$ и называется *правоинвариантным полем*. Очевидно, правоинвариантное поле на группе однозначно определяется своим значением в единице.

Задача. Докажите, что скобка Пуассона правоинвариантных векторных полей на группе Ли G есть правоинвариантное поле, и значение его в единице группы равно коммутатору Ли значений исходных полей в единице.

§ 40. Алгебра Ли функций Гамильтона

Гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии образуют подалгебру алгебры Ли всех полей. Функции Гамильтона также образуют алгебру Ли: операция в этой алгебре называется скобкой Пуассона функций. Первые интегралы гамильтонова фазового потока образуют подалгебру алгебры Ли функций Гамильтона.

А. Скобка Пуассона двух функций. Пусть (M^{2n}, ω^2) — симплектическое многообразие. Функции $H: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, заданной на симплектическом многообразии, соответствует однопараметрическая группа $g_H^t: M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ канонических преобразований M^{2n} — фазовый поток, функция Гамильтона которого равна H .

Пусть $F: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ — другая функция на многообразии M^{2n} .

Определение. Скобкой Пуассона (F, H) функций F и H , заданных на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) , называется производная функции F по направлению фазового потока с функцией Гамильтона H :

$$(F, H)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(g_H^t(x)).$$

Таким образом, скобка Пуассона двух функций на M есть снова функция на M .

Следствие 1. Функция F тогда и только тогда является первым интегралом фазового потока с функцией Гамильтона H , когда ее скобка Пуассона с H равна тождественно нулю: $(H, F) \equiv 0$.

Мы можем дать определению скобки Пуассона несколько иную форму, если воспользуемся изоморфизмом I между 1-формами и векторными полями на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) . Этот изоморфизм определен соотношением (см. § 37)

$$\omega^2(\eta, I\omega^1) = \omega^1(\eta).$$

Вектор скорости фазового потока g_H^t есть $I dH$. Отсюда вытекает

Следствие 2. Скобка Пуассона функций F и H равна значению 1-формы dF на векторе $I dH$ скорости фазового потока с функцией Гамильтона H :

$$(F, H) = dF(I dH).$$

Пользуясь предыдущей формулой еще раз, получаем

Следствие 3. Скобка Пуассона функций F и H равна «кососкалярному произведению» векторов скоростей фазовых потоков с функциями Гамильтона H и F :

$$(F, H) = \omega^2(I dH, I dF).$$

Теперь становится очевидным

Следствие 4. Скобка Пуассона функций F и H является кососимметрической билинейной функцией от F и H :

$$(F, H) = -(H, F), \quad (H, \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 (H, F_1) + \lambda_2 (H, F_2) \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Сколь ни очевидны предыдущие рассуждения, они приводят к нетривиальным выводам, в том числе к следующему обобщению теоремы Э. Нётер.

Теорема. Если функция Гамильтона H , заданная на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) , выдерживает однопараметрическую группу канонических преобразований, заданную гамильтонианом F , то F есть первый интеграл системы с функцией Гамильтона H .

Действительно, по условию H есть первый интеграл потока g_F^t . Значит, $(F, H) = 0$ (следствие 1). Поэтому $(H, F) = 0$ (следствие 4) и F — первый интеграл (следствие 1), ч. т. д.

Задача 1. Вычислить скобку Пуассона двух функций F, H в координатном каноническом пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$. $\omega^2(\xi, \eta) = [\xi, \eta] = (I\xi, \eta)$.
Решение. Согласно следствию 3 имеем

$$(F, H) = [I dH, I dF] = [\text{grad } H, \text{grad } F] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

(мы пользуемся симплектичностью I и тем, что I имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ в базисе (p, q)).

Задача 2. Вычислить скобки Пуассона базисных функций p_i, q_i .

Решение. Граденты базисных функций образуют «симплектический базис»: их кососкалярные произведения суть

$$(p_i, p_j) = (p_i, -q_j) = (q_i, q_j) = 0, \quad (q_i, p_i) = -(p_i, q_i) = 1.$$

Задача 3. Докажите, что отображение $A: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, (p, q) \rightarrow (P(p, q), Q(p, q))$ каноническое тогда и только тогда, когда скобки Пуассона любых двух функций по переменным (p, q) и (P, Q) совпадают:

$$(F, H)_{p, q} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial F}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial F}{\partial P} = (F, H)_{P, Q}.$$

Решение. Пусть A — каноническое. Тогда симплектические структуры $dp \wedge dq$ и $dP \wedge dQ$ совпадают. Но определение скобки Пуассона (F, H) инвариантно связано с симплектической структурой, а не с координатами. Поэтому

$$(F, H)_{p, q} = (F, H) = (F, H)_{P, Q}.$$

Обратно, пусть скобки Пуассона $(P_i, Q_i)_{p, q}$ имеют стандартный вид задачи 2. Тогда, очевидно, $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$, т. е. отображение A — каноническое.

Задача 4. Докажите, что скобка Пуассона произведения вычисляется по правилу Лейбница:

$$(F_1 F_2, H) = F_1 (F_2, H) + F_2 (F_1, H).$$

Указание. Скобка Пуассона $(F_1 F_2, H)$ есть производная произведения $F_1 F_2$ по направлению поля $l dH$.

Б. Тождество Якоби.

Теорема. Скобки Пуассона трех функций A, B, C удовлетворяют тождеству Якоби:

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0.$$

Следствие. Теорема Пуассона. Скобка Пуассона двух первых интегралов (F_1, F_2) системы с функцией Гамильтона H есть снова первый интеграл.

Доказательство следствия. По тождеству Якоби

$$((F_1, F_2), H) = (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) = 0 + 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, зная два первых интеграла, можно простой выкладкой получить третий, четвертый и т. д. Конечно, не все получающиеся интегралы будут существенно новыми, так как всего независимых функций на M^{2n} не более $2n$. Иногда может получиться функция от старых интегралов, или константа, например нуль. Но иногда получается и новый интеграл.

Задача. Сосчитать скобки Пуассона компонент $p_1, p_2, p_3, M_1, M_2, M_3$ векторов импульса и кинетического момента механической системы.

Ответ. $(M_1, M_2) = M_3, (M_1, p_1) = 0, (M_1, p_2) = p_3, (M_1, p_3) = -p_2$. Отсюда вытекает

Теорема. Если в некоторой механической задаче сохраняются две компоненты кинетического момента, M_1 и M_2 , то сохраняется и третья.

Доказательство тождества Якоби. Рассмотрим сумму

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B).$$

Эта сумма есть «линейная комбинация вторых частных производных» функций. Сосчитаем члены, содержащие вторые производные A :

$$((A, B), C) + ((C, A), B) = (L_C L_B - L_B L_C) A,$$

где L_ξ — дифференцирование по направлению ξ , а F — гамильтоново поле с функцией Гамильтона F .

Но по лемме 2 § 39 коммутатор дифференцирований $L_C L_B - L_B L_C$ есть дифференциальный оператор первого порядка. Значит, никаких вторых производных A наша сумма не содержит. То же относится ко вторым производным B и C . Следовательно, сумма равна нулю, ч. т. д.

Следствие 5. Пусть B, C — гамильтоновы поля с функциями Гамильтона B, C . Рассмотрим скобку Пуассона векторных

полей $[B, C]$. Это векторное поле гамильтоново, и его функция Гамильтона равна скобке Пуассона функций Гамильтона (B, C) .

Доказательство. Положим $(B, C) = D$. Тожество Якоби можно переписать в виде

$$(A, D) = ((A, B), C) - ((A, C), B),$$

$$L_D = L_C L_B - L_B L_C, \quad L_D = L_{[B, C]},$$

что и требовалось доказать.

В. Алгебры Ли гамильтоновых полей, функций Гамильтона и первых интегралов. Линейное подпространство алгебры Ли называется *подалгеброй*, если коммутатор двух любых элементов подпространства ему принадлежит. Подалгебра алгебры Ли сама является алгеброй Ли. Предыдущее следствие содержит, в частности,

Следствие 6. *Гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии образуют подалгебру алгебры Ли всех полей.*

Теорема Пуассона о первых интегралах может быть переформулирована так:

Следствие 7. *Первые интегралы гамильтонова фазового потока образуют подалгебру алгебры Ли всех функций.*

Алгебру Ли функций Гамильтона можно естественно отобразить на алгебру Ли гамильтоновых векторных полей. Для этого каждой функции H сопоставим гамильтоново векторное поле H с функцией Гамильтона H .

Следствие 8. *Отображение алгебры Ли функций на алгебру Ли гамильтоновых полей является гомоморфизмом алгебр. Его ядро состоит из локально постоянных функций. Если M^{2n} связно, то ядро одномерно и состоит из постоянных.*

Наше отображение линейно. Следствие 5 утверждает, что наше отображение переводит скобку Пуассона функций в скобку Пуассона векторных полей. Ядро состоит из функций H , для которых $I dH \equiv 0$. Поскольку I — изоморфизм, $dH \equiv 0$, $H = \text{const}$, ч. т. д.

Следствие 9. *Для того чтобы фазовые потоки с функциями Гамильтона H_1 и H_2 коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона функций H_1 и H_2 была (локально) постоянной.*

По теореме пункта Д § 39 необходимо и достаточно, чтобы $[H_1, H_2] \equiv 0$, а по следствию 8 последнее условие эквивалентно $d(H_1, H_2) \equiv 0$.

Мы получили еще одно обобщение теоремы Э. Нётер: *зная поток, коммутирующий с исследуемым, можно построить первый интеграл.*

Г. Локально гамильтоновы векторные поля. Пусть (M^{2n}, ω^2) — симплектическое многообразие, $g^t: M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, сохраняющих симплектическую структуру. Будет ли g^t гамильтоновым потоком?

Пример. Пусть M^{2n} — двумерный тор T^2 , точка которого задается парой координат $(p, q) \bmod 1$. Пусть ω^2 — обычный элемент площади $dp \wedge dq$. Рассмотрим семейство сдвигов $g^t(p, q) = (p+t, q)$ (рис. 173). Отображения g^t сохраняют симплектическую структуру (т. е. площадь). Можно ли задать соответствующее векторное поле ($\dot{p}=1, \dot{q}=0$) функцией Гамильтона? Если бы $\dot{p} = -\partial H/\partial q, \dot{q} = \partial H/\partial p$, мы имели бы $\partial H/\partial p = 0, \partial H/\partial q = -1$, т. е. $H = -q + C$. Но q — это лишь локальная координата на T^2 ; отображения $H: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $\partial H/\partial p = 0, \partial H/\partial q = -1$, не существует.

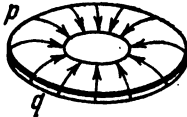


Рис. 173. Локально гамильтоново поле на торе.

Итак, g^t не есть гамильтонов фазовый поток.

Определение. Локально гамильтоновым векторным полем на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) называется векторное поле $I\omega^1$, где ω^1 — замкнутая 1-форма на M^{2n} .

Локально замкнутая 1-форма является дифференциалом функции, $\omega^1 = dH$. Однако при попытке продолжить функцию H на все многообразие M^{2n} , мы можем получить «многозначную функцию Гамильтона». Ибо замкнутая

1-форма на неодносвязном многообразии может не быть дифференциалом (например, форма dq на T^2).

Фазовый поток, заданный локально гамильтоновым векторным полем, называется локально гамильтоновым потоком.

Задача. Докажите, что однопараметрическая группа диффеоморфизмов симплектического многообразия тогда и только тогда сохраняет симплектическую структуру, когда она является локально гамильтоновым фазовым потоком.

Указание. См. § 38, А.

Задача. Докажите, что в симплектическом пространстве \mathbb{R}^{2n} всякая однопараметрическая группа канонических (сохраняющих $dp \wedge dq$) диффеоморфизмов всегда является гамильтоновым потоком.

Указание. Всякая замкнутая 1-форма в \mathbb{R}^{2n} является дифференциалом функции.

Задача. Докажите, что локально гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру алгебры Ли всех полей. При этом скобка Пуассона двух локально гамильтоновых полей — это настоящее гамильтоново поле, его функция Гамильтона однозначно*) определена данными полями ξ, η по формуле $H = \omega^2(\xi, \eta)$.

Таким образом, гамильтоновы поля образуют идеал в алгебре Ли локально гамильтоновых полей.

§ 41. Симплектическая геометрия

Евклидова структура в линейном пространстве задается симметрической билинейной формой, а симплектическая — кососимметрической. Геометрия симплектического пространства освежающе непохожа на евклидову, хотя и имеет много сходных черт.

А. Симплектическое линейное пространство. Пусть \mathbb{R}^{2n} — четномерное линейное пространство.

Определение. Симплектической линейной структурой в \mathbb{R}^{2n} называется невырожденная**) билинейная кососимметрическая 2-форма, заданная в \mathbb{R}^{2n} . Эта форма называется кососкалярным произведением и обозначается $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$.

*) А не с точностью до постоянной.

**) 2-форма $[\cdot, \cdot]$ в \mathbb{R}^{2n} невырождена, если $([\xi, \eta] = 0 \forall \eta) \Rightarrow (\xi = 0)$.

Пространство \mathbf{R}^{2n} вместе с симплектической структурой [.] называется *симплектическим линейным пространством*.

Пример. Пусть $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ — координатные функции в \mathbf{R}^{2n} , и ω^2 — форма

$$\omega^2 = p_1 \wedge q_1 + \dots + p_n \wedge q_n.$$

Поскольку эта форма невырождена и кососимметрична, ее можно принять за кососкалярное произведение: $[\xi, \eta] = \omega^2(\xi, \eta)$. Таким образом, координатное пространство $\mathbf{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ получает симплектическую структуру. Эта структура называется *стандартной*. В стандартной симплектической структуре кососкалярное произведение двух векторов ξ, η равно сумме ориентированных площадей параллелограмма (ξ, η) на n координатных плоскостей (p_i, q_i) .

Два вектора ξ, η в симплектическом пространстве называются *косоортогональными* ($\xi \perp \eta$), если их кососкалярное произведение равно нулю.

Задача. Докажите, что $\xi \perp \xi$: каждый вектор себе косоортогонален.

Множество всех векторов, косоортогональных данному вектору η , называется *косоортогональным дополнением к η* .

Задача. Докажите, что косоортогональное дополнение к η есть $2n-1$ -мерная гиперплоскость, содержащая η .

Указание. Если бы все векторы были косоортогональны η , то форма [.] была бы вырожденной.

Б. Симплектический базис. Евклидова структура при подходящем выборе базиса (он должен быть ортонормирован) задается скалярным произведением специального стандартного вида. Точно так же и симплектическая структура принимает стандартный вид, указанный выше, в надлежащем базисе.

Задача. Найти кососкалярные произведения базисных векторов e_{p_i}, e_{q_i} ($i=1, \dots, n$) в приведенном выше примере.

Решение. Из определения $p_1 \wedge q_1 + \dots + p_n \wedge q_n$ следуют соотношения

$$[e_{p_i}, e_{p_j}] = [e_{p_i}, e_{q_j}] = [e_{q_i}, e_{q_j}] = 0, \quad [e_{p_i}, e_{q_i}] = 1. \quad (1)$$

Вернемся теперь к общему симплектическому пространству.

Определение. *Симплектическим базисом* называются $2n$ векторов e_{p_i}, e_{q_i} ($i=1, \dots, n$), кососкалярные произведения которых имеют вид (1).

Иными словами, *каждый базисный вектор косоортогонален всем базисным векторам, кроме одного, с ним сопряженного; а произведение сопряженных векторов равно ± 1* .

Теорема. *В каждом симплектическом пространстве существует симплектический базис. Более того, за первый вектор базиса можно взять любой ненулевой вектор e .*

Эта теорема вполне аналогична соответствующей теореме евклидовой геометрии и доказывается почти так же.

Поскольку вектор e не нулевой, существует ему не косоортogonalный вектор f (форма $[\cdot, \cdot]$ невырождена). Выбрав длину этого вектора, можно добиться того, что его кососкалярное произведение с e станет равным единице. В случае $n=1$ теорема доказана.

Если же $n > 1$, рассмотрим косоортogonalное дополнение D (рис. 174) к паре векторов e, f . D есть пересечение косоортogonalных дополнений к e и f . Эти два $2n-1$ -мерные подпространства не совпадают, так как e не лежит в косоортogonalном дополнении к f . Поэтому их пересечение D имеет четную размерность $2n-2$.

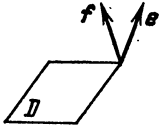


Рис. 174. Косоортogonalное дополнение.

Покажем, что D есть симплектическое подпространство в \mathbb{R}^{2n} , т. е. что кососкалярное произведение $[\cdot, \cdot]$ на D невырождено. Действительно, если бы вектор $\xi \in D$ был косоортogonalен всему пространству D , то, будучи косоортogonalен также к e и к f , этот вектор ξ был бы косоортogonalен \mathbb{R}^{2n} , что противоречит невырожденности $[\cdot, \cdot]$ на \mathbb{R}^{2n} . Итак, D^{2n-2} — симплектическое.

Теперь, если добавить к симплектическому базису в D^{2n-2} векторы e и f , мы получим симплектический базис в \mathbb{R}^{2n} , и доказательство теореме завершается индукцией по размерности n .

Следствие. Все симплектические пространства одинаковой размерности изоморфны.

Если принять векторы симплектического базиса за координатные орты, то мы получим систему координат p_i, q_i , в которой $[\cdot, \cdot]$ принимает стандартный вид $p_1 \wedge q_1 + \dots + p_n \wedge q_n$. Такая система координат называется *симплектической*.

В. Симплектическая группа. С евклидовой структурой связана ортогональная группа линейных отображений, сохраняющих евклидову структуру. В симплектическом пространстве аналогичную роль играет симплектическая группа.

О п р е д е л е н и е. Линейное преобразование $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ симплектического пространства \mathbb{R}^{2n} в себя называется *симплектическим*, если оно сохраняет кососкалярное произведение:

$$[S\xi, S\eta] = [\xi, \eta] \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Множество всех симплектических преобразований \mathbb{R}^{2n} называется *симплектической группой* и обозначается $\text{Sp}(2n)$.

Что произведение двух симплектических преобразований симплектическое — очевидно. Чтобы оправдать термин симплектическая группа, нужно только доказать, что симплектическое преобразование невырождено, тогда ясно, что обратное также симплектично.

Задача. Докажите, что группа $Sp(2)$ изоморфна группе вещественных матриц второго порядка с определителем 1 и гомеоморфна трехмерной внутрениности баранки.

Теорема. Преобразование $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ стандартного симплектического пространства (p, q) симплектическое тогда и только тогда, когда оно линейное и каноническое, т. е. сохраняет дифференциальную 2-форму

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Доказательство. При естественном отождествлении касательного пространства к \mathbb{R}^{2n} и \mathbb{R}^{2n} 2-форма ω^2 переходит в [.,].

Следствие. Определитель любого симплектического преобразования равен единице.

Доказательство. Мы уже знаем (§ 38, Б), что канонические преобразования сохраняют внешние степени формы ω^2 . Но ее n -я внешняя степень есть (с точностью до постоянного множителя) элемент объема в \mathbb{R}^{2n} . Значит, симплектические преобразования S стандартного $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ сохраняют элемент объема, так что $\det S = 1$.

Но поскольку всякая симплектическая линейная структура записывается в стандартном виде в симплектической системе координат, определитель симплектического преобразования любого симплектического пространства равен единице, ч. т. д.

Теорема. Линейное преобразование $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ симплеклично тогда и только тогда, когда оно переводит некоторый (и тогда любой) симплектический базис в симплектический.

Доказательство. Кососкалярное произведение любых двух линейных комбинаций базисных векторов выражается через кососкалярные произведения базисных векторов. Если преобразование не меняет кососкалярные произведения базисных векторов, то оно не меняет и кососкалярные произведения любых векторов ч. т. д.

Г. Плоскости в симплектическом пространстве. В евклидовом пространстве все плоскости равноправны: каждую из них можно перевести в любую другую движением.

Рассмотрим с этой точки зрения линейное симплектическое пространство.

Задача. Докажите, что ненулевой вектор симплектического пространства можно перевести в любой другой ненулевой вектор симплектическим преобразованием.

Задача. Докажите, что не всякую двумерную плоскость симплектического пространства \mathbb{R}^{2n} , $n > 1$, можно получить из данной 2-плоскости симплектическим преобразованием.

Указание. Рассмотрите плоскости (p_1, p_2) и (p_1, q_1) .

Определение. k -мерная плоскость симплектического пространства называется нулевой*), если она себе косоортогональна,

*) Нулевые плоскости называют также изотропными, а при $k = n$ — лагранжевыми.

т. е. кососкалярное произведение любых двух векторов плоскости равно нулю.

Пример. Координатная плоскость (p_1, \dots, p_k) в симплектической системе координат p, q нулевая (докажите!)

Задача. Докажите, что любую ненулевую двумерную плоскость можно перевести в любую другую ненулевую симплектическим преобразованием.

При вычислениях в симплектической геометрии бывает полезно ввести в симплектическом пространстве еще какую-нибудь евклидову структуру. Мы зафиксируем симплектическую систему координат p, q и введем евклидову структуру с помощью координатного скалярного произведения

$$(x, x) = \sum p_i^2 + q_i^2, \quad \text{где } x = \sum p_i e_{p_i} + q_i e_{q_i}.$$

Симплектический базис e_p, e_q в этой евклидовой структуре ортонормирован. Кососкалярное произведение, как всякая билинейная форма, выражается через скалярное в виде

$$[\xi, \eta] = (I\xi, \eta) \quad (2)$$

где $I: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — некоторый оператор. Из кососимметричности кососкалярного произведения следует, что оператор I кососимметричен.

Задача. Сосчитать матрицу оператора I в симплектическом базисе e_{p_i}, e_{q_i} .

Ответ. $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка n .

Таким образом, при $n=1$ (на плоскости p, q) I есть просто поворот на 90° , а в общем случае I есть поворот на 90° в каждой из n плоскостей p_i, q_i .

Задача. Доказать, что оператор I симплектический и что $I^2 = -E_{2n}$.

Хотя евклидова структура и оператор I связаны с симплектическим пространством неинвариантно, они часто бывают удобны.

Из (2) непосредственно вытекает

Теорема. Плоскость π симплектического пространства нулевая тогда и только тогда, когда плоскость $I\pi$ ортогональна π .

Заметим, что размерности плоскостей π и $I\pi$ совпадают, так как I невырожден. Отсюда

Следствие. Размерность нулевой плоскости в \mathbb{R}^{2n} не превосходит n .

Действительно, две k -мерные плоскости π и $I\pi$ в \mathbb{R}^{2n} не могут быть ортогональными, если $k > n$.

Разсмотрим несколько подробнее n -мерные нулевые плоскости в координатном симплектическом пространстве \mathbb{R}^{2n} . Примером такой плоскости служит координатная p -плоскость. Всего n -мерных координатных плоскостей в $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ имеется C_{2n}^n .

Задача. Доказать, что среди C_{2n}^n -мерных координатных плоскостей нулевых ровно 2^n . А именно, каждому из 2^n разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на две части $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_{n-k})$ соответствует нулевая координатная плоскость $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}, q_{j_1}, \dots, q_{j_{n-k}}$.

При изучении производящих функций канонических преобразований нам потребуется

Теорема. *Всякая n -мерная нулевая плоскость π в симплектическом координатном пространстве R^{2n} трансверсальна*) хотя бы одной из 2^n координатных нулевых плоскостей.*

Доказательство. Пусть P — нулевая плоскость p_1, \dots, p_n (рис. 175). Рассмотрим пересечение

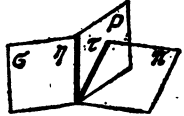


Рис. 175. Построение координатной плоскости σ , трансверсальной данной плоскости π .

$$\tau = \pi \cap P.$$

Пусть размерность τ равна k , $0 \leq k \leq n$. Как всякое k -мерное подпространство n -мерного пространства P , плоскость τ трансверсальна хотя бы одной $n - k$ -мерной координатной плоскости в P , скажем плоскости

$$\eta = (p_{i_1}, \dots, p_{i_{n-k}}); \tau + \eta = P, \quad \tau \cap \eta = 0.$$

Построим нулевую n -мерную координатную плоскость

$$\sigma = (p_{i_1}, \dots, p_{i_{n-k}}, q_{j_1}, \dots, q_{j_k}), \quad \eta = \sigma \cap P,$$

и докажем, что наша плоскость π трансверсальна σ

$$\pi \cap \sigma = 0.$$

Действительно, имеем

$$\left. \begin{aligned} \tau \subset \pi, \quad \pi \not\subset \tau &\Rightarrow \tau \not\subset \pi, \\ \eta \subset \sigma, \quad \sigma \not\subset \eta &\Rightarrow \eta \not\subset \sigma \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\tau + \eta) \not\subset (\pi \cap \sigma) \Rightarrow P \not\subset (\pi \cap \sigma).$$

Но P — n -мерная нулевая плоскость. Поэтому всякий вектор, косоортогональный P , принадлежит P (см. следствие выше). Итак, $(\pi \cap \sigma) \subset P$. Окончательно,

$$\pi \cap \sigma = (\pi \cap P) \cap (\sigma \cap P) = \tau \cap \eta = 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача. Пусть π_1, π_2 — две k -мерные плоскости в симплектическом R^{2n} . Всегда ли можно перевести π_1 в π_2 симплектическим преобразованием? Сколько существует классов плоскостей, не переводимых друг в друга?

Ответ. $\left[\frac{k}{2} \right] + 1$, если $k \leq n$; $\left[\frac{2n-k}{2} \right] + 1$, если $k \geq n$.

*) Два подпространства L_1 и L_2 линейного пространства L трансверсальны, если $L_1 + L_2 = L$. Две n -мерные плоскости в R^{2n} трансверсальны тогда и только тогда, когда они пересекаются лишь в точке O .

Д. Симплектическая структура и комплексная структура. Поскольку $I^2 = -E$, мы можем ввести в наше пространство \mathbb{R}^{2n} наряду с симплектической структурой $[,]$ и евклидовой структурой $(,)$ еще и комплексную структуру, определяя умножение на $i = \sqrt{-1}$ как действие I . Пространство \mathbb{R}^{2n} отождествляется при этом с комплексным пространством \mathbb{C}^n (если угодно, координатным пространством с координатами $z_k = p_k + iq_k$).

Линейные преобразования \mathbb{R}^{2n} , сохраняющие евклидову структуру, образуют *ортогональную группу* $O(n)$, сохраняющую комплексную структуру — комплексную линейную группу $GL(n, \mathbb{C})$.

Задача. Докажите, что *ортогональные и одновременно симплектические преобразования комплексны, комплексные и ортогональные симплектичны, а симплектические и комплексные ортогональны*, так что пересечения двух из трех групп равны пересечению всех трех:

$$O(2n) \cap Sp(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n).$$

Это пересечение называется *унитарной группой* $U(n)$.

Унитарные преобразования сохраняют эрмитово скалярное произведение $(\xi, \eta) + i[\xi, \eta]$; скалярное и кососкалярное произведение в \mathbb{R}^{2n} — это его вещественная и мнимая части.

§ 42. Параметрический резонанс в системах со многими степенями свободы

При исследовании колебательных систем с периодически меняющимися параметрами (см. § 25) мы выяснили, что параметрический резонанс зависит от поведения собственных чисел некоторого линейного преобразования («отображения за период»). Зависимость состоит в том, что положения равновесия системы с периодически меняющимися параметрами устойчиво, если собственные числа отображения за период по модулю меньше единицы, и неустойчиво, если хотя бы одно из собственных чисел по модулю больше единицы.

Отображение за период, полученное из системы уравнений Гамильтона с периодическими коэффициентами, является симплектическим. Исследование параметрического резонанса в системах с одной степенью свободы, проведенное в § 25, опиралось на анализ поведения собственных чисел симплектических преобразований плоскости.

В настоящем параграфе проведен аналогичный анализ поведения собственных чисел линейных симплектических преобразований фазового пространства любого числа измерений. Результаты этого анализа (принадлежащего М. Г. Крейну) применяются при исследовании условий возникновения параметрического резонанса в механических системах со многими степенями свободы.

А. Симплектические матрицы. Рассмотрим линейное преобразование симплектического пространства $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Пусть $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ — симплектическая система координат. В этой системе координат преобразование задается матрицей S .

Теорема. *Чтобы преобразование было симплектическим, необходимо и достаточно, чтобы его матрица S в симплектической*

системе координат (p, q) удовлетворяла соотношению

$$S'IS = I,$$

где $I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, а S' матрица, транспонированная к S .

Доказательство. Условие симплектичности $([S\xi, S\eta] = [\xi, \eta])$ для всех ξ, η с помощью оператора I записывается через скалярное произведение в виде

$$(IS\xi, S\eta) = (I\xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta,$$

или еще

$$(S'IS\xi, \eta) = (I\xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta,$$

что и требовалось доказать.

Б. Симметрия спектра симплектического преобразования.

Теорема. *Характеристический полином симплектического преобразования*

$$\rho(\lambda) = \det |S - \lambda E|$$

возвратный*), т. е. $\rho(\lambda) = \lambda^{2n} \rho(1/\lambda)$.

Доказательство. Мы будем пользоваться тем, что $\det S = \det I = 1$, $I^2 = -E$ и $\det A' = \det A$. По предыдущей теореме $S = -IS'^{-1}I$. Поэтому

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \det(S - \lambda E) = \det(-IS'^{-1}I - \lambda E) = \det(-S'^{-1} + \lambda E) = \\ &= \det(-E + \lambda S) = \lambda^{2n} \det\left(S - \frac{1}{\lambda} E\right) = \lambda^{2n} \rho\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если λ — собственное число симплектического преобразования, то $1/\lambda$ — также собственное число.

С другой стороны, характеристический полином веществен; поэтому, если λ — комплексное собственное число, то $\bar{\lambda}$ — собственное число, притом не совпадающее с λ .

Отсюда вытекает, что все корни λ характеристического полинома лежат симметрично относительно вещественной оси и относительно единичной окружности (рис. 176). Они разбиваются на четверки

$$\lambda, \bar{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad (|\lambda| \neq 1, \text{Im } \lambda \neq 0)$$

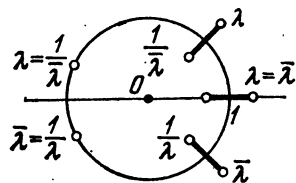


Рис. 176. Расположение собственных чисел симплектического преобразования.

*) Возвратным называется полином $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ с симметричными коэффициентами: $a_0 = a_m, a_1 = a_{m-1}, \dots$.

и пары, лежащие на вещественной оси:

$$\lambda = \bar{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

или на единичной окружности:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

Нетрудно сообразить, что кратности всех четырех точек четверки (или обеих точек пары) одинаковы.

В. Устойчивость.

Определение. Преобразование S называется *устойчивым*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow |S^N x| < \varepsilon, \quad \forall N > 0.$$

Задача. Докажите, что если хотя бы одно из собственных чисел симплектического преобразования S лежит не на единичной окружности, то S неустойчиво.

Указание. Ввиду доказанной симметрии, если хоть одно из собственных чисел лежит не на единичной окружности, существует собственное число вне единичного круга $|\lambda| > 1$; в соответствующем инвариантном подпространстве S — «растяжение с поворотом».

Задача. Докажите, что если все собственные числа линейного преобразования различны и лежат на единичной окружности, то преобразование устойчиво.

Указание. Перейти к собственному базису.

Определение. Симплектическое преобразование S называется *сильно устойчивым*, если всякое достаточно близкое к нему*) симплектическое преобразование S устойчиво.

В § 25 мы установили, что $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ сильно устойчиво, если $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Теорема. Если все $2n$ собственных числа симплектического преобразования S различны и лежат на единичной окружности, то преобразование S сильно устойчиво.

Доказательство. Заклучим $2n$ собственных чисел λ в $2n$ непересекающихся окрестностей, симметричных относительно единичной окружности и вещественной оси (рис. 177). $2n$ корней характеристического полинома зависят от элементов матрицы S непрерывно. Следовательно, если матрица S_1 достаточно близка к S , то в каждой из $2n$ окрестностей $2n$ точек λ лежит ровно одно собственное число λ_1 матрицы S_1 . Но если бы какая-либо

*) S_1 «достаточно близко» к S , если элементы матрицы S_1 в фиксированном базисе отличаются от элементов матрицы S в том же базисе меньше чем на достаточно малое число ε .

из точек λ_1 не лежала на единичной окружности, а, например, вне, то по теореме стр. 193 в той же окрестности лежала бы еще одна точка λ_2 , $|\lambda_2| < 1$, и общее число корней было бы больше $2n$, что невозможно.

Итак, все корни S_1 лежат на единичной окружности и различны: значит, S_1 устойчиво, что и требовалось доказать.

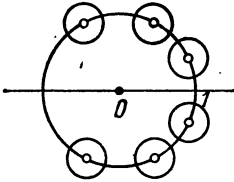


Рис. 177. Поведение простых собственных чисел при малом изменении симплектического преобразования.

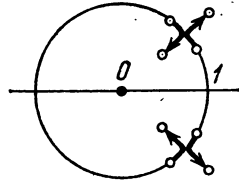


Рис. 178. Поведение кратных собственных чисел при малом изменении симплектического преобразования.

Можно сказать, что собственное число симплектического преобразования λ может покинуть единичную окружность, лишь столкнувшись с другим собственным числом (рис. 178); при этом одновременно сталкиваются комплексно-сопряженные числа, и из двух пар корней на окружности получается одна четверка (или пара вещественных λ).

Из результатов § 25 следует, что условия возникновения параметрического резонанса в линейной канонической системе с периодически меняющейся функцией Гамильтона состоят как раз в том, что соответствующее симплектическое преобразование фазового пространства перестает быть устойчивым. Из доказанной теоремы видно, что это может случиться лишь при столкновении собственных чисел на единичной окружности. В действительности, как заметил М. Г. Крейн, не всякое такое столкновение опасно.

Оказывается, собственные числа λ , $|\lambda| = 1$, делятся на два класса: *положительные* и *отрицательные*. При столкновении двух корней одинакового знака корни «проходят друг сквозь друга» и не могут сойти с единичной окружности. Напротив, два корня разных знаков при столкновении, вообще говоря, покидают единичную окружность.

Теория М. Г. Крейна выходит за рамки этой книги, но здесь будут сформулированы основные результаты в виде задач.

Задача. Пусть λ , $\bar{\lambda}$ — простые (кратности 1) собственные числа симплектического преобразования S и $|\lambda| = 1$. Докажите, что соответствующая λ , $\bar{\lambda}$ двумерная инвариантная плоскость π_λ ненулевая.

Указание. Пусть ξ_1 , ξ_2 — комплексные собственные векторы S с собственными значениями λ_1 , λ_2 . Тогда, если $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$, векторы ξ_1 , ξ_2 косоортгоналльны: $[\xi_1, \xi_2] = 0$.

Пусть ξ — вещественный вектор из плоскости π_λ , $\text{Im } \lambda > 0$, $|\lambda| = 1$. Собственное число λ называется *положительным*, если $[S\xi, \xi] > 0$.

Задача. Докажите, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора вектора $\xi \neq 0$ в плоскости π_λ .

Указание. Если бы плоскость π_λ содержала два косоортогональных неколлинеарных вектора, она была бы нулевой.

Точно так же k -кратное собственное число λ , $|\lambda| = 1$, *знакоопределенное*, если квадратичная форма $[S\xi, \xi]$ знакоопределена на соответствующем λ , $\bar{\lambda}$ инвариантном $2k$ -мерном подпространстве.

Задача. Докажите, что для сильной устойчивости S необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа λ лежали на единичной окружности и были знакоопределенными.

Указание. Квадратичная форма $[S\xi, \xi]$ инвариантна относительно S .

§ 43. Симплектический атлас

В этом параграфе доказывается теорема Дарбу, согласно которой каждое симплектическое многообразие имеет локальные координаты p, q , в которых симплектическая структура записывается простейшим образом: $\omega^2 = dp \wedge dq$.

А. Симплектические координаты. Напомню, что в определении многообразия участвует условие совместности карт атласа. Это условие на отображения $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ перехода с одной карты на другую. Отображения $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ — это отображения областей координатного пространства.

Определение. Атлас многообразия M^{2n} называется *симплектическим*, если в координатном пространстве $\mathbf{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ введена стандартная симплектическая структура $\omega^2 = dp \wedge dq$, и переход с одной карты на другую осуществляется каноническим (т. е. сохраняющим ω^2) преобразованием *) $\varphi_i^{-1}\varphi_j$.

Задача. Покажите, что симплектический атлас определяет симплектическую структуру на M^{2n} .

Справедливо также и обратное предложение: каждое симплектическое многообразие имеет симплектический атлас. Это вытекает из следующей теоремы.

Б. Теорема Дарбу.

Теорема. Пусть ω^2 — невырожденная замкнутая дифференциальная 2-форма в окрестности точки x пространства \mathbf{R}^{2n} . Тогда в некоторой окрестности точки x можно выбрать такую систему локальных координат $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$, что форма примет стандартный вид

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

*) Аналогично определяются, например, комплексно-аналитические многообразия: в координатном пространстве должна быть комплексная структура, а переход с одной карты на другую должен быть комплексно-аналитическим.

Эта теорема позволяет немедленно распространить на все симплектические многообразия любое утверждение локального характера, инвариантное относительно канонических преобразований и доказанное для стандартного фазового пространства $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2 = dp \wedge dq)$.

В. Построение координат p_1 и q_1 . В качестве первой координаты p_1 возьмем линейную непостоянную функцию (можно было бы взять любую дифференцируемую функцию, дифференциал которой отличен от нуля в точке x). Будем для простоты считать, что $p_1(x) = 0$.

Обозначим через $P_1 = Idp_1$ гамильтоново поле, соответствующее функции p_1 (рис. 179). Заметим, что $P_1(x) \neq 0$. Поэтому через точку x можно провести гиперплоскость N^{2n-1} , не содержащую вектор $P_1(x)$ (вместо N^{2n-1} можно было бы взять любую поверхность, трансверсальную $P_1(x)$).

Рассмотрим гамильтонов поток P_1^t с функцией Гамильтона p_1 . Рассмотрим время t , нужное, чтобы дойти от N до точки $z = P_1^t y$ ($y \in N$) под действием потока P_1^t , как функцию точки z . По обычным теоремам теории обыкновенных дифференциальных уравнений эта функция определена и дифференцируема в окрестности точки $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Обозначим ее через q_1 . Заметим, что $q_1 = 0$ на N и что производная функции q_1 по направлению поля P_1 равна 1. Итак, скобка Пуассона построенных функций q_1 и p_1 равна 1:

$$(q_1, p_1) \equiv 1.$$

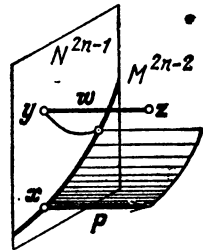


Рис. 179. Построение симплектических координат.

Г. Построение симплектических координат индукцией по n .

Если $n = 1$, то построение закончено. Пусть $n > 1$. Мы будем предполагать, что теорема Дарбу для \mathbb{R}^{2n-2} уже доказана.

Рассмотрим множество M , заданное уравнениями $p_1 = q_1 = 0$. Дифференциалы dp_1 и dq_1 в точке x линейно независимы, так как $\omega^2(I dp_1, I dq_1) = (q_1, p_1) \equiv 1$. Итак, по теореме о неявной функции в окрестности точки x множество M является многообразием размерности $2n - 2$; мы будем обозначать его M^{2n-2} .

Лемма. Симплектическая структура ω^2 в \mathbb{R}^{2n} задает в некоторой окрестности точки x на M^{2n-2} симплектическую структуру.

Доказательство. Нуждается в доказательстве лишь невырожденность ω^2 на TM_x . Рассмотрим линейное симплектическое пространство $TR^{2n}x$. Векторы $P_1(x), Q_1(x)$ гамильтоновых полей с функциями Гамильтона p_1 и q_1 принадлежат $TR^{2n}x$. Пусть $\xi \in TM_x$. Производные p_1 и q_1 по направлению ξ равны нулю. Значит, $dp_1(\xi) = \omega^2(P_1, \xi) = 0, dq_1(\xi) = \omega^2(Q_1, \xi) = 0$. Итак,

TM_x есть косоортогональное дополнение к $P_1(x)$, $Q_1(x)$. Согласно § 41, Б форма ω^2 на TM_x невырождена. Лемма доказана.

По предположению индукции на симплектическом многообразии $(M^{2n-2}, \omega^2|_M)$ в окрестности точки x существуют симплектические координаты. Обозначим их p_i, q_i ($i=2, \dots, n$). Продолжим функции p_2, \dots, q_n на окрестность точки x в \mathbb{R}^{2n} следующим образом. Каждую точку z окрестности точки x в \mathbb{R}^{2n} можно единственным образом представить в виде $z = P_1^t Q_1^s \omega$, где $\omega \in M^{2n-2}$, а s и t — малые числа. Значения координат p_2, \dots, q_n в точке z положим равными их значениям в точке ω (рис. 179).

Построенные $2n$ функций $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$ образуют в окрестности точки x в \mathbb{R}^{2n} локальную координатную систему.

Д. Доказательство симплектичности построенных координат. Обозначим через P_i^t, Q_i^s ($i=1, \dots, n$) гамильтоновы потоки с функциями Гамильтона p_i, q_i , а через P_i, Q_i — соответствующие векторные поля. Сосчитаем скобки Пуассона функций p_1, \dots, q_n . Мы уже видели в пункте В, что $(q_1, p_1) \equiv 1$. Следовательно, потоки P_1^t и Q_1^s коммутируют: $P_1^t Q_1^s = Q_1^s P_1^t$.

Вспомогательная определение функций p_2, \dots, q_n , видим, что каждая из них инвариантна относительно потоков P_1^t и Q_1^s . Итак, скобки Пуассона p_1 и q_1 со всеми $2n-2$ функциями p_i, q_i ($i > 1$) равны нулю.

Отображение $P_1^t Q_1^s$ коммутирует поэтому со всеми $2n-2$ потоками P_i^t, Q_i^s ($i > 1$). Следовательно, оно оставляет на месте каждое из $2n-2$ векторных полей P_i, Q_i ($i > 1$). Отображение $P_1^t Q_1^s$ сохраняет симплектическую структуру ω^2 , так как потоки P_1^t и Q_1^s гамильтоновы. Поэтому значения в точках $z = P_1^t Q_1^s \omega \in \mathbb{R}^{2n}$ и $\omega \in M^{2n-2}$ формы ω^2 на векторах любых двух из $2n-2$ полей P_i, Q_i ($i > 1$) одинаковы. Но эти значения равны значениям скобок Пуассона соответствующих функций Гамильтона. Итак, значения скобки Пуассона любых двух из $2n-2$ координат p_i, q_i ($i > 1$) в точках z и ω одинаковы, если $z = P_1^t Q_1^s \omega$.

Функции p_1 и q_1 являются первыми интегралами каждого из $2n-2$ потоков P_i^t, Q_i^s ($i > 1$). Поэтому каждое из $2n-2$ полей P_i, Q_i ($i > 1$) касается многообразия уровня $p_1 = q_1 = 0$. Но это многообразие есть M^{2n-2} . Поэтому каждое из $2n-2$ полей $P_i Q_i$ ($i > 1$) касается M^{2n-2} . Следовательно, эти поля являются гамильтоновыми полями на симплектическом многообразии $(M^{2n-2}, \omega^2|_M)$, и соответствующие функции Гамильтона равны $p_i|_M, q_i|_M$ ($i > 1$). Итак, скобка Пуассона во всем пространстве $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2)$ любых двух из $2n-2$ координат p_i, q_i ($i > 1$), рассматриваемая на M^{2n-2} , совпадает со скобкой Пуассона этих координат в симплектическом пространстве $(M^{2n-2}, \omega^2|_M)$.

Но по предположению индукции координаты на $M^{2n-2} (p_i |_{M_i}, q_i |_{M_i}; i > 1)$ симплектические. Поэтому во всем пространстве \mathbb{R}^{2n} скобки Пуассона построенных координат имеют стандартные значения

$$(p_i, p_j) \equiv (p_i, q_j) \equiv (q_i, q_j) \equiv 0, (q_i, p_i) \equiv 1.$$

Такой же вид имеют скобки Пуассона координат p, q в \mathbb{R}^{2n} , если $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$. Но билинейная форма ω^2 определяется своими значениями на парах базисных векторов. Следовательно, скобки Пуассона координатных функций определяют вид ω^2 однозначно. Итак,

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Теорема Дарбу доказана.

КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

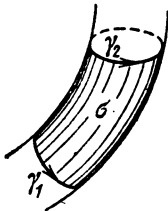
В этой главе преобладает координатная точка зрения. Развитый Гамильтоном и Якоби аппарат производящих функций канонических преобразований является самым мощным из имеющихся методов интегрирования дифференциальных уравнений динамики. Кроме этого аппарата, глава содержит «нечетномерный» подход к гамильтоновым фазовым потокам.

Эта глава независима от предыдущей. Она содержит новые доказательства ряда результатов главы 8, а также объяснение происхождения теории симплектических многообразий.

§ 44. Интегральный инвариант Пуанкаре — Картана

В этом параграфе рассматривается геометрия 1-форма в нечетномерном пространстве.

А. Гидродинамическая лемма. Пусть v — векторное поле в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве R^3 , $r = \text{rot } v$ — поле его ротора. Интегральные кривые r называются *линиями ротора* или *вихревыми линиями*. Пусть γ_1 — замкнутая кривая в R^3 (рис. 180). Линии ротора, проходящие через точки γ_1 , образуют *трубку ротора*.



Пусть γ_2 — другая кривая, охватывающая ту же трубку ротора, так что $\gamma_1 - \gamma_2 = d\sigma$, где σ — 2-цепь, представляющая часть трубки ротора. Справедлива

Лемма Стокса. *Циркуляция поля v по обеим кривым γ_1 и γ_2 одинакова:*

Рис. 180. Трубка ротора.

$$\oint_{\gamma_1} v \, dl = \oint_{\gamma_2} v \, dl.$$

Доказательство. По формуле Стокса $\int_{\gamma_1} v \, dl - \int_{\gamma_2} v \, dl = \iint_{\sigma} \text{rot } v \, dn = 0$, так как $\text{rot } v$ касается трубки ротора, ч. т. д.

Б. Многомерная лемма Стокса. Оказывается, лемма Стокса допускает обобщение на случай любого нечетномерного многообразия M^{2n+1} (вместо \mathbb{R}^3). Чтобы сформулировать это обобщение, перейдем от векторных полей к дифференциальным формам.

Циркуляция поля ν есть интеграл 1-формы $\omega^1(\omega^1(\xi) = (\nu, \xi))$. Ротору поля ν соответствует 2-форма $\omega^2 = d\omega^1(d\omega^1(\xi, \eta) = (r, \xi, \eta))$. Из этой формулы видно, что в каждой точке существует направление (а именно, направление ротора r , рис. 181), обладающее тем свойством, что циркуляция ν по краю всякой «бесконечно малой площадки», содержащей r , равна нулю:

$$d\omega^1(r, \eta) = 0 \quad \forall \eta.$$

Действительно, $d\omega^1(r, \eta) = (r, r, \eta) = 0$.

Замечание. Переход от 2-формы $\omega^2 = d\omega^1$ к полю ротора r — не инвариантная операция: она зависит от евклидовой структуры \mathbb{R}^3 .

Однако *направление* *) ротора r инвариантно связано с 2-формой ω^2 (и, значит, с 1-формой ω^1). Действительно, легко проверить, что если $r \neq 0$, то направление r определяется условием $\{\omega^2(r, \eta) = 0 \quad \forall \eta\}$ однозначно.

Алгебраической основой многомерной леммы Стокса является существование оси у всякого вращения нечетномерного пространства.

Лемма. Пусть ω^2 — алгебраическая внешняя 2-форма в нечетномерном линейном пространстве \mathbb{R}^{2n+1} . Тогда существует вектор $\xi \neq 0$ такой, что

$$\omega^2(\xi, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Доказательство. Кососимметрическая форма ω^2 задается кососимметрической матрицей A

$$\omega^2(\xi, \eta) = (A\xi, \eta)$$

нечетного порядка $2n+1$. Определитель такой матрицы равен нулю, так как

$$A' = -A, \quad \det A = \det A' = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A.$$

Итак, определитель A равен нулю. Значит A имеет собственный вектор $\xi \neq 0$ с собственным значением 0, что и требовалось доказать.

Вектор ξ , для которого $\omega^2(\xi, \eta) \equiv 0$ при всех η , называется *нулевым вектором формы ω^2* . Очевидно, все нулевые векторы ω^2 образуют линейное подпространство. Форма называется *неособой*,

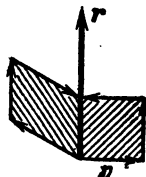


Рис. 181. Ось, инвариантно связанная с 2-формой в нечетномерном пространстве.

*) То есть неориентированная прямая с направляющим вектором r в TR_{2n+1} .

если размерность этого пространства — минимальная возможная (т. е. 1 в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^{2n+1} , 0 в четномерном).

Задача. Рассмотрим в четномерном пространстве \mathbb{R}^{2n} с координатами $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$ 2-форму $\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$. Докажите, что форма ω^2 неособа.

Задача. Рассмотрим в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^{2n+1} с координатами $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n; t$ 2-форму $\omega^2 = \sum p_i dq_i - \omega^1 dt$, где ω^1 — любая 1-форма в \mathbb{R}^{2n+1} . Докажите, что форма ω^2 неособа.

Если ω^2 — неособая форма в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^{2n+1} , то все нулевые векторы ξ формы ω^2 лежат на одной прямой. Эта прямая инвариантно связана с формой ω^2 .

Пусть теперь M^{2n+1} — нечетномерное дифференцируемое многообразие, ω^1 — 1-форма на M . По предыдущей лемме в каждой точке $x \in M$ имеется направление (т. е. прямая $\{\xi\}$ в касательном пространстве TM_x), обладающее тем свойством, что интеграл ω^1 по краю «бесконечно малой площадки, содержащей это направление», равен нулю:

$$d\omega^1(\xi, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in TM_x.$$

Пусть далее 2-форма $d\omega^1$ неособа. Тогда направление ξ определено однозначно. Мы назовем его «направлением ротора» формы ω^1 .

Интегральные кривые поля направлений ротора называются *линиями ротора* (или *характеристиками*) формы ω^1 .

Пусть γ_1 — замкнутая кривая на M . Линии ротора, выходящие из точек γ_1 , образуют «трубку ротора». Справедлива

Многомерная лемма Стокса:

Интеграл 1-формы ω^1 по любой из двух кривых, охватывающих одну и ту же трубку ротора, одинаков: $\int_{\gamma_1} \omega^1 = \int_{\gamma_2} \omega^1$, если

$\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, где σ — кусок трубки ротора.

Доказательство. По формуле Стокса

$$\int_{\gamma_1} \omega^1 - \int_{\gamma_2} \omega^1 = \int_{\partial\sigma} \omega^1 = \int_{\sigma} d\omega^1.$$

Но значение $d\omega^1$ на любой паре векторов, касательных к трубке ротора, равно нулю. (Действительно, эти два вектора лежат в 2-плоскости, проходящей через направление ротора, а на этой плоскости $d\omega^1$ обращается в 0.)

Итак, $\int_{\sigma} d\omega^1 = 0$, что и доказывает лемму.

В. Канонические уравнения Гамильтона. Из леммы Стокса непосредственно вытекают все основные положения гамильтоновой механики.

Рассмотрим в качестве M^{2n+1} «расширенное фазовое пространство \mathbb{R}^{2n+1} » с координатами $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n; t$. Пусть дана функция $H = H(p, q, t)$. Тогда можно составить *) 1-форму

$$\omega^1 = p dq - H dt \quad (p dq = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n).$$

Применим к ω^1 лемму Стокса (рис. 182).

Теорема. *Линии ротора формы $\omega^1 = p dq - H dt$ в $2n + 1$ -мерном расширенном фазовом пространстве p, q, t однозначно проектируются на ось t , т. е. задаются функциями $p = p(t), q = q(t)$. Эти функции удовлетворяют системе канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона H :*

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (1)$$

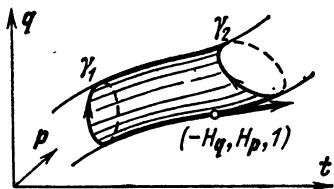


Рис. 182. Гамильтоново поле и линии ротора формы $p dq - H dt$.

Иными словами, линии ротора формы $p dq - H dt$ суть траектории фазового потока в расширенном фазовом пространстве, т. е. интегральные кривые канонических уравнений (1).

Доказательство. Дифференциал формы $p dq - H dt$ равен

$$d\omega^1 = \sum_{i=1}^n \left(dp_i \wedge dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \wedge dt \right).$$

Из этого выражения видно, что матрица 2-формы $d\omega^1$ в координатах p, q, t имеет вид (проверьте!)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -E & H_p \\ E & 0 & H_q \\ -H_p & -H_q & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{где } E = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & \\ & \dots & \\ & & 1 \end{vmatrix}}_n, \quad H_p = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H_q = \frac{\partial H}{\partial q}.$$

Ранг этой матрицы равен $2n$ (левый верхний $2n$ -угол невырожден). Поэтому 2-форма $d\omega^1$ неособа. Непосредственно проверяется, что вектор $(-H_q, H_p, 1)$ — собственный вектор матрицы A с собственным значением 0 (проверьте!). Значит, он задает направление линий ротора формы $p dq - H dt$. Но вектор $(-H_q, H_p, 1)$ есть как раз вектор скорости фазового потока (1). Итак, интегральные кривые (1) суть линии ротора формы $p dq - H dt$, что и требовалось доказать.

*) Форма ω^1 кажется взятой с потолка. Мы увидим в следующих параграфах, как идея рассмотреть эту форму возникла из оптики.

Г. Теорема об интегральном инварианте Пуанкаре — Картана. Применим теперь лемму Стокса. Получается фундаментальная

Теорема. Пусть две замкнутые кривые γ_1, γ_2 охватывают одну и ту же трубку фазовых траекторий (1). Тогда интегралы формы $p dq - H dt$ по ним одинаковы:

$$\oint_{\gamma_1} p dq - H dt = \oint_{\gamma_2} p dq - H dt.$$

Форма $p dq - H dt$ называется *интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана* *).

Доказательство. Фазовые траектории суть линии ротора формы $p dq - H dt$, а интегралы по охватывающим одну трубку ротора замкнутым кривым одинаковы по лемме Стокса, ч. т. д.

Рассмотрим, в частности, кривые, составленные из одновременных состояний, т. е. лежащие в плоскостях $t = \text{const}$ (рис. 183).

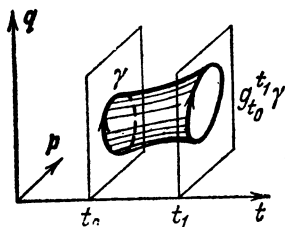


Рис. 183. Интегральный инвариант Пуанкаре.

Вдоль таких кривых $dt = 0$, и $\oint p dq - H dt = \oint p dq$. Из предыдущей теоремы получается важное

Следствие 1. Фазовый поток сохраняет интеграл формы $p dq = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ по замкнутым кривым.

Действительно, пусть $g_{t_0}^{t_1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — преобразование фазового пространства (p, q) , осуществляемое фазовым потоком за время от t_0 до t_1 (т. е. $g_{t_0}^{t_1}(p_0, q_0)$ есть решение канонических уравнений (1) с начальными условиями $p(t_0) = p_0, q(t_0) = q_0$).

Пусть γ — любая замкнутая кривая в пространстве $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ ($t = t_0$). Тогда $g_{t_0}^{t_1}\gamma$ есть замкнутая кривая в пространстве \mathbb{R}^{2n} ($t = t_1$), охватывающая ту же трубку фазовых траекторий в \mathbb{R}^{2n+1} . По предыдущей теореме, так как $dt = 0$ на γ и на $g_{t_0}^{t_1}\gamma$, находим $\oint_{\gamma} p dq = \oint_{g_{t_0}^{t_1}\gamma} p dq$,

что и требовалось доказать.

Форма $p dq$ называется *относительным интегральным инвариантом Пуанкаре*. Он имеет простой геометрический смысл. Пусть σ — двумерная ориентированная цепь, $\gamma = \partial\sigma$. Тогда находим по формуле Стокса

$$\oint_{\gamma} p dq = \iint_{\sigma} dp \wedge dq.$$

Итак, доказано важное

*) В вариационном исчислении $\int p dq - H dt$ называется инвариантным интегралом Гильберта.

Следствие 2. Фазовый поток сохраняет сумму ориентированных площадей проекций поверхности на n координатных плоскостей (p_i, q_i) :

$$\iint_{\sigma} dp \wedge dq = \iint_{g^i \sigma} dp \wedge dq.$$

Иными словами, 2-форма $\omega^2 = dp \wedge dq$ является абсолютным интегральным инвариантом фазового потока.

Пример. При $n=1$ ω^2 есть площадь, и мы получаем теорему Лиувилля: фазовый поток сохраняет площадь.

Д. Канонические отображения. Пусть g — дифференцируемое отображение фазового пространства $\mathbf{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ в \mathbf{R}^{2n} .

Определение. Отображение g называется каноническим, если g сохраняет 2-форму $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Из предыдущих рассуждений видно, что это определение можно записать в любом из трех эквивалентных видов:

1) $g^* \omega^2 = \omega^2$ (g сохраняет 2-форму $\sum dp_i \wedge dq_i$);

2) $\iint_{\sigma} \omega^2 = \iint_{g\sigma} \omega^2 \forall \sigma$ (g сохраняет сумму площадей проекций любой поверхности);

3) $\oint_{\gamma} p dq = \oint_{g\gamma} p dq$ (форма $p dq$ — относительный интегральный инвариант g).

Задача. Покажите, что определения 1), 2) эквивалентны 3), если речь идет об отображении односвязной области в фазовом пространстве \mathbf{R}^{2n} ; в общем случае $3 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 1$.

Предыдущие следствия теперь можно сформулировать так:

Теорема. Преобразование фазового пространства, осуществляемое фазовым потоком, каноническое*).

Пусть $g: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ — каноническое преобразование: g сохраняет форму ω^2 . Тогда g сохраняет также и внешний квадрат ω^2 :

$$g^*(\omega^2 \wedge \omega^2) = \omega^2 \wedge \omega^2, \quad g^*(\omega^2)^k = (\omega^2)^k.$$

Внешние степени формы $\sum dp_i \wedge dq_i$ пропорциональны формам

$$\omega^4 = \sum_{i < j} dp_i \wedge dp_j \wedge dq_i \wedge dq_j,$$

$$\omega^{2k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} dp_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \dots \wedge dq_{i_k}.$$

Итак, доказана

Теорема. Канонические преобразования сохраняют интегральные инварианты $\omega^4, \dots, \omega^{2n}$.

* Доказательство этой теоремы, приведенное на рис. 182 прекрасного учебника Ландау и Лифшица (Механика, Физматгиз, М., 1958), ошибочно.

Геометрически интеграл формы ω^{2k} означает сумму ориентированных объемов проекций на координатные плоскости $(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}, q_{i_1}, \dots, q_{i_k})$.

В частности, форма ω^{2n} пропорциональна элементу объема, и мы получаем

Следствие. *Каноническое преобразование сохраняет элемент объема в фазовом пространстве:*

объем gD = объем D для любой области D .

В частности, в применении к фазовому потоку получаем

Следствие. *Фазовый поток (1) имеет интегральными инвариантами формы $\omega^2, \omega^4, \dots, \omega^{2n}$.*

Последний из инвариантов есть фазовый объем, так что мы вновь доказали теорему Лиувилля.

§ 45. Следствия из теоремы об интегральном варианте Пуанкаре — Картана

В этом параграфе доказано, что канонические преобразования сохраняют вид уравнений Гамильтона, что один первый интеграл уравнений Гамильтона позволяет понизить порядок системы сразу на две единицы и что движение в лагранжевой натуральной системе происходит по геодезической конфигурационного пространства, снабженного некоторой римановой метрикой.

А. Замены переменных в канонических уравнениях. Из инвариантности связи формы $p dq - H dt$ с ее линиями ротора вытекает способ писать уравнения движения в любой системе $2n + 1$ координат в расширенном фазовом пространстве $\{(p, q, t)\}$.

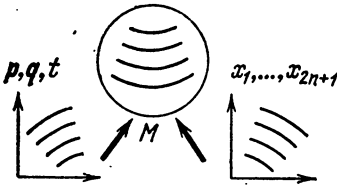


Рис. 184. Замена переменных в уравнениях Гамильтона.

Пусть (x_1, \dots, x_{2n+1}) — координатные функции в некоторой карте расширенного фазового пространства (рассматриваемого как многообразие M^{2n+1} , рис. 184). Координаты (p, q, t) можно рассматривать как задающие другую карту M . Форму $\omega^1 = p dq - H dt$ можно рассматривать

как дифференциальную 1-форму на M . С этой формой инвариантным образом (не зависящим от карт) образом связано семейство линий на M — линий ротора. На карте (p, q, t) эти линии изображаются траекториями фазового потока

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

с функцией Гамильтона $H(p, q, t)$.

Пусть форма ω^1 в координатах (x_1, \dots, x_{2n+1}) записывается в виде

$$p dq - H dt = X_1 dx_1 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1}.$$

Теорема. На карте (x_i) траектории (1) изображаются линиями ротора формы $\sum X_i dx_i$.

Доказательство. Линии ротора форм $\sum X_i dx_i$ и $p dq - H dt$ суть изображения на двух разных картах линий ротора одной и той же формы на M . Но интегральные кривые (1) суть линии ротора $p dq - H dt$. Значит, их образы на карте (x_i) суть линии ротора формы $\sum X_i dx_i$, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $(P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n; T)$ — локальная система координат в расширенном фазовом пространстве (p, q, t) и $K(P, Q, T)$, $S(P, Q, T)$ — такие функции, что

$$p dq - H dt = P dQ - K dT + dS$$

(левая и правая части суть формы на расширенном фазовом пространстве).

Тогда траектории фазового потока (1) изображаются на карте (P, Q, T) интегральными кривыми канонических уравнений

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P}. \quad (2)$$

Доказательство. По предыдущей теореме траектории (1) изображаются линиями ротора формы $P dQ - K dT + dS$. Но dS на линии ротора не влияет (так как $d dS = 0$). Поэтому изображения траекторий (1) суть линии ротора формы $P dQ - K dT$. Согласно § 44, В линии ротора такой формы суть интегральные кривые канонических уравнений (2), что и требовалось доказать.

В частности, пусть $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — каноническое преобразование фазового пространства, переводящее точку с координатами (p, q) в точку с координатами (P, Q) .

Функции $P(p, q)$, $Q(p, q)$ можно рассматривать как новые координаты в фазовом пространстве.

Теорема. В новых координатах (P, Q) канонические уравнения (1) имеют канонический вид *)

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad (3)$$

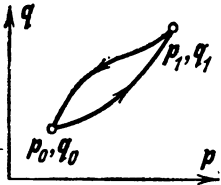
со старой функцией Гамильтона: $K(P, Q, t) = H(p, q, t)$.

*) В некоторых учебниках свойство сохранять канонический вид уравнений Гамильтона принято за определение канонических преобразований. В действительности это определение не эквивалентно общепринятому и приведенному выше. Например, не каноническое в нашем смысле преобразование $P = 2p$, $Q = q$ сохраняет гамильтонов вид уравнений движения. Путаница вкралась даже в прекрасный учебник Ландау и Лифшица (Механика, Физматгиз, М., 1958), в § 45 которого доказывается, что всякое преобразование, сохраняющее канонические уравнения, каноническое в нашем смысле.

Доказательство. Рассмотрим 1-форму $p dq - P dQ$ в R^{2n} . Для любой замкнутой кривой γ имеем (рис. 185)

$$\oint_{\gamma} p dq - P dQ = \oint_{\gamma} p dq - \oint_{\gamma} P dQ = 0$$

ввиду каноничности g . Поэтому $\int_{p_0, q_0}^{p_1, q_1} p dq - P dQ = S$ не зависит от пути интегрирования, но зависит лишь от конечной точки



(p_1, q_1) (при фиксированной начальной точке (p_0, q_0)). Итак, $dS = p dq - P dQ$. Следовательно, в расширенном фазовом пространстве

$$p dq - H dt = P dQ - H dt + dS,$$

и применима предыдущая теорема. При этом (2) превращается в (3), что и требовалось доказать.

Рис. 185. Замкнутость формы $p dq - P dQ$.

Задача. Пусть $g(t): R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ — каноническое преобразование фазового пространства, зависящее от параметра t , $g(t)(p, q) = (P(p, q, t), Q(p, q, t))$. Докажите, что канонические уравнения (1) в переменных P, Q, t имеют канонический вид с новой функцией Гамильтона

$$K(P, Q, t) = H(p, q, t) - \frac{\partial S}{\partial t}, \text{ где } S(p_1, q_1, t) = \int_{p_0, q_0}^{p_1, q_1} p dq - P dQ.$$

Б. Понижение порядка с помощью интеграла энергии. Пусть теперь функция Гамильтона $H(p, q)$ не зависит от времени. Тогда канонические уравнения (1) имеют первый интеграл: $H(p(t), q(t)) = \text{const}$. Оказывается, с помощью этого интеграла можно понизить размерность пространства $(2n+1)$ на две единицы, сведя задачу к интегрированию некоторой системы канонических уравнений в $2n-1$ -мерном пространстве.

Предположим, что (в некоторой области) уравнение $h = H(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ можно разрешить относительно p_1 :

$$p_1 = K(P, Q, T; h),$$

где $P = (p_2, \dots, p_n)$; $Q = (q_2, \dots, q_n)$; $T = -q_1$.

Тогда находим

$$p dq - H dt = P dQ - K dT - d(Ht) + t dH.$$

Пусть теперь γ — интегральная кривая канонических уравнений (1), лежащая на $2n$ -мерной поверхности $H(p, q) = h$ в R^{2n+1} . Тогда γ есть линия ротора формы $p dq - H dt$ (рис. 186). Спроектируем расширенное фазовое пространство $R^{2n+1} = \{(p, q, t)\}$ на фазовое пространство $R^{2n} = \{(p, q)\}$. Поверхность $H = h$ спроектируется в $2n-1$ -мерное подмногообразие $M^{2n-1}: H(p, q) = h$

в \mathbb{R}^{2n} , а кривая γ — в кривую $\bar{\gamma}$, лежащую на этом подмногообразии. Величины P, Q, T образуют локальные координаты в M^{2n-1} .

Задача. Докажите, что кривая $\bar{\gamma}$ является линией ротора формы $p dq = P dQ - K dT$ на M^{2n-1} .

Указание. $d(Ht)$ не влывает на линии ротора, а dH на M есть нуль.

Но линии ротора формы $P dQ - K dT$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона (2). Итак, доказана

Теорема. Фазовые траектории уравнений (1) на поверхности $M^{2n-1}, H = h$, удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\frac{dp_i}{dq_i} = \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dp_i} = -\frac{\partial K}{\partial p_i} \quad (i = 2, \dots, n),$$

где функция $K(p_2, \dots, p_n; q_2, \dots, q_n; T, h)$ определяется из уравнения $H(K, p_2, \dots, p_n; -T, q_2, \dots, q_n) = h$.

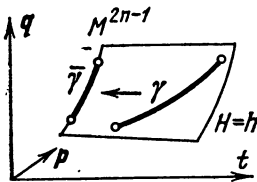


Рис. 186. Понижение порядка гамильтоновой системы.

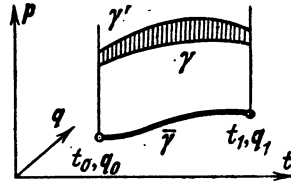


Рис. 187. Принцип наименьшего действия в фазовом пространстве.

В. Принцип наименьшего действия в фазовом пространстве.

Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве $\{(p, q, t)\}$ интегральную кривую γ канонических уравнений (1), соединяющую точки (p_0, q_0, t_0) и (p_1, q_1, t_1) .

Теорема. Интеграл $\int p dq - H dt$ имеет γ экстремалью относительно вариаций γ , при которых концы кривой остаются на n -мерных подпространствах $(t = t_0, q = q_0)$ и $(t = t_1, q = q_1)$.

Доказательство. Кривая γ — линия ротора формы $p dq - H dt$ (рис. 187). Поэтому интеграл $\int p dq - H dt$ по «бесконечно малому параллелограмму, проходящему через направление ротора», равен нулю.

Иными словами, приращение $\int_{\gamma'} - \int_{\gamma} p dq - H dt$ есть малая высшего порядка по сравнению с отличием кривых γ' и γ , что и требовалось доказать.

Если это рассуждение покажется недостаточно строгим, его можно заменить выкладкой:

$$\begin{aligned} \delta \int_{\gamma} (p\dot{q} - H) dt &= \int_{\gamma} \left(\dot{q} \delta p + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right) dt = \\ &= p \delta q \Big|_0^1 + \int_{\gamma} \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt. \end{aligned}$$

Мы видим, что интегральные кривые уравнений Гамильтона — единственные экстремали интеграла $\int p dq - H dt$ в классе кривых γ , концы которых лежат на n -мерных подпространствах $(t = t_0, q = q_0)$ и $(t = t_1, q = q_1)$ расширенного фазового пространства. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона есть частный случай рассмотренного выше принципа. Действительно, вдоль экстремали имеем

$$\int_{t_0, q_0}^{t_1, q_1} p dq - H dt = \int_{t_0}^{t_1} (p\dot{q} - H) dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

(ибо лагранжиан L и гамильтониан H — преобразования Лежандра друг — друга).

Далее, пусть $\bar{\gamma}$ (рис. 188) есть проекция экстремали γ на плоскость q, t . Любой близкой кривой $\bar{\gamma}'$, соединяющей те же точки (t_0, q_0) и (t_1, q_1) на плоскости q, t , сопоставим кривую γ' в фазовом (p, q, t) -пространстве, полагая $p = \partial L / \partial \dot{q}$. Тогда вдоль γ' также $\int p dq - H dt = \int L dt$.

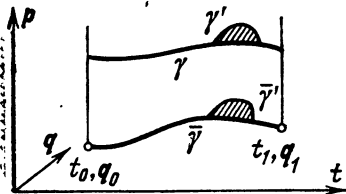


Рис. 188. Кривые сравнения для принципов наименьшего действия в конфигурационном и в фазовом пространствах.

Но по доказанной теореме $\delta \int p dq - H dt = 0$

для любых вариаций кривой γ (при граничных условиях $(t = t_0, q = q_0)$ и $(t = t_1, q = q_1)$). В частности, это верно для вариаций специального вида, переводящих γ в γ' . Значит, $\bar{\gamma}$ есть экстремаль $\int L dt$, что и требовалось доказать.

В доказанной теореме к сравнению с γ допускается значительно более широкий класс кривых γ' , чем в принципе Гамильтона: на связь p с \dot{q} не накладывается никаких ограничений. Может показаться удивительным, что оба принципа, тем не менее, эквивалентны: из экстремальности в более узком классе вариаций ($p = \partial L / \partial \dot{q}$) следует экстремальность при любых вариациях. Объяснение состоит в том, что при фиксированном \dot{q} величина $p = \partial L / \partial \dot{q}$ экстремизирует $p\dot{q} - H$ (см. определение преобразования Лежандра, § 14, стр. 55).

Г. Принцип наименьшего действия в форме Мопертюи — Эйлера — Лагранжа — Якоби. Пусть теперь функция Гамильтона $H(p, q)$ не зависит от времени. Тогда $H(p, q)$ есть первый интеграл уравнений Гамильтона (1). Спроектируем поверхность $H(p, q) = h$ из расширенного фазового пространства $\{(p, q, t)\}$ в пространство $\{(p, q)\}$. Получится $2n - 1$ -мерная поверхность $H(p, q) = h$ в \mathbb{R}^{2n} , которую мы уже рассматривали в пункте Б и которую мы обозначили M^{2n-1} .

Фазовые траектории канонических уравнений (1), начинающиеся на поверхности M^{2n-1} , целиком лежат на поверхности M^{2n-1} . Они являются линиями ротора формы $p dq = P dQ - K dt$

(в обозначениях пункта Б) на M^{2n-1} . Согласно теореме пункта В, кривые (1) на M^{2n-1} — экстремали вариационного принципа, соответствующего этой форме. Итак, доказана

Теорема. Если функция Гамильтона $H = H(p, q)$ не зависит от времени, то фазовые траектории канонических уравнений (1), лежащие на поверхности M^{2n-1} : $H(p, q) = h$, являются экстремальными интеграла $\int p dq$ в классе кривых, лежащих на M^{2n-1} и соединяющих подпространства $q = q_0$ и $q = q_1$.

Рассмотрим теперь проекцию экстремали, лежащей на поверхности M^{2n-1} : $H(p, q) = h$, на q -пространство. Эта кривая соединяет точки q_0 и q_1 .

Пусть, далее, γ — другая кривая, соединяющая точки q_0 и q_1 (рис. 189). Эта кривая γ является проекцией некоторой кривой $\hat{\gamma}$ на поверхности M^{2n-1} . А именно, выберем на γ параметр τ , $a \leq \tau \leq b$, $\gamma(a) = q_0$, $\gamma(b) = q_1$. Тогда в каждой точке q кривой γ определен вектор скорости $\dot{q} = \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau)$, и соответствующий импульс $p = \partial L / \partial \dot{q}$. Если параметр τ подобран так, что $H(p, q) = h$, то мы получаем кривую $\hat{\gamma}$: $q = \gamma(\tau)$, $p = \partial L / \partial \dot{q}$ на поверхности M^{2n-1} .

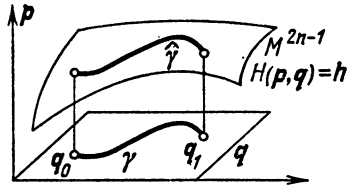


Рис. 189. Принцип Мопертюи.

Применяя предыдущую теорему к кривым $\hat{\gamma}$ на M^{2n-1} , получаем

Следствие. Среди всех кривых $q = \gamma(\tau)$, соединяющих две точки q_0 и q_1 на плоскости q и параметризованных так, что функция Гамильтона имеет фиксированное значение $H(\partial L / \partial \dot{q}, q) = h$, траекторией уравнений динамики (1) является экстремаль интеграла «укороченного действия»

$$\int_{\gamma} p dq = \int_{\gamma} p \dot{q} d\tau = \int_{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tau) \dot{q}(\tau) d\tau.$$

Это и есть принцип наименьшего действия Мопертюи (Эйлера — Лагранжа — Якоби)*. Важно отметить, что отрезок $a \leq \tau \leq b$, параметризующий кривую γ , не фиксирован и может быть разным у сравниваемых кривых. Зато одинаковой должна быть энергия (функция Гамильтона). Заметим также, что принцип определяет форму траектории, но не время: для определения времени нужно воспользоваться постоянной энергии.

*) «Почти во всех учебниках, даже в лучших, этот принцип представлен так, что его нельзя понять». (К. Якоби, Лекции по динамике, 1842—1843, Гостехиздат, М.—Л., 1936). Не решаясь нарушать традицию. Поучительное «доказательство» принципа Мопертюи имеется в § 44 учебника механики Ландау и Лифшица. (Механика, Физматгиз, М., 1958).

Особенно простую форму доказанный принцип принимает в случае, когда система представляет движение по инерции по гладкому многообразию.

Теорема. Материальная точка, вынужденная оставаться на гладком римановом многообразии, движется по геодезической линии (т. е. по экстремали длины $\int ds$).

Доказательство. Действительно, в нашем случае

$$H = L = T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2T = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2.$$

Следовательно, чтобы обеспечить фиксированное значение $H = h$, параметр τ надо выбирать пропорциональным длине: $d\tau = \frac{ds}{\sqrt{2h}}$.

Интеграл укороченного действия тогда равен

$$\int_{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\tau = \int_{\gamma} \sqrt{2h} ds = \sqrt{2h} \int_{\gamma} ds,$$

поэтому экстремали суть геодезические нашего многообразия, что и требовалось доказать.

В случае, когда имеется также потенциальная энергия, траектории уравнений динамики тоже являются геодезическими некоторой римановой метрики.

Пусть ds^2 — риманова метрика на конфигурационном пространстве, задающая кинетическую энергию (так что $T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$). Пусть h — постоянная.

Теорема. Зададим в области конфигурационного пространства, где $U(q) < h$, риманову метрику формулой

$$d\rho = \sqrt{h - U(q)} ds.$$

Тогда траектории системы с кинетической энергией $T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$, потенциальной энергией $U(q)$ и полной энергией h будут геодезическими линиями метрики $d\rho$.

Доказательство. Действительно, в нашем случае $L = T - U$, $H = T + U$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2T = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2(h - U)$. Следовательно, чтобы обеспечить фиксированное значение $H = h$, параметр τ надо выбрать пропорциональным длине: $d\tau = \frac{ds}{\sqrt{2(h - U)}}$. Интеграл укороченного действия тогда будет равен

$$\int_{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\tau = \int_{\gamma} \sqrt{2(h - U)} ds = \sqrt{2} \int_{\gamma} d\rho.$$

По принципу Мопертюи траектории суть геодезические метрики $d\rho$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Метрика dp получается из ds «растяжением», зависящим от точки q , но не зависящим от направления. Поэтому углы в метрике dp совпадают с углами в метрике ds . На границе области $U \leq h$ метрика dp имеет особенность: чем ближе мы подходим к границе, тем меньше становится ρ — длина. В частности, длина любой кривой, лежащей на самой границе ($U = h$), равна нулю.

Замечание 2. Если начальная и конечная точки геодезической γ достаточно близки, то экстремум длины есть *минимум*. Это оправдывает название «принцип наименьшего действия». Что в общем случае экстремум действия не обязательно минимум, видно из рассмотрения геодезических на единичной сфере (рис. 190).

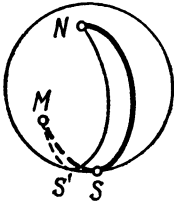


Рис. 190. Неминимальная геодезическая.

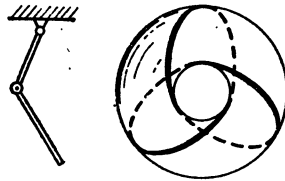


Рис. 191. Периодическое движение двойного маятника.

Каждая дуга меридиана является геодезической, но минимальны лишь те из них, которые короче π : дуга $NS'M$ короче дуги меридиана NSM .

Замечание 3. Если h больше максимума U на конфигурационном пространстве, то метрика dp не имеет особенностей. Поэтому мы можем применить топологические теоремы о геодезических на римановых многообразиях к изучению механических задач.

Так, например, рассмотрим тор T^2 с некоторой римановой метрикой. Среди всех замкнутых кривых на T^2 , делающих m оборотов по параллели и n по меридиану, существует кривая кратчайшей длины (рис. 191). Эта кривая — замкнутая геодезическая (доказательство см. в книгах по вариационному исчислению в целом или «теории Морса»).

С другой стороны, тор T^2 является конфигурационным пространством плоского двойного маятника. Отсюда вытекает

Теорема. Для любых целых m, n существует периодическое движение двойного маятника, при котором одно звено делает m оборотов за время, за которое второе звено делает n оборотов.

Более того, такие периодические движения существуют при любом достаточно большом значении постоянной энергии h (h должно быть больше потенциальной энергии в верхнем положении).

В качестве еще одного примера рассмотрим твердое тело, закрепленное в неподвижной точке и находящееся в произвольном

потенциальном поле. Конфигурационное пространство $(SO(3))$ не односвязно: на нем существуют нестягиваемые кривые. Из предыдущих рассуждений вытекает

Теорема. Каково бы ни было потенциальное силовое поле, существует по крайней мере одно периодическое движение тела. Более того, существуют такие периодические движения, для которых постоянная энергии h сколь угодно велика.

§ 46. Принцип Гюйгенса

Основные понятия гамильтоновой механики (импульсы p , функция Гамильтона H , форма $p dq - H dt$, уравнение Гамильтона — Якоби, о котором будет идти речь ниже) возникли при перенесении на общие вариационные принципы (и, в частности, на принцип стационарного действия Гамильтона, $\delta \int L dt = 0$) некоторых весьма простых и естественных понятий геометрической оптики, управляемой частным вариационным принципом — принципом Ферма.

А. Волновые фронты.

Рассмотрим коротко*) основные понятия геометрической оптики. Согласно экстремальному принципу Ферма, свет распространяется из точки q_0 в точку q_1 за кратчайшее время. При этом скорость света может зависеть как от точки q («неоднородная среда»), так и от направления луча («анизотропная среда» — например, кристаллы).

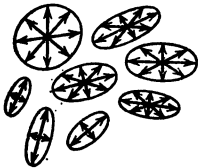


Рис. 192. Неизотропная неоднородная среда.

Свойства среды можно описать, задав в касательном пространстве в каждой точке q поверхность («индикатрису»). Для этого отложим по каждому направлению вектор скорости распространения света в данной точке по данному направлению (рис. 192).

Пусть теперь $t > 0$. Рассмотрим множество всех точек q , до которых свет из данной точки q_0 может прийти за время, меньшее или равное t . Граница этого множества, $\Phi_{q_0}(t)$ называется волновым фронтом точки q_0 через время t и состоит из точек, до которых свет может прийти за время t и не может прийти быстрее.

Между волновыми фронтами, соответствующими разным значениям t , имеется замечательное соотношение, открытое Гюйгенсом (рис. 193).

Теорема Гюйгенса. Рассмотрим волновой фронт точки q_0 через время t , $\Phi_{q_0}(t)$. Построим для каждой точки q этого фронта волновой фронт через время s , $\Phi_q(s)$. Тогда волновой фронт точки

*) Мы не будем здесь гнаться за строгостью и будем считать, что все определители отличны от нуля, и т. п. От полуэвристических рассуждений этого пункта доказательства дальнейших теорем не зависят.

q_0 через время $s + t$, $\Phi_{q_0}(s + t)$, будет огибать построенные фронты $\Phi_{q_t}(s)$, $q \in \Phi_{q_0}(t)$.

В самом деле, пусть $q_{t+s} \in \Phi_{q_0}(t + s)$. Тогда существует путь из q_0 в q_{t+s} , по которому время распространения света равно $t + s$, и нет более короткого. Рассмотрим точку q_t на этом пути, до которой свет идет время t . Никакого более короткого пути от q_0 до q_t не может быть, иначе путь $q_0 q_{t+s}$ не был бы кратчайшим. Поэтому точка q_t лежит на фронте $\Phi_{q_0}(t)$. Точно так же путь $q_t q_{t+s}$ свет проходит за время s , и из точки q_t в q_{t+s} нет более короткого пути. Поэтому точка q_{t+s} лежит на фронте точки q_t за время s , $\Phi_{q_t}(s)$. Покажем, что фронты $\Phi_{q_t}(s)$ и $\Phi_{q_0}(t + s)$

в точке q_{t+s} касаются. Действительно, если бы они пересекались (рис. 194), то в некоторые точки $\Phi_{q_0}(t + s)$ можно было бы

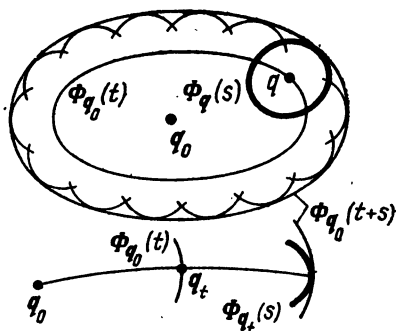


Рис. 193. Огибающая волновых фронтов.

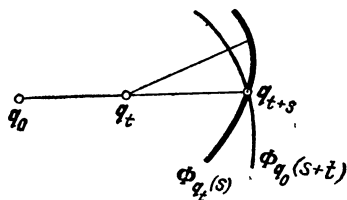


Рис. 194. Доказательство теоремы Гюйгенса.

добраться из q_t за время, меньшее s , а значит, из q_0 — за время, меньшее $s + t$. Это противоречит определению $\Phi_{q_0}(t + s)$; итак, фронты $\Phi_{q_t}(s)$ и $\Phi_{q_0}(t + s)$ касаются в точке q_{t+s} , что и требовалось доказать.

Доказанная теорема называется *принципом Гюйгенса*. Разумеется, точку q_0 можно было бы заменить кривой, поверхностью или вообще замкнутым множеством, трехмерное пространство $\{q\}$ — любым гладким многообразием, а распространение света — распространением любого возмущения, передающегося «локально».

Принцип Гюйгенса приводит к двум описаниям процесса распространения. Во-первых мы можем следить за *лучами*, т. е. кратчайшими путями распространения света. В этом случае локальный характер распространения задается вектором скорости \vec{q} . Если направление луча известно, то величина вектора скорости задается свойствами среды (индикатрисой).

С другой стороны, мы можем следить за волновым фронтом.

Предположим, что в пространстве $\{q\}$ задана риманова метрика. Тогда можно говорить о *скорости движения волнового фронта*. Рассмотрим, например, распространение света в среде, заполняющей

обычное евклидово пространство. Тогда движение волнового фронта можно характеризовать перпендикулярным фронту вектором p , который строится следующим образом.

Для каждой точки q_0 определим функцию $S_{q_0}(q)$ как *оптическую длину пути от q_0 до q* , т. е. наименьшее время распространения света от q_0 до q .

Множество уровня $\{q: S_{q_0}(q) = t\}$ есть не что иное, как волновой фронт $\Phi_{q_0}(t)$ (рис. 195). Градиент функции S (в смысле упомянутой выше метрики) перпендикулярен волновому фронту и характеризует движение волнового фронта. При этом, чем больше градиент, тем медленнее движется фронт. Поэтому Гамильтон назвал вектор

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

вектором *нормальной медлительности фронта*.

Рис. 195. Направление луча и направление движения фронта.

Направление луча \dot{q} и направление движения фронта p в неизотропной среде не совпадают. Однако они связаны друг с другом простым соотношением, легко выводимым из принципа Гюйгенса. Напомним, что свойства среды в каждой точке характеризуются поверхностью векторов скорости света — индикатрисой.

Определение. Направление гиперплоскости, касающейся индикатрисы в точке v , называется *сопряженным* к направлению v (рис. 196).

Теорема. Направление волнового фронта $\Phi_{q_0}(t)$ в точке q_t сопряжено направлению луча \dot{q} .

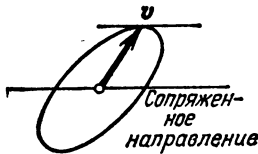


Рис. 196. Сопряженная гиперплоскость.

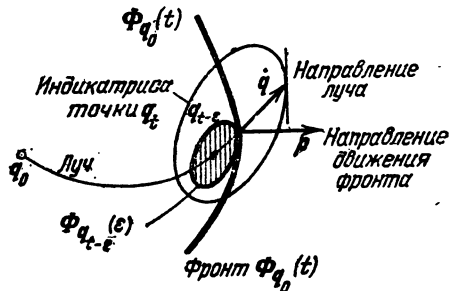


Рис. 197. Сопряженность направлений луча и фронта.

Доказательство. Рассмотрим (рис. 197) точки q_τ луча q_0q_t , $0 \leq \tau \leq t$. Пусть ε очень мало. Тогда фронт $\Phi_{q_t-\varepsilon}(\varepsilon)$ отличается от индикатрисы точки q_t , сжатой в ε раз, лишь малыми порядками $O(\varepsilon^2)$. По принципу Гюйгенса, этот фронт $\Phi_{q_t-\varepsilon}(\varepsilon)$

касается фронта $\Phi_{q_0}(t)$ в точке q_t . Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем сформулированную теорему.

При изменении вспомогательной метрики, с помощью которой мы определили вектор p , будет меняться понятие скорости движения фронта, а значит, и величина и направление вектора p . Однако дифференциальная форма $p dq = dS$ на пространстве $\{q\} = \mathbb{R}^3$ определена не зависящим от вспомогательной метрики образом; ее значение зависит лишь от выбранного фронта (или луча). На гиперплоскости, сопряженной вектору скорости луча, эта форма равна 0, а ее значение на векторе скорости равно 1^*).

Б. Оптико-механическая аналогия. Вернемся теперь к механике. Здесь траектории движения также являются экстремалами вариационного принципа, и можно строить механику как геометрическую оптику многомерного пространства. Именно так и поступил Гамильтон; мы не будем проводить это построение во всех деталях, а только перечислим те оптические понятия, которые привели Гамильтона к основным механическим понятиям.

О п т и к а

М е х а н и к а

Оптическая среда	Расширенное конфигурационное пространство $\{(q, t)\}$
Принцип Ферма	Принцип Гамильтона $\delta \int L dt = 0$
Лучи	Траектории $q(t)$
Индикатриса	Лагранжиан L
Нормальная медлительность фронта p	Импульс p
Выражение p через скорость луча \dot{q}	Преобразование Лежандра
1-форма $p dq$	1-форма $p dq - H dt$

Неиспользованными остались оптическая длина пути $S_{q_0}(q)$ и принцип Гюйгенса. Их механические аналоги — *функция действия* и *уравнение Гамильтона — Якоби*, к которым мы теперь и перейдем.

В. Действие как функция координат и времени.

Определение. *Функцией действия* $S(q, t)$ называется интеграл

$$S_{q_0, t_0}(q, t) = \int_{\gamma} L dt$$

вдоль экстремали γ , соединяющей точки (q_0, t_0) и (q, t) .

*) Таким образом, векторы p , соответствующие всевозможным фронтам, проходящим через данную точку, не произвольны, но подчинены одному условию: допустимые значения p заполняют в пространстве $\{p\}$ гиперповерхность, двойственную индикатрисе скоростей.

Чтобы это определение было корректным, нужно принять некоторые предосторожности: нужно потребовать, чтобы экстремали, выходящие из точки (q_0, t_0) , более не пересекались, а образовывали так называемое «центральное поле экстремалей» (рис. 198). Точнее, сопоставим каждой паре (\dot{q}_0, t) точку (q, t) — конец экстремали с начальными условиями $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Говорят, что экстремаль γ включена в центральное поле, если отображение $(\dot{q}_0, t) \rightarrow (q, t)$ невырождено (в точке, соответствующей рассматриваемой экстремали γ и, следовательно, в некоторой ее окрестности).

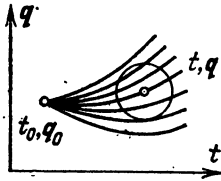


Рис. 198. Центральное поле экстремалей.

Можно доказать, что при достаточно малом $|t - t_0|$ экстремаль γ включается в центральное поле*).

Рассмотрим теперь достаточно малую окрестность конечной точки (q, t) нашей экстремали. Каждая точка этой окрестности соединена с (q_0, t_0) единственной экстремалью рассматриваемого центрального поля. Эта экстремаль дифференцируемо зависит от конечной точки (q, t) . Поэтому в указанной окрестности корректно определена функция действия

$$S_{q_0, t_0}(q, t) = \int_{\gamma} L dt.$$

В геометрической оптике мы рассматривали дифференциал оптической длины пути. Естественно и здесь рассмотреть дифференциал функции действия.

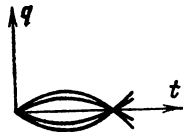


Рис. 199. Экстремаль с фокальной точкой, которую нельзя включить в центральное поле.

Теорема. Дифференциал функции действия (при фиксированной начальной точке) равен

$$dS = p dq - H dt,$$

где $p = \partial L / \partial \dot{q}$ и $H = p\dot{q} - L$ определяются по конечной скорости \dot{q} траектории γ .

Доказательство. Поднимем каждую экстремаль из (q, t) -пространства в расширенное фазовое пространство $\{(p, q, t)\}$, полагая $p = \partial L / \partial \dot{q}$, т. е. заменяя экстремаль фазовой траекторией. Мы получим тогда в расширенном фазовом пространстве $n+1$ -мерное многообразие, составленное из фазовых траекторий, т. е. линий ротора формы $p dq - H dt$. Дадим теперь конечной точке (q, t) приращение $(\Delta q, \Delta t)$ и рассмотрим семейство экстремалей, соединяющих (q_0, t_0) с точками отрезка $q + \theta \Delta q, t + \theta \Delta t, 0 \leq \theta \leq 1$ (рис. 200). В фазовом пространстве мы получим составленный из линий ро-

* Задача. Покажите, что при больших $t - t_0$ это уже не так. Указание. $\ddot{q} = -q$ (рис. 199).

тора формы $p dq - H dt$ четырехугольник σ , граница которого

$$\partial\sigma = \gamma_1 - \gamma_2 + \beta - \alpha$$

состоит из двух фазовых траекторий γ_1 и γ_2 , отрезка кривой α , лежащей в пространстве ($q = q_0, t = t_0$), и отрезка кривой β , проектирующегося в отрезок $(\Delta q, \Delta t)$.

Так как σ состоит из линий ротора формы $p dq - H dt$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\sigma} d(p dq - H dt) = \\ &= \int_{\partial\sigma} p dq - H dt = \\ &= \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\beta} - \int_{\alpha} p dq - H dt. \end{aligned}$$

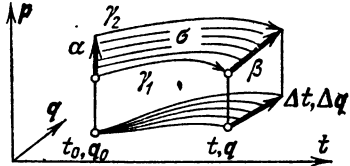


Рис. 200. Вычисление дифференциала функции действия.

Но на отрезке α имеем $dq = 0, dt = 0$. На фазовых траекториях γ_1 и γ_2 $p dq - H dt = L dt$ (§ 45, В). Итак, разность $\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1} p dq - H dt$ равна приращению функции действия, и мы находим

$$\int_{\beta} p dq - H dt = S(q + \Delta q, t + \Delta t) - S(q, t).$$

Если теперь $\Delta q \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, то

$$\int_{\beta} p dq - H dt = p \Delta q - H \Delta t + o(\Delta t, \Delta q),$$

что и доказывает теорему.

Мы видим, что форма $p dq - H dt$, прежде введенная нами искусственно, сама собой возникает при проведении оптико-механической аналогии из рассмотрения функции действия, соответствующей оптической длине пути.

Г. Уравнение Гамильтона — Якоби. Вспомним, что «вектор нормальной медлительности p » не может быть совсем произвольным: он подчиняется одному условию $p\dot{q} = 1$, вытекающему из принципа Гюйгенса (стр. 216). Аналогичное условие накладывается и на градиент функции действия S .

Теорема. Функция действия удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0. \tag{1}$$

Это нелинейное уравнение первого порядка в частных производных называется *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что по предыдущей теореме

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Установленную связь между траекториями механической системы («лучами») и уравнением в частных производных («волновыми фронтами») можно использовать в двух направлениях.

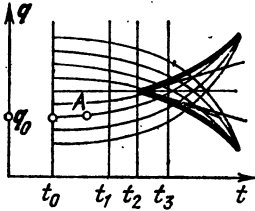


Рис. 201. Характеристика для решения задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби.

Во-первых, некоторые решения уравнения (1) можно использовать для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений динамики. В этом состоит метод Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона, изложенный в следующем параграфе.

Во-вторых, связь лучевой и волновой точек зрения позволяет свести интегрирование уравнения в частных производных (1) к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона.

Остановимся на этом несколько подробнее. Поставим для уравнений Гамильтона — Якоби (1) задачу Коши

$$S(q, t_0) = S_0(q), \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0. \quad (2)$$

Чтобы построить решение этой задачи, рассмотрим систему канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Рассмотрим начальные условия (рис. 201):

$$q(t_0) = q_0, \quad p(t_0) = \left. \frac{\partial S_0}{\partial q} \right|_{q_0}.$$

Соответствующее этим начальным условиям решение изображается в (q, t) -пространстве кривой $q = q(t)$ — экстремалью принципа $\delta \int L dt = 0$ (где лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ есть преобразование Лежандра по p от функции Гамильтона $H(p, q, t)$). Эта экстремаль называется *характеристикой* задачи (2), выходящей из точки q_0 .

Если значение t_1 достаточно близко к t_0 , то характеристики, выходящие из близких точек q_0 , не пересекаются при $t_0 \leq t \leq t_1$, $|q - q_0| < R$. Более того, значения q_0 и t можно принять за координаты точки A в области $|q| < R$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (рис. 201).

Построим теперь «функцию действия с начальным условием S_0 »:

$$S(A) = S_0(q_0) + \int_{q_0, t_0}^A L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3)$$

(интегрирование вдоль характеристики, ведущей в A).

Теорема. *Функция (3) есть решение нашей задачи (2).*

Действительно, начальное условие, очевидно, выполнено. Выполнение уравнения Гамильтона — Якоби проверяется, как в теореме о дифференциале функции действия (рис. 202).

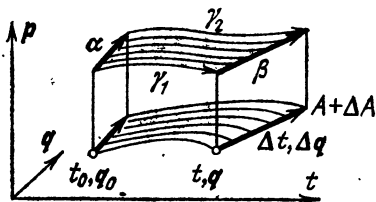


Рис. 202. Функция действия как решение уравнения Гамильтона—Якоби.

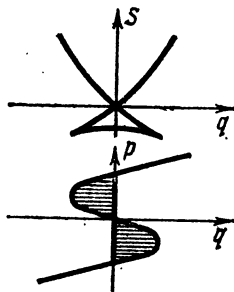


Рис. 203. Типичная особенность решения уравнения Гамильтона—Якоби.

По лемме Стокса $\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\beta} - \int_{\alpha} p dq - H dt = 0$. Но на $\alpha \Psi dt = 0$, $p = \partial S_0 / \partial q$, поэтому $\int_{\alpha} p dq - H dt = \int_{\alpha} p dq = \int_{\alpha} dS_0 = S_0(q_0 + \Delta q) - S_0(q_0)$. Далее, γ_1, γ_2 — фазовые траектории, поэтому

$$\int_{\gamma_1, 2} p dq - H dt = \int_{\gamma_1, 2} L dt.$$

Итак,

$$\int_{\beta} p dq - H dt = \left[S_0(q_0 + \Delta q) + \int_{\gamma_2} L dt \right] - \left[S_0(q_0) + \int_{\gamma_1} L dt \right] = S(A + \Delta A) - S(A).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$, получаем $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$, $\frac{\partial S}{\partial q} = p$, что и доказывает теорему.

Задача. Доказать единственность решения задачи (2).

Указание. Продифференцировать S вдоль характеристик.

Задача. Решить задачу Коши (2) при $H = \frac{p^2}{2}$, $S_0 = \frac{q^2}{2}$.

Задача. Нарисовать графики многозначных «функций» $S(q)$ и $p(q)$ при $t = t_3$ (рис. 201).

Ответ. См. рис. 203.

Точке самопересечения графика S соответствует на графике p *прямая Максвелла*: заштрихованные площади равны. График $S(q, t)$ имеет особенность, называемую *ласточкинским хвостом* в точке (q_0, t_2) .

§ 47. Метод Якоби — Гамильтона интегрирования канонических уравнений Гамильтона

В этом параграфе определяется производящая функция свободного канонического преобразования.

Идея метода Якоби — Гамильтона состоит в следующем. При канонической замене координат сохраняется канонический вид уравнений движения, а также функция Гамильтона (§ 45, А).

Следовательно, если нам удастся найти каноническое преобразование, приводящее функцию Гамильтона к такому виду, что канонические уравнения удастся проинтегрировать, то тем самым мы сумеем проинтегрировать и исходные канонические уравнения. Оказывается, задача построения такого канонического преобразования сводится к отысканию достаточно большого числа решений уравнения Гамильтона — Якоби в частных производных. Этому уравнению должна удовлетворять производящая функция искомого канонического преобразования.

Переходя к аппарату производящих функций, замечу, что он удручающе неинвариантен и существенно использует координатную структуру в фазовом пространстве $\{(p, q)\}$. В соответствии с этим приходится пользоваться аппаратом частных производных, а это такой объект, в самом обозначении которого уже кроется двусмысленность*).

А. Производящая функция. Пусть $2n$ функций $P(p, q)$, $Q(p, q)$ от $2n$ переменных p, q задают каноническое преобразование $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Тогда 1-форма $p dq - P dQ$ — полный дифференциал (§ 45, А):

$$p dq - P dQ = dS(p, q). \quad (1)$$

Задача. Докажите, что и обратно, если эта форма — полный дифференциал, то преобразование — каноническое.

Предположим теперь, что в окрестности некоторой точки (p_0, q_0) за независимые координаты можно принять (Q, q) . Иными словами, предположим, что отличен от нуля якобиан в (p_0, q_0)

$$\det \frac{\partial(Q, q)}{\partial(p, q)} = \det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0.$$

*) Следует ясно понять, что величина $\partial u / \partial x$ на плоскости x, y зависит не только от того, какая функция принята за x , но и от того, какая функция принята за y : в новых переменных (x, z) значение $\partial u / \partial x$ будет уже другим. Следовало бы писать

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=\text{const}}$$

Такие канонические преобразования называют *свободными*. Тогда, в частности, функцию S можно локально выразить через эти координаты:

$$S(p, q) = S_1(Q, q).$$

Определение. Функция $S_1(Q, q)$ называется *производящей функцией* нашего канонического преобразования g .

Подчеркнем, что S_1 не есть функция на фазовом пространстве \mathbb{R}^{2n} : эта функция задана в области прямого произведения $\mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_Q^n$ некоторых двух n -мерных координатных пространств, точки которых обозначаются через q и Q .

Из (1) следует, что «частные производные» S_1 суть

$$\frac{\partial S_1(Q, q)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_1(Q, q)}{\partial Q} = -P. \quad (2)$$

Оказывается, и обратно, всякая функция S_1 задает некоторое каноническое преобразование g по формулам (2).

Теорема. Пусть $S_1(Q, q)$ — функция, заданная в окрестности некоторой точки (Q_0, q_0) прямого произведения двух n -мерных координатных евклидовых пространств. Если

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} \Big|_{Q_0, q_0} \neq 0,$$

то функция S_1 является производящей функцией некоторого свободного канонического преобразования.

Доказательство. Рассмотрим уравнение относительно координат Q

$$\frac{\partial S_1(Q, q)}{\partial Q} = P.$$

По теореме о неявной функции это уравнение разрешимо и определяет в окрестности точки $(q_0, p_0 = \frac{\partial S_1(Q, q)}{\partial q} \Big|_{Q_0, q_0})$ функцию $Q(p, q)$ (причем $Q(p_0, q_0) = Q_0$). Действительно, нужный определитель здесь как раз $\det \frac{\partial^2 S_1(Q, q)}{\partial Q \partial q} \Big|_{Q_0, q_0}$, а он по условию отличен от 0.

Рассмотрим теперь функцию

$$P_1(Q, q) = -\frac{\partial}{\partial Q} S_1(Q, q),$$

и положим

$$P(p, q) = P_1(Q(p, q), q).$$

Тогда локальное отображение $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, переводящее точку (p, q) в точку $P(p, q), Q(p, q)$, будет каноническим с производящей функцией S_1 , ибо по построению

$$p dq - P dQ = \frac{\partial S_1(Q, q)}{\partial q} dq + \frac{\partial S_1(Q, q)}{\partial Q} dQ.$$

Оно свободно, так как $\det \frac{\partial Q}{\partial p} = \det \left(\frac{\partial^2 S_1(Q, q)}{\partial Q \partial q} \right)^{-1} \neq 0$. Теорема доказана.

Преобразование $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ задается вообще $2n$ функциями от $2n$ переменных. Мы видим, что каноническое преобразование задается всего *одной* функцией $2n$ переменных — своей производящей функцией. Легко сообразить, какую выгоду дает применение производящих функций во всех вычислениях, связанных с каноническими преобразованиями. Эта выгода тем больше, чем больше число переменных $2n$.

Б. Уравнение Гамильтона — Якоби для производящей функции. Заметим, что канонические уравнения, в которых функция Гамильтона H зависит от одних лишь переменных Q , легко интегрируются. Действительно, если $H = K(Q)$, то канонические уравнения имеют вид

$$\dot{Q} = 0, \quad \dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q}, \quad (3)$$

откуда непосредственно

$$Q(t) = Q(0), \quad P(t) = P(0) + t \frac{\partial K}{\partial Q} \Big|_{Q_0}$$

Будем теперь искать каноническое преобразование, приводящее функцию Гамильтона $H(p, q)$ к виду $K(Q)$. С этой целью будем искать производящую функцию такого преобразования $S(Q, q)$. Мы получаем из (2) условие

$$H \left(\frac{\partial S(Q, q)}{\partial q}, q, t \right) = K(Q) \quad (4)$$

где *после* дифференцирования вместо q следует подставить $q(P, Q)$. Заметим, что при фиксированном Q уравнение (4) имеет вид уравнения Гамильтона — Якоби.

Теорема Якоби. Если найдено решение $S(Q, q)$ уравнения Гамильтона — Якоби (4), зависящее от n параметров Q_i *) и такое, что $\det \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \neq 0$, то канонические уравнения

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (5)$$

решаются явно в квадратурах. При этом функции $Q(p, q)$, определенные уравнениями $\frac{\partial S(Q, q)}{\partial q} = p$, являются *n* первыми интегралами уравнений (5).

*) *n*-параметрическое семейство решений уравнения (4) называется *полным интегралом* уравнения.

Доказательство. Рассмотрим каноническое преобразование с производящей функцией $S(Q, q)$. Имеем, согласно (2), $p = -\frac{\partial S}{\partial q}(Q, q)$, откуда находим $Q(p, q)$. Вычислим функцию $H(p, q)$ в новых координатах P, Q . Имеем $H(p, q) = H\left(\frac{\partial S}{\partial q}(Q, q), q\right)$.

Чтобы найти функцию Гамильтона в новых координатах, надо было бы подставить в это выражение (после дифференцирования) вместо q его выражение через P и Q . Однако, согласно (4), это выражение от q вовсе не зависит, так что просто

$$H(p, q) = K(Q).$$

Таким образом, в новых переменных уравнения (5) имеют вид (3), откуда непосредственно вытекает теорема Якоби.

Теорема Якоби сводит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных (4). Может показаться удивительным, что такое сведение более простого к более сложному доставляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем оказывается, что это — самый сильный из существующих методов точного интегрирования, и многие задачи, решенные Якоби, вообще не поддаются решению другими методами.

В. Примеры. Рассмотрим задачу о притяжении двумя неподвижными центрами. Интерес к этой задаче возрос в последнее время в связи с изучением движения искусственных спутников Земли. Достаточно ясно, что два близких притягивающих центра на оси z аппроксимируют притяжение слегка вытянутого вдоль оси z эллипсоида. К несчастью, Земля не вытянута, а сплюснута. Выход состоит в том, чтобы поместить центры в мнимые точки на расстоянии $\pm i\epsilon$ вдоль оси z . Аналитические формулы для решения сохраняют, конечно, силу и в комплексной области. Таким образом, получается приближение к полю тяготения Земли, в котором уравнения движения точно интегрируются и которое ближе к реальности, чем кеплеровское приближение (Земля — точка).

Рассмотрим здесь для простоты лишь плоскую задачу о притяжении двумя неподвижными равными массами. Успех метода Якоби основан на применении подходящей системы координат, так называемых эллиптических координат. Пусть расстояние между неподвижными точками O_1, O_2 равно $2c$ (рис. 204), а расстояния движущейся массы от них равны r_1 и r_2 . Эллиптические координаты ξ, η определяются как сумма и разность расстояний до точек O_1, O_2 : $\xi = r_1 + r_2, \eta = r_1 - r_2$.

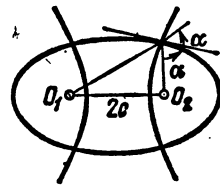


Рис. 204. Эллиптические координаты.

Задача. Выразить функцию Гамильтона через эллиптические координаты.

Решение. Линии $\xi = \text{const}$ суть эллипсы с фокусами в O_1 и O_2 , $\eta = \text{const}$ — гиперболы с теми же фокусами (рис. 205). Они взаимно ортогональны, поэтому $ds^2 = a^2 d\xi^2 + b^2 d\eta^2$. Найдем коэффициенты a и b . При движении вдоль эллипса имеем $dr_1 = ds \cos \alpha$, $dr_2 = -ds \cos \alpha$, $d\eta = 2 \cos \alpha ds$.

При движении вдоль гиперболы имеем $dr_1 = ds \sin \alpha$, $dr_2 = ds \sin \alpha$, $d\xi = 2 \sin \alpha ds$. Итак, $a = (2 \cos \alpha)^{-1}$, $b = (2 \sin \alpha)^{-1}$.

Далее, из треугольника O_1MO_2 находим

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos 2\alpha = 4c^2,$$

откуда

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2},$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{2r_1r_2}{2r_1r_2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1r_2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{4r_1r_2}.$$

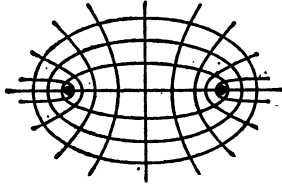


Рис. 205. Конфокальные эллипсы и гиперболы.

Но если $ds^2 = \sum a_i^2 dq_i^2$, то $T = \sum a_i^2 \frac{\dot{q}_i^2}{2}$, $p_i = a_i^2 \dot{q}_i$, $H = \sum \frac{p_i^2}{2a_i^2} + U$. Итак,

$$H = p_\xi^2 \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{2r_1r_2} + p_\eta^2 \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{2r_1r_2} - \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2}.$$

Но $r_1 + r_2 = \xi$, $r_1 - r_2 = \eta$, $4r_1r_2 = \xi^2 - \eta^2$. Поэтому окончательно

$$H = 2p_\xi^2 \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2 \frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Теперь будем решать уравнение Гамильтона — Якоби.

Определение. Если в уравнение

$$\Phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; q_1, \dots, q_n \right) = 0$$

переменная q_1 и производная $\partial S / \partial q_1$ входят лишь в виде комбинации $\Phi \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1 \right)$, то говорят, что переменная q_1 отделяется.

В этом случае полезно искать решения уравнения вида

$$S = S_1(q_1) + S'(q_2, \dots, q_n).$$

Полагая в исходном уравнении $\Phi \left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1 \right) = c_1$, получаем уравнение для S' с меньшим числом переменных

$$\Phi_2 \left(\frac{\partial S'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}; q_2, \dots, q_n; c_1 \right) = 0.$$

Пусть $S' = S'(q_2, \dots, q_n; c_1, c)$ — семейство решений этого уравнения, зависящее от параметров c_i . Функции $S_1(q_1, c_1) + S'$ будут удовлетворять исходному уравнению, если S_1 удовлетворяет обыкновенному уравнению $\Phi \left(\frac{dS_1}{dq_1}, q_1 \right) = c_1$. Это уравнение легко решить;

выражая $\frac{dS_1}{dq_1}$ через q_1 и c_1 , получаем $\frac{dS_1}{dq_1} = \psi(q_1, c_1)$, откуда $S_1 = \int^{q_1} \psi(q_1, c_1) dq_1$.

Если в новом уравнении (с Φ_2) отделяется одна из переменных, скажем q_2 , мы можем повторять эту процедуру и (в благоприятном случае) найдем зависящее от n постоянных решение исходного уравнения

$$S_1(q_1; c_1) + S_2(q_2; c_1, c_2) + \dots + S_n(q_n; c_1, \dots, c_n).$$

В таком случае говорят, что переменные *полностью разделяются*.

Если переменные полностью разделяются, то зависящее от n параметров решение уравнения Гамильтона — Якоби $\Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0$ находится квадратурами. Но тогда интегрируется в квадратурах и соответствующая система канонических уравнений (теорема Якоби).

Применим сказанное к задаче о двух неподвижных центрах. Уравнение Гамильтона — Якоби (4) имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) = K (\xi^2 - \eta^2) + 4k\xi.$$

Мы можем разделить переменные, например, полагая

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) - 4k\xi - K\xi^2 &= c_1, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) + K\eta^2 &= -c_1. \end{aligned}$$

Тогда находим полный интеграл уравнения (4) в виде

$$S(\xi, \eta; c_1, c_2) = \int \sqrt{\frac{c_1 + c_2\xi^2 + 4K\xi}{\xi^2 - 4c^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{-c_1 - c_2\eta^2}{4c^2 - \eta^2}} d\eta.$$

Теорема Якоби дает теперь явное выражение движения в задаче о двух неподвижных центрах через эллиптические интегралы. Подробное качественное исследование этого движения можно найти в книге Шарлье «Небесная механика», Москва, 1966.

Другое применение задачи о притяжении двумя неподвижными центрами — это исследование движений с постоянной тягой в поле одного притягивающего центра.

Речь идет о движении материальной точки под действием ньютоновского притяжения неподвижного центра и еще одной силы («тяги»), постоянной по величине и направлению.

Эта задача может рассматриваться как предельный случай задачи о притяжении двумя неподвижными центрами. В процессе предельного перехода второй центр удаляется на бесконечность в направлении силы тяги (причем его масса должна расти так,

чтобы обеспечить постоянство тяги, т. е. пропорционально квадрату удаления).

Получающийся предельный случай задачи о притяжении двумя неподвижными центрами интегрируется в явном виде (в эллиптических функциях). В этом можно убедиться при помощи предельного перехода или же непосредственно разделяя переменные в задаче о движении с постоянной тягой в поле одного центра.

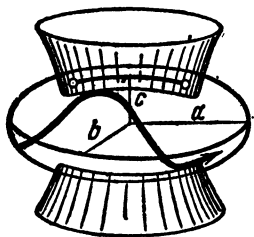
Координаты, в которых разделяются переменные в этой задаче, получаются предельным переходом из эллиптических координат, когда один из центров удаляется на бесконечность. Они называются параболическими координатами и даются формулами

$$u = r - x, \quad v = r + x$$

(тяга направлена вдоль оси x).

Описание траекторий движения с постоянной тягой (многие из которых весьма замысловаты) можно найти в книге В. В. Белецкого «Очерки о движении космических тел», «Наука», М., 1972.

Рис. 206. Геодезическая на трехосном эллипсоиде.



В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о геодезических на трехосном эллипсоиде*). Здесь помогают эллиптические координаты Якоби $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые суть три корня уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 + \lambda} = 1, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3,$$

где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты. Я не буду приводить выкладки, показывающих, что переменные разделяются (их можно найти, например, в «Лекциях по динамике» Якоби), но приведу лишь результат: опишу поведение геодезических.

Поверхности $\lambda_1 = \text{const}$, $\lambda_2 = \text{const}$, $\lambda_3 = \text{const}$ суть поверхности второго порядка, называемые *софокусными*. Одна из них эллипсоид, другая однополостный гиперболоид, третья двуполостный. Эллипсоид может вырождаться во внутренность эллипса, однополостный гиперболоид — во внешность эллипса или в часть плоскости между ветвями гиперболы, двуполостный — в часть плоскости вне ветвей гиперболы или в плоскость.

Пусть рассматриваемый эллипсоид — один из эллипсоидов семейства с полуосями $a > b > c$. Каждый из трех эллипсов $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ есть замкнутая геодезическая. Геодезическая, выходящая из точек большого эллипса (с полуосями a, b) по направлению, близкому к направлению эллипса (рис. 206), касается

*) Задача о геодезических на эллипсоиде и близкая задача об эллипсоидальном бильярде нашли применение в ряде недавних физических работ, связанных с лазерными устройствами.

поочередно двух замкнутых линий пересечения эллипсоида с однополостным гиперболоидом нашего семейства $\lambda = \text{const}^*$).

Эта геодезическая либо замкнута, либо заполняет кольцо между линиями пересечения всюду плотно. По мере увеличения наклона геодезической, гиперболоиды сжимаются к области «внутри» гиперболы, пересекающей наш эллипсоид в его четырех «точках округления». В предельном случае мы получаем геодезические, проходящие через точки округления (рис. 207).

Интересно отметить, что все геодезические, выходящие из точки округления, снова собираются вместе в противоположной точке округления и все они имеют между двумя точками округления одинаковую длину. Однако только одна из этих геодезических

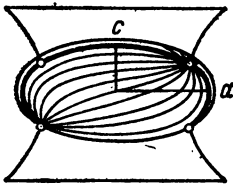


Рис. 207. Геодезические, выходящие из точек округления.

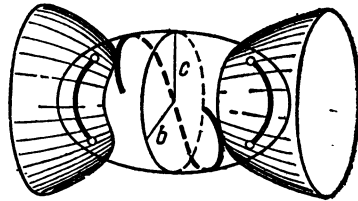


Рис. 208. Геодезические эллипсоида, касающиеся двухполостного гиперболоида.

замкнута: это средний эллипс с полуосями a , c . Если идти вдоль любой другой геодезической, проходящей через точку округления, в любую сторону, то мы будем асимптотически приближаться к этому эллипсу.

Наконец, еще более «круто» пересекающие большой эллипс геодезические (рис. 208) касаются поочередно двух линий пересечения нашего эллипсоида с двухполостным гиперболоидом **). Они заполняют, вообще говоря, всюду плотно кольцо между этими линиями.

Среди таких геодезических выделяется малый эллипс с полуосями b , c .

«Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-либо замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена» (Якоби, Лекции по динамике).

Таблица задач, допускающих разделение переменных в сферических, эллиптических и параболических координатах, имеется в § 48 «Механики» Ландау и Лифшица (Физматгиз, М., 1958).

*) Эти линии пересечения софокусных поверхностей являются также линиями кривизны эллипсоида.

***) Являющихся также линиями кривизны.

§ 48. Производящие функции

В этом параграфе строится аппарат производящих функций для несвободных канонических преобразований.

А. Производящая функция $S_2(P, q)$. Пусть $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — каноническое преобразование, $g(p, q) = (P, Q)$. По определению канонического преобразования, дифференциальная 1-форма на \mathbb{R}^{2n} :

$$p dq - P dQ = dS$$

является полным дифференциалом некоторой функции $S(p, q)$. Каноническое преобразование *свободное*, если за $2n$ независимых координат можно принять q, Q . В этом случае функция S , выраженная через координаты q и Q , называется *производящей функцией $S_1(q, Q)$* . Зная эту единственную функцию, можно найти все $2n$ функций, задающих преобразование, из соотношений

$$p = \frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial Q}. \quad (1)$$

Однако далеко не все канонические преобразования — свободные. Например, в случае тождественного преобразования q и $Q = q$ зависимы. Поэтому тождественное преобразование нельзя задать производящей функцией $S_1(q, Q)$.

Однако можно перейти к производящей функции иного вида посредством преобразования Лежандра. Пусть, например, за независимые локальные координаты в \mathbb{R}^{2n} можно принять P, q (т. е. отличен от нуля определитель $\det \frac{\partial(P, q)}{\partial(p, q)} = \det \frac{\partial P}{\partial p}$).

Тогда имеем

$$p dq - P dQ = dS, \quad p dq + Q dP = d(PQ + S).$$

Величина $PQ + S$, выраженная через (P, q) , называется также *производящей функцией*

$$S_2(P, q) = PQ + S(p, q).$$

Для этой функции находим

$$P = \frac{\partial S_2(P, q)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S_2(P, q)}{\partial P}. \quad (2)$$

Обратно, если $S_2(P, q)$ — произвольная функция, для которой отличен от нуля определитель $\det \frac{\partial^2 S_2(P, q)}{\partial q \partial P} \Big|_{P_0, q_0}$, то в окрестности точки $(p_0 = \frac{\partial S_2(P, q)}{\partial q} \Big|_{P_0, q_0}, q_0)$ можно разрешить первую группу уравнений (2) относительно P и получить функции $P(p, q)$ (где $P(p_0, q_0) = P_0$). После этого вторая группа уравнений (2) определяет $Q(p, q)$, и отображение $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ — каноническое (докажите!).

Задача. Найти производящую функцию S_2 для тождественного отображения $P=p, Q=q$.

Ответ. Pq .

Замечание. Производящая функция $S_2(P, q)$ удобна еще и потому, что в формулах (2) нет минусов, и их легко вспомнить, если помнить, что производящая функция тождественного преобразования есть Pq .

Б. 2^n производящих функций. К сожалению, переменные P, q также не всегда могут быть выбраны за локальные координаты. Однако всегда можно выбрать *некоторый* набор n новых координат

$$P_i = (P_{i_1}, \dots, P_{i_k}), \quad Q_j = (Q_{j_1}, \dots, Q_{j_{n-k}})$$

так, что вместе со старыми q мы получим $2n$ независимых координат.

Здесь $(i_1, \dots, i_k) (j_1, \dots, j_{n-k})$ — любое разбиение множества $(1, \dots, n)$ на две непересекающиеся части, так что всего имеется 2^n случаев.

Теорема. Пусть $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — каноническое преобразование, заданное функциями $P(p, q), Q(p, q)$. В окрестности каждой точки (p_0, q_0) можно принять за независимые координаты в \mathbb{R}^{2n} по меньшей мере один из 2^n наборов функций (P_i, Q_j, q) :

$$\det \frac{\partial(P_i, Q_j, q)}{\partial(p_i, p_j, q)} = \det \frac{\partial(P_i, Q_j)}{\partial(p_i, p_j)} \neq 0.$$

В окрестности такой точки можно восстановить каноническое преобразование g по функции

$$S_3(P_i, Q_j, q) = (P_i, Q_j) + \int p \, dq - P \, dq$$

из соотношений

$$p = \frac{\partial S_3}{\partial q}, \quad Q_i = \frac{\partial S_3}{\partial P_i}, \quad P_j = -\frac{\partial S_3}{\partial Q_j}. \quad (3)$$

Обратно, если $S_3(P_i, Q_j, q)$ — любая функция, для которой отличен от нуля определитель $\det \frac{\partial^2 S_3}{\partial R \partial q} \Big|_{R_0, q_0}$ ($R = P_i, Q_j$), то соотношения (3) задают каноническое преобразование в окрестности точки p_0, q_0 .

Доказательство этой теоремы почти такое же, как проведенное выше в частном случае $k=n$. Нужно лишь проверить, что для одного из 2^n наборов (P_i, Q_j, q) отличен от 0 определитель $\det \frac{\partial(P_i, Q_j)}{\partial(p_i, p_j)}$.

Рассмотрим дифференциал нашего преобразования g в точке (p_0, q_0) . отождествляя касательные пространства к \mathbb{R}^{2n} с \mathbb{R}^{2n} , мы можем считать dg симплектическим преобразованием $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Рассмотрим координатную p -плоскость P в \mathbb{R}^{2n} (рис. 209). Это нулевая n -мерная плоскость, и ее образ SP — тоже нулевая плоскость. Спроектируем плоскость SP на координатную плоскость $\sigma = \{(p_i, q_j)\}$ параллельно остальным координатным осям, т. е. по направлению нулевой n -мерной координатной плоскости $\bar{\sigma} = \{(p_j, q_j)\}$. Обозначим через $T: SP \rightarrow \sigma$ оператор проектирования.

Условие $\det \frac{\partial(P_i, Q_j)}{\partial(p_i, p_j)} \neq 0$ означает невырожденность $TS: P \rightarrow \sigma$. Оператор S невырожден. Поэтому для невырожденности TS необходимо и достаточно, чтобы проектирование $T: SP \rightarrow \sigma$ не вырождалось. Иными словами, нулевая плоскость SP должна быть трансверсальной нулевой координатной плоскости $\bar{\sigma}$. Но мы доказали в § 41, что хотя бы одна из 2^n нулевых координатных плоскостей трансверсальна SP . Значит, один из наших 2^n определителей отличен от нуля, что и требовалось доказать.

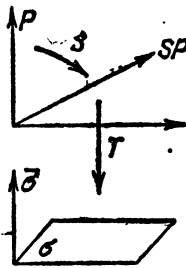


Рис. 209. К проверке невырожденности.

З а д а ч а. Доказать, что приведенная система 2^n видов производящих функций минимальна: существуют канонические преобразования, для которых отличен от нуля лишь один из 2^n определителей *).

В. Бесконечно малые канонические преобразования. Рассмотрим теперь каноническое преобразование, близкое к тождественному. Его производящую функцию можно взять близкой к производящей функции тождества Pq . Рассмотрим семейство канонических преобразований g_ε , дифференцируемо зависящее от параметра ε , так что производящая функция имеет вид

$$Pq + \varepsilon S(P, q; \varepsilon); \quad p = P + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = q + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial P}. \quad (4)$$

Бесконечно малым каноническим преобразованием называется класс эквивалентности семейств g_ε ; два семейства g_ε и h_ε эквивалентны, если они отличаются малыми выше первого порядка, $|g_\varepsilon - h_\varepsilon| = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема. *Бесконечно малое каноническое преобразование удовлетворяет дифференциальным уравнениям Гамильтона*

$$\left. \frac{dP}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \left. \frac{dQ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

с функцией Гамильтона $H(p, q) = S(p, q, 0)$.

Доказательство получается из формул (4): $P \rightarrow p$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следствие. *Однопараметрическая группа преобразований фазового пространства \mathbb{R}^{2n} удовлетворяет каноническим уравнениям Гамильтона тогда и только тогда, когда преобразования канонические.*

*) Число видов производящих функций в разных учебниках колеблется от 4 до 4^n .

Функцию Гамильтона H называют в связи с этой теоремой «производящей функцией канонического бесконечно малого преобразования». Заметим, что, в отличие от производящих функций S , функция H есть функция точки фазового пространства, инвариантно связанная с преобразованием.

Функция H имеет простой геометрический смысл. Пусть x и y — две точки из \mathbb{R}^{2n} (рис. 210), γ — соединяющая их кривая, $\delta\gamma = y - x$. Рассмотрим сдвиги кривой γ при наших преобразованиях, $g_\tau\gamma$, $0 \leq \tau \leq \varepsilon$. Они образуют полосу $\sigma(\varepsilon)$. Рассмотрим интеграл формы $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ по 2-цепи σ , $d\sigma = g_\varepsilon\gamma - \gamma + g_\tau y - g_\tau x$.

Задача. Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma(\varepsilon)} \omega^2 = H(y) - H(x)$$

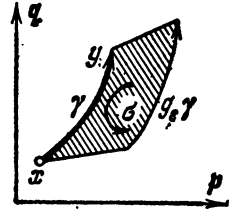


Рис. 210. Геометрический смысл функции Гамильтона.

существует и не зависит от представителя класса g_ε .

Из этого результата мы еще раз получаем уже известное Следствие. При каноническом преобразовании канонические уравнения сохраняют свой вид, а также величину функции Гамильтона.

Действительно, мы вычислили приращение функции Гамильтона, используя только бесконечно малое каноническое преобразование и симплектическую структуру \mathbb{R}^{2n} — форму ω^2 .

ГЛАВА 10

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВОЗМУЩЕНИЙ

Теория возмущений представляет собой весьма полезный набор приемов, предназначенных для приближенного решения «возмущенных» задач, близких к «невозмущенным», решенным точно. Эти приемы легко оправдать, если речь идет об исследовании движений на небольшом интервале времени. Вопрос о том, в какой мере можно доверять выводам теории возмущений при исследовании движения на больших и бесконечных интервалах времени, изучен весьма мало.

Мы увидим, что во многих «невозмущенных» интегрируемых задачах движение оказывается условно периодическим. При исследовании движения как в невозмущенной, так и особенно в возмущенной задаче полезны специальные симплектические координаты: переменные «действие — угол». В заключение мы докажем теорему, обосновывающую теорию возмущений одночастотных систем, и докажем адиабатическую инвариантность переменной действия в таких системах.

§ 49. Интегрируемые системы

Чтобы проинтегрировать систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, нужно знать $2n$ первых интегралов. Оказывается, если дана каноническая система дифференциальных уравнений, то во многих случаях достаточно знать лишь n первых интегралов — каждый из них позволяет понизить порядок системы не на одну, а на две единицы.

А. Теорема Лиувилля об интегрируемых системах. Напомню, что функция F является первым интегралом системы с функцией Гамильтона H тогда и только тогда, когда скобка Пуассона

$$(H, F) \equiv 0$$

тождественно равна нулю.

Определение. Две функции F_1, F_2 на симплектическом многообразии *находятся в инволюции*, если их скобка Пуассона равна нулю.

Лиувилль доказал, что если в системе с n степенями свободы (т. е. $2n$ -мерным фазовым пространством) известны n независимых первых интегралов в инволюции, то система интегрируема в квадратурах.

Вот точная формулировка этой теоремы.

Предположим, что на симплектическом $2n$ -мерном многообразии даны n функций в инволюции

$$F_1, \dots, F_n; (F_i, F_j) \equiv 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим множество уровня функций F_i

$$M_f = \{x: F_i(x) = f_i, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Предположим, что на M_f n функций F_i независимы (т. е. n 1-форм dF_i линейно независимы в каждой точке M_f).

Тогда:

1) M_f — гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока с функцией Гамильтона $H = F_1$.

2) Если многообразие M_f компактно и связно, то оно диффеоморфно n -мерному тору

$$T^n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi\}.$$

3) Фазовый поток с функцией Гамильтона H определяет на M_f условно-периодическое движение, т. е. в угловых координатах $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \omega = \omega(f).$$

4) Канонические уравнения с функцией Гамильтона H интегрируются в квадратурах.

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим некоторые из ее следствий.

Следствие 1. Если в канонической системе с двумя степенями свободы известен один первый интеграл F , не зависящий от функции Гамильтона H , то система интегрируема в квадратурах; компактное связное двумерное подмногообразие фазового пространства $H = h$, $F = f$ есть инвариантный тор, а движение на нем условно-периодично.

Действительно, F и H находятся в инволюции, так как F — первый интеграл системы с функцией Гамильтона H .

В качестве примера с тремя степенями свободы рассмотрим лагранж тяжелый симметричный волчок, закрепленный в точке на оси. Здесь сразу видны три первых интеграла H , M_2 , M_3 . Легко проверить, что интегралы M_2 и M_3 находятся в инволюции. Далее, многообразие $H = h$ в фазовом пространстве компактно. Поэтому мы без всяких вычислений сразу можем сказать, что при

большинстве начальных условий*) движение волчка условно-периодично: фазовые траектории заполняют трехмерные торы $H = c_1$, $M_2 = c_2$, $M_3 = c_3$. Соответствующие три частоты называются частотами собственного вращения, прецессии и нутации.

Другие примеры получаются из следующего замечания: *если каноническая система интегрируется методом Якоби—Гамильтона, то она имеет n первых интегралов в инволюции.*

Действительно, метод состоит в каноническом преобразовании $(p, q) \rightarrow (P, Q)$, таком, что P_i — первые интегралы. Но функции P_i , P_j , очевидно, находятся в инволюции.

В частности, сказанное применимо к задаче о притяжении двумя неподвижными центрами. Число примеров легко умножить; фактически сформулированная выше теорема Лиувилля охватывает все проинтегрированные на сегодняшний день проблемы динамики.

Б. Начало доказательства теоремы Лиувилля. Перейдем теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим множество уровня интегралов

$$M_f = \{x \mid F_i = f_i \quad i = 1, \dots, n\}.$$

По условию n 1-форм dF_i линейно независимы в каждой точке M_f . Следовательно, по теореме о неявной функции, M_f есть n -мерное подмногообразие $2n$ -мерного фазового пространства.

Лемма 1. *На n -мерном многообразии M_f существуют n касательных векторных полей, попарно коммутирующих и линейно независимых в каждой точке.*

Доказательство. Симплектическая структура фазового пространства определяет оператор I , переводящий 1-формы в векторные поля. Этот оператор I переводит 1-форму dF_i в поле $I dF_i$ фазовой скорости системы с функцией Гамильтона F_i . Покажем, что n полей $I dF_i$ касаются M_f , коммутируют и независимы.

Действительно, из независимости dF_i и невырожденности изоморфизма I следует независимость $I dF_i$ в каждой точке M_f . Поля $I dF_i$ попарно коммутируют, так как скобки Пуассона их функций Гамильтона $(F_i, F_j) \equiv 0$. По той же причине производная функции F_i по направлению поля $I dF_j$ равна нулю для любых $i, j = 1, \dots, n$. Значит, поля $I dF_i$ касаются M_f , и лемма 1 доказана.

Заметим, что доказано даже больше чем лемма 1:

1') Многообразие M_f инвариантно относительно каждого из n коммутирующих фазовых потоков g_i^t с функциями Гамильтона F_i ; $g_i^t g_j^s = g_j^s g_i^t$.

1'') Многообразиие M_f — нулевое (т. е. 2-форма ω^2 обращается в нуль на $T M_f|_x$).

*) Исключение составляют особые множества уровня интегралов, где нарушается их независимость.

Действительно, n векторов $l dF_i|_x$ попарно косоортогональны $((F_i, F_j) \equiv 0)$ и образуют базис в касательной плоскости к многообразию M_f в точке x .

В. Многообразия, на которых транзитивно действует группа R^n . Теперь мы воспользуемся следующим топологическим предложением (доказательство заканчивается на стр. 240).

Лемма 2. Пусть M^n — компактное, связное дифференцируемое n -мерное многообразие, на котором задано n векторных полей, попарно коммутирующих и линейно независимых в каждой точке M^n . Тогда многообразие M^n диффеоморфно n -мерному тору.

Доказательство. Обозначим через $g'_i, i = 1, \dots, n$, однопараметрические группы диффеоморфизмов M , соответствующие заданным n векторным полям. Поскольку поля коммутируют, группы g'_i, g'_j коммутируют. Поэтому мы можем определить действие g коммутативной группы $R^n = \{t\}$ на многообразии M , полагая

$$g^t: M \rightarrow M, \quad g^t = g_1^{t_1} \dots g_n^{t_n} \quad (t = (t_1, \dots, t_n) \in R^n).$$

Очевидно, $g^{t+s} = g^t g^s \forall t, s \in R^n$. Зафиксируем точку $x_0 \in M$. Тогда возникает отображение

$$g: R^n \rightarrow M, \quad g(t) = g^t x_0$$

(точку x_0 надо сдвинуть на время t_1 по траектории первого потока, t_2 — второго и т. д.).

Задача 1. Докажите, что построенное отображение g (рис. 211) достаточно малой окрестности V точки $O \in R^n$ задает карту окрестности точки x_0 ; у каждой точки $x_0 \in M$ существует такая окрестность $U, x_0 \in U \subset M$, что g отображает V на U диффеоморфно.

Указание. Применить теорему о неявной функции и воспользоваться линейной независимостью полей в точке x_0 .

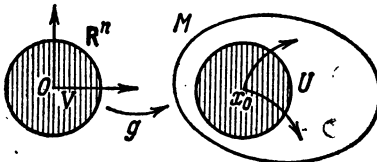


Рис. 211. К задаче 1.

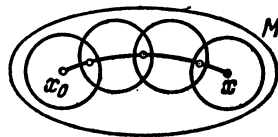


Рис. 212. К задаче 2.

Задача 2. Докажите, что $g: R^n \rightarrow M$ есть отображение на.

Указание. Соедините точку $x \in M$ с x_0 кривой (рис. 212), покройте кривую конечным числом окрестностей U предыдущей задачи и определите t как сумму сдвигов t_i , соответствующих кускам кривой.

Заметим, что отображение $g: R^n \rightarrow M^n$ не может быть взаимно однозначным, так как M^n компактно, а R^n нет. Изучим множество прообразов точки $x_0 \in M^n$.

Определение. Стационарной группой точки x_0 называется множество Γ точек $t \in R^n$, для которых $g^t x_0 = x_0$.

Задача 3. Докажите, что Γ есть подгруппа группы \mathbb{R}^n , не зависящая притом от точки x_0 .

Решение. Если $g^t x_0 = x_0$, $g^s x_0 = x_0$, то

$$g^{s+t} x_0 = g^s g^t x_0 = g^s x_0 = x_0, \quad g^{-t} x_0 = g^{-t} g^t x_0 = x_0.$$

Поэтому Γ — подгруппа \mathbb{R}^n . Если $x = g^r x_0$, $t \in \Gamma$, то $g^t x = g^{t+r} x_0 = g^r g^t x_0 = g^r x_0 = x$.

Таким образом, стационарная группа Γ есть вполне определенная, не зависящая от точки x_0 подгруппа группы \mathbb{R}^n . В частности, точка $t = 0$, очевидно, принадлежит Γ .

Задача 4. Докажите, что в достаточно малой окрестности V точки $t = 0$ в \mathbb{R}^n нет других точек стационарной группы Γ , кроме точки $t = 0$.

Указание. Отображение $g: V \rightarrow U$ диффеоморфно.

Задача 5. Докажите, что в окрестности $t \in V$ (рис. 213) любой точки $t \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ нет точек стационарной группы Γ , отличных от точки t .

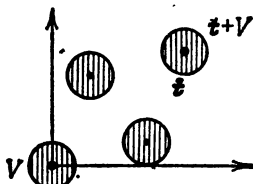


Рис. 213. К задаче 5.

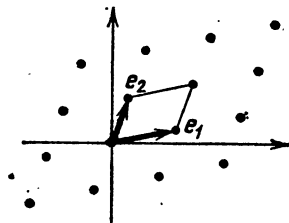


Рис. 214. Дискретная подгруппа плоскости.

Таким образом, точки стационарной подгруппы Γ лежат в \mathbb{R}^n дискретно. Такие подгруппы называются *дискретными подгруппами*.

Пример. Пусть e_1, \dots, e_k — k линейно независимых векторов в \mathbb{R}^n , $0 \leq k \leq n$. Множество всех их целочисленных линейных комбинаций (рис. 214)

$$m_1 e_1 + \dots + m_k e_k, \quad m_i \in \mathbb{Z} = (\dots -2, -1, 0, 1, \dots),$$

образует дискретную подгруппу в \mathbb{R}^n . Например, множество всех целых точек на плоскости есть дискретная подгруппа плоскости.

Г. Дискретные подгруппы в \mathbb{R}^n . Мы воспользуемся теперь следующим алгебраическим фактом: приведенным примером исчерпываются все дискретные подгруппы в \mathbb{R}^n . Точнее, будет доказана

Лемма 3. Пусть Γ — дискретная подгруппа группы \mathbb{R}^n . Тогда существуют k ($0 \leq k \leq n$) линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_k \in \Gamma$, таких, что Γ есть в точности множество всех их целочисленных линейных комбинаций.

Доказательство. Будем рассматривать в \mathbb{R}^n какую-нибудь евклидову структуру. Имеем всегда $0 \in \Gamma$. Если $\Gamma = \{0\}$, лемма доказана. Если нет, существует точка $e_0 \in \Gamma$, $e_0 \neq 0$ (рис. 215).

Рассмотрим прямую Re_0 . Покажем, что на этой прямой существует точка e_1 , ближайшая к O . Действительно, в шаре радиуса $|e_0|$ с центром в O лишь конечное число точек Γ (у каждой точки Γ , как мы видели выше, есть окрестность стандартной величины V , не содержащая других точек Γ).

Ближайшая к O из конечного числа точек этого шара, лежащих на прямой Re_0 , будет ближайшей к O точкой из Γ на всей прямой. ...

На прямой Re_0 группе Γ принадлежат целые кратные $e_1 (me_1, m \in \mathbb{Z})$ и только они. Действительно, точки me_1 делят прямую на части длины $|e_1|$. Если бы внутри одной из этих частей

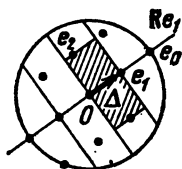


Рис. 215. К доказательству леммы о дискретных подгруппах.

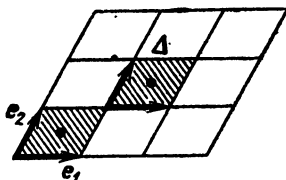


Рис. 216. К задаче 7.

$(me_1, (m+1)e_1)$ была точка $e \in \Gamma$, то точка $e - me_1 \in \Gamma$ была бы ближе к O , чем e_1 .

Если у Γ нет точек вне прямой Re_1 , то лемма доказана. Пусть существует точка $e \in \Gamma, e \notin Re_1$: Покажем, что существует точка $e_2 \in \Gamma$, ближайшая к прямой Re_1 (сама не лежащая на прямой). Спроектируем e ортогонально на прямую Re_1 . Проекция лежит ровно в одном отрезке $\Delta = \{\lambda e_1\}, m \leq \lambda < m+1$. Рассмотрим прямую круговой цилиндр \mathcal{C} с осью Δ и радиусом, равным расстоянию от Δ до e . В этом цилиндре лежит конечное (ненулевое) число точек группы Γ .

Пусть e_2 — ближайшая из них к оси Re_1 , но не лежащая на оси.

Задача 6. Докажите, что расстояние от любой точки группы Γ , не лежащей на оси Re_1 , до этой оси не меньше, чем расстояние от точки e_2 до оси Re_1 .

Указание. Сдвигом на te_1 можно загнать проекцию на ось в отрезок Δ .

Целочисленные линейные комбинации e_1 и e_2 образуют решетку в плоскости $Re_1 + Re_2$.

Задача 7. Докажите, что никаких других точек подгруппы Γ , кроме целочисленных линейных комбинаций e_1 и e_2 , на плоскости $Re_1 + Re_2$ нет.

Указание. Разделите плоскость на параллелограммы (рис. 216) $\Delta = \{ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \}, m_1 \leq \lambda_1 < m_1 + 1$. Если бы $e \in \Delta, e \neq m_1 e_1 + m_2 e_2$, то точка $e - m_1 e_1 - m_2 e_2$ была бы ближе к Re_1 , чем e_2 .

Если у Γ нет точек вне плоскости $Re_1 + Re_2$, то лемма доказана. Пусть существует точка $e \in \Gamma$ вне этой плоскости. Тогда существует ближайшая к плоскости $Re_1 + Re_2$ точка $e_3 \in \Gamma$; точки

$m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3$ исчерпывают Γ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$. Если Γ этим не исчерпана, берем ближайшую точку к этому трехмерному пространству, и т. д.

Задача 8. Докажите, что ближайшая точка каждый раз существует. **Указание.** Взять ближайшую из конечного числа точек соответствующего «цилиндра» \mathcal{C} .

Заметим, что все получаемые векторы e_1, e_2, e_3, \dots линейно независимы. Поскольку все они принадлежат \mathbb{R}^n , число их k не больше n .

Задача 9. Покажите, что Γ исчерпывается целочисленными линейными комбинациями e_1, \dots, e_k .

Указание. Плоскость $\mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_k$ разбить на параллелепипеды Δ и показать, что ни в одном Δ не может быть точек Γ . Если есть $e_1 \in \Gamma$ вне плоскости $\mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_k$, то построение не окончено.

Итак, лемма 3 доказана.

Теперь нетрудно доказать лемму 2: M_f диффеоморфно тору T^n . Рассмотрим прямое произведение k окружностей и $n - k$ прямых:

$$T^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_k; y_1, \dots, y_{n-k})\}, \quad \varphi_i \bmod 2\pi,$$

вместе с естественным отображением $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$

$$\rho(\varphi, y) = (\varphi \bmod 2\pi, y).$$

Точки $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{R}^n$ (f_i имеет координаты $\varphi_i = 2\pi, \varphi_j = 0, y = 0$) переходят при этом отображении в 0.

Пусть $e_1, \dots, e_k \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — образующие стационарной группы Γ (см. лемму 3). Отобразим линейное пространство $\mathbb{R}^n = \{(\varphi, y)\}$ на пространство $\mathbb{R}^n = \{t\}$ так, чтобы векторы f_i перешли в e_i . Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — такой изоморфизм.

Заметим теперь, что $\mathbb{R}^n = \{(\varphi, y)\}$ задает карты $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, а $\mathbb{R}^n = \{t\}$ — карты нашего многообразия M_f .

Задача 10. Докажите, что отображение карт $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает диффеоморфизм $\tilde{A}: T^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M_f$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n = \{(\varphi, y)\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n = \{t\} \\ \rho \downarrow & & \tilde{A} \downarrow g \\ T^k \times \mathbb{R}^{n-k} & & M_f \end{array}$$

Но так как многообразие M_f по условию компактно, то $k = n$ и M_f есть n -мерный тор. Лемма 2 доказана.

Ввиду леммы 1 доказаны первые два утверждения теоремы.

Одновременно мы построили на M_f угловые координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n \bmod 2\pi$.

Задача 11. Показать, что под действием фазового потока с функцией Гамильтона H угловые координаты φ меняются равномерно:

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i; \quad \omega_i = \omega_i(f); \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t.$$

Иными словами, движение на инвариантном торе M_f условно-периодическое. Указание. $\varphi = A^{-1}t$.

Из всех утверждений теоремы осталось доказать лишь последнее: что система интегрируется в квадратурах.

§ 50. Переменные действие — угол

Здесь показано, что в условиях теоремы Лиувилля можно выбрать такие симплектические координаты (J, φ) , что первые интегралы F зависят только от J , а φ — угловые координаты на торе M_f .

А. Описание переменных действие — угол. В § 49 мы занимались исследованием одного-единственного связного, компактного многообразия уровня интегралов $M_f = \{x: F(x) = f\}$; оказалось, что M_f есть n -мерный тор, инвариантный относительно фазового потока. Мы выбрали угловые координаты φ_i на M_f так, что фазовый поток с функцией Гамильтона $H = F_1$ принимает на M_f особенно простой вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(f), \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t.$$

Рассмотрим теперь окрестность n -мерного многообразия M_f в $2n$ -мерном фазовом пространстве.

Задача. Докажите, что многообразию M_f имеет окрестность, диффеоморфную прямому произведению n -мерного тора T^n на шар D^n n -мерного евклидова пространства.

Указание. Принять за координаты функции F_i и построенные выше углы φ_i . Ввиду линейной независимости dF_i , функции F_i и φ_i ($i = 1, \dots, n$) задают диффеоморфизм окрестности M_f на прямое произведение $T^n \times D^n$.

Во введенных координатах (F, φ) фазовый поток с функцией Гамильтона $H = F_1$ записывается в виде особенно простой системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(F), \quad (1)$$

которая немедленно интегрируется: $F(t) = F(0)$, $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega(F(0))t$.

Таким образом, чтобы явно проинтегрировать исходную каноническую систему дифференциальных уравнений, достаточно в явном виде найти переменные φ . Оказывается, это можно сделать, используя лишь квадратуры. Такое построение переменных φ приведено ниже.

Заметим, что переменные (F, φ) не являются, вообще говоря, симплектическими координатами. Оказывается, существуют некоторые функции от F , мы обозначим их $I = I(F)$, $I = (I_1, \dots, I_n)$, такие, что переменные (J, φ) уже являются симплектическими

координатами: исходная симплектическая структура ω^2 выражается через них по обычной формуле

$$\omega^2 = \sum dl_i \wedge d\varphi_i.$$

Переменные I называются *переменными действия* *) и вместе с угловыми переменными φ они образуют в окрестности многообразия M_f систему канонических координат *действие — угол*.

Величины I_i являются первыми интегралами системы с функцией Гамильтона $H = F_1$, как функции от первых интегралов F_j . В свою очередь переменные F_i можно выразить через I , и, в частности, $H = F_1 = H(I)$. В переменных действие — угол дифференциальные уравнения нашего потока (1) имеют вид

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(I). \quad (2)$$

Задача. Может ли функция $\omega(I)$ в (2) быть произвольной?

Решение. В переменных (I, φ) уравнения потока (2) имеют канонический вид, с функцией Гамильтона $H(I)$. Следовательно, $\omega(I) = \partial H / \partial I$; поэтому, если число степеней свободы $n \geq 2$, то функции $\omega(I)$ не произвольны, а удовлетворяют условию симметрии $\partial\omega_i / \partial I_j = \partial\omega_j / \partial I_i$.

Переменные действие — угол особенно важны для теории возмущений; в § 52 указано их применение в теории адиабатических инвариантов.

Б. Построение переменных действие — угол в случае одной степени свободы. Система с одной степенью свободы на фазовой плоскости (p, q) задается функцией Гамильтона $H(p, q)$.

Пример 1. Гармонический осциллятор $H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2$, или общее $H = \frac{1}{2} a^2 p^2 + \frac{1}{2} b^2 q^2$.

Пример 2. Математический маятник $H = \frac{1}{2} p^2 - \cos q$. В обоих случаях имеются компактные замкнутые кривые $M_h (H = h)$, и мы находимся в условиях теоремы § 49 при $n = 1$.

Чтобы построить переменные действие — угол, будем искать каноническое преобразование $(p, q) \rightarrow (I, \varphi)$, удовлетворяющее двум условиям:

$$1) I = I(h), \quad 2) \oint_{M_h} d\varphi = 2\pi. \quad (3)$$

Задача. Найти переменные действие — угол в случае простейшего гармонического осциллятора $H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2$.

Решение. Если r, φ — полярные координаты, то $dp \wedge dq = r dr \wedge d\varphi = d \frac{r^2}{2} \wedge d\varphi$. Поэтому $I = H = \frac{p^2 + q^2}{2}$.

*) Нетрудно сообразить, что I имеет размерность действия.

Чтобы построить каноническое преобразование $p, q \rightarrow I, \Phi$ в общем случае, будем искать его производящую функцию $S(I, q)$:

$$p = \frac{\partial S(I, q)}{\partial q}, \quad \Phi = -\frac{\partial S(I, q)}{\partial I}; \quad H\left(\frac{\partial S(I, q)}{\partial q}, q\right) = h(I). \quad (4)$$

Предположим сперва, что функция $h(I)$ известна и обратима, так что каждая кривая M_h определяется значением I ($M_h = M_{h(I)}$). Тогда при фиксированном значении I имеем из (4)

$$dS|_{I=\text{const}} = p dq.$$

Это соотношение определяет на кривой $M_{h(I)}$ вполне определенную дифференциальную 1-форму dS .

Интегрируя вдоль кривой $M_{h(I)}$ эту 1-форму, мы получим (в окрестности точки q_0) функцию

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q p dq.$$

Эта функция и будет производящей функцией преобразования (4) в окрестности точки (I, q_0) . Первое из условий (3) выполнено автоматически: $I = I(h)$. Чтобы удовлетворить второму условию, рассмотрим поведение $S(I, q)$ «в целом».

При обходе замкнутой кривой $M_{h(I)}$ интеграл $p dq$ получает приращение

$$\Delta S(I) = \oint_{M_{h(I)}} p dq,$$

равное площади Π , ограниченной кривой $M_{h(I)}$. Поэтому функция S — «многозначная функция» на кривой $M_{h(I)}$: она определена с точностью до прибавления целого кратного Π . На производную $\frac{\partial S(I, q)}{\partial q}$ это слагаемое не влияет; но оно приводит к неоднозначности $\varphi = \partial S / \partial I$. Эта производная оказывается определенной лишь с точностью до слагаемого, кратного $\frac{d}{dI} \Delta S(I)$. Точнее говоря, формулы (4) определяют 1-форму $d\varphi$ на кривой $M_{h(I)}$, и интеграл этой формы по $M_{h(I)}$ равен $\frac{d}{dI} \Delta S(I)$.

Чтобы выполнялось второе из наших условий, $\oint_{M_h} d\varphi = 2\pi$, нужно, чтобы

$$\frac{d}{dI} \Delta S(I) = 2\pi, \quad I = \frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{\Pi}{2\pi},$$

где $\Pi = \oint_{M_h} p dq$ — площадь, ограниченная фазовой кривой $H = h$.

Определение. *Переменной действия* в одномерной задаче с функцией Гамильтона $H(p, q)$ называется величина $I(h) = -\frac{1}{2\pi} \Pi(h)$.

Окончательно мы приходим к следующему выводу. Пусть $d\Pi/dh \neq 0$. Тогда определена обратная $I(h)$ функция $h(I)$.

Теорема. Положим $S(I, q) = \int^q p dq|_{H=h(I)}$. Тогда формулы (4) задают каноническое преобразование $p, q \rightarrow I, \varphi$, удовлетворяющее условиям (3).

Итак, переменные действие — угол в одномерном случае построены.

Задача. Найти S и I для гармонического осциллятора.

Ответ. Если $H = \frac{1}{2} a^2 p^2 + \frac{1}{2} b^2 q^2$ (рис. 217), то M_h — эллипс, ограничи-

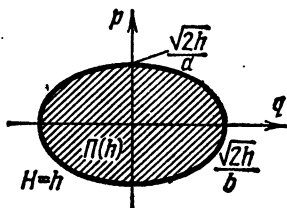


Рис. 217. Переменная действия для гармонического осциллятора.

вающий площадь $\Pi(h) = \pi \frac{\sqrt{2h}}{a} \frac{\sqrt{2h}}{b} = \frac{2\pi h}{ab} = \frac{2\pi h}{\omega}$.

Итак, для гармонического осциллятора переменная действия есть отношение энергии к частоте. Угловая переменная φ — это, конечно, фаза колебаний.

Задача. Доказать, что период T движения по замкнутой кривой $H = h$ на фазовой плоскости p, q равен производной площади, ограниченной этой кривой, по h :

$$T = \frac{d\Pi(h)}{dh}.$$

Решение. В переменных действие — угол уравнения движения (2) дают

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \left(\frac{dI}{dh}\right)^{-1} = 2\pi \left(\frac{d\Pi}{dh}\right)^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{d\Pi}{dh}.$$

В. Построение переменных действие — угол в \mathbb{R}^{2n} . Перейдем теперь к системе с n степенями свободы, заданной в $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ функцией Гамильтона $H(p, q)$ и имеющей n первых интегралов в инволюции $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$. Не будем повторять рассуждений, которые привели нас к выбору $2\pi I = \oint p dq$ в одномерном случае, и сразу определим n переменных действия I .

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — базисные одномерные циклы тора M_f (приращение координаты φ_i на цикле γ_i равно 2π , если $i = j$, и 0, если $i \neq j$). Положим

$$I_i(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} p dq. \quad (5)$$

Задача. Докажите, что этот интеграл не зависит от выбора кривой γ_i , представляющей базисный цикл (рис. 218).

Указание. В § 49 показано, что на многообразии M_f 2-форма $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ равна нулю. По формуле Стокса

$$\oint_{\gamma} p dq - \oint_{\gamma'} p dq = \iint_{\sigma} dp \wedge dq = 0,$$

где $d\sigma = \gamma - \gamma'$.

Определение. n величин $I_i(f)$, заданных формулами (5), называются *переменными действия*.

Предположим теперь, что при заданных значениях f_i n интегралов F_i n величин I_i независимы: $\det \frac{\partial I}{\partial f} \Big|_f \neq 0$. Тогда в окрестности тора M_f можно принять переменные I, φ за координаты.

Теорема. Преобразование $p, q \rightarrow I, \varphi$ — каноническое, т. е.

$$\sum dp_i \wedge dq_i = \sum dI_i \wedge d\varphi_i.$$

Намечу доказательство этой теоремы. Рассмотрим на M_f дифференциальную 1-форму $p dq$. Поскольку многообразие M_f — нулевое (§ 49), эта 1-форма на M_f замкнута:

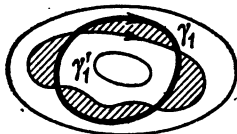


Рис. 218. Независимость переменной действия от выбора кривой интегрирования.

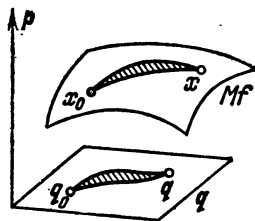


Рис. 219. Независимость интеграла $p dq$ на M_f от пути.

ее внешняя производная $\omega^2 = dp \wedge dq$ на многообразии M_f тождественно равна 0. Поэтому (рис. 219)

$$S(x) = \int_{x_0}^x p dq \Big|_{M_f}$$

не меняется при деформации пути интегрирования (формула Стокса): Итак, $S(x)$ есть «многозначная функция» на M_f ; ее периоды равны

$$\Delta_i \dot{S} = \oint_{\gamma_i} dS = 2\pi I_i.$$

Пусть теперь x_0 — такая точка на M_f , в окрестности которой n переменных q служат координатами на M_f , так что подмногообразие $M_f \subset \mathbb{R}^{2n}$ задается n уравнениями вида $p = p(I, q)$, $q(x_0) = q_0$. В односвязной окрестности точки q_0 определена однозначная функция

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q p(I, q) dq,$$

и мы можем принять ее за производящую функцию канонического преобразования $p, q \rightarrow I, \Phi$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \Phi = \frac{\partial S}{\partial I}.$$

Нетрудно проверить, что эти формулы в действительности задают каноническое преобразование не только в окрестности рассматриваемой точки, но и «в целом» в окрестности M_f . При этом координаты Φ будут многозначными с периодами

$$\Delta_i \Phi_j = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = \frac{\partial}{\partial I_j} \Delta_i S = \frac{\partial}{\partial I_j} 2\pi I_i = 2\pi \delta_{ij},$$

что и требовалось.

Заметим теперь, что все наши построения содержат лишь «алгебраические» операции (обращение функций) и «квадратуру» — вычисление интеграла известной функции. Таким образом, задача интегрирования канонической системы $2n$ уравнений, у которых известны n первых интегралов в инволюции, решается в квадратурах, что и доказывает последнее утверждение теоремы Лиувилля (§ 49).

Замечание 1. Уже в одномерном случае переменные действие — угол I, Φ определены не однозначно условиями (3). А именно, за переменную действия можно было бы принять $I' = I + \text{const}$, а за угловую переменную $\Phi' = \Phi + c(I)$.

Замечание 2. Мы построили переменные действие — угол для системы с фазовым пространством \mathbb{R}^{2n} . Можно было бы ввести переменные действие — угол и для системы на произвольном симплектическом многообразии. Ограничусь здесь одним простым примером (рис. 220).

Фазовым пространством маятника ($H = \frac{1}{2} p^2 - \cos q$) естественно считать не плоскость $\{(p, q)\}$, а поверхность цилиндра $\mathbb{R}^1 \times S^1$, получающуюся при отождествлении углов q , отличающихся целым кратным 2π .

Критические линии уровня $H = \pm 1$ разбивают цилиндр на три части A, B, C , каждая из которых диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{R}^1 \times S^1$. В каждой части можно ввести переменные действие — угол.

В ограниченной части (B) замкнутые траектории изображают качание маятника, в неограниченных частях — вращения.

Замечание 3. Как и в разобранным примере, в общем случае уравнения $F_i = f_i$ при некоторых значениях f_i перестают быть

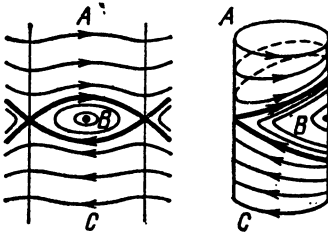


Рис. 220. Переменное действие — угол на симплектическом многообразии.

независимыми, и M_f перестает быть многообразием. Таким критическим значениям f соответствуют сепаратрисы, разделяющие фазовое пространство интегрируемой задачи на части, подобные частям A, B, C выше. В некоторых из этих частей многообразия M_f могут быть неограниченными (части A и C на плоскости $\{(p, q)\}$); другие же расщлаиваются на n -мерные инвариантные торы M_f ; в окрестности такого тора можно ввести переменные действие — угол.

§ 51. Усреднение

В этом параграфе доказывается совпадение временных и пространственных средних в системах, совершающих условно-периодическое движение.

А. Условно-периодические движения. В предыдущих параграфах нам часто встречалось условно-периодическое движение: фигуры Лиссажу, прецессия, нутация, вращение волчка и т. п.

Определение. Пусть T^n — n -мерный тор, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi$ — угловые координаты. Тогда *условно-периодическим движением* называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов $T^n \rightarrow T^n$, заданная дифференциальными уравнениями (рис. 221)

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) = \text{const.}$$

Эти дифференциальные уравнения немедленно интегрируются:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t.$$

Таким образом, на карте $\{\varphi\}$ траектории — прямые линии. Траектория на торе называется *обмоткой* тора.

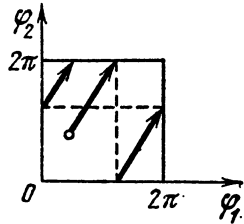


Рис. 221. Условно-периодическое движение.

Пример. Пусть $n=2$. Если $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2$, то траектории замкнуты; если ω_1/ω_2 иррационально, то траектории на торе всюду плотны (см. § 16).

Величины $\omega_1, \dots, \omega_n$ называются *частотами* условно-периодического движения. Частоты называются *независимыми*, когда они линейно независимы над полем рациональных чисел: если $k \in \mathbb{Z}^n$ *) и $(k, \omega) = 0$, то $k = 0$.

Б. Пространственное и временное средние. Пусть $f(\varphi)$ — интегрируемая функция на торе T^n .

Определение. *Пространственным средним* функции f на торе T^n называется число

$$\bar{f} = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

*) $k = (k_1, \dots, k_n)$ с целыми k_i .

Рассмотрим значение функции $f(\varphi)$ на траектории $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. Это — функция времени $f(\varphi_0 + \omega t)$. Рассмотрим ее среднее.

Определение. *Временным средним* функции f на торе T^n называется функция

$$f^*(\varphi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_0 + \omega t) dt$$

(определенная там, где предел существует).

Теорема об усреднении. *Временное среднее всюду существует и совпадает с пространственным, если функция f непрерывна (или хотя бы интегрируема по Риману), а частоты ω_i независимы.*

Задача. Покажите, что если частоты зависимы, то временное среднее может не всюду совпадать с пространственным.

Следствие 1. *Если частоты независимы, то каждая траектория $\{\varphi(t)\}$ всюду плотна на торе T^n .*

Доказательство. Предположим противное. Тогда в окрестности D некоторой точки тора нет точек траектории $\varphi(t)$. Легко построить непрерывную функцию f , равную нулю вне D и с пространственным средним $\bar{f} = 1$. Временное среднее $f^*(\varphi_0)$ на траектории $\varphi(t)$ равно $0 \neq 1$. Противоречие с утверждением теоремы доказывает следствие 1.

Следствие 2. *Если частоты независимы, то каждая траектория равномерно распределена на торе T^n .*

Это означает, что доля времени, которое траектория проводит в области D пропорциональна мере D .

Точнее, пусть D — измеримая (по Жордану) область на T^n . Обозначим через $\tau_D(T)$ количество времени, которое отрезок $0 \leq t \leq T$ траектории $\varphi(t)$ находится внутри D . Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\text{mes } D}{(2\pi)^n}.$$

Доказательство. Применим теорему к характеристической функции f множества D (f интегрируема по Риману, так как область D измерима по Жордану). Тогда $\int_0^T f(\varphi(t)) dt = \tau_D(T)$, а $\bar{f} = (2\pi)^{-n} \text{mes } D$, и следствие непосредственно вытекает из теоремы.

Следствие в. В последовательности

$$1, 2, 4, 8, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2 \dots$$

первых цифр чисел 2^n число 7 встречается чаще, чем 8 в $\frac{\lg 8 - \lg 7}{\lg 9 - \lg 8}$ раз.

Теорема об усреднении неявно встречается уже в работах Лапласа, Лагранжа и Гаусса по небесной механике; она является одной из первых «эргодических теорем». Строгое доказательство дали лишь в 1909 г. П. Боль, В. Серпинский и Г. Вейль в связи с задачей Лагранжа о среднем движении перигелия Земли. Ниже воспроизведено доказательство Г. Вейля.

В. Доказательство теоремы об усреднении.

Лемма 1. Теорема верна для экспонент, $f = e^{i(k, \varphi)}$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Если $k = 0$, то $\bar{f} = f = f^* = 1$ и теорема очевидна. Если $k \neq 0$, то $\bar{f} = 0$. С другой стороны,

$$\int_0^T e^{i(k, \varphi_0 + \omega t)} dt = e^{i(k, \varphi_0)} \frac{e^{i(k, \omega) T} - 1}{i(k, \omega)}.$$

Поэтому временное среднее

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k, \varphi_0)}}{i(k, \omega)} \cdot \frac{e^{i(k, \omega) T} - 1}{T} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Теорема верна для тригонометрических полиномов

$$f = \sum_{|k| < N} \hat{f}_k e^{i(k, \varphi)}.$$

Доказательство. И временное и пространственное среднее зависят от f линейно, поэтому совпадают по лемме 1, ч. т. д.

Лемма 3. Пусть f — вещественная непрерывная (или хотя бы интегрируемая по Риману) функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют два тригонометрических полинома P_1, P_2 таких, что $P_1 < f < P_2$,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathcal{T}^n} (P_2 - P_1) d\varphi < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть сначала f непрерывна. По теореме Вейерштрасса ее можно приблизить тригонометрическим полиномом P , $|f - P| < \frac{\varepsilon}{2}$. Полиномы $P_1 = P - \frac{\varepsilon}{2}$, $P_2 = P + \frac{\varepsilon}{2}$ — искомые.

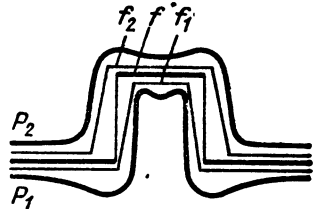


Рис. 222. Аппроксимация функции f тригонометрическими полиномами P_1 и P_2 .

Если же f разрывна, но интегрируема по Риману, то существуют две непрерывные функции f_1, f_2 , так что $f_1 < f < f_2$, $(2\pi)^n \int (f_2 - f_1) d\varphi < \frac{\varepsilon}{3}$ (рис. 222 соответствует характеристической функции отрезка). Аппроксимируя f_1 и f_2 полиномами $P_1 < f_1 <$

$\langle f_2 \rangle < P_2$, $(2\pi)^{-n} \int (P_2 - f_2) d\varphi < \frac{\varepsilon}{3}$, $(2\pi)^{-n} \int (f_1 - P_1) d\varphi < \frac{\varepsilon}{3}$, получим требуемое. Лемма 3 доказана.

Теперь легко окончить доказательство теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по лемме 3 существуют тригонометрические полиномы $P_1 < f < P_2$, $(2\pi)^{-n} \int (P_2 - P_1) d\varphi < \varepsilon$.

При любом T имеем тогда

$$\frac{1}{T} \int_0^T P_1(\varphi(t)) dt < \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi(t)) dt < \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\varphi(t)) dt.$$

По лемме 2, при $T > T_0(\varepsilon)$,

$$\left| \bar{P}_i - \frac{1}{T} \int_0^T P_i(\varphi(t)) dt \right| < \varepsilon \quad (i=1, 2).$$

Далее, $\bar{P}_1 < \bar{f} < \bar{P}_2$ и $\bar{P}_2 - \bar{P}_1 < \varepsilon$. Поэтому $\bar{P}_2 - \bar{f} < \varepsilon$, $\bar{f} - \bar{P}_1 < \varepsilon$; следовательно, при $T > T_0(\varepsilon)$

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi(t)) dt - \bar{f} \right| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

З а д а ч а. Двумерный осциллятор с кинетической энергией $T = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2$

и потенциальной энергией $U = \frac{1}{2} x^2 + y^2$ совершает колебания с амплитудами $a_x = 1$, $a_y = 1$. Найти временное среднее кинетической энергии.

З а д а ч а *). Пусть ω_k независимы, $a_k > 0$. Вычислить

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \arg \sum_{k=1}^3 a_k e^{i\omega_k t}.$$

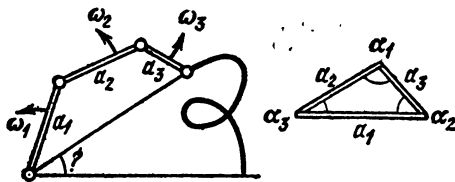


Рис. 223. К задаче о среднем движении перигелиев.

Ответ. $\frac{\omega_1 \alpha_1 + \omega_2 \alpha_2 + \omega_3 \alpha_3}{\pi}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы треугольника со сторонами a_k (рис. 223).

Г. Выврождения. До сих пор мы рассматривали случай, когда частоты ω независимы. Целочисленный вектор $k \in \mathbb{Z}^n$ называется *соотношением между частотами*, если $(k, \omega) = 0$.

*) Лагранж показал, что к подобной задаче сводится исследование среднего движения перигелиев планет. Решение этой задачи можно найти в работах Г. Вейля. Эксцентриситет орбиты Земли меняется как модуль аналогичной суммы. С изменением эксцентриситета связаны, по-видимому, ледниковые периоды.

Задача. Докажите, что множество всех соотношений между данными частотами ω образует подгруппу Γ решетки \mathbb{Z}^n .

Но мы видели в § 49, что такая подгруппа состоит из всех целочисленных линейных комбинаций r независимых векторов k_i , $1 \leq r \leq n$. Мы скажем, что между частотами *имеется* r (независимых) соотношений *).

Задача. Докажите, что замыкание траектории $\{\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t\}$ (на T^n) представляет собой тор размерности $n-r$, если между частотами ω имеется r независимых соотношений; в этом случае движение на T^{n-r} — условно-периодическое, с $n-r$ независимыми частотами.

Вернемся теперь к интегрируемой гамильтоновой системе, заданной в переменных действие — угол I, φ уравнениями

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I), \quad \text{где } \omega(I) = \frac{\partial H}{\partial J}.$$

Каждый n -мерный тор $I = \text{const}$ в $2n$ -мерном фазовом пространстве инвариантен, и движение на нем условно-периодично.

Определение. Система называется невырожденной, если отличен от 0 определитель

$$\det \frac{\partial \omega}{\partial I} = \det \frac{\partial^2 H}{\partial J^2}.$$

Задача. Докажите, что если система невырождена, то в любой окрестности любой точки имеются условно-периодические движения с n частотами, а также с любым меньшим числом частот.

Указание. Вместо переменных I можно за локальные координаты принять сами частоты ω . В пространстве наборов частот множества точек ω с любым числом r соотношений ($0 \leq r < n$) всюду плотны.

Следствие. Если система невырождена, то инвариантные торы $I = \text{const}$ определены однозначно, независимо от выбора координат действие — угол I, φ , в построении которых имеется всегда некоторый произвол **).

Действительно, торы $I = \text{const}$ можно определить как замыкания фазовых траекторий, соответствующих независимым ω .

Замечу кстати, что при большинстве значений I частоты ω будут независимы.

Задача. Докажите, что лебегова мера множества тех I , для которых частоты $\omega(I)$ в невырожденной системе зависимы, равна 0.

Указание. Сначала докажите, что $\text{mes}\{\omega: \exists k \neq 0, (\omega, k) = 0\} = 0$.

Напротив того, в вырожденной системе можно построить такие системы переменных действие — угол, что торы $I = \text{const}$ в одной и в другой системе будут разными. Это объясняется тем, что

*) Докажите, что число r не зависит от выбора независимых векторов k_i .

***) Например, всегда допустимы замены $I' = I, \varphi' = \varphi + S_I(I)$ или $I_1, I_2; \varphi_1, \varphi_2 \rightarrow I_1 + I_2, I_2; \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1$.

замыкания траекторий вырожденной системы — торы размерности $k < n$, и их можно по-разному соединять в n -мерные торы.

Пример 1. Плоский гармонический осциллятор $\ddot{x} = -x$; $n = 2$, $k = 1$. Разделение переменных в декартовых и в полярных координатах приводит к разным переменным действие — угол и разным торам.

Пример 2. Кеплерово плоское движение $(U = -\frac{1}{r})$, $n = 2$, $k = 1$. Здесь также разделение переменных в полярных и в эллиптических координатах приводит к разным I .

§ 52. Усреднение возмущений

Здесь доказана адиабатическая инвариантность переменной действия в системе с одной степенью свободы.

А. Системы, близкие к интегрируемым. Мы рассмотрели выше довольно много интегрируемых систем (одномерные задачи, задача двух тел, малые колебания, случаи Эйлера и Лагранжа движения твердого тела с закрепленной точкой и т. д.). Мы изучили характер фазовых траекторий в этих системах: они оказались «обмотками торов», заполняющими всюду плотно инвариантные торы в фазовом пространстве; каждая траектория распределена на этом торе равномерно.

Не следует думать, что такая ситуация типична для задач общего вида. В действительности свойства траекторий в многомерных системах могут быть весьма разнообразными и совсем не похожими на свойства условно-периодических движений. В частности, замыкание траектории системы с n степенями свободы может заполнять в $2n$ -мерном фазовом пространстве сложные множества размерности больше n ; траектория может даже быть всюду плотной и равномерно распределенной на всем $2n - 1$ -мерном многообразии, заданном уравнением $H = h^*$). Термин «неинтегрируемые» в применении к этим системам оправдан, так как они не допускают однозначных первых интегралов, не зависящих от H .

Исследование таких сложных систем еще далеко от завершения; оно составляет задачу «эргодической теории».

Один из подходов к неинтегрируемым системам — изучение систем, близких к интегрируемым. Например, задача о движении планет вокруг Солнца близка к интегрируемой задаче о движении невзаимодействующих точек вокруг неподвижного центра; упомянем еще задачу о движении слегка несимметричного тяжелого волчка и задачу о нелинейных колебаниях вблизи положения равновесия (близкая интегрируемая задача — линейная). При иссле-

*) К этому классу относится, например, движение по инерции на многообразиях отрицательной кривизны.

довании этих и подобных задач чрезвычайно плодотворен следующий метод.

Б. Принцип усреднения. Пусть I, φ — переменные действие — угол в интегрируемой («невозмущенной») системе с функцией Гамильтона $H_0(I)$:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I); \quad \omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}.$$

В качестве близкой «возмущенной» системы рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi), \\ \dot{I} &= \varepsilon g(I, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Забудем временно о гамильтоновости системы и рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений (1), заданную на прямом произведении $T^k \times G$ k -мерного тора $T^k = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \bmod 2\pi\}$ и области G l -мерного пространства $G \subset \mathbf{R}^l = \{I = (I_1, \dots, I_l)\}$. При $\varepsilon = 0$ движение (1) условно-периодическое, $\leq k$ -частотное, с k -мерными инвариантными торами.

Принцип усреднения для системы (1) состоит в ее замене другой системой, называемой усредненной системой:

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J), \quad \bar{g}(J) = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(J, \varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_k \quad (2)$$

в l -мерной области $G \subset \mathbf{R}^l = \{J = (J_1, \dots, J_l)\}$.

Утверждается, что система (2) «хорошо аппроксимирует» систему (1).

Заметим, что этот принцип — не теорема, не аксиома и не определение, а физическое предположение, т. е. расплывчато сформулированное и, строго говоря, неверное утверждение.

Такие утверждения часто бывают плодотворным источником математических теорем.

Рассматриваемый принцип усреднения явно встречается уже у Гаусса (при изучении возмущений планет друг другом Гаусс предложил размазать массу каждой планеты по ее орбите пропорционально времени и заменить притяжение планет притяжением полученных колец). Тем не менее удовлетворительное исследование связи между решениями систем (1) и (2) в общем случае не проведено и по сей час.

При замене системы (1) системой (2) мы откидываем в правой части слагаемое $\varepsilon \tilde{g}(I, \varphi) = \varepsilon g(I, \varphi) - \varepsilon \bar{g}(I)$. Это слагаемое имеет порядок ε , такой же, как и оставленное слагаемое $\varepsilon \bar{g}$. Чтобы понять различие роли слагаемых \tilde{g} и \bar{g} в g , рассмотрим простейший пример.

Задача. Рассмотрите случай $k = l = 1$,

$$\dot{\varphi} = \omega \neq 0, \quad \dot{I} = \varepsilon g(\varphi).$$

Покажите, что при $0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$

$$|I(t) - J(t)| < c\varepsilon, \quad \text{где } J(t) = I(0) + \varepsilon \bar{g}t.$$

Решение.

$$\begin{aligned} I(t) - I(0) &= \int_0^t \varepsilon g(\varphi_0 + \omega t) dt = \int_0^t \varepsilon \bar{g} dt + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^{t/\omega} \tilde{g}(\varphi) d\varphi = \\ &= \varepsilon \bar{g}t + \frac{\varepsilon}{\omega} h\left(\frac{t}{\omega}\right), \end{aligned}$$

где $h(\varphi) = \int_0^\varphi \tilde{g}(\varphi) d\varphi$ — периодическая и, следовательно, ограниченная функция.

Таким образом, изменение I со временем состоит из двух частей: осцилляций порядка ε , зависящих от \tilde{g} , и систематической «эволюции» со скоростью $\varepsilon \bar{g}$ (рис. 224).

Принцип усреднения основан на представлении о том, что и в общем случае движение системы (1) можно разделить на «эволюцию» (2) и малые осцилляции. В общем виде такое представление не обосновано, а сам принцип неверен.

Тем не менее применим его к гамильтоновой системе (1):

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial I} (H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)),$$

$$\dot{I} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)).$$

В качестве правой части усредненной системы (2) получим тогда

$$\bar{g} = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_1(I, \varphi) d\varphi = 0.$$

Иными словами, в гамильтоновой невырожденной системе эволюции нет.

Один из вариантов этого совсем нестрогого вывода приводит к так называемой теореме Лапласа:

Большие полуоси кеплеровых эллипсов планет не имеют вековых возмущений.

Сказанного достаточно, чтобы убедиться в важности принципа усреднения; сформулируем теперь теорему, обосновывающую этот

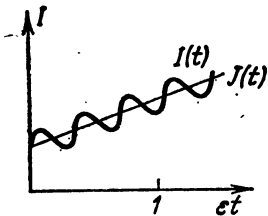


Рис. 224. Эволюция и осцилляции.

принцип в одном весьма частном случае — случае одночастотных колебаний ($k = 1$). Эта теорема показывает, что усредненное уравнение правильно описывает эволюцию на большом отрезке времени ($0 < t < 1/\varepsilon$).

В. Усреднение в одночастотной системе. Рассмотрим систему $l + 1$ дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi), \\ \dot{I} &= \varepsilon g(I, \varphi), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi \bmod 2\pi &\in S^1, \\ I &\in G \subset \mathbb{R}^l, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(I, \varphi + 2\pi) \equiv f(I, \varphi)$, $g(I, \varphi + 2\pi) \equiv g(I, \varphi)$, и «усредненную» систему из l уравнений

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J), \quad \text{где } \bar{g}(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(J, \varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Обозначим через $I(t)$, $\varphi(t)$ решение системы (1) с начальным условием $I(0)$, $\varphi(0)$, а через $J(t)$ — решение системы (2) с тем же начальным условием $J(0) = I(0)$ (рис. 225).

Теорема. Пусть 1) функции ω , f , g определены, когда I меняется в ограниченной области G , и в этой области ограничены со своими производными до второго порядка включительно:

$$\|\omega, f, g\|_{C^2(G \times S^1)} < c_1;$$

2) в области G

$$\omega(I) > c > 0;$$

3) при $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ точка $J(t)$ принадлежит G с окрестностью радиуса d :

$$J(t) \in G - d.$$

Тогда при достаточно малом ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$)

$$|I(t) - J(t)| < c_0 \varepsilon \quad \text{для всех } t, \quad 0 \leq t \leq 1/\varepsilon,$$

где постоянная $c_0 > 0$ зависит от c_1 , c , d , но не от ε .

Некоторые приложения этой теоремы будут даны ниже («адиабатические инварианты»). Заметим, что основная идея доказательства этой теоремы (замена переменных, убывающая возмущение) важнее самой теоремы; это — одна из основных идей в теории обыкновенных дифференциальных уравнений; она встречается уже в элементарном курсе в виде «метода вариации постоянных».

Г. Доказательство теоремы об усреднении. Вместо переменных I введем новые переменные P

$$P = I + \varepsilon k(I, \varphi), \quad (3)$$

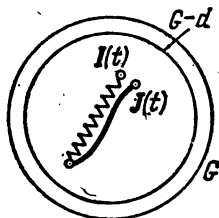


Рис. 225. Теорема об усреднении.

где 2π — периодические по φ функции k подберем так, чтобы вектор P удовлетворял более простому дифференциальному уравнению.

Скорость изменения $P(t)$, согласно (1) и (3), равна

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{I} + \varepsilon \frac{\partial k}{\partial I} \dot{I} + \varepsilon \frac{\partial k}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \\ &= \varepsilon \left[g(I, \varphi) + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \omega(I) \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial k}{\partial I} g + \varepsilon^2 \frac{\partial k}{\partial \varphi} f. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что замену (3) можно обратить, так что

$$I = P + \varepsilon h(P, \varphi, \varepsilon) \quad (5)$$

(где функции h 2π -периодичны по φ).

Тогда из (4), (5) следует, что $P(t)$ подчиняется системе уравнений

$$\dot{P} = \varepsilon \left[g(P, \varphi) + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \omega(P) \right] + R, \quad (6)$$

где «остаточный член» R — второго по ε порядка малости

$$\|R\| < c_2 \varepsilon^2, \quad c_2(c_1, c_3, c_4) > 0, \quad (7)$$

если только

$$\|\omega\|_{C^2} < c_1, \quad \|f\|_{C^2} < c_1, \quad \|g\|_{C^2} < c_1, \quad \|k\|_{C^2} < c_3, \quad \|h\|_{C^2} \leq c_4. \quad (8)$$

Постараемся теперь выбрать замену переменных (3) так, чтобы обратить в 0 член с ε в (6). Мы получаем для k уравнение

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\omega} g.$$

Вообще говоря, такое уравнение неразрешимо в классе периодических по φ функций k . Действительно, среднее значение (по φ) левой части равно всегда 0, а среднее значение правой части может и не равняться 0.

Поэтому мы не можем выбирать k так, чтобы убить целиком часть с ε в (6). Однако мы можем убить всю «периодическую» часть g ,

$$\tilde{g}(P, \varphi) = g(P, \varphi) - \bar{g}(P),$$

полагая

$$k(P, \varphi) = - \int_0^\varphi \frac{\tilde{g}(P, \varphi)}{\omega(P)} d\varphi. \quad (9)$$

Итак, определим функцию k формулой (9). Тогда ввиду условий 1) и 2) доказываемой теоремы функция k удовлетворяет оценке $\|k\|_{C^2} < c_3$, где $c_3(c_1, c) > 0$. Чтобы установить неравенства (8), остается оценить h . Для этого прежде всего нужно показать, что замена (3) обратима.

Зафиксируем положительное число α .

Лемма. Если ϵ достаточно мало, то ограничение отображения (3) *)

$$I \rightarrow I + \epsilon k, \text{ где } \|k\|_{C^1(G)} < c_3,$$

на область $G - \alpha$ (состоящую из точек, входящих в G с α -окрестностью) есть диффеоморфизм. Обратный диффеоморфизм (5) в области $G - 2\alpha$ удовлетворяет оценке $\|k\|_{C^1} < c_4$ с некоторой постоянной $c_4(\alpha, c_3) > 0$.

Доказательство. Нужная оценка непосредственно вытекает из теоремы о неявной функции. Некоторое затруднение вызывает лишь взаимная однозначность отображения $I \rightarrow I + \epsilon k$ в области $G - \alpha$.

Заметим, что функция k удовлетворяет в области $G - \alpha$ условию Липшица (с некоторой постоянной $L(\alpha, c_3)$). Рассмотрим две точки I_1, I_2 из $G - \alpha$. При достаточно малом ϵ (а именно, при $L \epsilon < 1$) расстояние между $\epsilon k(I_1)$ и $\epsilon k(I_2)$ будет меньше $|I_1 - I_2|$. Поэтому $I_1 + \epsilon k(I_1) \neq I_2 + \epsilon k(I_2)$. Итак, отображение (3) в $G - \alpha$ взаимно однозначно, и лемма доказана.

Из леммы вытекает, что при достаточно малом ϵ справедливы все оценки (8). Значит, справедлива также оценка (7).

Сравним теперь системы дифференциальных уравнений для J

$$\dot{J} = \epsilon \bar{g}(J), \tag{2}$$

и для P ; последняя ввиду (9) принимает вид

$$\dot{P} = \epsilon \bar{g}(P) + R. \tag{6'}$$

Поскольку разница между правыми частями порядка $\lesssim \epsilon^2$ (см. (7)), то за время $t \lesssim 1/\epsilon$ решения разойдутся на расстояние $|P - J| \lesssim \epsilon$ (рис. 226). С другой стороны, $|I - P| = \epsilon |k| \lesssim \epsilon$. Итак, разность $|I - J|$ при $t \lesssim 1/\epsilon$ имеет порядок $\lesssim \epsilon$, что и требуется.

Переходя к аккуратным оценкам, введем величину

$$z(t) = P(t) - J(t). \tag{10}$$

Тогда из (6'), (9) вытекает

$$\dot{z} = \epsilon (\bar{g}(P) - \bar{g}(J)) + R = \epsilon \frac{\partial \bar{g}}{\partial P} z + R',$$

где $|R'| < c_2 \epsilon^2 + c_3 \epsilon |z|$, если отрезок (P, J) лежит в $G - \alpha$. В этом предположении мы находим

$$|\dot{z}| \leq c_6 \epsilon |z| + c_2 \epsilon^2 \quad (\text{где } c_6 = c_5 + c_1), \quad |z(0)| \leq c_3 \epsilon. \tag{11}$$

*) При любом фиксированном значении параметра ϕ .

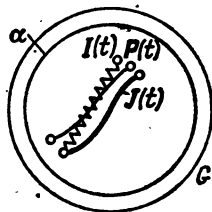


Рис. 226. Доказательство теоремы об усреднении.

Лемма. Если $|\dot{z}| \leq a|z| + b$, $|z(0)| < d$; $a, b, d, t > 0$, то $|z(t)| \leq (d + bt)e^{at}$.

Доказательство. $|z(t)|$ не превосходит решения $y(t)$ уравнения $\dot{y} = ay + b$, $y(0) = d$. Решая это уравнение, находим $y = Ce^{at}$, $\dot{C}e^{at} = b$, $C = e^{-at}b$, $C(0) = d$, $C \leq d + bt$, что и требовалось доказать.

Теперь из (11), в предположении, что отрезок P, J лежит в $G - \alpha$ (рис. 226),

$$|z(t)| < (c_3e + c_2e^2t)ec_0e^t.$$

Отсюда следует, что при $0 \leq t \leq 1/e$

$$|z(t)| < c_7e, \quad c_7 = (c_3 + c_2)ec_0.$$

Мы видим теперь, что если $\alpha = d/3$ и ϵ достаточно мало, то отрезок $P(t), J(t)$ ($t \leq 1/e$) весь лежит внутри $G - \alpha$, и, следовательно,

$$|P(t) - J(t)| < c_8\epsilon \text{ при всех } 0 \leq t \leq 1/e.$$

С другой стороны, $|P(t) - I(t)| < \epsilon k < c_9\epsilon$. Итак, при всех t , $0 \leq t \leq 1/e$,

$$|I(t) - J(t)| < c_9\epsilon, \quad c_9 = c_8 + c_3 > 0,$$

и теорема доказана.

Д. Адиабатические инварианты. Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы, с функцией Гамильтона $H(p, q; \lambda)$, зависящей от параметра λ .

Примером может служить маятник:

$$H = \frac{p^2}{2l^2} + lg \frac{q^2}{2},$$

в качестве параметра λ можно взять длину l или ускорение силы тяжести g .

Предположим, что параметр со временем медленно меняется. Оказывается в пределе, когда скорость изменения параметра стремится к 0, появляется замечательное асимптотическое явление: две величины, вообще независимые, становятся функциями одна другой.

Предположим, например, что длина маятника медленно (по сравнению с его собственными колебаниями) изменяется. Оказывается, амплитуда его колебаний становится тогда функцией длины маятника. Например, если очень медленно увеличить вдвое длину нити маятника, а затем очень медленно ее уменьшить до прежней величины, то в конце этого процесса амплитуда колебаний станет такой же, какой была вначале.

Более того, оказывается, отношение энергии маятника H к частоте ω при медленном изменении параметров почти не меняется, хотя сами энергия и частота могут измениться сильно. Такие величины, которые мало меняются при медленном изменении параметров, физики называли адиабатическими инвариантами.

Легко сообразить, что адиабатическая инвариантность отношения энергии маятника к частоте есть утверждение физического

характера, т. е. без дополнительных предположений неверное. Действительно, изменяя длину маятника сколь угодно медленно, но выбирая фазу колебаний, при которой длина увеличивается и уменьшается, можно раскачать маятник (параметрический резонанс). Чувствуя это, физики предложили формулировать определение адиабатической инвариантности так: лицо, меняющее параметры системы, не должно видеть, в каком состоянии находится система (рис. 227). Дать этому определению строгий математический смысл — весьма деликатная, до сих пор не решенная задача. К счастью, мы можем обойтись суррогатом, заменяя невмешательство лица, меняющего параметры, во внутренние дела системы требованием того, чтобы изменение параметров было плавным, а именно, два раза непрерывно дифференцируемым.

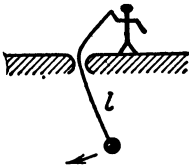


Рис. 227. Адиабатическое изменение длины маятника.

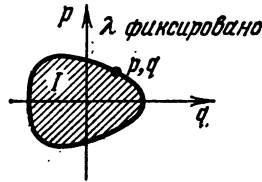


Рис. 228. Адиабатический инвариант одномерной системы.

Точнее, пусть $H(p, q; \lambda)$ — фиксированная, дважды непрерывно дифференцируемая функция λ . Положим $\lambda = \epsilon t$ и будем рассматривать полученную систему с медленно меняющимся параметром $\lambda = \epsilon t$:

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(p, q; \epsilon t). \quad (*)$$

Определение. Величина $I(p, q; \lambda)$ называется *адиабатический инвариантом* системы (*), если для всякого $\kappa > 0$ существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что если $\epsilon < \epsilon_0$, $0 < t < 1/\epsilon$, то

$$|I(p(t), q(t); \epsilon t) - I(p(0), q(0); 0)| < \kappa.$$

Очевидно, всякий первый интеграл является также адиабатическим инвариантом.

Оказывается, всякая одномерная система (*) имеет адиабатический инвариант. А именно, адиабатическим инвариантом является переменная действия в соответствующей задаче с постоянными коэффициентами.

Предположим, что фазовые траектории системы с гамильтонианом $H(p, q; \lambda)$ замкнуты. Определим функцию $I(p, q; \lambda)$ следующим образом. При фиксированном λ функции Гамильтона $H(p, q; \lambda)$ соответствует определенный фазовый портрет (рис. 228). Рассмотрим замкнутую фазовую траекторию, проходящую через точку (p, q) .

Она ограничивает на фазовой плоскости некоторую площадь. Обозначим эту площадь через $2\pi I(p, q; \lambda)$. На каждой фазовой траектории (при данном λ) $I = \text{const}$. Очевидно, I не что иное, как переменная действия (см. § 50).

Теорема. Если частота рассматриваемой системы (*) $\omega(I, \lambda)$ не обращается в 0, то $I(p, q; \lambda)$ — адиабатический инвариант.

Е. Доказательство адиабатической инвариантности действия. При фиксированном λ в системе (*) можно ввести переменные действие — угол I, φ каноническим преобразованием, зависящим от λ :

$$p, q \rightarrow I, \varphi; \dot{\varphi} = \omega(I, \lambda), \dot{I} = 0; \omega(I, \lambda) = \frac{\partial H_0}{\partial I}, H_0 = H_0(I, \lambda).$$

Обозначим через $S(I, q; \lambda)$ производящую (многозначную) функцию этого преобразования:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}.$$

Пусть теперь $\lambda = \varepsilon t$. Поскольку переход от переменных p, q к переменным I, φ совершается теперь зависящим от времени каноническим преобразованием, уравнения движения в новых переменных I, φ имеют гамильтонов вид, но с функцией Гамильтона (см. § 45, А, стр. 208).

$$K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda}.$$

Задача. Докажите, что $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(I, q; \lambda)$ — однозначная функция на фазовой плоскости.

Указание. Неоднозначность S сводится к прибавлению кратных $2\pi I$.

Мы получаем, таким образом, уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(I, \lambda) + \varepsilon f(I, \varphi; \lambda), & \dot{I} &= -\partial^2 S / \partial I \partial \lambda, \\ \dot{I} &= \varepsilon g(I, \varphi; \lambda), & \dot{\varphi} &= \partial^2 S / \partial \varphi \partial \lambda, \\ \dot{\lambda} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $\omega \neq 0$, применима теорема об усреднении (стр. 255). Усредненная система имеет вид

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}, \quad \dot{\Lambda} = \varepsilon.$$

Но $\bar{g} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial S}{\partial \lambda}$, а $\frac{\partial S}{\partial \lambda}$ — однозначная функция на окружности $I = \text{const}$. Поэтому $\bar{g} = (2\pi)^{-1} \int g d\varphi = 0$, и в усредненной системе J не меняется вовсе: $J(t) = J(0)$.

По теореме об усреднении

$|I(t) - I(0)| < c\varepsilon$ для всех t , $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример. Для гармонического осциллятора (см. рис. 217)

$$H = \frac{a^2}{2} p^2 + \frac{b^2}{2} q^2, \quad I = \frac{1}{2\pi} \pi \frac{\sqrt{2h} \sqrt{2h}}{a} \frac{1}{b} = \frac{h}{\omega}, \quad \omega = ab,$$

т. е. адиабатическим инвариантом является отношение энергии к частоте.

Задача. Длина маятника медленно увеличивается вдвое ($l = l_0(1 + \epsilon t)$, $0 \leq t \leq 1/\epsilon$). Как изменяется амплитудный угол отклонения q_{\max} ?

Решение. $I = \frac{1}{2} l^{3/2} g^{1/2} q_{\max}^2$; поэтому

$$q_{\max}(t) = q_{\max}(0) \left(\frac{l(0)}{l(t)} \right)^{3/4}.$$

В качестве второго примера рассмотрим движение абсолютно упругого твердого шарика массы 1 между абсолютно упругими стенками, расстояние между которыми, l , медленно меняется (рис. 229).

Можно считать, что точка движется в «прямоугольной потенциальной яме бесконечной глубины», и что фазовые траектории — прямоугольники площади $2vl$, где v — скорость шарика. В этом случае адиабатическим инвариантом оказывается произведение vl скорости шарика на расстояние между стенками *).

Таким образом, если вдвое сдвинуть стенки, скорость шарика возрастет также вдвое, а если раздвигать стенки, то скорость уменьшится.

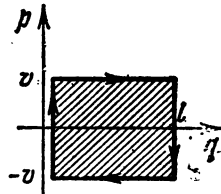
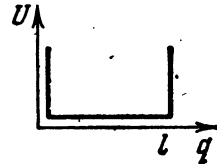


Рис. 229. Адиабатический инвариант абсолютно упругого шарика между медленно движущимися стенками.

*) Это не следует формально из доказанной теоремы, так как в ней речь идет о гладких системах, без ударов. Доказательство адиабатической инвариантности vl в этой системе — поучительная элементарная задача.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

РИМАНОВА КРИВИЗНА

Из листа бумаги можно свернуть конус или цилиндр, но нельзя получить никакого куска сферы без складок, растяжений или разрывов. Причина заключается в различии «внутренней геометрии» этих поверхностей: никакую часть сферы нельзя изометрически отобразить на плоскость.

Инвариант, различающий римановы метрики, называется римановой кривизной. Риманова кривизна плоскости равна нулю, а кривизна сферы радиуса R равна R^{-2} . Если одно риманово многообразие изометрически отображено на другое, то римановы кривизны в соответствующих местах равны. Например, поскольку конус или цилиндр локально изометричны плоскости, то риманова кривизна конуса или цилиндра в любой точке равна 0. Следовательно, никакую область на конусе или на цилиндре нельзя отобразить изометрически на сферу.

Риманова кривизна многообразия оказывает весьма существенное влияние на поведение геодезических на нем, т. е. на движение в соответствующей динамической системе. Если риманова кривизна многообразия положительна (как на сфере или на эллипсоиде), то близкие геодезические в большинстве случаев колеблются друг около друга, а если кривизна отрицательна (как на поверхности однополостного гиперболоида), то геодезические быстро расходятся в разные стороны.

В этом добавлении определяется риманова кривизна и кратко обсуждаются свойства геодезических на многообразиях отрицательной кривизны. Дальнейшие сведения о римановой кривизне можно найти в книге: Дж. М и л н о р «Теория Морса», «Мир», 1965, а о геодезических на многообразиях отрицательной кривизны — в книге: Д. В. А н о с о в «Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны», Труды МИАН им. Стеклова, М., 1967.

А. Параллельное перенесение на поверхностях. Определение римановой кривизны основано на конструкции параллельного перенесения векторов вдоль кривых на римановом многообразии.

Начнем с примера, когда данное риманово многообразие двумерное, т. е. поверхность, а данная кривая — геодезическая на этой поверхности.

Параллельное перенесение вектора, касательного к поверхности, вдоль геодезической на этой поверхности определяется так: точка приложения вектора движется по геодезической, а сам вектор непрерывно перемещается так, что его угол с геодезической и его длина остаются постоянными.

В результате такого перенесения всех векторов, касательных к поверхности в начальной точке геодезической, в конечную точку возникает отображение касательной плоскости в начальной точке в касательную плоскость в конечной точке. Это отображение линейно и изометрично.

Теперь мы определим *параллельное перенесение вектора на поверхности вдоль ломаной*, составленной из нескольких дуг геодезических (рис. 230). Чтобы перенести вектор вдоль ломаной, мы переносим его из первой вершины во вторую вдоль первой дуги геодезической, полученный вектор переносим вдоль второй дуги в следующую вершину и т. д.

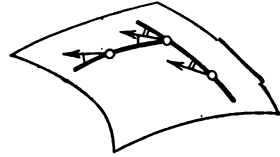


Рис. 230. Параллельное перенесение вдоль геодезической ломаной.

Задача. Перенесите вектор, касательный к сфере в одной из вершин сферического треугольника с тремя прямыми углами, обратно в эту вершину вдоль треугольника.

Ответ. В результате такого перенесения касательная плоскость к сфере в начальной вершине повернется на прямой угол.

Наконец, *параллельное перенесение вектора вдоль любой гладкой кривой на поверхности* определяется с помощью предельного перехода, в котором кривая аппроксимируется ломаными, составленными из дуг геодезических.

Задача. Перенесите вектор, направленный к Северному полюсу и приложенный в Ленинграде (на широте $\lambda = 60^\circ$) вдоль параллели 60° с. ш. обратно в Ленинград, двигаясь на восток.

Ответ. Вектор повернется на угол $2\pi(1 - \cos \lambda)$, т. е. примерно на 50° к западу. Таким образом, величина угла поворота пропорциональна площади, ограниченной нашей параллелью, а направление вращения совпадает с направлением обхода Северного полюса при перенесении вектора.

Указание. Достаточно перенести вектор вдоль той же окружности по конусу, образованному касательными северного направления к Земле, проведенными во всех точках параллели (рис. 231). Конус же этот можно развернуть на плоскость, после чего параллельное перенесение на его поверхности становится обычным параллельным перенесением на плоскости.

Пример. Рассмотрим верхнюю полуплоскость $y > 0$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Легко сосчитать, что геодезические этого двумерного риманова многообразия — это окружности и прямые, перпендикулярные оси x . Дробно-линейные преобразования с вещественными коэффициентами

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

являются изометрическими преобразованиями нашего многообразия, которое называется *плоскостью Лобачевского*.

Задача. Перенести вектор направления мнимой оси из точки $z=i$ в точку $z=i+i$ вдоль горизонтальной прямой ($dy=0$) (рис. 232).

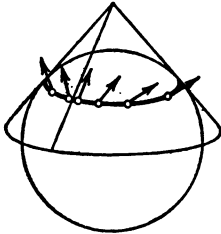


Рис. 231. Параллельное перенесение на сфере.

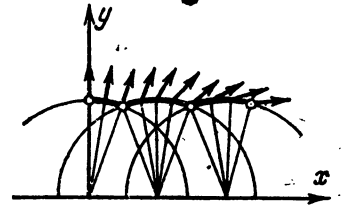
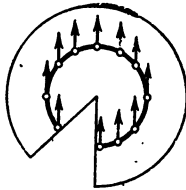


Рис. 232. Параллельное перенесение на плоскости Лобачевского.

Ответ. При сдвиге на t вектор повернется на t радиан в направлении от орта оси y к орту осей x .

Б. Форма кривизны. Теперь мы можем определить риманову кривизну двумерного риманова многообразия (т. е. поверхности) в каждой точке. С этой целью выберем в окрестности рассматриваемой точки ориентацию нашей поверхности и рассмотрим параллельное перенесение векторов вдоль границы *малой* области D на нашей поверхности. Легко сообразить, что результат такого перенесения — поворот на *малый* угол. Обозначим этот угол через $\varphi(D)$ (направление отсчета угла фиксируется выбором ориентации поверхности).

Если разбить область D на две части D_1 и D_2 , то результат параллельного перенесения по границе D можно получить, обойдя сперва одну часть, а потом другую. Следовательно,

$$\varphi(D) = \varphi(D_1) + \varphi(D_2),$$

т. е. угол φ является аддитивной функцией области. При изменении направления обхода границы угол φ также меняет знак. Естественно поэтому представить $\varphi(D)$ как интеграл по D от подходящей 2-формы. Такая 2-форма действительно существует; она называется *формой кривизны*, и мы обозначим ее через Ω . Таким образом, мы определяем форму кривизны Ω соотношением

$$\varphi(D) = \int_D \Omega. \quad (1)$$

Значение формы кривизны Ω на паре касательных векторов ξ, η из TM_x можно определить следующим образом. отождествим ок-

рестность точки O касательного пространства к M в точке x с-окрестностью точки x на M (например, с помощью каких-либо локальных координат). Мы можем тогда построить на M параллелограмм Π_ε , натянутый на векторы $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, по меньшей мере при достаточно малых ε .

Теперь значение формы кривизны на наших векторах определяется формулой

$$\Omega(\xi, \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Pi_\varepsilon)}{\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Иными словами, значение формы кривизны на паре бесконечно малых касательных векторов равно углу поворота при переносе вдоль построенного по этим векторам бесконечно малого параллелограмма.

Задача. Найти форму кривизны на плоскости, на сфере радиуса R и на плоскости Лобачевского.

Ответ. $\Omega = 0$, $\Omega = R^{-2} dS$, $\Omega = -dS$, где 2-форма dS — элемент площади на нашей ориентированной поверхности.

Задача. Доказать, что определенная формулой (2) функция является действительно дифференциальной 2-формой, не зависящей от участвовавшего в построении произвола, и что поворот вектора при переносе вдоль границы ориентированной конечной области D выражается через эту форму по формуле (1)

Задача. Доказать, что интеграл формы кривизны по любой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве равен 4π .

В. Риманова кривизна поверхности. Заметим теперь, что всякая дифференциальная 2-форма на двумерном ориентированном римановом многообразии M может быть записана в виде ρdS , где dS — элемент ориентированной площади, а ρ — числовая функция, однозначно определенная выбором метрики и ориентации.

В частности, форму кривизны можно записать в виде

$$\Omega = K dS,$$

где $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на многообразии M , а dS — элемент площади.

Значение функции K в точке x называется *римановой кривизной поверхности* в точке x .

Задача. Вычислить риманову кривизну евклидовой плоскости, сферы радиуса R и плоскости Лобачевского.

Ответ. $K = 0$, $K = R^{-2}$, $K = -1$.

Задача. Доказать, что риманова кривизна зависит не от ориентации многообразия, но лишь от его метрики.

Указание. При изменении ориентации 2-формы Ω и dS меняют знак одновременно.

Задача. Доказать, что для поверхностей в обычном трехмерном евклидовом пространстве риманова кривизна в каждой точке равна произведению обратных величин главных радиусов кривизны (со знаком минус, если центры кривизны лежат по разные стороны от поверхности).

Заметим, что знак кривизны многообразия в точке не зависит от ориентации многообразия; этот знак можно определить, вовсе не используя ориентации.

А именно, на многообразии *положительной* кривизны при параллельном переносе вдоль границы малой области вектор поворачивается вокруг своего начала *в ту же сторону*, в какую точка на границе обходит область; на многообразии *отрицательной* кривизны направление вращения *обратное*.

Далее заметим, что значение кривизны в точке определяется одной лишь метрикой в окрестности этой точки, и поэтому сохраняется при изгибании: у изометрических поверхностей в соответственных точках кривизны совпадают. Поэтому риманову кривизну называют также внутренней кривизной.

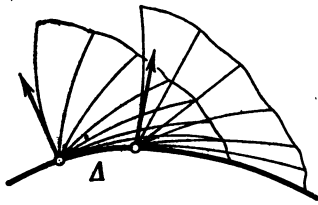


Рис. 233. Параллельное перенесение в пространстве.

Формулы для вычисления кривизны через компоненты метрики в какой-либо системе координат включают вторые производные метрики и достаточно сложны; см. ниже задачи пункта Ж (стр. 270).

Г. Многомерное параллельное перенесение. Конструкция параллельного перенесения на римановых многообразиях размерности выше 2 несколько сложнее, чем приведенная выше двумерная конструкция. Дело в том, что начиная с трехмерного случая, условие неизменности угла с геодезической не определяет еще направления перенесенного вектора. А именно, этот вектор можно еще вращать вокруг направления геодезической, сохраняя угол с ней.

Усовершенствование, которое следует внести в конструкцию параллельного переноса вдоль геодезической, — это выбор двумерной плоскости, проходящей через касательную к геодезической, в которой должен лежать переносимый вектор. Выбор этот производится следующим (к сожалению, довольно сложным) образом.

В начальной точке геодезической нужна плоскость есть: это плоскость, натянутая на переносимый вектор и вектор направления геодезической. Рассмотрим все геодезические, выходящие из начальной точки по направлениям, лежащим в этой плоскости. Все такие геодезические образуют гладкую (вблизи начальной точки) поверхность, содержащую ту геодезическую, вдоль которой мы намерены переносить вектор (рис. 233).

Рассмотрим новую точку на этой геодезической на малом расстоянии Δ от начальной точки. Касательная плоскость к описанной только что поверхности в новой точке содержит направление геодезической в этой новой точке. Примем эту новую точку за начальную и используем имеющуюся в ней касательную плоскость для построения новой поверхности (образованной пучком геодези-

ческих, выходящих из новой точки). Эта поверхность содержит исходную геодезическую. Сдвинемся по исходной геодезической еще на Δ и повторим все построение сначала.

За конечное число шагов мы доберемся до любой точки исходной геодезической. В результате нашей деятельности в каждой точке этой геодезической возникнет касательная плоскость, содержащая направление геодезической. Эта плоскость зависит от шага Δ нашей конструкции. При $\Delta \rightarrow 0$ полученное семейство касательных плоскостей стремится (как можно сосчитать) к определенному пределу.

В результате вдоль нашей геодезической возникает поле касательных двумерных плоскостей, содержащих направление геодезической и определенное внутренним образом самой метрикой многообразия.

Теперь параллельное перенесение нашего вектора вдоль геодезической определяется как в двумерном случае: этот вектор должен при перенесении оставаться в предписанных плоскостях, сохраняя свою длину и свой угол с направлением геодезической. Параллельное перенесение вдоль любой кривой определяется с помощью аппроксимации геодезическими ломаными, как в двумерном случае.

Задача. Докажите, что параллельное перенесение векторов из одной точки риманова многообразия в другую вдоль фиксированного пути является линейным изометрическим оператором из касательного пространства в первой точке в касательное пространство во второй точке.

Задача. Перенести параллельно вдоль линии

$$x_1 = t, \quad x_2 = 0, \quad y = 1 \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

пространства Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dy^2}{y^2}$$

любой вектор.

Ответ. Векторы направлений осей x_1 и y поворачиваются в натянутой на них плоскости на угол τ в направлении от оси y к оси x_1 , а вектор направления x_2 переносится параллельно себе и в смысле евклидовой метрики.

Д. Тензор кривизны. Рассмотрим теперь, как и в двумерном случае, параллельное перенесение по маленькому замкнутому пути, начинающемуся и кончающемуся в одной точке риманова многообразия.

Параллельное перенесение вдоль такого пути возвращает векторы в исходное касательное пространство. Полученное отображение касательного пространства в себя является малым поворотом (ортогональным преобразованием, близким к тождественному).

В двумерном случае мы характеризовали этот поворот одним числом — углом поворота φ . В многомерном случае роль числа φ играет кососимметрический оператор.

А именно, каждый ортогональный оператор A , близкий к тождественному единственным образом записывается в виде

$$A = e^{\Phi} = E + \Phi + \frac{\Phi^2}{2!} + \dots,$$

где Φ — малый кососимметрический оператор.

Задача. Вычислить Φ , если A — поворот плоскости на малый угол φ .

Ответ. $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}$.

В отличие от двумерного случая, функция пути Φ не является, вообще говоря, аддитивной (так как ортогональная группа n -мерного пространства при $n > 2$ не коммутативна). Тем не менее мы можем построить при помощи Φ форму кривизны, описывающую «бесконечно малый поворот при обходе бесконечно малого параллелограмма» таким же способом, как в двумерном случае, т. е. при помощи формулы (2).

Итак, пусть ξ, η из TM_x — касательные к риманову многообразию M в точке x векторы. Построим на M малый криволинейный параллелограмм Π_ε . (Стороны параллелограмма Π_ε получаются из векторов $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$ касательного пространства при координатном отождествлении окрестности нуля в TM_x с окрестностью точки x на M .) Рассмотрим параллельное перенесение вдоль сторон параллелограмма Π_ε (обход начинаем с ξ).

Результатом перенесения будет ортогональное преобразование пространства TM_x , близкое к тождественному. Оно отличается от тождественного преобразования на величину порядка ε^2 и имеет вид

$$A_\varepsilon(\xi, \eta) = E + \varepsilon^2 \Omega + o(\varepsilon^2),$$

где Ω — кососимметрический оператор, зависящий от ξ и от η .

Итак, мы можем определить функцию Ω от пары векторов ξ, η касательного пространства в точке x со значениями в пространстве кососимметрических операторов на TM_x формулой

$$\Omega(\xi, \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A_\varepsilon(\xi, \eta) - E}{\varepsilon^2}.$$

Задача. Докажите, что функция Ω является дифференциальной 2-формой (со значениями в кососимметрических операторах на TM_x) и не зависит от выбора координат, с помощью которых мы отождествляли TM_x и M .

Форма Ω называется *тензором кривизны* риманова многообразия. Таким образом, тензор кривизны описывает инфинитезимальный поворот касательного пространства при параллельном перенесении вокруг бесконечно малого параллелограмма.

Е. Кривизна по двумерному направлению. Рассмотрим двумерную плоскость L в касательном пространстве к риманову многообразию в какой-либо его точке. Выпустим из этой точки геодезические по всевозможным направлениям из плоскости L . Эти геодезические образуют вблизи нашей точки гладкую поверх-

ность. Построенная поверхность вложена в риманово многообразие и получает из него риманову метрику.

Кривизной риманова многообразия M в направлении 2-плоскости L в касательном пространстве к M в точке x называется риманова кривизна описанной выше поверхности в точке x .

Задача. Найти кривизны трехмерной сферы радиуса R и пространства Лобачевского по всевозможным двумерным направлениям.

Ответ. R^{-2} , -1 .

Вообще говоря, кривизны риманова многообразия по разным двумерным направлениям в одной точке различны. Их зависимость от направления описывается приведенной ниже формулой (3).

Теорема. *Кривизна риманова многообразия по двумерному направлению, определенному парой ортогональных векторов ξ , η длины 1, выражается через тензор кривизны Ω по формуле*

$$K = \langle \Omega(\xi, \eta)\xi, \eta \rangle, \quad (3)$$

где угловые скобки означают скалярное произведение, задающее риманову метрику.

Доказательство получается сравнением определений тензора кривизны и кривизны по двумерному направлению. Мы не останавливаемся на его аккуратном проведении. При желании можно принять формулу (3) за определение кривизны K .

Ж. Ковариантное дифференцирование. С параллельным перенесением вдоль кривых на римановом многообразии связано своеобразное дифференциальное исчисление — так называемое ковариантное дифференцирование, или риманова связность. Определяется это дифференцирование следующим образом.

Пусть ξ — вектор, касательный к риманову многообразию M в точке x , а v — векторное поле, заданное на M в окрестности точки x . Ковариантная производная поля v по направлению вектора ξ определяется с помощью какой-либо кривой, выходящей из точки x со скоростью ξ .

При движении по этой кривой в течение небольшого интервала времени t мы окажемся в новой точке $x(t)$. Возьмем вектор поля v в этой точке $x(t)$ и параллельно перенесем его вдоль кривой назад в исходную точку x . Мы получим зависящий от t вектор в касательном пространстве к M в исходной точке x . При $t=0$ это вектор $v(x)$, а при других t он изменяется в соответствии с непараллельностью векторов поля v вдоль нашей кривой направления ξ .

Рассмотрим производную полученного вектора по t при $t=0$. Эта производная является вектором касательного пространства TM_x . Она называется *ковариантной производной поля v по ξ* и обозначается через $\nabla_{\xi}v$.

Легко проверить, что вектор $\nabla_{\xi}v$ не зависит от выбора кривой, участвовавшей в определении, но лишь от вектора ξ и поля v .

Задача 1. Доказать следующие свойства ковариантного дифференцирования:

- 1) $\nabla_{\xi} v$ есть билинейная функция ξ и v .
- 2) $\nabla_{\xi} f v = (L_{\xi} f) v + f(x) \nabla_{\xi} v$, где f — гладкая функция, $L_{\xi} f$ — производная функции f по направлению вектора ξ из TM_x .
- 3) $L_{\xi} \langle v, \omega \rangle = \langle \nabla_{\xi} v, \omega(x) \rangle + \langle v(x), \nabla_{\xi} \omega \rangle$.
- 4) $\nabla_v \langle v, \omega \rangle = \langle \nabla_v v, \omega(x) \rangle + \langle v(x), \nabla_v \omega \rangle$ (где $L_{[v, v]} = L_v L_v - L_v L_v$).

Задача 2. Доказать, что тензор кривизны выражается через ковариантные производные следующим образом:

$$\Omega(\xi_0, \eta_0) \zeta_0 = -\nabla_{\xi} \nabla_{\eta} \zeta + \nabla_{\eta} \nabla_{\xi} \zeta + \nabla_{[\eta, \xi]} \zeta,$$

где ξ, η, ζ — любые векторные поля, значения которых в рассматриваемой точке равны ξ_0, η_0, ζ_0 .

Задача 3. Доказать, что тензор кривизны удовлетворяет следующим тождествам:

$$\begin{aligned} \Omega(\xi, \eta) \zeta + \Omega(\eta, \zeta) \xi + \Omega(\zeta, \xi) \eta &= 0, \\ \langle \Omega(\xi, \eta) \alpha, \beta \rangle &= \langle \Omega(\alpha, \beta) \xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Задача 4. Пусть риманова метрика задается в локальной системе координат x_1, \dots, x_n симметричной матрицей g_{ij} :

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j.$$

Обозначим через e_1, \dots, e_n координатные векторные поля (так что производная по направлению e_i есть $\partial_i = \partial/\partial x_i$). Тогда ковариантные производные можно вычислять с помощью формул задачи 1 и следующих формул:

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k, \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_l \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) g^{lk},$$

где (g^{lk}) — матрица, обратная к (g_{kl}) .

Пользуясь приведенным в задаче 2 выражением тензора кривизны через связность, мы получаем явную формулу и для тензора кривизны. Числа $R_{ijkl} = \langle \Omega(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle$ называются компонентами тензора кривизны.

3. Уравнение Якоби. Кривизна риманова многообразия тесно связана с поведением его геодезических. В частности, рассмотрим геодезическую, выходящую из какой-либо точки по какому-либо направлению, и немного изменим начальные условия, т. е. начальную точку и начальную скорость. Новые начальные условия определяют новую геодезическую. Эта геодезическая вначале мало отличается от исходной. Для исследования отклонения полезно линеаризовать вблизи исходной геодезической дифференциальное уравнение геодезических.

Получающееся при этом линейное дифференциальное уравнение второго порядка («уравнение в вариациях» для уравнения геодезических) называется *уравнением Якоби*, и его удобно записать через ковариантные производные и тензор кривизны.

Обозначим через $x(t)$ точку, движущуюся по геодезической многообразия M с постоянной по величине скоростью $v(t) \in TM_{x(t)}$.

Если начальное условие гладко зависит от параметра α , то геодезическая тоже гладко зависит от параметра. Рассмотрим движение, соответствующее значению параметра α . Положение

в момент t точки на соответствующей геодезической обозначим через $x(t, \alpha) \in M$. Мы будем считать, что начальная геодезическая соответствует нулевому значению параметра, так что $x(t, 0) = x(t)$.

Векторным полем вариации геодезической называется производная функции $x(t, \alpha)$ по параметру α при $\alpha = 0$; значение этого поля в точке $x(t)$ равно

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} x(t, \alpha) = \xi(t) \in TM_{x(t)}.$$

Чтобы записать уравнение в вариациях, определим еще *ковариантную производную по t* векторного поля $\xi(t)$, заданного на геодезической $x(t)$. Определение состоит в том, что мы должны взять вектор $\xi(t+h)$, параллельно перенести его из точки $x(t+h)$ в точку $x(t)$ вдоль геодезической и затем продифференцировать получившийся вектор в касательном пространстве $TM_{x(t)}$ по h при $h=0$. В результате получается вектор касательного пространства $TM_{x(t)}$, который называется ковариантной производной поля $\xi(t)$ по t и обозначается через $D\xi/Dt$.

Теорема. *Векторное поле вариации геодезической удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка*

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = -\Omega(v, \xi)v, \quad (4)$$

где Ω — тензор кривизны, а $v = v(t)$ — вектор скорости движения по исходной геодезической.

Обратно, всякое решение дифференциального уравнения (4) является полем вариации исходной геодезической.

Уравнение (4) называется уравнением Якоби.

Задача. Докажите сформулированную теорему.

Задача. Пусть M — поверхность, $y(t)$ — величина составляющей вектора $\xi(t)$ по нормали к рассматриваемой геодезической, и пусть длина вектора $v(t)$ равна 1. Докажите, что y удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} = -Ky, \quad (5)$$

где $K = K(t)$ — риманова кривизна поверхности в точке $x(t)$.

Задача. Пользуясь уравнением (5), сравните поведение геодезических, близких к данной, на сфере ($K = +R^2$) и на плоскости Лобачевского ($K = -1$).

И. Исследование уравнения Якоби. При исследовании уравнений в вариациях полезно исключить тривиальные вариации, сводящиеся к изменению начала отсчета времени и величины начальной скорости движения. С этой целью разложим вектор вариации ξ на параллельную и перпендикулярную вектору скорости v составляющие. Тогда (ввиду $\Omega(v, v) = 0$ и ввиду кососимметричности оператора $\Omega(v, \xi)$) для нормальной составляющей мы получим снова уравнение Якоби, а для параллельной — уравнение $D^2\xi/Dt^2 = 0$.

Заметим теперь, что уравнение Якоби для нормальной составляющей можно переписать в виде «уравнения Ньютона»

$$\frac{D^2 \xi}{D^2 s} = -\text{grad } U,$$

где квадратичная форма U от вектора ξ выражается через тензор кривизны и пропорциональна кривизне K в направлении плоскости (ξ, v) :

$$U(\xi) = \frac{1}{2} \langle \Omega(v, \xi)v, \xi \rangle = \frac{1}{2} K \langle \xi, \xi \rangle \langle v, v \rangle.$$

Таким образом, поведение нормальной составляющей вектора вариации геодезической, проходящей со скоростью 1, описывается уравнением (неавтономного) линейного осциллятора, потенциальная энергия которого равна половине произведения кривизны в направлении плоскости векторов скорости и вариации на квадрат длины нормальной составляющей вариации.

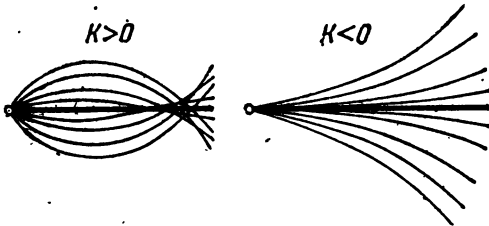


Рис. 234. Близкие геодезические на многообразиях положительной и отрицательной кривизны

В частности, рассмотрим случай, когда кривизна по всем двумерным направлениям, содержащим вектор скорости геодезической, отрицательна (рис. 234). Тогда отклонение близких геодезических от данной по нормали описывается уравнением осциллятора с отрицательно определенной (и зависящей от времени) потенциальной энергией. Следовательно, нормальная составляющая отклонения близких геодезических ведет себя как отклонение от вершины горы шарика, находящегося вблизи этой вершины. Положение равновесия шарика на вершине неустойчиво. Это значит, что близкие к данной геодезические будут экспоненциально уходить от нее.

Если бы потенциальная энергия получающегося уравнения Ньютона не зависела от времени, наш вывод был бы вполне строгим. Более того, предположим, что при этом кривизны по разным направлениям, содержащим v , заключены в пределах

$$-a^2 \leq K \leq -b^2, \text{ где } 0 < b < a.$$

Тогда решения уравнения Якоби для нормальных отклонений будут линейными комбинациями экспонент с показателями $\pm \lambda_i$, где положительные числа λ_i заключены между a и b .

Следовательно, каждое решение уравнения Якоби растет не медленнее $e^{b|t|}$ либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$; при этом большинство решений растет еще быстрее, со скоростью $e^{a|t|}$.

Неустойчивость положения равновесия при отрицательно определенной потенциальной энергии в неавтономном случае интуитивно достаточно ясна. Ее можно доказать сравнением с подходящей автономной системой. В результате такого сравнения мы убеждаемся, что *все решения уравнения Якоби для нормальных отклонений на многообразии отрицательной кривизны растут при движении вдоль геодезической не медленнее экспоненты пройденного пути, показатель которой равен корню квадратному из модуля кривизны по тому двумерному направлению, для которого этот модуль наименьший.*

В действительности большинство решений растет еще быстрее, но мы не можем теперь утверждать, что показатель роста большинства решений определяется направлением самой большой по модулю отрицательной кривизны.

Резюмируя, мы можем сказать, что поведение геодезических на многообразии отрицательной кривизны характеризуется экспоненциальной неустойчивостью. Для количественной оценки этой неустойчивости полезно ввести *характерный путь s* как средний путь, при прохождении которого увеличиваются в e раз малые ошибки в начальных условиях.

Точнее, характерный путь s можно определить как обратную величину показателя λ , характеризующего рост решений уравнения Якоби для нормальных отклонений от геодезической, проходящей со скоростью 1:

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \max_{|t| < T} \max_{|\xi(0)|=1} \ln |\xi(t)|,$$

$$s = 1/\lambda.$$

Вообще говоря, показатель λ и путь s зависят от начальной геодезической.

Если кривизны нашего многообразия по всем двумерным направлениям ограничены от нуля числом $-b^2$, то характерный путь не превосходит b^{-1} .

Таким образом, чем более отрицательна кривизна многообразия, тем меньше характерный путь s , на котором неустойчивость геодезических приводит к e -кратному нарастанию ошибок. Ввиду экспоненциального характера нарастания ошибок ход геодезической на многообразии отрицательной кривизны практически невозможно прогнозировать.

Предположим, например, что кривизна отрицательна и ограничена от нуля величиной $-4 \cdot \text{м}^{-2}$. Характерный путь не больше полуметра, т. е. на пятиметровом отрезке геодезической ошибка возрастет примерно в $e^{10} \sim 10^4$ раз. Следовательно, ошибка в десятую миллиметра в начальном условии скажется в виде метрового отклонения конца геодезической.

К. Геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны. Пусть M — компактное риманово многообразие, кривизна которого в каждой точке по каждому двумерному направлению отрицательна (такие многообразия существуют). Рассмотрим движение материальной точки массы 1 по многообразию M по инерции, вне поля действия всевозможных внешних сил. Функция Лагранжа этой системы равна кинетической энергии, равна полной энергии и является первым интегралом уравнений движения.

Если многообразие M имеет размерность n , то многообразие уровня энергии $2n - 1$ -мерно. Это многообразие является подмногообразием касательного расслоения многообразия M . Зафиксируем, например, значение постоянной энергии $1/2$ (что соответствует начальной скорости 1). Тогда скорость точки всегда останется единичной, и наше многообразие уровня оказывается пространством расслоения

$$T_1M \subset TM,$$

составленным из единичных сфер в касательных пространствах к M в каждой точке.

Таким образом, точка из многообразия T_1M представляет собой вектор длины 1, приложенный в точке многообразия M . Согласно принципу Мопертюи — Якоби, движение материальной точки с фиксированным начальным условием из T_1M можно описать следующим образом: точка движется со скоростью 1 по определенной указанным вектором геодезической.

Согласно закону сохранения энергии многообразие T_1M является инвариантным многообразием в фазовом пространстве нашей системы.

Следовательно, наш фазовый поток определяет однопараметрическую группу диффеоморфизмов $2n - 1$ -мерного многообразия T_1M . Эта группа называется *геодезическим потоком* на M . Геодезический поток может быть описан следующим образом: преобразование за время t переводит единичный вектор $\xi \in T_1M$, приложенный в точке x , в единичный вектор скорости геодезической, выходящей из точки x по направлению ξ , приложенный в точке на этой геодезической, лежащей на расстоянии t от точки x . Заметим, что в T_1M естественно определяется элемент объема и что геодезический поток его сохраняет согласно теореме Лиувилля.

Конечно, до сих пор отрицательность кривизны многообразия M не имела никакого значения. Но если мы займемся исследованием траекторий описанного геодезического потока, то окажется, что отрицательность кривизны многообразия M накладывает на поведение этих траекторий сильный отпечаток (это связано с экспоненциальной неустойчивостью геодезических на M).

Вот некоторые из свойств геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны (подробнее см. цитированную на стр. 262 книгу Д. В. Аносова).

1. Почти все фазовые траектории всюду плотны на многообразии уровня энергии (исключительные, не всюду плотные траектории образуют множество меры нуль).

2. Равномерное распределение: доля времени, которое почти каждая траектория проводит в любой области фазового пространства T_1M , пропорциональна объему этой области.

3. Фазовый поток g^t обладает свойством перемешивания: если A и B — две области, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mes} \{(g^t A) \cap B\} = \text{mes} A \text{mes} B$$

(где mes означает объем, нормированный условием, что мера всего пространства равна 1).

Из этих свойств траекторий в фазовом пространстве вытекают аналогичные предложения о геодезических на самом многообразии. Физики называют эти свойства «стохастичностью»: асимптотически при больших t траектория ведет себя так, как если бы точка была случайной. Например, свойство перемешивания означает, что вероятность после выхода из A оказаться в B через большое время t пропорциональна объему B и т. п.

Итак, экспоненциальная неустойчивость геодезических на многообразии отрицательной кривизны приводит к стохастичности соответствующего геодезического потока.

Л. Другие применения экспоненциальной неустойчивости. Свойство экспоненциальной неустойчивости геодезических отрицательной кривизны, начиная с Адамара (а в случае постоянной кривизны — еще Лобачевского), изучалось многими авторами, в особенности Э. Хопфом. Неожиданным открытием шестидесятых годов в этой области оказалась удивительная устойчивость экспоненциально неустойчивых систем относительно возмущений самой системы.

Рассмотрим, например, векторное поле, задающее геодезический поток на компактной поверхности отрицательной кривизны. Как указано выше, фазовые кривые этого потока устроены весьма сложно: почти каждая из них всюду плотно заполняет трехмерное многообразие уровня энергии. У этого потока бесконечно много замкнутых траекторий, и множество точек замкнутых траекторий также всюду плотно в трехмерном многообразии уровня энергии.

Рассмотрим теперь близкое векторное поле. Оказывается, несмотря на всю сложность картины фазовых кривых, при переходе к близкому полю вся эта картина со всюду плотными фазовыми кривыми и бесконечным числом замкнутых траекторий почти не изменится.

А именно, существует гомеоморфизм, близкий к тождественному преобразованию и переводящий фазовые кривые невозмущенного потока в фазовые кривые возмущенного.

Таким образом, наш сложно устроенный фазовый поток обладает таким же свойством «грубости» или «структурной устойчивости», как, скажем, предельный цикл, или устойчивый фокус на плоскости. Заметим, что ни центр на плоскости, ни обмотка тора таким свойством грубости не обладают: топологический тип фазового портрета в этих случаях меняется при малом изменении векторного поля.

Возможность грубых систем со сложными движениями, каждое из которых само по себе экспоненциально неустойчиво, является одним из основных открытий в теории обыкновенных дифференциальных уравнений последнего времени (гипотеза грубости геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны была высказана С. Смейлом в 1961 г., а доказательство дано Л. В. Аносовым и опубликовано в 1967 г.; основные результаты о стохастичности этих потоков получены Я. Г. Синаем и Д. В. Аносовым также в шестидесятых годах).

Ранее предполагалось, что в системе дифференциальных уравнений «общего вида» возможны лишь простейшие устойчивые предельные режимы: положения равновесия и циклы. Если же система устроена более сложно (например, является консервативной), то предполагалось, что при малом изменении ее уравнений (например, при учете малых неконсервативных возмущений) сложные движения «рассыплются» на простые. Теперь мы знаем, что это не так, и что в функциональном пространстве векторных полей имеются целые области, состоящие из полей с более сложным поведением фазовых кривых.

Выводы, которые отсюда следуют, затрагивают широкий круг явлений, в которых наблюдается «стохастическое» поведение детерминированных объектов.

Именно, представим себе, что в фазовом пространстве некоторой (неконсервативной) системы имеется притягивающее инвариантное многообразие (или множество), на котором фазовые кривые обладают свойством экспоненциальной неустойчивости. Мы знаем теперь, что системы с таким свойством не являются исключительными: при малом изменении системы указанные свойства не нарушаются. Что увидит экспериментатор, наблюдающий за движениями такой системы?

Приближение фазовых кривых к притягивающему множеству будет восприниматься как установление некоторого предельного режима. Дальнейшее движение фазовой точки около притягивающего множества будет вызывать хаотические, плохо прогнозируемые изменения «фаз» предельного режима, воспринимаемые как «стохастичность» или «турбулентность».

К сожалению, до сих пор не был проведен убедительный анализ физических примеров описанного характера с указанной точки зрения. Пример, напрашивающийся прежде всего — это гидродинамическая неустойчивость вязкой жидкости, описываемой так называемым уравнением Навье — Стокса.

Фазовое пространство этой задачи бесконечномерно (это — пространство векторных полей дивергенции 0 в области течения), но бесконечность задачи не является, по-видимому, серьезным препятствием, по той причине, что вязкость гасит высокие гармоники (мелкие вихри) тем быстрее, чем выше номер гармоники. В результате фазовые кривые из бесконечномерного пространства, по-видимому, приближаются к некоторому конечномерному многообразию (или множеству), которому и принадлежат предельные режимы.

При большой вязкости имеется устойчивое притягивающее положение равновесия в фазовом пространстве («устойчивое стационарное течение»). При уменьшении вязкости оно теряет устойчивость; при этом может возникать, например, устойчивый предельный цикл в фазовом пространстве («периодическое течение») или устойчивое положение равновесия нового типа («вторичное стационарное течение» *). Затем, по мере уменьшения вязкости, в игру вступает все большее число гармоник и предельные режимы могут становиться более многомерными.

При малой вязкости кажется весьма правдоподобным выход на предельные режимы с экспоненциально неустойчивыми траекториями. К сожалению, до сих пор соответствующие вычисления не были проведены ввиду ограниченных возможностей имеющихся машин. Однако следующий общий вывод можно сделать и без вычислений: для возникновения явлений типа турбулентности нет необходимости в несуществовании или неединственности решений: достаточна экспоненциальная неустойчивость, которая встречается даже в детерминированных системах с конечным числом степеней свободы.

В качестве еще одного примера применения экспоненциальной неустойчивости укажем анонсированное Я. Г. Синаем доказательство «эргодической гипотезы» Больцмана для системы твердых шариков. Гипотеза состоит в том, что фазовый поток, соответствующий движению одинаковых абсолютно упругих шариков в ящике с упругими стенками, эргодичен на связанных множествах уровня энергии. (Эргодичность означает, что почти каждая фазовая кривая проводит в каждой измеримой части множества уровня время, пропорциональное мере этой части.)

*) Более подробно о потере устойчивости сказано в «Лекциях о бифуркациях и версальных семействах», УМН, 27, № 5 (1972), 119—184.

Гипотеза Больцмана позволяет заменять временные средние пространственными и считалась долгое время необходимой для обоснования статистической механики. В действительности для статистического предельного перехода (число частиц стремится к бесконечности) гипотеза Больцмана (в которой речь идет о пределе, когда время стремится к бесконечности) не нужна. Однако гипотеза Больцмана вызвала к жизни весь анализ стохастических свойств динамических систем (так называемую эргодическую теорию), и ее доказательство служит мерой зрелости этой теории.

Экспоненциальная неустойчивость траекторий в задаче Больцмана возникает вследствие соударений шариков друг с другом и может быть объяснена следующим образом.

Рассмотрим для простоты систему всего из двух частиц на плоскости и заменим квадратный ящик с отражением от стенок плоским тором $\{(x, y) \bmod 1\}$. Тогда мы можем считать неподвижной одну из частиц (пользуясь сохранением импульсов); другую же частицу можно считать точкой.

Мы приходим, таким образом, к модельной задаче о движении точки по торическому бильярду с круглой стенкой в середине, от которой точка отражается по закону «угол падения равен углу отражения» (рис. 235).

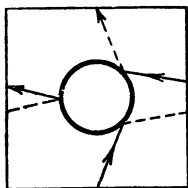


Рис. 235. Торический бильярд с рассеивающей круглой стенкой.

Для исследования этой системы рассмотрим еще аналогичный бильярд, ограниченный снаружи плоской выпуклой кривой (скажем, движение точки внутри эллипса). Движение на таком бильярде можно рассматривать как предельный случай геодезического потока на поверхности эллипсоида. Предельный переход состоит в уменьшении малой оси эллипсоида до нуля.

В результате геодезические на эллипсоиде переходят в бильярдные траектории на эллипсе. Мы обнаруживаем при этом, что эллипс разумно считать двусторонним и считать, что при каждом отражении геодезическая переходит с одной стороны эллипса на другую.

Вернемся теперь к нашему торическому бильярду. Движения на нем тоже можно рассматривать как предельный случай геодезического потока на гладкой поверхности. Эта поверхность получается, если рассмотреть тор с дырой как двустороннюю поверхность и придать ей некоторую толщину, слегка сгладив острое ребро. В результате получается поверхность с топологией кренделя (сферы с двумя ручками).

Если при раздувании эллипса в эллипсоид получается поверхность положительной кривизны, то при раздувании тора с дырой возникает поверхность отрицательной кривизны (в обоих случаях кривизна сосредоточена вблизи края, но раздувание можно провести так, чтобы знак кривизны не менялся).

Итак, движение в нашем торическом бильярде можно рассматривать как предельный случай движения по геодезическим на поверхности отрицательной кривизны.

Теперь для доказательства гипотезы Больцмана (в рассматриваемом простейшем случае) достаточно проверить, что анализ стохастических свойств геодезических потоков на поверхностях отрицательной кривизны сохраняет силу в указанном предельном случае.

При подробном проведении доказательства оно оказывается весьма сложным; опубликована лишь часть, касающаяся системы из двух частиц (Я. Г. Синай, Динамические системы с упругими отражениями, Успехи математических наук 25, № 2 (1970), 141 — 192).

ДОБАВЛЕНИЕ 2

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ МЕТРИК НА ГРУППАХ ЛИ И ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Эйлерово движение твердого тела можно описать как движение по геодезическим на группе вращений трехмерного евклидова пространства, снабженной левоинвариантной римановой метрикой. Значительная часть теории Эйлера связана лишь с этой инвариантностью и потому переносится на случай других групп.

Среди примеров, охватываемых такой обобщенной теорией Эйлера, движение твердого тела в многомерном пространстве и, что особенно интересно, гидродинамика идеальной (несжимаемой и невязкой) жидкости. В последнем случае в качестве группы выступает группа диффеоморфизмов области течения, сохраняющих элемент объема. Принцип наименьшего действия в этом примере означает, что движение жидкости описывается геодезической метрики, заданной кинетической энергией (при желании можно считать этот принцип математическим определением идеальной жидкости). Легко проверить, что указанная метрика (право) инвариантна.

Конечно, распространять результаты, полученные для конечномерных групп Ли, на бесконечномерный случай следует с осторожностью. Например, в трехмерной гидродинамике до сих пор нет теорем существования и единственности решений уравнений движения.

Тем не менее интересно посмотреть, к каким выводам приводит формальное перенесение свойств геодезических на конечномерных группах Ли на бесконечномерный случай. Эти выводы носят характер априорных предложений (тождеств, неравенств и т. п.), которые должны выполняться при всяком разумном понимании решений. В некоторых случаях получаемые здесь выводы удается затем строго обосновать непосредственно, минуя бесконечномерный анализ.

Например, уравнения Эйлера движения твердого тела имеют своим аналогом в гидродинамике уравнения Эйлера движения

идеальной жидкости. Теореме Эйлера об устойчивости вращений вокруг большой и малой осей эллипсоида инерции отвечает в гидродинамике слегка обобщенная теорема Релея об устойчивости течений без точек перегиба профиля скоростей и т. д.

Из формул Эйлера легко извлечь также явное выражение для римановой кривизны группы с односторонне инвариантной метрикой. В применении к гидродинамическому случаю мы находим кривизну группы диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема.

Интересно отметить, что для достаточно хороших двумерных направлений кривизна оказывается конечной, и во многих случаях — отрицательной.

Отрицательность кривизны вызывает экспоненциальную неустойчивость геодезических (см. добавление 1). В рассматриваемом случае геодезические — это течения идеальной жидкости. Поэтому из вычисления кривизны группы диффеоморфизмов можно извлекать некоторую информацию о неустойчивости течений идеальной жидкости.

Именно, кривизна определяет характерный путь, на котором отклонения начальных условий вырастают в e раз. Отрицательность кривизны приводит к практической непредсказуемости течения: на пути, большем характерного всего в несколько раз, отклонения начальных условий от расчетных увеличатся в сотни раз.

В этом добавлении кратко изложены результаты вычислений, связанных с геодезическими на группах с односторонне инвариантными метриками. Доказательства и дальнейшие подробности можно найти в следующих работах:

V. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Annales de l'Institut Fourier, XVI, № 1 (1966), 319 — 361.

В. И. Арнольд, Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости, Известия вузов, Математика, № 5 (54) (1966), 3—5.

В. И. Арнольд, Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей, ПММ 36, № 2 (1972), 255 — 262.

В. И. Арнольд, Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости, УМН XXIV, № 3 (147) (1969), 225 — 226.

Л. А. Диккий, Замечание о гамильтоновых системах, связанных с группой вращений, Функц. анализ и его приложения 6, № 4 (1972).

D. G. Ebin, J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, Annals of Math. 92, № 1 (1970), 102 — 163.

О. А. Ладыженская, О разрешимости в малом нестационарных задач для несжимаемых идеальных и вязких жидкостей и исчезающей вязкости, Краевые задачи математической физики, т. 5 (Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 21) Л., «Наука», 1971, 65—78.

А. С. Мищенко, Интегралы геодезических потоков на группах Ли, Функц. анализ и его приложения. 4, № 3 (1970), 73—78.

А. М. Обухов, Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа, ДАН 184, № 2 (1969).

Л. Д. Фаддеев, К теории устойчивости стационарных плоско-параллельных течений идеальной жидкости. Краевые задачи математической физики. т. 5 (Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 21), Л., «Наука», 1971, 164—172.

А. Обозначения. Присоединенное и коприсоединенное представления. Пусть G — вещественная группа Ли, \mathfrak{g} — ее алгебра Ли, т. е. касательное пространство к группе в единице, снабженное операцией коммутирования $[\cdot, \cdot]$.

Группа Ли действует на себе левыми и правыми сдвигами: для каждого элемента g группы G определены диффеоморфизмы группы в себя

$$L_g: G \rightarrow G, L_g h = gh; \quad R_g: G \rightarrow G, R_g h = hg.$$

Индукированные отображения касательных пространств будем обозначать через

$$L_{g*}: TG_h \rightarrow TG_{gh}; \quad R_{g*}: TG_h \rightarrow TG_{hg}$$

для всякого h из G .

Диффеоморфизм $R_{g^{-1}L_g}$ является внутренним автоморфизмом группы. Он оставляет единицу группы на месте. Его производная в единице есть линейное отображение алгебры (т. е. касательного пространства к группе в единице) в себя. Это отображение обозначается через

$$\text{Ad}_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}_g = (R_{g^{-1}L_g})_{*e}$$

и называется *присоединенным* (adjoint) представлением группы.

Легко проверить, что Ad_g является гомоморфизмом алгебры, т. е. что

$$\text{Ad}_g [\xi, \eta] = [\text{Ad}_g \xi, \text{Ad}_g \eta], \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Ясно также, что $\text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \text{Ad}_h$.

Далее, рассмотрим Ad как отображение группы в пространство линейных операторов на алгебре: $\text{Ad}(g) = \text{Ad}_g$.

Отображение Ad дифференцируемо. Рассмотрим его производную в единице группы. Эта производная есть линейное отображение из алгебры в пространство линейных операторов на ней. Построенное отображение обозначается через ad , а его образ при действии на элемент ξ из алгебры через ad_ξ . Таким образом, ad_ξ есть эндоморфизм алгебры, мы имеем

$$\text{ad} = \text{Ad}_{*e}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}, \quad \text{ad}_\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{e^t \xi},$$

где $e^t \xi$ — однопараметрическая группа с касательным вектором ξ . Из написанной формулы легко вывести выражение для ad в терминах одной лишь алгебры:

$$\text{ad}_\xi \eta = [\xi, \eta].$$

Рассмотрим дуальное к алгебре Ли \mathfrak{g} линейное пространство \mathfrak{g}^* . Это — пространство вещественных линейных функций на ал-

гребре Ли. Иными словами, \mathfrak{g}^* есть кокасательное пространство к группе в единице, $\mathfrak{g}^* = T^*G_e$.

Значение элемента ξ кокасательного пространства к группе в какой-либо точке g на элементе η касательного пространства в той же точке мы будем обозначать круглыми скобками:

$$(\xi, \eta) \in \mathbb{R}, \quad \xi \in T^*G_g, \quad \eta \in TG_g.$$

Левый и правый сдвиги индуцируют в кокасательных пространствах операторы, дуальные к L_{g*} и R_{g*} . Мы обозначим их через

$$L_g^*: T^*G_{gh} \rightarrow T^*G_h, \quad R_g^*: T^*G_{hg} \rightarrow T^*G_h$$

для всякого h из G . Эти операторы определяются тождествами

$$(L_g^*\xi, \eta) \equiv (\xi, L_{g*}\eta), \quad (R_g^*\xi, \eta) \equiv (\xi, R_{g*}\eta).$$

Оператор, дуальный оператору Ad_g , отображает кокасательное пространство к группе в единице в себя. Он обозначается через

$$Ad_g^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

и определяется тождеством

$$(Ad_g^*\xi, \eta) \equiv (\xi, Ad_{g*}\eta).$$

Операторы Ad_g^* , где g пробегает группу Ли G , образуют представление этой группы, т. е. выполняется соотношение

$$Ad_{gh}^* = Ad_h^* Ad_g^*.$$

Это представление называется *коприсоединенным представлением группы* и играет важную роль во всех вопросах, связанных с (лево) инвариантными метриками на группе.

Рассмотрим производную оператора Ad_g^* по g в единице группы. Эта производная есть линейное отображение из алгебры в пространство линейных операторов на дуальном к алгебре пространстве. Указанное линейное отображение обозначается через ad^* , а его образ при действии на элемент ξ из алгебры обозначается через ad_ξ^* . Таким образом, ad_ξ^* есть линейный оператор на дуальном пространстве к алгебре,

$$ad_\xi^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Легко видеть, что оператор ad_ξ^* сопряжен с ad_ξ :

$$(ad_\xi^*\eta, \zeta) \equiv (\eta, ad_\xi\zeta) \text{ для всех } \eta \in \mathfrak{g}^*, \zeta \in \mathfrak{g}.$$

Иногда удобно обозначать действие ad^* фигурными скобками:

$$ad_\xi^*\eta = \{\xi, \eta\}, \text{ где } \xi \in \mathfrak{g}, \eta \in \mathfrak{g}^*.$$

Таким образом, фигурная скобка означает билинейную функцию

из $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ в \mathfrak{g}^* , связанную с коммутатором в алгебре тождественным соотношением

$$(\{\xi, \eta\}, \zeta) = (\eta, \{\xi, \zeta\}).$$

Рассмотрим орбиты коприсоединенного представления группы в дуальном пространстве алгебры. На каждой такой орбите имеется естественная симплектическая структура (называемая формой Кириллова, так как А. А. Кириллов первым использовал ее в своем исследовании представлений нильпотентных групп Ли). Таким образом, орбиты коприсоединенного представления всегда четномерны. Заметим также, что мы получаем серию примеров симплектических многообразий, рассматривая различные группы Ли и всевозможные орбиты. —

Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления определяется следующей конструкцией. Пусть x — точка из дуального пространства к алгебре, ξ — вектор, касательный в этой точке к ее орбите. Поскольку \mathfrak{g}^* — линейное пространство, мы можем считать вектор ξ , принадлежащий, честно говоря, касательному пространству к \mathfrak{g}^* в точке x , лежащим в \mathfrak{g}^* .

Вектор ξ можно (многими способами) представить в виде вектора скорости движения точки x в коприсоединенном представлении однопараметрической группы e^{at} с вектором скорости $a \in \mathfrak{g}$. Иными словами, каждый касательный к орбите точки x в коприсоединенном представлении группы вектор ξ выражается через подходящий вектор a из алгебры по формуле

$$\xi = \{a, x\}, \quad a \in \mathfrak{g}, \quad x \in \mathfrak{g}^*.$$

Теперь мы готовы определить значение симплектической 2-формы Ω на паре векторов ξ_1, ξ_2 , касательных к орбите точки x . Именно, мы выражаем ξ_1 и ξ_2 через какие-нибудь элементы алгебры a_1 и a_2 по предыдущей формуле, а затем составляем из двух элементов алгебры и одного элемента дуального к ней пространства скаляр

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = (x, [a_1, a_2]), \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad a_i \in \mathfrak{g}.$$

Легко проверить, что: 1) билинейная форма Ω определена корректно, т. е. ее значение не зависит от произвола в выборе a_i ; 2) форма Ω кососимметрична и, следовательно, задает дифференциальную 2-форму Ω на орбите; 3) форма Ω невырождена и замкнута (доказательства имеются, например, в добавлении 5).

Итак, форма Ω является симплектической структурой на орбите коприсоединенного представления.

Б. Левоинвариантные метрики. Риманова метрика на группе Ли G называется *левоинвариантной*, если она сохраняется при всех левых сдвигах L_g , т. е. если производная левого сдвига переводит каждый вектор в вектор такой же длины.

Левинвариантную риманову метрику достаточно задать в одной точке группы, например в единице: тогда в остальные точки метрику можно принести левыми сдвигами. Таким образом, левинвариантных римановых метрик на группе столько же, сколько евклидовых структур на алгебре.

Евклидова структура на алгебре определяется симметрическим положительно определенным оператором, действующим из алгебры в дуальное к ней пространство. Итак, пусть $A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ — симметрический положительный линейный оператор:

$$(A\xi, \eta) = (A\eta, \xi) \text{ для всех } \xi, \eta \text{ из } \mathfrak{g}.$$

(Положительность A не очень существенна, но в механических приложениях квадратичная форма $(A\xi, \xi)$ положительно определена.)

Определим симметрический оператор $A_g: TG_g \rightarrow T^*G_g$ левым сдвигом:

$$A_g \xi = L_{g^{-1}}^* A L_{g^{-1}*} \xi.$$

Мы получаем, таким образом, следующую коммутативную диаграмму линейных операторов

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* & \xrightarrow[\text{L}_{*g^{-1}}]{\text{Ad}_g} & TG_g \xrightarrow[\text{R}_{*g^{-1}}]{\text{Ad}_g} \mathfrak{g} \\ \text{A}_g \downarrow & & \text{A}_g \downarrow \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow[\text{L}_g^*]{\text{T}^*G_g} & \text{T}^*G_g \xrightarrow[\text{R}_g^*]{\text{Ad}_g^*} \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Определенное оператором A_g скалярное произведение будем обозначать угловыми скобками:

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = (A_g \xi, \eta) = (A_g \eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle_g.$$

Это скалярное произведение задает на группе G риманову метрику, инвариантную относительно левых сдвигов.

Скалярное произведение в алгебре будем обозначать просто \langle, \rangle . Определим операцию $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ тождеством

$$\langle [a, b], c \rangle \equiv \langle B(c, a), b \rangle \text{ для всех } b \text{ из } \mathfrak{g}.$$

Ясно, что операция B билинейна и при фиксированном первом аргументе кососимметрична по второму:

$$\langle B(c, a), b \rangle + \langle B(c, b), a \rangle = 0.$$

В. Пример. Пусть $G = SO(3)$ — группа вращений трехмерного евклидова пространства, т. е. конфигурационное пространство твердого тела, закрепленного в точке. Движение тела описывается тогда кривой $g = g(t)$ на группе. Алгебра Ли группы G — это трехмерное пространство угловых скоростей всевозможных вра-

щений. Коммутатор в этой алгебре — обычное векторное произведение.

Скорость вращения тела \dot{g} есть касательный вектор к группе в точке g . Чтобы получить угловую скорость, нужно перенести этот вектор в касательное пространство к группе в единице, т. е. в алгебре. Но это можно сделать двумя способами: левым и правым сдвигом. В результате получается два разных вектора в алгебре:

$$\omega_c = L_{g^{-1}*} \dot{g} \in \mathfrak{g}, \quad \omega_s = R_{g^{-1}*} \dot{g} \in \mathfrak{g}.$$

Эти два вектора не что иное, как «угловая скорость в теле» (corp) и «угловая скорость в пространстве» (space).

Действительно, элементу g группы G отвечает такое положение тела, которое получается из некоторого начального состояния (соответствующего единице группы и выбираемого произвольно) движением g . Пусть ω — элемент алгебры.

Однопараметрическую группу вращений с угловой скоростью ω мы обозначим через $e^{\omega t}$; ω — это касательная к указанной однопараметрической группе в единице. Теперь рассмотрим перемещение

$$e^{\omega \tau} g, \quad \text{где } g = g(t) \in G, \quad \omega \in \mathfrak{g}, \quad \tau \ll 1,$$

полученное из перемещения g доворотом с угловой скоростью ω за малое время τ . Если вектор \dot{g} совпадает с вектором

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} e^{\omega \tau} g,$$

то ω называется *угловой скоростью относительно пространства* и обозначается ω_s . Следовательно, ω_s получается из \dot{g} *правым* сдвигом. Аналогично доказывается, что угловая скорость в теле есть левый сдвиг вектора \dot{g} в алгебре.

Дуальное к алгебре пространство \mathfrak{g}^* в нашем примере — это пространство кинетических моментов.

Кинетическая энергия тела определяется вектором угловой скорости в теле и не зависит от расположения тела в пространстве. Следовательно, кинетическая энергия задает *левоинвариантную* риманову метрику на группе. Задающий эту метрику симметрический положительно определенный оператор $A_g: TG_g \rightarrow T^*G_g$ называется *оператором* (или тензором) *инерции*; он связан с кинетической энергией формулой

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{g}, \dot{g} \rangle_g = \frac{1}{2} \langle \omega_c, \omega_c \rangle = \frac{1}{2} (A \omega_c, \omega_c) = \frac{1}{2} (A_g \dot{g}, \dot{g}),$$

где $A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ есть значение A_g при $g = e$.

Образ вектора \dot{g} под действием оператора инерции A_g называется *кинетическим моментом* и обозначается через $M = A_g \dot{g}$.

Вектор M лежит в кокасательном пространстве к группе в точке g , и его можно перенести в кокасательное пространство

к группе в единице как левыми, так и правыми сдвигами. Получаются два вектора

$$M_c = L_g^* M \in \mathfrak{g}^*,$$

$$M_s = R_g^* M \in \mathfrak{g}^*.$$

Эти векторы из дуального к алгебре пространства — не что иное, как кинетический момент относительно тела (M_c) и кинетический момент относительно пространства (M_s). Последнее легко вытекает из выражения кинетической энергии через момент и угловую скорость:

$$T = \frac{1}{2} (M_c, \omega_c) = \frac{1}{2} (M, \dot{g}).$$

Согласно принципу наименьшего действия, движение твердого тела по инерции (в отсутствие внешних сил) есть геодезическая на группе вращений с указанной выше левоинвариантной метрикой.

Мы будем теперь рассматривать геодезические произвольной левоинвариантной римановой метрики на произвольной группе Ли как движения «обобщенного твердого тела» с конфигурационным пространством G . Такое «твердое тело с группой G » определяется своей кинетической энергией, т. е. положительно определенной квадратичной формой на алгебре Ли. Точнее, мы будем представлять себе геодезические левоинвариантной метрики на группе G , заданной квадратичной формой $\langle \omega, \omega \rangle$ на алгебре, как движения твердого тела с группой G и кинетической энергией $\langle \omega, \omega \rangle / 2$.

Каждому движению $t \mapsto g(t)$ нашего обобщенного твердого тела мы можем сопоставить следующие четыре кривые:

$$\begin{aligned} t \mapsto \omega_c(t) \in \mathfrak{g}, \quad t \mapsto \omega_s(t) \in \mathfrak{g}, \\ t \mapsto M_c(t) \in \mathfrak{g}^*, \quad t \mapsto M_s(t) \in \mathfrak{g}^*, \end{aligned}$$

называемые движениями векторов угловой скорости и момента в теле и в пространстве.

Дифференциальные уравнения, которым подчиняются эти кривые, найдены Эйлером для обычного твердого тела. Однако они справедливы в самом общем случае произвольной группы G , и мы будем их называть уравнениями Эйлера для обобщенного твердого тела.

З а м е ч а н и е. В обычной теории твердого тела отождествлены шесть различных пространств размерности 3: \mathbf{R}^3 , \mathbf{R}^{3*} , \mathfrak{g} , \mathfrak{g}^* , TG_g , T^*G_g . Совпадение размерностей пространства \mathbf{R}^3 , в котором движется тело, и алгебры Ли \mathfrak{g} его группы движений — случайное обстоятельство, связанное с трехмерностью пространства: в n -мерном случае \mathfrak{g} имеет размерность $n(n-1)/2$.

Отождествление алгебры Ли \mathfrak{g} с дуальным к ней пространством \mathfrak{g}^* имеет более глубокое основание. Дело в том, что на группе вращений существует (и единственна с точностью до множителя) двусторонне инвариантная риманова метрика. Эта метрика задает раз и навсегда выделенный изоморфизм линейных пространств \mathfrak{g} и \mathfrak{g}^* (а также TG_g и T^*G_g). Она позволяет, следовательно, считать векторы угловой скорости и момента лежащими в одном евклидовом пространстве. В результате отождествления операция $\{, \}$ превращается в коммутатор алгебры, взятый со знаком минус.

Двусторонне инвариантная метрика существует на любой компактной группе Ли, поэтому при изучении движений твердых тел с компактными группами можно отождествить пространства угловых скоростей и моментов. Однако мы не будем делать этого отождествления, имея в виду главным образом пример приложения к некомпактному (и даже бесконечномерному) случаю групп диффеоморфизмов.

Г. Уравнения Эйлера. Результаты Эйлера (полученные им в частном случае $G = SO(3)$) можно сформулировать в виде следующих теорем о движении векторов угловой скорости и момента обобщенных твердых тел с группой G .

Теорема 1. *Вектор момента относительно пространства сохраняется при движении:*

$$\frac{dM_s}{dt} = 0.$$

Теорема 2. *Вектор момента относительно тела удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$\frac{dM_c}{dt} = \{\omega_c, M_c\}.$$

Доказываются эти теоремы, для обобщенного твердого тела так же, как для обычного.

Замечание 1. Вектор угловой скорости в теле ω_c линейно выражается через вектор момента в теле M_c с помощью оператора, обратного оператору инерции: $\omega_c = A^{-1}M_c$. Следовательно, уравнение Эйлера можно считать уравнением для одного лишь вектора момента в теле; его правая часть квадратична относительно M_c .

Мы можем выразить этот результат еще следующим образом. Рассмотрим фазовый поток нашего твердого тела. (Его фазовое пространство T^*G имеет размерность вдвое большую, чем размерность n группы G или пространства моментов \mathfrak{g}^*). Тогда этот фазовый поток в $2n$ -мерном многообразии факторизуется над потоком, заданным уравнением Эйлера в n -мерном линейном пространстве \mathfrak{g}^* .

Факторизацией фазового потока g^t на многообразии X над фазовым потоком f^t на многообразии Y называется такое гладкое отображение π многообразия X на Y , при котором движения g^t переходят в движения f^t , так что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g^t} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f^t} & Y \end{array}, \text{ т. е. } \pi g^t = f^t \pi.$$

В нашем случае $X = T^*G$ — фазовое пространство тела, $Y = \mathfrak{g}^*$ — пространство кинетических моментов. Проекция $\pi: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ определяется левыми сдвигами ($\pi M = L_g^* M$ для $M \in T^*G_g$). Далее, g^t есть фазовый поток рассматриваемого тела в $2n$ -мерном пространстве T^*G , а f^t — фазовый поток уравнения Эйлера в n -мерном пространстве моментов \mathfrak{g}^* .

Иными словами, движение вектора момента относительно тела зависит лишь от начального положения вектора момента относительно тела и не зависит от расположения тела в пространстве.

Замечание 2. Закон сохранения вектора момента относительно пространства можно выразить, сказав, что каждая компонента этого вектора в какой-либо системе координат на пространстве \mathfrak{g}^* сохраняется. Мы получаем, таким образом, множество первых интегралов уравнений движения твердого тела. В частности, каждому элементу алгебры Ли \mathfrak{g} соответствует линейная функция на пространстве \mathfrak{g}^* и, следовательно, первый интеграл. Скобки Пуассона первых интегралов, заданных функциями на \mathfrak{g}^* , как легко сосчитать, сами будут функциями на \mathfrak{g}^* . Мы получаем, таким образом, (бесконечномерное) расширение алгебры Ли \mathfrak{g} , состоящее из всевозможных функций на \mathfrak{g}^* . Сама алгебра Ли \mathfrak{g} вложена в это расширение как алгебра Ли линейных функций на \mathfrak{g}^* . Конечно, функционально независимы из всех этих первых интегралов фазового потока в $2n$ -мерном пространстве только n штук. В качестве n независимых интегралов можно взять, например, n линейных функций на \mathfrak{g}^* , образующих базис в \mathfrak{g} .

Имея в виду бесконечномерные приложения, мы хотели бы избавиться от координат и сформулировать утверждение о первых интегралах инвариантно. Это можно сделать, переформулировав теорему 1 следующим образом.

Теорема 3. *Орбиты коприсоединенного представления группы в дуальном к алгебре пространстве являются инвариантными многообразиями для потока в этом пространстве, заданного уравнением Эйлера.*

Доказательство. $M_c(t)$ получается из $M_s(t)$ действием коприсоединенного представления, а $M_s(t)$ стоит на месте, ч. т. д.

Пример. В случае обычного твердого тела орбиты коприсоединенного представления группы в пространстве моментов — это сферы $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \text{const}$. В этом случае теорема 3 превра-

дается в закон сохранения квадрата момента. Она состоит в том, что если начальная точка M_c лежит на какой-либо орбите (т. е. в данном случае на сфере $M^2 = \text{const}$), то и все точки ее траектории под действием уравнения Эйлера лежат на той же орбите.

Вернемся теперь к общему случаю произвольной группы G и вспомним, что орбиты коприсоединенного представления имеют симплектическую структуру (см. пункт А). Далее, кинетическую энергию тела можно выразить через момент относительно тела. В результате мы получаем квадратичную форму на пространстве моментов

$$T = \frac{1}{2} (M_c, A^{-1}M_c).$$

Зафиксируем какую-нибудь одну орбиту V коприсоединенного представления. Рассмотрим кинетическую энергию как функцию на этой орбите:

$$H: V \rightarrow \mathbf{R}, \quad H(M_c) = \frac{1}{2} (M_c, A^{-1}M_c).$$

Теорема 4. *Уравнение Эйлера на каждой орбите V коприсоединенного представления является гамильтоновым, с функцией Гамильтона H .*

Доказательство. Всякий вектор ξ , касательный к V в точке x , имеет вид $\xi = \{f, M\}$, где $f \in \mathfrak{g}$. В частности, векторное поле в правой части уравнения Эйлера можно записать в виде $X = \{dT, M\}$ (здесь дифференциал функции T в точке M линейного пространства \mathfrak{g}^* рассматривается как вектор пространства, дуального к \mathfrak{g}^* , т. е. как элемент алгебры Ли \mathfrak{g}). Из определений симплектической структуры Ω и операции $\{, \}$ (см. пункт А) вытекает, что для всякого вектора ξ , касательного к V в точке M ,

$$\Omega(\xi, X) = (M, [f, dT]) = (dT, \{f, M\}) = (dH, \xi),$$

что и требовалось доказать.

Уравнение Эйлера можно перенести из дуального к алгебре пространства в саму алгебру с помощью обращения оператора инерции. В результате получается следующая формулировка уравнения Эйлера в терминах операции B (стр. 285).

Теорема 5. *Движение вектора угловой скорости в теле определяется начальным положением этого вектора и не зависит от начального положения тела. Вектор угловой скорости в теле удовлетворяет уравнению с квадратичной правой частью*

$$\dot{\omega}_c = B(\omega_c, \omega_c).$$

Это уравнение мы будем называть уравнением Эйлера для угловой скорости. Заметим, что орбиты коприсоединенного представления под действием оператора $A^{-1}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ переходят в инвариантные многообразия уравнения Эйлера для угловой скорости: эти многообразия имеют симплектическую структуру и т. д. Однако,

в отличие от орбит в \mathfrak{g}^* , эти инвариантные многообразия не определяются самой группой Ли G , но зависят также и от выбора твердого тела (т. е. оператора инерции).

Из закона сохранения энергии вытекает

Теорема 6. Уравнения Эйлера (для моментов и угловых скоростей) имеют квадратичный первый интеграл, значение которого равно кинетической энергии.

$$T = \frac{1}{2} (M_c, A^{-1}M_c) = \frac{1}{2} (A\omega_c, \omega_c).$$

Д. Стационарные вращения и их устойчивость. *Стационарным вращением* твердого тела называется такое вращение, при котором угловая скорость тела постоянна (как в теле, так и в пространстве: легко видеть, что одно влечет другое). Из теории обычного твердого тела в \mathbb{R}^3 мы знаем, что стационарными вращениями являются вращения вокруг главных осей эллипсоида инерции. Ниже формулируется обобщение этой теоремы на случай твердого тела с любой группой Ли. Заметим, что стационарные вращения — это геодезические левоинвариантной метрики, являющиеся однопараметрическими подгруппами.

Заметим также, что направления главных осей эллипсоида инерции можно определять, рассматривая стационарные точки кинетической энергии на сфере векторов момента фиксированной длины.

Теорема 7. Кинетический момент (соответственно угловая скорость) стационарного вращения относительно тела является критической точкой энергии на орбите коприсоединенного представления (соответственно на образе орбиты под действием оператора A^{-1}). Обратное, всякая критическая точка энергии на орбите определяет стационарное вращение.

Доказательство — непосредственная выкладка или ссылка на теорему 4.

Заметим, что разбиение пространства моментов на орбиты коприсоединенного представления может в случае произвольной группы быть устроено не так просто, как в простейшем случае обычного твердого тела, когда это — разбиение трехмерного пространства на сферы с центром O и саму точку O . В частности, орбиты могут иметь разные размерности, и разбиение на орбиты может не быть в окрестности данной точки расслоением: такая особенность есть уже в трехмерном случае в точке O .

Мы назовем точку M пространства моментов *регулярной точкой*, если разбиение окрестности точки M на орбиты диффеоморфно разбиению евклидова пространства на параллельные плоскости (в частности, все орбиты, близкие к точке M , имеют одинаковые размерности). Например, для группы вращений трехмерного пространства регулярны все точки пространства моментов, кроме начала координат.

Теорема 8. *Предположим, что регулярная точка M пространства моментов является критической точкой энергии на орбите коприсоединенного представления, и что второй дифференциал энергии d^2H в этой точке — знакоопределенная квадратичная форма. Тогда M — устойчивое (по Ляпунову) положение равновесия уравнения Эйлера.*

Доказательство состоит в том, что вследствие регулярности на соседних орбитах рядом с точкой M есть условный максимум или минимум энергии.

Теорема 9. *Второй дифференциал кинетической энергии, суженной на образ орбиты коприсоединенного представления в алгебре, дается в точке $\omega \in \mathfrak{g}$ формулой*

$$2d^2H|_{\omega}(\xi) = \langle B(\omega, f), B(\omega, f) \rangle + \langle [f, \omega], B(\omega, f) \rangle,$$

где ξ — касательный вектор к указанному образу, выражающийся через f по формуле

$$\xi = B(\omega, f), \quad f \in \mathfrak{g}.$$

Е. Риманова кривизна группы с левоинвариантной метрикой. Пусть G — группа Ли, снабженная левоинвариантной метрикой. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в алгебре, задающее эту метрику. Заметим, что риманова кривизна группы G в любой точке определяется кривизной в единице (так как левые сдвиги переводят группу в себя изометрически). Поэтому кривизну достаточно вычислить для двумерных плоскостей, лежащих в алгебре Ли.

Теорема 10. *Кривизна группы в направлении, определенном ортонормированной парой векторов ξ, η из алгебры, дается формулой*

$$K_{\xi, \eta} = \langle \delta, \delta \rangle + 2 \langle \alpha, \beta \rangle - 3 \langle \alpha, \alpha \rangle - 4 \langle B_{\xi}, B_{\eta} \rangle,$$

где $2\delta = B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi)$, $2\beta = B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi)$, $2\alpha = [\xi, \eta]$, $2B_{\xi} = B(\xi, \xi)$, $2B_{\eta} = B(\eta, \eta)$, и где B — операция, определенная

в пункте Б (стр. 285).

Доказательство — утомительное, но прямое вычисление. Оно основано на легко проверяемой формуле для ковариантной производной

$$(\nabla_{\xi}\eta)_e = \frac{1}{2} ([\xi, \eta] - B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi)),$$

где ξ и η слева — левоинвариантные векторные поля, а справа — их значения в единице.

Замечание 1. В частном случае двусторонне инвариантной метрики формула для кривизны принимает особенно простой вид

$$K_{\xi, \eta} = \frac{1}{4} \langle [\xi, \eta], [\xi, \eta] \rangle.$$

Замечание 2. Формула для кривизны группы с *правоинвариантной* римановой метрикой совпадает с формулой для левоинвариантного случая. Действительно, правоинвариантная метрика на группе есть левоинвариантная метрика на группе с перевернутым законом умножения ($g_1 * g_2 = g_2 g_1$). Переход к перевернутой группе меняет знаки коммутатора и операции B в алгебре одновременно. Но в каждом слагаемом формулы для кривизны стоит произведение двух меняющих знак операций. Следовательно, формула для кривизны сохраняет силу в правоинвариантном случае.

В уравнении Эйлера при переходе к правоинвариантному случаю меняется знак правой части.

Ж. Приложения к группе диффеоморфизмов. Пусть D — ограниченная область в римановом многообразии. Рассмотрим группу диффеоморфизмов области D , сохраняющих элемент объема. Мы будем обозначать эту группу через $\text{SDiff } D$.

Алгебра Ли, соответствующая группе $\text{SDiff } D$, состоит из всех векторных полей дивергенции 0 на D , касающихся края (если он не пуст). Определим скалярное произведение двух элементов этой алгебры Ли (т. е. двух векторных полей) как

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_D (v_1 \cdot v_2) dx,$$

где (\cdot) — скалярное произведение, задающее риманову метрику на D , а dx — риманов элемент объема.

Рассмотрим теперь течение однородной идеальной (несжимаемой, невязкой) жидкости в области D . Такое течение описывается кривой $t \mapsto g_t$ на группе $\text{SDiff } D$. А именно, диффеоморфизм g_t — это отображение, которое переводит каждую частицу жидкости из того места, где она была в момент времени 0, в то место, где она окажется в момент t .

Оказывается, кинетическая энергия движущейся жидкости — это *правоинвариантная* риманова метрика на группе диффеоморфизмов $\text{SDiff } D$.

В самом деле, пусть за время t течение жидкости осуществило диффеоморфизм g_t , а скорость в этот момент времени задается векторным полем v . Тогда диффеоморфизм, осуществляемый течением за время $t + \tau$ (где τ мало) будет $e^{v\tau} g_t$ с точностью до малых по сравнению с τ величин (здесь $e^{v\tau}$ — это однопараметрическая группа с вектором скорости v , т. е. фазовый поток заданного поля v дифференциального уравнения).

Следовательно, поле скоростей v получается из касательного к группе в точке g вектора \dot{g} *правым* сдвигом. Отсюда и следует правоинвариантность кинетической энергии, которая, по определению, равна

$$T = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$$

(плотность жидкости мы считаем равной 1).

Принцип наименьшего действия (который в математическом отношении есть определение идеальной жидкости) утверждает, что течения идеальной жидкости являются геодезическими описанной правосторонне инвариантной метрики на группе диффеоморфизмов.

Строго говоря, бесконечномерная группа диффеоморфизмов не является многообразием. Поэтому точная формулировка предыдущего определения требует дополнительной работы: нужно выбрать подходящие функциональные пространства, доказать теоремы существования и единственности решений и т. д. До сих пор это удалось сделать только в случае, когда размерность области течения D равна 2. Мы, однако, будем действовать так, как если бы этих трудностей, связанных с бесконечномерностью, не существовало. Таким образом, дальнейшие рассуждения носят эвристический характер. Впрочем, многие результаты можно обосновать строго, независимо от теории бесконечномерных многообразий.

Теперь мы укажем, в каком виде записываются приведенные выше общие формулы в случае $G = \text{SDiff } D$, где D — связная область конечного объема в трехмерном римановом многообразии. Для этого прежде всего нужно записать явно билинейную операцию $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, определенную в пункте Б тождеством

$$\langle [a, b], c \rangle \equiv \langle B(c, a), b \rangle$$

Легко проверить, что в трехмерном случае векторное поле $B(c, a)$ выражается через векторные поля a и c из нашей алгебры Ли по формуле

$$B(c, a) = (\text{rot } c) \wedge a + \text{grad } \alpha,$$

где \wedge означает векторное произведение, а α — однозначную в D функцию, которая однозначно (с точностью до слагаемого) определяется условием $B \equiv \mathfrak{g}$ (т. е. условиями $\text{div } B = 0$ и B касательно к краю D).

Заметим, что операция B не зависит от выбора ориентации, так как векторное произведение и ротор оба меняют знак при изменении ориентации.

3. Стационарные течения. Уравнение Эйлера для «угловой скорости» в случае $G = \text{SDiff } D$ имеет вид $\dot{v} = -B(v, v)$, так как метрика правоинвариантна. Оно принимает поэтому в случае группы диффеоморфизмов трехмерного пространства вид «уравнения движения в форме Бернулли»

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \wedge \text{rot } v + \text{grad } \alpha, \quad \text{div } v = 0.$$

Уравнение Эйлера для момента записывается в виде «уравнения вихря»

$$\frac{\partial \text{rot } v}{\partial t} = [v, \text{rot } v].$$

В частности, вихрь стационарного течения коммутирует с полем скоростей.

Это замечание позволяет немедленно топологически классифицировать стационарные течения идеальной жидкости в трехмерном пространстве.

Теорема 11. *Предположим, что область D компактна и ограничена аналитической поверхностью, а поле скоростей аналитично и не везде коллинеарно со своим ротором. Тогда область течения разбивается аналитическим подмножеством на конечное число ячеек, в каждой из которых течение устроено стандартным образом. А именно, ячейки бывают двух типов: расслоенные на инвариантные относительно течения торы и расслоенные на инвариантные относительно течения поверхности, диффеоморфные кольцу $\mathbb{R} \times S^1$. При этом на каждом из торов все линии тока замкнуты, либо все всюду плотны, а на каждом кольце все линии тока замкнуты.*

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении «поверхностей Бернулли», т. е. поверхностей уровня функции α . Из условия стационарности ($v \wedge \text{rot } v = -\text{grad } \alpha$) следует, что как линии тока, так и линии ротора лежат на поверхностях Бернулли. Поскольку поля скорости и ротора коммутируют, на замкнутой поверхности Бернулли действует группа \mathbb{R}^2 , и она обязана быть тором (ср. с доказательством теоремы Лиувилля в § 49). Аналогичные соображения, с учетом граничного условия на краю D , показывают, что незамкнутые поверхности Бернулли состоят из колец с замкнутыми линиями тока.

З а м е ч а н и е. Аналитичность поля скоростей не очень существенна, но важно, чтобы поля скорости и ротора не были коллинеарны ни в какой области. Машинные эксперименты, проведенные М. Хэноном, показывают более сложное, чем описано в теореме, поведение линий тока для стационарного течения на трехмерном торе, заданного формулами

$$v_x = A \sin z + C \cos y, \quad v_y = B \sin x + A \cos z,$$

$$v_z = C \sin y + B \cos x.$$

Формулы подобраны так, что векторы v и $\text{rot } v$ коллинеарны. Судя по результатам счета, некоторые линии тока плотно заполняют трехмерные области.

И. Изозавихренные поля. Двумерная гидродинамика резко отличается от трехмерной. Сущность этого различия заключается в различии геометрии орбит коприсоединенного представления в двумерном и трехмерном случае. Именно, в двумерном случае орбиты в некотором смысле замкнуты и ведут себя, примерно, как семейство множеств уровня функции (точнее, нескольких функций): в действительности даже бесконечного числа функций). В трехмерном же случае орбиты устроены сложнее, в частности, неогра-

ничены (а быть может и плотны). Орбиты коприсоединенного представления группы диффеоморфизмов трехмерного риманова многообразия можно описать следующим образом. Пусть v_1 и v_2 — два векторных поля скоростей несжимаемой жидкости в области D . Мы скажем, что поля v_1 и v_2 *изозавихрены*, если существует такой сохраняющий элемент объема диффеоморфизм $g: D \rightarrow D$, который переводит каждый замкнутый контур γ в D в такой новый контур, что циркуляция первого поля по исходному контуру равна циркуляции второго по сдвинутому контуру:

$$\oint_{\gamma} v_1 = \oint_{g\gamma} v_2.$$

Легко проверить, что образ орбиты коприсоединенного представления в алгебре (под действием обратного к оператору инерции оператора A^{-1}) не что иное, как множество полей, изозавихренных данному.

В частности, теорема 3 принимает теперь вид следующего закона сохранения циркуляций.

Теорема 12. Циркуляция поля скоростей идеальной жидкости по замкнутому жидкому контуру не меняется, когда контур переносится жидкостью на новое место.

Заметим, что если два поля скоростей трехмерной идеальной жидкости в D изозавихрены, то соответствующий диффеоморфизм переводит ротор первого поля в ротор второго:

$$g_* \operatorname{rot} v_1 = \operatorname{rot} v_2.$$

Более того, изозавихренность двух полей можно определить как эквивалентность полей роторов, *если область течения односвязна*. Следовательно, задача об орбитах коприсоединенного представления в трехмерном случае содержит в себе задачу о классификации *векторных полей* дивергенции нуль с точностью до сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов. Эта последняя задача в трехмерном случае безнадежно трудна.

Рассмотрим теперь двумерный случай. Вначале перепишем основные формулы в удобных для рассмотрения двумерного случая обозначениях.

Предположим, что область течения D двумерна и ориентирована. Метрика и ориентация задают на D симплектическую структуру; векторное поле скоростей имеет дивергенцию нуль и потому гамильтоново. Следовательно, это поле задается функцией Гамильтона (вообще говоря, многозначной, если область D не односвязна). Функция Гамильтона поля скоростей называется в гидродинамике *функцией тока* и обозначается через ψ . Таким образом,

$$v = I \operatorname{grad} \psi,$$

где I есть оператор поворота на 90° «вправо».

Функция тока коммутатора двух полей оказывается якобианом (или, если угодно, скобкой Пуассона гамильтонова формализма) функций тока исходных полей

$$\psi_{|v_1, v_2|} = J(\psi_1, \psi_2).$$

Векторное поле $B(c, a)$ дается в двумерном случае формулой

$$B = -(\Delta\psi_c) \text{grad } \psi_a + \text{grad } \alpha,$$

где ψ_a и ψ_c — функции тока полей a и c , $\Delta = \text{div grad}$ — лапласиан.

В частном случае евклидовой плоскости с декартовыми координатами x, y формулы для функции тока, коммутатора и лапласиана принимают особенно простой вид

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \psi_{|v_1, v_2|} &= \frac{\partial\psi_{v_1}}{\partial x} \frac{\partial\psi_{v_2}}{\partial y} - \frac{\partial\psi_{v_1}}{\partial y} \frac{\partial\psi_{v_2}}{\partial x}, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Вихрем (или ротором) двумерного поля скоростей называется скалярная функция, интеграл произведения которой на ориентированный элемент площади по любой ориентированной области σ в D равен циркуляции поля скоростей по краю области σ :

$$\int_{\sigma} r \, dS = \oint_{\partial\sigma} v.$$

Легко сосчитать выражение ротора через функцию тока:

$$r = -\Delta\psi.$$

В двумерном односвязном случае изозавихренность полей v_1 и v_2 означает просто, что функции r_1 и r_2 (роторы этих полей) переходят друг в друга при подходящем сохраняющем площади диффеоморфизме.

Две функции r_1 и r_2 с таким свойством во всяком случае равноизмеримы, т. е. для них

$$\text{mes} \{x \in D : r_1(x) \leq c\} = \text{mes} \{x \in D : r_2(x) \leq c\},$$

каково бы ни было число c . Следовательно, принадлежность двух полей образу одной орбиты коприсоединенного представления влечет равенство целой серии функционалов, например, интегралов от всех степеней ротора

$$\int_D r_1^k \, dS = \int_D r_2^k \, dS.$$

В частности, уравнения Эйлера движения двумерной идеальной жидкости

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v = - \text{grad } p, \quad \text{div } v = 0,$$

имеют бесконечный набор первых интегралов. Например, интеграл от любой степени ротора поля скоростей

$$I_k = \int_D \int \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^k dx \wedge dy$$

является таким первым интегралом.

Именно существование этих первых интегралов (т. е. относительно простая структура орбит коприсоединенного представления) позволило доказать теоремы существования, единственности и т. д. в двумерной гидродинамике идеальной (а также и вязкой) жидкости; и именно сложная геометрия орбит коприсоединенного представления в трехмерном случае (или, может быть, недостаток информации об этих орбитах) делает столь трудной задачу обоснования трехмерной гидродинамики.

К. Устойчивость плоских стационарных течений. Сформулируем теперь общие теоремы о стационарных вращениях (теоремы 7, 8 и 9 выше) для случая группы диффеоморфизмов. Мы получим тогда следующие утверждения:

1. *Стационарное течение идеальной жидкости выделяется из всех изозавихренных с ним течений тем, что оно является точкой условного экстремума (или критической точкой) кинетической энергии.*

2. *Если 1) указанная критическая точка — действительно экстремум, т. е. локальный условный максимум или минимум, 2) выполняется некоторое (вообще говоря, выполненное) условие регулярности и 3) экстремум невырожден (второй дифференциал знакоопределен), то стационарное течение устойчиво (т. е. является устойчивыми по Ляпунову положением равновесия уравнения Эйлера).*

3. *Формула для второго дифференциала кинетической энергии на касательном пространстве к многообразию полей, изозавихренных с данным, имеет в двумерном случае следующий вид. Пусть D — область на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x, y . Рассмотрим стационарное течение с функцией тока $\psi = \psi(x, y)$. Тогда*

$$\Sigma d^2 H = \int_D \left(\delta v \right)^2 + \frac{\Gamma \psi}{\nabla \Delta \psi} (\delta r)^2 dx dy,$$

где δv — вариация поля скоростей (т. е. вектор указанного выше касательного пространства), а $\delta r = \text{rot } \delta v$.

Заметим, что для стационарного течения векторы градиента функции тока и ее лапласиана коллинеарны. Поэтому отношение $\nabla\psi/\nabla\Delta\psi$ имеет смысл. Далее, в окрестности каждой точки, где градиент ротора не равен нулю, функция тока является функцией от функции ротора.

Приведенные выше утверждения приводят к заключению, что знакоопределенность квадратичной формы d^2H должна быть достаточным условием устойчивости рассматриваемого стационарного течения. Это заключение не вытекает формально из теорем 7, 8, 9, так как применение всех наших формул в бесконечномерном случае требует обоснования.

К счастью, можно обосновать окончательный вывод об устойчивости, не обосновывая промежуточных построений. Таким образом, удастся строго доказать следующие априорные оценки (выражающие устойчивость стационарного течения относительно малых возмущений начального поля скоростей).

Теорема 13. *Предположим, что функция тока стационарного течения $\psi = \psi(x, y)$ в области D является функцией от функции ротора (т. е. от функции $-\Delta\psi$) не только локально, но и в целом. Предположим, что производная функции тока по функции ротора удовлетворяет неравенству*

$$c \leq \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leq C, \quad \text{где } 0 < c \leq C < \infty.$$

Пусть $\psi + \varphi(x, y, t)$ — функция тока другого течения, уже не обязательно стационарного. Предположим, что в начальный момент циркуляция поля скоростей возмущенного течения (с функцией тока $\psi + \varphi$) по каждой компоненте границы области D равна циркуляции исходного течения (с функцией тока ψ). Тогда возмущение $\varphi = \varphi(x, y, t)$ в любой момент оценивается через начальное возмущение $\varphi_0 = \varphi(x, y, 0)$ по формуле

$$\iint_D (\nabla\varphi)^2 + c (\Delta\varphi)^2 dx dy \leq \iint_D (\nabla\varphi_0)^2 + C (\Delta\varphi_0)^2 dx dy.$$

Если же стационарное течение удовлетворяет неравенству

$$c \leq -\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \leq C, \quad 0 < c < C < \infty,$$

то возмущение φ оценивается через φ_0 по формуле

$$\iint_D c (\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2 dx dy \leq \iint_D C (\Delta\varphi_0)^2 - (\nabla\varphi_0)^2 dx dy.$$

Из этой теоремы вытекает устойчивость стационарного течения в случае положительной определенности квадратичной формы

$$\iint_D (\nabla\varphi)^2 + \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} (\Delta\varphi)^2 dx dy$$

относительно $\nabla\varphi$ (где φ — постоянная на каждой компоненте границы области D функция, у которой равен нулю поток градиента через каждую компоненту границы), а также в случае отрицательной определенности формы

$$\int \int_D (\nabla\varphi)^2 + \left(\max \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \right) (\Delta\varphi)^2 dx dy.$$

Пример 1. Рассмотрим плоское параллельное течение в полосе $Y_1 \leq y \leq Y_2$ на плоскости (x, y) с профилем скоростей $v(y)$ (т. е. с полем скоростей $(v(y), 0)$). Такое течение стационарно при любом профиле скоростей. Чтобы сделать область течения компактной, наложим на поля скоростей всех рассматриваемых течений условие периодичности с периодом X по координате x .

Условие теоремы 13 выполняется, если профиль скоростей не имеет точек перегиба (т. е. если $d^2v/dy^2 \neq 0$). Мы приходим к выводу, что *плоские параллельные течения идеальной жидкости без точек перегиба профиля скоростей устойчивы.*

Аналогичное предложение в линеаризованной задаче называется *теоремой Релея*.

Подчеркнем, что в теореме 13 речь идет не об устойчивости «в линейном приближении», а о настоящей строгой устойчивости по Ляпунову (т. е. относительно конечных возмущений в нелинейной задаче). Различие между этими двумя видами устойчивости в рассматриваемом случае существенно, потому что наша задача имеет гамильтонов характер (см. теорему 4). А для гамильтоновых систем асимптотическая устойчивость невозможна, поэтому устойчивость в линейном приближении всегда нейтральная, недостаточная для заключения об устойчивости положения равновесия нелинейной задачи.

Пример 2. Рассмотрим плоскопараллельное течение на торе

$$\{(x, y), x \bmod X, y \bmod 2\pi\}$$

с полем скоростей $v = (\sin y, 0)$, параллельным оси x . Это поле определяется функцией тока $\psi = -\cos y$ и имеет ротор $r = -\cos y$. Профиль скоростей имеет две точки перегиба, однако функция тока выражается через функцию ротора. Отношение $\nabla\psi/\nabla\Delta\psi$ равно минус единице. Применяя теорему 13, убеждаемся в устойчивости нашего стационарного течения в случае, когда

$$\int_0^{2\pi} \int_0^X (\Delta\varphi)^2 dx dy \geq \int_0^{2\pi} \int_0^X (\nabla\varphi)^2 dx dy$$

для всех функций φ периода X по x и 2π по y . Легко сосчитать, что последнее неравенство выполнено при $X \leq 2\pi$ и нарушается при $X > 2\pi$.

Таким образом, из теоремы 13 вытекает устойчивость синусоидального стационарного течения в случае короткого тора, когда период в направлении основного течения (X) меньше ширины

потока (2л). С другой стороны, можно непосредственно проверить, что на длинном торе (при $X > 2\pi$) наше синусоидальное течение неустойчиво*).

Итак, в рассматриваемом примере достаточное условие устойчивости из теоремы 13 оказалось и необходимым.

Следует заметить, что вообще из незначительности квадратичной формы d^2H не вытекает еще неустойчивость соответствующего течения. Вообще, положение равновесия гамильтоновой системы может быть устойчивым, несмотря на то, что функция Гамильтона в этом положении равновесия не является ни максимумом, ни минимумом. Квадратичный гамильтониан $H = p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2$ — простейший пример такого рода.

Л. Риманова кривизна группы диффеоморфизмов. Выражение для кривизны группы Ли, снабженной односторонне инвариантной метрикой, приведенное в пункте E, имеет смысл и для группы $S\text{Diff}D$ диффеоморфизмов римановой области D . Эта группа является конфигурационным пространством для идеальной жидкости, заполняющей область D . Кинетическая энергия жидкости определяется на группе $S\text{Diff}D$ правоинвариантную метрику. Число, которое получается при формальном применении к этой бесконечномерной группе формулы для кривизны групп Ли, естественно назвать кривизной группы $S\text{Diff}D$.

До конца вычисление кривизны группы диффеоморфизмов проведено лишь в случае течений на двумерном торе с евклидовой метрикой. Такой тор получается из евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 отождествлением точек, разность которых принадлежит некоторой решетке Γ (дискретной подгруппе плоскости). Примером такой решетки является множество точек с целыми координатами. В общем случае произвольной решетки Γ квадрат, лежащий в основании этой специальной решетки, можно заменить любым параллелограммом.

Рассмотрим теперь алгебру Ли, образованную векторными полями дивергенции нуль на торе с однозначной функцией тока. Соответствующая группа $S_0\text{Diff}T^2$ состоит из оставляющих на месте центр тяжести тора и сохраняющих элемент площади диффеоморфизмов. Она вложена в группу $S\text{Diff}T^2$ всех сохраняющих элемент площади диффеоморфизмов как вполне геодезическое подмногообразие (т. е. такое подмногообразие, что каждая его геодезическая является геодезической в объемлющем многообразии).

Доказательство заключается в том, что если в начальный момент поле скоростей идеальной жидкости имеет однозначную функцию тока, то и во все моменты времени функция тока однозначна; последнее вытекает из закона сохранения импульса.

*) См., например, статью: Л. Д. Мешалкин и Я. Г. Синай «Исследование устойчивости стационарного течения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости», Прикладная математика и механика, № 6 (1961), 1140 — 1142.

Мы исследуем теперь кривизны группы $S_0\text{Diff } T^2$ по всевозможным двумерным направлениям, проходящим через единицу группы (кривизна группы $S\text{Diff } T^2$ по каждому такому направлению та же самая, так как подмногообразие $S_0\text{Diff } T^2$ вполне геодезическое).

Выберем на плоскости \mathbb{R}^2 ориентацию. Тогда элементы алгебры Ли группы $S_0\text{Diff } T^2$ можно считать вещественными функциями на торе, имеющими среднее значение нуль (поле дивергенции нуль получается из такой функции, если считать ее функцией тока). Следовательно, двумерное направление в касательной плоскости к группе $S_0\text{Diff } T^2$ определяется парой функций на торе со средним значением нуль.

Такую функцию мы будем задавать набором ее коэффициентов Фурье. Все вычисления с рядами Фурье удобно проводить в комплексной области. Обозначим через e_k (где k — точка нашей евклидовой плоскости, называемая волновым вектором) функцию, значение которой в точке x нашей плоскости равно $e^{i(k \cdot x)}$. Такая функция определяет функцию на торе, если она Γ -периодична, т. е. если прибавление вектора из решетки Γ к аргументу x не меняет значения функции.

Иными словами, скалярное произведение (k, x) должно быть кратно 2π для всех $x \in \Gamma$. Все такие векторы k принадлежат некоторой решетке Γ^* на плоскости \mathbb{R}^2 . Функции e_k , где $k \in \Gamma^*$, образуют полную систему в пространстве комплексных функций на торе.

Теперь мы комплексифицируем нашу алгебру Ли, скалярное произведение \langle, \rangle , коммутатор $[,]$ и операцию B в алгебре, а также риманову связность и тензор кривизны Ω , так что все эти функции станут (поли) линейными в комплексном линейном пространстве комплексифицированной алгебры Ли. Функции e_k (где $k \in \Gamma^*$, $k \neq 0$) образуют в этом линейном пространстве базис.

Теорема 14. Явные формулы для скалярного произведения, коммутатора, операции B , связности и кривизны правоинвариантной метрики на группе $S_0\text{Diff } T^2$ имеют следующий вид:

$$\langle e_k, e_l \rangle = 0 \quad \text{при } k+l \neq 0, \quad \langle e_k, e_{-k} \rangle = k^2 S;$$

$$[e_k, e_l] = (k \wedge l) e_{k+l};$$

$$B(e_k, e_l) = b_{k,l} e_{k+l}, \quad \text{где } b_{k,l} = (k \wedge l) \frac{k^2}{(k+l)^2};$$

$$\nabla_{e_k} e_l = d_{l, k+l} e_{k+l}, \quad \text{где } d_{u,v} = \frac{(v \wedge u)(u \cdot v)}{v^2};$$

$R_{k,l,m,n} = 0$, если $k+l+m+n \neq 0$; если же $k+l+m+n = 0$, то

$$R_{k,l,m,n} = (a_{ln} a_{km} - a_{lm} a_{kn}) S,$$

$$\text{где } a_{uv} = \frac{(u \wedge v)^2}{|u+v|}.$$

В этих формулах S — площадь тора, а $u \wedge v$ — площадь параллелограмма, натянутого на u и v (при выбранной ориентации плоскости \mathbb{R}^2). Круглые скобки означают евклидово скалярное произведение на плоскости, а угловые — в алгебре Ли.

Доказательство этой теоремы имеется в цитированной на стр. 281 статье в *Анналах* института Фурье.

Приведенные формулы позволяют вычислить кривизну по любому двумерному направлению. Вычисления показывают, что по большинству направлений кривизна отрицательна, но по некоторым — положительна. Рассмотрим, в частности, какое-либо течение жидкости, т. е. геодезическую нашей группы. Согласно уравнению Якоби, устойчивость этой геодезической определяется кривизнами по направлениям всевозможных двумерных плоскостей, проходящих через вектор скорости геодезической во всех ее точках.

Предположим теперь, что рассматриваемое течение стационарное. Тогда геодезическая является однопараметрической подгруппой нашей группы. Отсюда следует, что кривизны во всех плоскостях, проходящих через вектор скорости геодезической во всех ее точках равны кривизнам в соответствующих плоскостях, проведенных через вектор скорости указанной геодезической в начальный момент времени. (Доказательство — правый сдвиг в единицу группы). Таким образом, на устойчивость стационарного течения влияют лишь кривизны в направлении тех двумерных плоскостей в алгебре Ли, которые содержат вектор алгебры Ли, являющийся полем скоростей стационарного течения.

Рассмотрим, например, простейшее параллельное синусоидальное стационарное течение. Такое течение задается функцией тока

$$\xi = \frac{e_k + e_{-k}}{2}.$$

Рассмотрим любой другой вещественный вектор из алгебры, $\eta = \sum x_l e_l$ (так что $x_{-l} = \bar{x}_l$). Из теоремы 14 легко выводится

Теорема 15. *Кривизна группы $S_0 \text{Diff } T^2$ со всех двумерных плоскостей, содержащих направление ξ , неположительна. А именно,*

$$\langle \Omega(\xi, \eta)\xi, \eta \rangle = -\frac{S}{4} \sum_l a_{k, l}^2 |x_l + x_{l+2k}|^2.$$

Из этой формулы, в частности, вытекает, что:

1) кривизна равна нулю лишь для тех двумерных плоскостей, которые состоят из параллельных течений того же направления, что и ξ , так что $[\xi, \eta] = 0$;

2) кривизна в сечении, определенном функциями тока $\xi = \cos kx$, $\eta = \cos lx$, есть

$$K = -\frac{k^2 + l^2}{4S} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta,$$

где S — площадь тора, α — угол между k и l , β — угол между $k+l$ и $k-l$;

3) в частности, кривизна группы диффеоморфизмов тора $\{(x, y) \bmod 2\pi\}$ в направлении, определенном полями скоростей $(\sin y, 0)$ и $(0, \sin x)$, равна

$$K = -\frac{1}{8\pi^2}.$$

М. Обсуждение. Естественно ожидать, что кривизна группы диффеоморфизмов связана с устойчивостью геодезических линий на этой группе (т. е. с устойчивостью течений идеальной жидкости) таким же образом, как кривизна конечномерной группы Ли — с устойчивостью геодезических на ней. А именно, отрицательность кривизны вызывает экспоненциальную неустойчивость геодезических. При этом характерный путь (средний путь, на котором в ϵ раз нарастают ошибки в начальных условиях) имеет порядок величины $1/\sqrt{-K}$. Таким образом, знание кривизны группы диффеоморфизмов позволяет оценить время, на которое можно предсказывать развитие течения идеальной жидкости по приближенному начальному полю скоростей без того, чтобы ошибка возрастала на много порядков.

Следует подчеркнуть, что неустойчивость течений идеальной жидкости понимается здесь иначе, чем в пункте К: речь идет об экспоненциальной неустойчивости движения жидкости, а не его поля скоростей. Возможны случаи, когда стационарное течение является устойчивым по Ляпунову решением уравнения Эйлера, и тем не менее соответствующее движение жидкости экспоненциально неустойчиво. Дело в том, что малое изменение поля скоростей жидкости может вызывать экспоненциально растущее изменение движения жидкости. В таком случае (устойчивости решения уравнения Эйлера и отрицательности кривизны группы) можно прогнозировать поле скоростей, но невозможно прогнозировать без очень большой потери точности движение масс жидкости.

Приведенные выше формулы для кривизны можно даже использовать для грубой оценки времени, на которое невозможен долгосрочный динамический прогноз погоды, если согласиться на некоторые упрощающие предположения. Эти упрощающие предположения состоят в следующем.

1. Земля имеет форму тора, получающегося факторизацией плоскости по квадратной решетке.

2. Атмосфера — это двумерная однородная несжимаемая невязкая жидкость.

3. Движение атмосферы близко к «пассатному потоку», параллельному экватору тора и имеющему синусоидальный профиль скоростей.

Для вычисления характерного пути мы должны тогда оценить кривизны группы $S_0\text{Diff } T^2$ в направлениях, содержащих «пассатный поток» ξ из теоремы 15. При этом мы будем считать $T^2 = \{(x, y) \bmod 2\pi\}$, $k = (0, 1)$. Иными словами, мы рассматриваем

2л-периодические течения на плоскости (x, y) . близкие к стационарному течению, параллельному оси x , с синусоидальным профилем скоростей

$$v = (\sin y, 0).$$

Из формул теоремы 15 легко усмотреть, что кривизна группы $S_0\text{Diff } T^2$ в плоскостях, содержащих наш пассатный поток v , меняется в пределах

$$-\frac{2}{S} < K < 0, \quad \text{где } S = 4\pi^2 - \text{площадь тора.}$$

Здесь нижний предел получен довольно грубой оценкой. Однако направление с кривизной $K = -1/(2S)$ заведомо существует, и есть много других направлений с кривизнами примерно такой же величины. Чтобы ориентировочно оценить характерный путь, мы примем в качестве ориентировочного значения «усредненной кривизны» $K_0 = -1/(2S)$.

Если согласиться исходить из такого значения кривизны K_0 , то получается характерный путь

$$s = (\sqrt{-K_0})^{-1} = \sqrt{2S}.$$

Скорость движения по группе, которое соответствует нашему пассатному течению, равна $\sqrt{S}/2$ (так как среднее квадратичное значение синуса равно $1/2$). Следовательно время, за которое наше течение проходит характерный путь, равно 2. Самые быстрые частицы жидкости успеют за это время пройти расстояние 2, т. е. $1/\pi$ от полного оборота вокруг тора.

Таким образом, если принять наше ориентировочное значение усредненной кривизны, то ошибки увеличиваются в $e^\pi \approx 20$ раз за время одного оборота самой быстрой частицы. Принимая для максимальной скорости пассатного потока значение 100 км/час , получаем для времени оборота 400 часов, т. е. меньше трех недель

Итак, если в начальный момент времени состояние погоды было нам известно с малой ошибкой ϵ , то порядок величины ошибки прогноза через n месяцев будет

$$10^{kn}\epsilon, \quad \text{где } k \approx \frac{30 \cdot 24}{400} \pi \lg_{10} e \approx 2,5.$$

Например, для вычисления погоды на два месяца вперед нужно иметь в запасе пять знаков точности. Практически это означает, что вычислять погоду на такой срок невозможно

Разумеется, приведенная здесь оценка является весьма нестройной, и принятая нами модель весьма упрощенная. Выбор значения «усредненной кривизны» также нуждается в обосновании.

ДОБАВЛЕНИЕ 3

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Симплектические многообразия классической механики — это чаще всего фазовые пространства лагранжевых механических систем, т. е. кокасательные расслоения конфигурационных пространств

Совсем другую серию примеров симплектических многообразий доставляет алгебраическая геометрия.

Например, любое гладкое комплексное алгебраическое многообразие (заданное системой полиномиальных уравнений в комплексном проективном пространстве) имеет естественную симплектическую структуру.

Построение симплектической структуры на алгебраическом многообразии основано на том, что само комплексное проективное пространство имеет замечательную симплектическую структуру, а именно мнимую часть его эрмитовой структуры.

А. Эрмитова структура комплексного проективного пространства. Напомню, что n -мерное комплексное проективное пространство CP^n — это многообразие всех проходящих через точку O комплексных прямых в $n+1$ -мерном комплексном линейном пространстве C^{n+1} . Чтобы построить на комплексном проективном пространстве CP^n симплектическую структуру, мы используем эрмитову структуру в соответствующем линейном пространстве C^{n+1} .

Напомню, что *эрмитовым скалярным произведением* (или эрмитовой структурой) в комплексном линейном пространстве называется комплексная функция от пары векторов, которая: 1) линейна по первому и антилинейна по второму аргументу, 2) меняет значение на комплексно-сопряженное при перестановке аргументов и 3) превращается в положительно определенную вещественную квадратичную форму, если взять аргументы равными:

$$\langle \lambda \xi, \eta \rangle = \lambda \langle \xi, \eta \rangle, \quad \langle \eta, \xi \rangle = \overline{\langle \xi, \eta \rangle}, \quad \langle \xi, \xi \rangle > 0$$

при $\xi \neq 0$.

Примером эрмитова скалярного произведения является

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi_k \bar{\eta}_k, \quad (1)$$

где ξ_k и η_k — координаты векторов ξ и η в некотором базисе.

Базис, в котором эрмитово скалярное произведение имеет вид (1), всегда существует и называется эрмитово-ортонормированным базисом.

Вещественная и мнимая части эрмитова скалярного произведения являются вещественными билинейными формами. Первая из них симметрична, а вторая кососимметрична, и обе невырождены:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle + i \langle \xi, \eta \rangle, \quad \langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle, \quad \langle \xi, \eta \rangle = - \langle \eta, \xi \rangle.$$

Квадратичная форма $\langle \xi, \xi \rangle$ положительно определена.

Таким образом, эрмитова структура \langle, \rangle в комплексном линейном пространстве задает в нем евклидову структуру $(,)$ и симплектическую структуру $[,]$. Эти две структуры связаны с комплексной структурой соотношением

$$[\xi, \eta] = \langle \xi, i\eta \rangle.$$

Определим теперь на комплексном проективном пространстве риманову метрику. С этой целью рассмотрим в соответствующем линейном пространстве \mathbb{C}^{n+1} единичную сферу

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, z \rangle = 1\}.$$

Эта сфера наследует из \mathbb{C}^{n+1} риманову метрику. Каждая комплексная прямая пересекает нашу сферу по окружности большого круга.

Определение. *Расстоянием* между двумя точками комплексного проективного пространства называется расстояние между соответствующими двумя окружностями на единичной сфере.

Заметим, что эти две окружности параллельны в том смысле, что расстояние от любой точки одной из окружностей до другой окружности одинаково (доказательство: умножение z на $e^{i\varphi}$ сохраняет метрику на сфере). Это обстоятельство позволяет сразу написать явную формулу (2) для римановой метрики на комплексном проективном пространстве, задающей определенное выше расстояние.

Действительно, обозначим через p отображение

$$p: \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}P^n,$$

сопоставляющее точке $z \neq 0$ линейного пространства \mathbb{C}^{n+1} комплексную прямую, проходящую через 0 и z .

Каждый вектор ζ , касательный к $\mathbb{C}P^n$ в точке pz , можно представить (многими способами) в виде образа вектора, приложенного в точке z ; при этом отображении

$$\zeta = p_* \xi, \quad \xi \in T\mathbb{C}_z^{n+1}.$$

Теорема. *Квадрат длины вектора ζ в определенной выше римановой метрике дается формулой*

$$ds^2(\zeta) = \frac{\langle \xi, \xi \rangle \langle z, z \rangle - \langle \xi, z \rangle \langle z, \xi \rangle}{\langle z, z \rangle^2}. \quad (2)$$

Доказательство. Предположим сначала, что точка z лежит на единичной сфере S^{2n-1} .

Разложим вектор ξ на две составляющих: одна в комплексной прямой, определенной вектором z , а вторая — в эрмитово-ортогональном направлении. Заметим, что эрмитова ортогональность вектору z означает евклидову ортогональность векторам z и iz . Вектор z — это вектор евклидовой нормали к сфере S^{2n-1} в точке z . Вектор iz — это вектор касательной к окружности, по которой сфера пересекается с комплексной прямой, проходящей через точку z . Значит, эрмитово-ортогональная к вектору z компонента η вектора ξ касается сферы S^{2n-1} и евклидово-ортогональна окружности, по которой сферу пересекает прямая pz .

Согласно определению метрики на CP^n , риманов квадрат длины вектора ξ равен евклидову квадрату длины эрмитово-ортогональной к z компоненты η вектора ξ .

Вычислим компоненту η вектора ξ , эрмитово-ортогональную к z . Запишем наше разложение в виде

$$\xi = cz + \eta, \quad \text{где } \langle \eta, z \rangle = 0.$$

Умножая эрмитово на z , находим

$$\langle \xi, z \rangle = c \langle z, z \rangle,$$

следовательно,

$$\eta = \frac{\langle z, z \rangle \xi - \langle \xi, z \rangle z}{\langle z, z \rangle}.$$

Вычисляя эрмитов квадрат вектора η , находим

$$\langle \eta, \eta \rangle = \frac{\langle z, z \rangle \langle \xi, \xi \rangle - \langle \xi, z \rangle \langle z, \xi \rangle}{\langle z, z \rangle}.$$

Тем самым формула (2) доказана для точек z единичной сферы. Общий случай сводится к рассмотренному гомотетией $z \mapsto z/|z|$. Теорема доказана.

Заметим, что наша конструкция позволяет определить в касательном пространстве к CP^n не только евклидову структуру (2), но и эрмитову структуру.

Действительно, рассмотрим эрмитово-ортогональное дополнение H к направлению вектора z в пространстве TC_z^{n+1} , где $z \in S^{2n-1}$. Отображение $p_*: H \rightarrow T(CP^n)_{pz}$ изоморфно (как мы показали выше) отображает H на касательное пространство к CP^n и переносит туда эрмитову структуру из H .

Ясно, что скалярный квадрат, определенный этой эрмитовой структурой, дается формулой (2). Поэтому формулу для эрмитова скалярного произведения в касательном пространстве к CP^n можно написать без новых вычислений:

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \frac{\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle z, z \rangle - \langle \xi_1, z \rangle \langle z, \xi_2 \rangle}{\langle z, z \rangle^2} \quad (3)$$

для любых векторов ξ_1, ξ_2 из TC_z^{n+1} , удовлетворяющих соотношению $p_*\xi_k = \zeta_k \in T(CP^n)_{pz}$.

Заметим, что в формуле (3) точка z не обязательно лежит на единичной сфере.

Построенные евклидова и эрмитова структуры (2), (3) в касательных пространствах к CP^n инвариантны не относительно всех

проективных преобразований многообразия CP^n , но лишь относительно тех, которые задаются унитарными (сохраняющими эрмитову структуру) линейными преобразованиями линейного пространства C^{n+1} .

Б. Симплектическая структура комплексного проективного пространства. Рассмотрим мнимую часть эрмитовой формы (3), взятую с коэффициентом $-1/\pi$ (зачем взят такой коэффициент, объяснено в задаче 1 на стр. 310)

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle. \quad (4)$$

Как и мнимая часть любой эрмитовой формы, вещественная билинейная форма Ω на касательном пространстве к комплексному проективному пространству кососимметрична и невырождена.

Теорема. *Дифференциальная 2-форма Ω задает на комплексном проективном пространстве симплектическую структуру.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только замкнутость формы Ω .

Рассмотрим внешнюю производную $d\Omega$ формы Ω . Эта дифференциальная 3-форма на многообразии CP^n инвариантна относительно отображений, индуцированных унитарными преобразованиями пространства C^{n+1} . Отсюда следует, что она равна нулю.

В самом деле, рассмотрим в касательном пространстве к CP^n в какой-либо точке z эрмитово-ортонормированный C -базис e_1, \dots, e_n . Тогда векторы $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ образуют евклидово-ортонормированный R -базис. Покажем, что значение формы $d\Omega$ на любой тройке этих R -базисных векторов равно нулю. (Мы предполагаем, что $n > 1$: при $n=1$ доказывать нечего.)

Заметим, что из любой тройки R -базисных векторов, указанных выше, по меньшей мере один эрмитово-ортогонален двум другим. Обозначим этот вектор через e . Легко построить унитарное преобразование пространства C^{n+1} , индуцирующее в CP^n движение, оставляющее на месте рассматриваемую точку z и эрмитово-ортогональное дополнение к e и меняющее направление вектора e .

Значение формы $d\Omega$ на наших трех векторах e, f, g равно ее значению на тройке $-e, f, g$ ввиду инвариантности формы $d\Omega$ и, следовательно, равно нулю. Теорема доказана.

Замечание. Другой способ построения той же симплектической структуры на комплексном проективном пространстве состоит в следующем. Рассмотрим малые колебания математического маятника с $n+1$ -мерным конфигурационным пространством. Воспользуемся интегралом энергии для уменьшения на 1 числа степеней свободы системы. Фазовое пространство, полученное после этой операции, есть CP^n , а симплектическая структура в нем совпадает с описанной выше формой Ω с точностью до множителя.

Еще один способ построения симплектической структуры на CP^n состоит в том, что это пространство можно представить как одну из орбит коприсоединенного представления группы Ли, а на каждой такой орбите всегда есть стандартная симплектическая структура (см. добавление 2, пункт А). В качестве группы Ли можно взять группу унитарных (сохраняющих эрмитову метрику) операторов в $n+1$ -мерном комплексном пространстве. Орбиты коприсоединенного представления в этом случае такие же, как и у присоединен-

ного. В присоединенном же представлении оператор отражения в гиперплоскости (меняющий знак первой координаты и оставляющий остальные) имеет своей орбитой $\mathbb{C}P^n$. Ибо оператор отражения в гиперплоскости однозначно определяется ортогональной ей комплексной прямой.

В. Симплектические структуры проективных алгебраических многообразий. Мы получаем теперь симплектическую структуру на любом комплексном подмногообразии M комплексного проективного пространства. А именно, пусть $j: M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — вложение комплексного многообразия M в комплексное проективное пространство. Риманова, эрмитова и симплектическая структуры на проективном пространстве индуцируют на M соответствующие структуры. Например, симплектическая структура на M задается формулой

$$\Omega_M = j^* \Omega.$$

Теорема. Дифференциальная форма Ω_M задает на многообразии M симплектическую структуру.

Доказательство. невырожденность 2-формы Ω_M следует из того, что M — комплексное подмногообразие. Действительно, квадратичная форма на TM_x

$$(\xi, \xi) = \Omega_M(\xi, i\xi)$$

положительно определена (она индуцирована римановой метрикой $\mathbb{C}P^n$). Следовательно, билинейная форма $(\xi, \eta) = \Omega_M(\xi, i\eta)$ невырождена. Значит невырождена и форма Ω_M . Замкнутость формы Ω_M следует из замкнутости формы Ω . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Как в комплексном проективном пространстве, так и на его комплексных подмногообразиях мы определили эрмитову структуру в касательных пространствах, мнимая часть которой является симплектической структурой.

Комплексное многообразие с эрмитовой метрикой, мнимая часть которой является замкнутой формой (т. е. симплектической структурой) называется *келеровым многообразием*, а его эрмитова метрика — *келеровой метрикой*. В геометрии келеровых многообразий получено много важных результатов, в частности они обладают замечательными топологическими свойствами (см., например, А. Вейль «Введение в теорию келеровых многообразий», ИЛ, 1961).

Все известные симплектические многообразия допускают келерову структуру. Однако неясно, какие из топологических свойств келеровых многообразий зависят лишь от симплектической структуры.

Задача 1. Вычислить симплектическую структуру Ω в аффинной карте $w = z_1 : z_0$ проективной прямой $\mathbb{C}P^1$.

Ответ. $\Omega = \frac{1}{\pi} \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, где $w = x + iy$.

Коэффициент в определении формы Ω выбран так, чтобы получить обычную ориентацию комплексной прямой $(dx \wedge dy)$ и чтобы интеграл формы Ω по всей проективной прямой был равен 1.

Задача 2. Докажите, что симплектическая структура Ω в аффинной карте $\omega_k = z_k z_0^{-1}$ ($k = 1, \dots, n$) проективного пространства $\mathbb{C}P^n = \{(z_0: z_1: \dots: z_n)\}$ задается формулой

$$\Omega = \frac{i}{2\pi} \frac{\sum_{0 \leq k < l \leq n} (\omega_k d\omega_l - \omega_l d\omega_k) \wedge (\bar{\omega}_k d\bar{\omega}_l - \bar{\omega}_l d\bar{\omega}_k)}{\sum_{k=0}^n (\omega_k \bar{\omega}_k)^2}.$$

З а м е ч а н и е. Дифференциальные формы на комплексном пространстве с комплексными значениями (например, $d\omega_k$ и $d\bar{\omega}_k$) определяются как комплексные линейные функции от касательных векторов; если $\omega_k = x_k + iy_k$, то

$$d\omega_k = dx_k + i dy_k, \quad d\bar{\omega}_k = dx_k - i dy_k.$$

Пространство таких форм в \mathbb{C}^n имеет комплексную размерность $2n$; \mathbb{C} -базис образуют, например, $2n$ форм $d\omega_k, d\bar{\omega}_k$ ($k = 1, \dots, n$), либо $2n$ форм dx_k, dy_k .

Внешнее умножение определяется обычным образом и подчиняется обычным правилам. Например,

$$d\omega \wedge d\bar{\omega} = (dx + i dy) \wedge (dx - i dy) = -2i dx \wedge dy.$$

Пусть f — вещественно-гладкая функция на \mathbb{C}^n (с комплексными, вообще говоря, значениями). Пример такой функции: $|w|^2 = \sum \omega_k \bar{\omega}_k$. Дифференциал функции f является комплексной 1-формой. Следовательно, его можно разложить по базису $d\omega_k, d\bar{\omega}_k$. Коэффициенты этого разложения называются частными производными «по ω_k » и «по $\bar{\omega}_k$ »:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial f}{\partial \bar{\omega}} d\bar{\omega}.$$

При вычислении внешних производных также удобно разделить дифференцирование d' по переменным ω и d'' — по переменным $\bar{\omega}$, так что $d = d' + d''$.

Например, для функции f

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega, \quad d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{\omega}} d\bar{\omega}.$$

Для дифференциальной 1-формы

$$\omega = \sum a_k d\omega_k + b_k d\bar{\omega}_k$$

операторы d' и d'' определяются аналогично:

$$d'\omega = \sum d'a_k \wedge d\omega_k + d'b_k \wedge d\bar{\omega}_k,$$

$$d''\omega = \sum d''a_k \wedge d\omega_k + d''b_k \wedge d\bar{\omega}_k,$$

Задача 3. Докажите, что симплектическая структура Ω в аффинной карте $(\omega_k = z_k z_0^{-1})$ проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ задается формулой

$$\Omega = \frac{i}{2\pi} d' d'' \ln \sum_{k=0}^n \omega_k \bar{\omega}_k.$$

ДОБАВЛЕНИЕ 4

КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ

На нечетномерном многообразии не может быть симплектической структуры. Аналогом симплектической структуры для нечетномерных многообразий является несколько менее симметричная, но тоже весьма замечательная структура — контактная.

Источником симплектических структур в механике являются фазовые пространства (т. е. кокасательные расслоения к конфигурационным многообразиям), на которых всегда есть каноническая симплектическая структура. Источником контактных структур являются многообразия контактных элементов конфигурационных пространств.

Контактным элементом к n -мерному гладкому многообразию в некоторой точке называется $n - 1$ -мерная плоскость, касающаяся многообразия в этой точке (т. е. $n - 1$ -мерное линейное подпространство n -мерного касательного пространства в этой точке).

Множество всех контактных элементов n -мерного многообразия имеет естественную структуру гладкого многообразия размерности $2n - 1$. Оказывается, на этом нечетномерном многообразии имеется замечательная дополнительная «контактная структура» (мы опишем, что это такое, ниже).

Многообразие контактных элементов риманова n -мерного многообразия тесно связано с $2n - 1$ -мерным многообразием единичных касательных векторов этого риманова n -мерного многообразия, или с $2n - 1$ -мерным многообразием уровня энергии материальной точки, движущейся по риманову многообразию по инерции. Контактные структуры в этих $2n - 1$ -мерных многообразиях тесно связаны с симплектической структурой в $2n$ -мерном фазовом пространстве точки (т. е. в кокасательном расслоении исходного риманова n -мерного многообразия).

А. Определение контактной структуры.

Определение. *Контактная структура* на многообразии — это гладкое поле касательных гиперплоскостей*), удовлетворя-

*) Гиперплоскостью в линейном пространстве называется подпространство, размерность которого на 1 ниже размерности пространства (т. е. множество нулевого уровня линейной функции, не равной нулю тождественно)

Касательная гиперплоскость — это гиперплоскость в касательном пространстве.

ищее некоторому условию невырожденности, которое будет сформулировано позже. Чтобы сформулировать это условие, посмотрим, как вообще может быть устроено поле гиперплоскостей в окрестности точки N -мерного многообразия.

Пример. Пусть $N = 2$. Тогда многообразие — это поверхность, а поле гиперплоскостей — поле прямых. Такое поле в окрестности точки устроено всегда одинаково и весьма просто, а именно так, как поле касательных к семейству параллельных прямых на плоскости. Точнее, одним из основных результатов локальной теории обыкновенных дифференциальных уравнений является возможность превратить любое гладкое поле касательных прямых на многообразии в поле касательных к семейству параллельных прямых евклидова пространства при помощи диффеоморфизма в достаточно малой окрестности любой точки многообразия.

Если $N > 2$, то гиперплоскость уже не является прямой, и дело обстоит значительно сложнее. Например, поле двумерных касательных плоскостей в обычном трехмерном пространстве не всегда можно диффеоморфно отобразить на поле параллельных плоскостей. Дело в том, что существуют такие поля касательных плоскостей, для которых невозможно провести «интегральную поверхность», т. е. такую поверхность, которая имела бы предписанную касательную плоскость в каждой своей точке.

Условие невырожденности поля гиперплоскостей, которое входит в определение контактной структуры, состоит в том, что поле гиперплоскостей должно быть максимально удалено от поля касательных к семейству гиперповерхностей. Чтобы измерять эту удаленность, да и вообще чтобы убедиться в существовании полей без интегральных гиперповерхностей, нам придется проделать некоторые построения и вычисления*).

Б. Условие интегрируемости Фробениуса. Рассмотрим какую-либо точку на N -мерном многообразии и попытаемся построить поверхность, проходящую через эту точку и касающуюся данного поля $N - 1$ -мерных плоскостей в каждой точке (интегральную поверхность).

С этой целью введем в окрестности рассматриваемой точки систему координат так, чтобы в самой точке одна координатная поверхность касалась плоскости поля. Эту плоскость мы будем называть горизонтальной плоскостью, а не лежащую в ней координатную ось — вертикальной.

Построение интегральной поверхности. Интегральная поверхность, если она существует, является вблизи

*) Начиная с этого места мы опускаем приставку «гипер». При желании можно считать, что мы находимся в трехмерном пространстве и гиперповерхности — это обычные поверхности. Многомерный случай аналогичен трехмерному.

начала координат графиком одной функции от $N - 1$ переменных. Чтобы ее построить, мы можем рассмотреть на горизонтальной плоскости какой-либо гладкий путь. Тогда вертикальные прямые над этим путем образуют двумерную поверхность (цилиндр), а наше поле плоскостей высекает на ней поле касательных прямых. Искомая интегральная поверхность, если она есть, пересекает цилиндр по интегральной кривой поля прямых, выходящей из начала координат. Такая интегральная кривая есть всегда, независимо от того, существует ли интегральная поверхность. Таким образом, мы можем строить интегральную поверхность над горизонтальной плоскостью, двигаясь по гладким кривым в последней.

При этом для того, чтобы из всех интегральных кривых получилась гладкая интегральная поверхность, нужно, чтобы результат нашего построения не зависел от пути, но определялся лишь его конечной точкой.

В частности, при обходе замкнутого пути в окрестности начала координат на горизонтальной плоскости интегральная кривая на цилиндре должна замкнуться.

Легко построить примеры полей плоскостей, для которых такого замыкания не происходит, и, следовательно, интегральная поверхность не существует. Такие поля плоскостей называются *неинтегрируемыми*.

Пример неинтегрируемого поля плоскостей. Чтобы задавать поля плоскостей и измерять количественно отклонение от замыкания, мы введем следующие обозначения.

Заметим прежде всего, что поле гиперплоскостей локально можно задавать дифференциальной 1-формой. Действительно, плоскость в касательном пространстве задает 1-форму, с точностью до умножения на отличную от нуля постоянную. Выберем эту постоянную так, чтобы значение формы на вертикальных координатных касательных векторах было равно 1.

Этому условию можно удовлетворить в некоторой окрестности начала координат, поскольку плоскость поля в нуле не содержит вертикального направления. Это условие определяет форму однозначно (по полю плоскостей).

Поле плоскостей в обычном трехмерном пространстве, не имеющее интегральных поверхностей, можно задать, например, 1-формой

$$\omega = x \, dy + dz,$$

где x и y — горизонтальные координаты, а z — вертикальная. Доказательство того, что это поле плоскостей неинтегрируемо, приведено ниже.

Построение 2-формы, измеряющей неинтегрируемость. С помощью формы, задающей поле, можно измерять

степень неинтегрируемости. Делается это при помощи следующей конструкции (рис. 236).

Рассмотрим пару векторов, выходящих из начала координат и лежащих в горизонтальной плоскости нашей координатной системы. Построим на них параллелограмм. Мы получим два пути из начала координат в противоположную вершину. Над каждым из этих двух путей можно построить интегральную кривую (двузвенную), как описано выше. В результате над противоположной началу вершиной параллелограмма возникнут, вообще говоря, две разные точки. Разность высот этих точек является функцией от нашей пары векторов. Эта функция кососимметрична и равна нулю, если равен нулю один из векторов. Следовательно, линейная часть ряда Тейлора этой функции пары векторов в нуле равна нулю, а квадратичная часть ее ряда Тейлора является билинейной кососимметричной формой на горизонтальной плоскости.

Если поле интегрируемо, то получившаяся 2-форма равна нулю. Поэтому эту 2-форму можно рассматривать как меру неинтегрируемости поля.

Пользуясь нашей системой координат, мы можем отождествить горизонтальную координатную плоскость с плоскостью поля, проходящей через начало координат. Таким образом, в результате нашего построения возникает 2-форма в самой плоскости поля.

Корректность определения 2-формы. Выше 2-форма построена при помощи координат. Однако значение нашей 2-формы на паре касательных векторов не зависит от системы координат, но лишь от той 1-формы, с помощью которой задано поле.

Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать следующее.

Теорема. *Определенная выше 2-форма на нулевом пространстве 1-формы ω совпадает с внешней производной последней $d\omega|_{\omega=0}$.*

Доказательство. Покажем, что разность высот двух точек, получающихся в результате наших двух движений по сторонам параллелограмма, совпадает с интегралом 1-формы ω по четырем сторонам параллелограмма с точностью до величин третьего порядка малости относительно сторон параллелограмма.

С этой целью заметим, что высота подъема интегральной кривой на любом пути длины ε , выходящем из начала координат, имеет порядок ε^2 , поскольку в начале координат плоскость поля горизонтальна. Следовательно, интегралы 2-формы $d\omega$ по всем четырем вертикальным площадкам над сторонами параллелограмма, ограниченными интегральными кривыми и горизонтальной плоскостью, имеют порядок ε^3 , если стороны порядка ε .

Интегралы формы ω по интегральным кривым точно равны нулю. Стало быть, по формуле Стокса приращение высоты вдоль интегральной кривой,

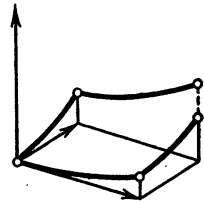


Рис. 236. Интегральные кривые, построенные по неинтегрируемому полю плоскостей.

лежащей над какой-либо из сторон параллелограмма, равно интегралу 1-формы ω вдоль этой стороны с точностью до величин третьего порядка малости.

Теперь доказываемая теорема вытекает непосредственно из определения внешней производной.

Остается еще произвол в выборе 1-формы ω , с помощью которой построена наша 2-форма. А именно, форма ω определена полем плоскостей лишь с точностью до умножения на нигде не образующуюся в нуль функцию f . Иными словами, мы могли бы начинать с формы $f\omega$. Тогда мы пришли бы к 2-форме

$$d f \omega = f d \omega + d f \wedge \omega,$$

которая на нашей плоскости отличается от 2-формы $d\omega$ умножением на отличное от нуля число $f(0)$.

Таким образом, *построенная 2-форма на плоскости поля определена инвариантно с точностью до умножения на отличную от нуля постоянную.*

Условие интегрируемости поля плоскостей.

Теорема. Если поле гиперплоскостей интегрируемо, то построенная выше 2-форма в плоскости поля равна нулю. Обратное, если построенная в каждой плоскости поля 2-форма равна нулю, то поле интегрируемо.

Первое утверждение теоремы очевидно по построению 2-формы. Доказательство второго утверждения можно провести в точности теми же рассуждениями, с помощью которых мы доказывали коммутативность фазовых потоков, для которых равна нулю скобка Пуассона полей скоростей. Можно и просто сослаться на эту коммутативность, применяя ее к интегральным кривым, возникающим над прямыми координатных направлений в горизонтальной плоскости.

Теорема. Условие интегрируемости поля плоскостей

$$d\omega = 0 \text{ при } \omega = 0$$

эквивалентно следующему условию Фробениуса:

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим значение выписанной 3-формы на каких-нибудь трех разных координатных векторах. Из них вертикальным может быть лишь один вектор. Поэтому из всех слагаемых, входящих в определение значения внешнего произведения на трех векторах, отличным от нуля может быть лишь одно, равное произведению значения формы ω на вертикальном векторе на значение формы $d\omega$ на паре горизонтальных векторов. Если заданное формой поле интегрируемо, то второй сомножитель равен нулю, и, следовательно, наша 3-форма равна нулю на всех вообще тройках векторов.

Обратно, если 3-форма равна нулю для любых векторов, то она равна нулю для любой тройки координатных векторов, один из которых вертикален, а два горизонтальны. Значение 3-формы на такой тройке равно произведению значения ω на вертикальном векторе на значение $d\omega$ на паре горизонтальных. Первый сомножитель не нуль, значит, второй нуль, и, значит, форма $d\omega$ на плоскости поля равна нулю, ч.т.д.

В. Невырожденные поля гиперплоскостей.

Определение. Поле гиперплоскостей называется *невырожденным в точке*, если ранг 2-формы в $d\omega|_{\omega=0}$ в плоскости поля, проходящей через эту точку, равен размерности плоскости.

Это значит, что для всякого ненулевого вектора нашей плоскости должен найтись другой вектор в плоскости так, что значение 2-формы для этой пары векторов отлично от нуля.

Определение. Поле плоскостей называется *невырожденным на многообразии*, если оно невырождено в каждой точке многообразия.

Заметим, что на четномерном многообразии не может быть невырожденного поля гиперплоскостей. Действительно, на таком многообразии гиперплоскость нечетномерна, а ранг всякой кососимметричной билинейной формы в нечетномерном пространстве меньше размерности пространства (см. § 44).

На нечетномерных многообразиях невырожденные поля плоскостей бывает.

Пример. Рассмотрим евклидово пространство размерности $2m+1$ с координатами x, y, z (где x и y — векторы m -мерных пространств, а z — число). 1-форма

$$\omega = x dy + dz$$

задает поле гиперплоскостей. Плоскость поля, проходящая через начало координат, имеет уравнение $dz=0$. Координатами в этой гиперплоскости можно считать x и y . Следовательно, наша 2-форма в плоскости поля записывается в виде

$$d\omega|_{\omega=0} = dx \wedge dy = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_m \wedge dy_m.$$

Ранг этой формы равен $2m$, поэтому наше поле невырождено в начале координат, а значит, и в его окрестности (в действительности это поле плоскостей невырождено во всех точках пространства).

Теперь мы, наконец, можем дать определение контактной структуры на многообразии: *контактной структурой на многообразии называется невырожденное поле касательных гиперплоскостей.*

Г. Многообразие контактных элементов. Термин «контактная структура» объясняется тем, что такая структура всегда есть на многообразии контактных элементов гладкого многообразия.

Рассмотрим n -мерное гладкое многообразие.

Определение. Гиперплоскость (размерности $n-1$), касающаяся многообразия в какой-либо точке, называется *контактным элементом*, а эта точка — *точкой контакта*.

Множество всех контактных элементов n -мерного многообразия само имеет структуру гладкого многообразия размерности $2n-1$.

В самом деле, множество всех контактных элементов с фиксированной точкой контакта — это множество всех $n-1$ -мерных подпространств n -мерного

линейного пространства, т. е. проективное пространство размерности $n-1$. Чтобы задать контактный элемент, нужно, следовательно, задать n координат точки контакта и еще $n-1$ координату, определяющую точку $n-1$ -мерного проективного пространства, итого $2n-1$ координату.

Многообразию всех контактных элементов n -мерного многообразия является пространством расслоения, база которого — наше n -мерное многообразие, а слой — проективное пространство размерности $n-1$.

Теорема. *Расслоение контактных элементов является проективизацией кокасательного расслоения: его можно получить из кокасательного расслоения, заменив каждое кокасательное линейное n -мерное пространство $n-1$ -мерным проективным пространством (точка которого — прямая, проходящая через начало координат в кокасательном пространстве).*

В самом деле, контактный элемент задается 1-формой на кокасательном пространстве, для которой этот элемент является нулевым множеством уровня. Эта форма не нулевая, и она определена с точностью до умножения на отличное от нуля число.

Но форма на касательном пространстве есть вектор кокасательного пространства. Поэтому ненулевая форма на касательном пространстве, определенная с точностью до умножения на не равное нулю число, есть ненулевой вектор кокасательного пространства, определенный с точностью до умножения на не равное нулю число, т. е. точка проективизации кокасательного пространства.

Контактная структура на многообразии контактных элементов.

В кокасательном пространстве к многообразию контактных элементов имеется замечательная гиперплоскость. Она называется *контактной гиперплоскостью* и определяется следующим образом.

Зафиксируем точку $2n-1$ -мерного многообразия контактных элементов на n -мерном многообразии. Эту точку мы можем рассматривать как $n-1$ -мерную плоскость, касательную к исходному n -мерному многообразию.

О п р е д е л е н и е. Касательный вектор к многообразию контактных элементов в фиксированной точке принадлежит *контактной гиперплоскости*, если его проекция на n -мерное многообразие лежит в той $n-1$ -мерной плоскости, которая и является фиксированной выше точкой многообразия контактных элементов.

Иными словами, *перемещение контактного элемента касается контактной гиперплоскости, если скорость точки касания принадлежит этому контактному элементу; поворачиваться же элемент может как угодно.*

П р и м е р. Возьмем какое-либо подмногообразие в нашем n -мерном многообразии и рассмотрим все касательные к нему $n-1$ -мерные плоскости (т. е. контактные элементы). Все такие контактные элементы образуют в $2n-1$ -мерном многообразии всех вообще контактных элементов гладкое подмногообразие. Размерность

этого подмногообразия равна $n - 1$, какова бы ни была размерность исходного подмногообразия (которое может быть $n - 1$ -мерным, а может иметь и меньшую размерность вплоть до случая кривой и даже до точки).

Полученное $n - 1$ -мерное подмногообразие $2n - 1$ -мерного многообразия всех контактных элементов в каждой своей точке касается поля контактных гиперплоскостей (по определению контактной гиперплоскости). Таким образом, поле контактных $2n - 2$ -мерных гиперплоскостей имеет $n - 1$ -мерные интегральные многообразия.

Задача. Существуют ли у этого поля плоскостей интегральные многообразия большей размерности?

Ответ. Нет.

Задача. Можно ли задать поле контактных гиперплоскостей дифференциальной 1-формой на многообразии всех контактных элементов?

Ответ. Нет, даже если исходное n -мерное многообразие — евклидово пространство (например, обычная двумерная плоскость).

Ниже мы докажем, что поле контактных гиперплоскостей на $2n - 1$ -мерном многообразии всех контактных элементов n -мерного многообразия невырождено.

Доказательство проводится с помощью симплектической структуры кокасательного расслоения.

Дело в том, что многообразие контактных элементов связано простой конструкцией с пространством кокасательного расслоения (проективизацией которого является многообразие контактных элементов): При чем невырожденность поля контактных плоскостей проективизированного расслоения тесно связана с невырожденностью 2-формы, задающей симплектическую структуру кокасательного расслоения.

Конструкцию, о которой идет речь, мы проведем ниже в несколько более общей обстановке. Именно, по всякому нечетномерному многообразию с контактной структурой можно построить его «симплектизацию» — симплектическое многообразие, число измерений которого на 1 больше. Взаимоотношения между этими двумя многообразиями — контактным нечетномерным и симплектическим четномерным — такие же, как между многообразием контактных элементов с его контактной структурой и кокасательным расслоением с его симплектической структурой.

Д. Симплектизация контактного многообразия. Рассмотрим произвольное контактное многообразие, т. е. многообразие нечетной размерности N с невырожденным полем касательных гиперплоскостей (четной размерности $N - 1$). Эти плоскости мы будем называть *контактными плоскостями*. Каждая контактная плоскость касается контактного многообразия в одной точке. Эту точку мы будем называть *точкой контакта*.

Определение. *Контактной формой* мы будем называть всякую такую линейную форму на касательном пространстве в точке

контактного многообразия, что ее множеством нулей является контактная плоскость.

Следует подчеркнуть, что контактная форма — не дифференциальная форма, а алгебраическая линейная форма на одном касательном пространстве.

Определение. Симплектизацией контактного многообразия называется множество всех контактных форм на контактном многообразии, снабженное структурой симплектического многообразия, определенной ниже.

Заметим прежде всего, что множество всех контактных форм на контактном многообразии имеет естественную структуру гладкого многообразия четной размерности $N + 1$. А именно, мы можем рассматривать множество всех контактных форм как пространство расслоения над исходным контактным многообразием. Проекция на базу — это отображение, сопоставляющее контактной форме точку контакта.

Слоем этого расслоения является множество контактных форм с общей точкой контакта. Все такие формы получаются друг из друга умножением на отличное от нуля число (так как они задают одну и ту же контактную плоскость). Таким образом, слой нашего расслоения одномерен: это прямая без точки.

Заметим также, что на многообразии всех контактных форм действует группа отличных от нуля вещественных чисел с операцией умножения. А именно, произведение контактной формы на ненулевое число есть снова контактная форма. При этом группа действует на нашем расслоении, оставляя каждый слой на месте (при умножении формы на число точка контакта не меняется).

Замечание. До сих пор мы нигде не использовали невырожденность поля плоскостей. Невырожденность нужна лишь для того, чтобы получающееся при симплектизации многообразие было симплектическим.

Пример. Рассмотрим многообразие (размерности $2n - 1$) всех контактных элементов n -мерного гладкого многообразия. На многообразии элементов есть поле гиперплоскостей (которые мы определили выше и назвали контактными). Следовательно, можно симплектизовать многообразие контактных элементов.

В результате симплектизации получается $2n$ -мерное многообразие. Это многообразие есть пространство кокасательного расслоения исходного n -мерного многообразия без нулевых векторов. При этом действие мультипликативной группы вещественных чисел на слое сводится к умножению на числа векторов кокасательного пространства.

На кокасательном расслоении есть замечательная 1-форма « pdq ». Аналогичная 1-форма имеется и на любом многообразии, полученном симплектизацией из контактного многообразия.

Каноническая 1-форма на пространстве-симплектизации.

Определение. *Канонической 1-формой* на пространстве-симплектизации контактного многообразия называется дифференциальная 1-форма α , значение которой на каждом векторе ξ , касательном к пространству-симплектизации в некоторой точке p (рис. 237), равно значению на проекции вектора ξ в касательную плоскость к контактному многообразию той 1-формы на этой касательной плоскости, которой является точка p :

$$\alpha(\xi) = p(\pi_*\xi),$$

где π — проекция пространства-симплектизации на контактное многообразие.

Теорема. *Внешняя производная канонической 1-формы на пространстве-симплектизации контактного многообразия является невырожденной 2-формой.*

Следствие. *Пространство-симплектизация контактного многообразия имеет симплектическую структуру, которая канонически (т. е. однозначно, без всякого произвола) определена контактной структурой исходного нечетномерного многообразия.*

Доказательство. Ввиду локальности утверждения теоремы его достаточно доказать в малой окрестности точки многообразия. В малой окрестности точки на контактном многообразии поле контактных плоскостей можно задать дифференциальной формой ω на контактном многообразии. Зафиксируем такую 1-форму ω .

Тем самым мы представили часть пространства-симплектизации над рассматриваемой окрестностью точки контактного многообразия в виде прямого произведения этой окрестности и прямой без точки.

А именно, паре (x, λ) , где x — точка контактного многообразия, а λ — отличное от нуля число, мы сопоставляем контактную форму, которую задает дифференциальная 1-форма $\lambda\omega$ в касательном пространстве в точке x .

Таким образом, в рассматриваемой части симплектизации определена функция λ , значения которой — отличные от нуля числа. Следует подчеркнуть, что λ является лишь локальной координатой на симплектизованном многообразии и что эта координата определена не канонически; она зависит от выбора дифференциальной 1-формы ω .

Каноническая 1-форма α в наших обозначениях записывается в виде

$$\alpha = \lambda\pi^*\omega$$

и не зависит от выбора ω .

Внешняя производная 1-формы α имеет, следовательно, вид

$$d\alpha = d\lambda \wedge \pi^*\omega + \lambda\pi^*d\omega.$$

Докажем, что 2-форма $d\alpha$ невырождена, т. е. что для любого вектора ξ , касательного к симплектизации, найдется такой вектор η , что $d\alpha(\xi, \eta) \neq 0$.

Выделим среди векторов, касательных к симплектизации, векторы следующих типов. Мы назовем вектор ξ *вертикальным*, если он касается слоя, т. е. если $\pi_*\xi = 0$. Мы назовем вектор ξ *горизонтальным*, если он касается поверхности уровня функции λ , т. е. если $d\lambda(\xi) = 0$. Мы назовем вектор ξ *контактным*,

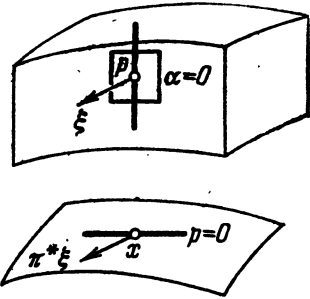


Рис. 237. Симплектизация контактного многообразия.

если его проекция на контактное многообразие лежит в контактной плоскости, т. е. если $\omega(\pi_*\xi) = 0$ (иными словами, если $\alpha(\xi) = 0$).

Вычислим значение формы $d\alpha$ на паре векторов ξ, η :

$$d\alpha(\xi, \eta) = (d\lambda \wedge \pi^*\omega)(\xi, \eta) + (\lambda\pi^*d\omega)(\xi, \eta).$$

Предположим, что вектор ξ не контактный. Возьмем в качестве η ненулевой вертикальный вектор, так что $\pi_*\eta = 0$. Тогда второе слагаемое равно нулю, а первое равно

$$-d\lambda(\eta)\omega(\pi_*\xi)$$

и отлично от нуля, так как η — ненулевой вертикальный вектор, а ξ не контактный. Итак, если ξ не контактный вектор, то мы нашли η , для которого $d\alpha(\xi, \eta) \neq 0$.

Предположим, что вектор ξ контактный, невертикальный. Тогда возьмем в качестве η любой контактный вектор. Теперь первое слагаемое целиком обращается в нуль, а второе (и значит, вся сумма) сводится к $\lambda d\omega(\pi_*\xi, \pi_*\eta)$. Поскольку вектор ξ не вертикальный, то вектор $\pi_*\xi$, лежащий в контактной плоскости, отличен от нуля. Но 2-форма $d\omega$ в контактной плоскости невырождена (по определению контактной структуры). Значит, существует такой контактный вектор η , что $d\omega(\pi_*\xi, \pi_*\eta) \neq 0$. Поскольку $\lambda \neq 0$, мы нашли вектор η , для которого $d\alpha(\xi, \eta) \neq 0$.

Наконец, если вектор ξ — вертикальный ненулевой, то в качестве η можно взять любой неконтактный вектор. Теорема доказана.

Замечание. Конструкции 1-формы α и 2-формы $d\alpha$ проходят для произвольного многообразия с полем гиперплоскостей и не зависят от условий невырожденности. Однако 2-форма $d\alpha$ будет определять симплектическую структуру лишь в случае, когда поле плоскостей было невырожденным.

Доказательство. Предположим, что поле вырождено, т. е. что существует такой ненулевой вектор ξ' в плоскости поля, что $d\omega(\xi', \eta') = 0$ для всех векторов η' этой плоскости. При таком ξ' величина $d\omega(\xi', \eta')$ как функция от η' является линейной формой, тождественно равной нулю на плоскости поля. Следовательно, существует такое не зависящее от η' число μ , что

$$d\omega(\xi', \eta') = \mu\omega(\eta')$$

уже для всех векторов η' касательного пространства.

Возьмем теперь в качестве ξ такой касательный вектор к симплектизованному многообразию, для которого $\pi_*\xi = \xi'$. Такой вектор ξ определен с точностью до прибавления вертикального слагаемого, и мы покажем, что при надлежащем выборе этого слагаемого будет

$$d\alpha(\xi, \eta) = 0 \text{ для всех } \eta$$

Действительно, первое слагаемое формулы для $d\alpha$ равно $d\lambda(\xi)\omega(\pi_*\eta)$ (поскольку $\omega(\pi_*\xi) = 0$). Второе слагаемое равно $\lambda d\omega(\pi_*\xi, \pi_*\eta) = \lambda\mu\omega(\pi_*\eta)$. Вертикальную составляющую вектора ξ выберем так, чтобы $d\lambda(\xi) = -\lambda\mu$. Тогда вектор ξ будет косоортогонален всем векторам η .

Итак, если $d\alpha$ — симплектическая структура, то исходное поле гиперплоскостей — контактная структура, и выделенное выше утверждение доказано.

Следствие. Поле контактных гиперплоскостей задает на многообразии всех контактных элементов любого гладкого многообразия контактную структуру.

Доказательство. Симплектизация $2n - 1$ -мерного многообразия всех контактных элементов на n -мерном гладком многообразии, построенная по полю $2n - 2$ -мерных контактных плоскостей, есть по построению пространство кокасательного расслоения исходного n -мерного многообразия без нулевых кокасательных векторов. Каноническая 1-форма α на симплектизации есть, согласно ее определению, та самая 1-форма на кокасательном расслоении, которую мы назвали « $p dq$ » и которая лежит в основе гамильтоновой механики (см. § 37). Ее производная $d\alpha$ есть, следовательно, форма « $dp \wedge dq$ », задающая обычную симплектическую структуру фазового пространства. Стало быть, форма $d\alpha$ не вырождена. Значит, по предыдущему замечанию, поле контактных гиперплоскостей не вырождено. Следствие доказано.

Е. Контактные диффеоморфизмы и векторные поля.

Определение. Диффеоморфизм контактного многообразия на себя называется *контактным*, если он сохраняет контактную структуру, т. е. переводит каждую плоскость задающего структуру поля гиперплоскостей в плоскость того же поля.

Пример. Рассмотрим $2n - 1$ -мерное многообразие контактных элементов n -мерного гладкого многообразия с его обычной контактной структурой. Каждому контактному элементу можно приписать «положительную сторону», выбрав одну из половин, на которые этот элемент делит касательное пространство к n -мерному многообразию.

Контактный элемент с выбранной стороной мы будем называть (*транссервально*) *ориентированным контактными элементом*.

Все ориентированные контактные элементы на нашем n -мерном многообразии образуют $2n - 1$ -мерное гладкое многообразие с естественной контактной структурой (оно двулистно покрывает многообразие обычных неориентированных контактных элементов).

Предположим теперь, что на исходном n -мерном многообразии дана риманова метрика. Тогда на многообразии ориентированных контактных элементов возникает «геодезический поток»^{*}). Преобразование за время t в этом потоке определяется так. Выпустим из точки контакта контактного элемента геодезическую, ортогональную ему и направленную в сторону, ориентирующую элемент. В течение времени t будем двигать точку контакта вдоль геодезической, оставляя элемент ортогональным геодезической. Через время t получим новый ориентированный элемент. Мы определили *геодезический поток ориентированных контактных элементов*.

Теорема. *Геодезический поток ориентированных контактных элементов состоит из контактных диффеоморфизмов.*

^{*}) Строго говоря, здесь нужно потребовать, чтобы риманово многообразие было полным, т. е. геодезические продолжались неограниченно.

Доказательство этой теоремы не приводится, так как она есть не что иное, как сформулированный в новых терминах принцип Гюйгенса (см. § 46).

Определение. Векторное поле на контактном многообразии называется *контактным*, если оно является полем скоростей однопараметрической (локальной) группы контактных диффеоморфизмов.

Теорема. Скобка Пуассона контактных векторных полей является контактным векторным полем. Контактные векторные поля образуют подалгебру в алгебре Ли всех гладких векторных полей на контактном многообразии.

Доказательства непосредственно вытекают из определений.

Ж. Симплектизация контактных диффеоморфизмов и полей. По каждому контактному диффеоморфизму контактного многообразия каноническим образом строится симплектический диффеоморфизм его симплектизации.

Этот симплектический диффеоморфизм коммутирует с действием мультипликативной группы вещественных чисел на симплектизованном многообразии и определяется следующей конструкцией.

Напомним, что точкой симплектизованного многообразия является контактная форма на исходном контактном многообразии.

Определение. *Образом контактной формы* p с точкой контакта x под действием контактного диффеоморфизма f контактного многообразия на себя называется форма

$$f_1 p = (f^* p)_{(x)}^{-1} p.$$

Попросту говоря, мы переносим форму p из касательного пространства в точке x в касательное пространство в точке $f(x)$ при помощи диффеоморфизма f (производная которого в точке x устанавливает изоморфизм между этими двумя касательными пространствами).

Форма $f_1 p$ контактная, ибо диффеоморфизм f контактный.

Теорема. *Определенное выше отображение f_1 симплектизации контактного многообразия в себя является симплектическим диффеоморфизмом, коммутирующим с действием мультипликативной группы вещественных чисел и сохраняющим каноническую 1-форму на симплектизации.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из того, что каноническая 1-форма, симплектическая 2-форма и действие группы вещественных чисел определены самой контактной структурой (при их построении не использовались координаты или иные неинвариантные средства), а диффеоморфизм f сохраняет контактную структуру. Из этого следует, что f_1 переводит в себя все то, что инвариантно построено по контактной структуре, в частности 1-форму α , ее производную $d\alpha$ и действие группы, ч. т. д.

Теорема. *Всякий симплектический диффеоморфизм симплектизации контактного многообразия, коммутирующий с действием мультипликативной группы: 1) проектируется на исходное кон-*

тактное многообразие в виде контактного диффеоморфизма;
 2) *сохраняет каноническую 1-форму α .*

Доказательство. Всякий диффеоморфизм, коммутирующий с действием мультипликативной группы, проектируется в некоторый диффеоморфизм контактного многообразия. Чтобы доказать, что этот диффеоморфизм контактный, достаточно доказать второе утверждение теоремы (так как в контактную плоскость проектируются те и только те векторы ξ , для которых $\alpha(\xi) = 0$).

Для доказательства второго утверждения выразим интеграл формы α по любому пути γ через симплектическую структуру $d\alpha$:

$$\int_{\gamma} \alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma} \int_{\sigma} d\alpha,$$

где 2-цепь $\sigma(\epsilon)$ получена из γ умножением на всевозможные числа отрезка $[\epsilon, 1]$. В границу 2-цепи σ входят, кроме γ , два вертикальных отрезка и путь $-\epsilon\gamma$. Интегралы формы α по вертикальным отрезкам равны нулю, а интеграл по $\epsilon\gamma$ стремится к нулю вместе с ϵ .

Теперь из инвариантности 2-формы $d\alpha$ и коммутирования нашего диффеоморфизма F с умножением на числа следует, что для любого пути γ

$$\int_{F\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \alpha,$$

и, значит, диффеоморфизм F сохраняет 1-форму α , ч. т. д.

Определение. *Симплектизация контактного векторного поля* определяется следующей конструкцией. Рассматриваем поле как поле скоростей однопараметрической группы контактных диффеоморфизмов. Симплектизируем диффеоморфизмы. Получаем однопараметрическую группу симплектических диффеоморфизмов. Рассматриваем поле скоростей этой группы. Оно и называется симплектизацией исходного контактного поля.

Теорема. *Симплектизация контактного векторного поля есть гамильтоново векторное поле. Гамильтониан можно выбрать однородным первой степени относительно действия мультипликативной группы вещественных чисел:*

$$H(\lambda x) = \lambda H(x).$$

Обратно, всякое гамильтоново поле на симплектизованном контактном многообразии, имеющее однородный степени 1 гамильтониан, проектируется на исходное контактное многообразие в виде контактного векторного поля.

Доказательство. Гамильтоновость симплектизованного контактного поля следует из симплектичности симплектизации контактных диффеоморфизмов. Однородность приращений гамильтониана следует из однородности симплектизованных диффеоморфизмов (из коммутирования с умножением на λ). Таким образом, первое утверждение теоремы вытекает из теоремы о симплектизации контактных диффеоморфизмов.

Вторая часть вытекает таким же образом из теоремы об однородных симплектических диффеоморфизмах, и теорема доказана.

Следствие. Симплектизация векторных полей является изоморфным отображением алгебры Ли контактных векторных полей на алгебру Ли всех локально гамильтоновых векторных полей с однородными гамильтонианами степени 1.

Доказательство очевидно.

3. Теорема Дарбу для контактных структур. Теорема Дарбу — это теорема локальной единственности контактной структуры. Ее можно сформулировать в любой из следующих трех форм.

Теорема. Все контактные многообразия одинаковой размерности локально контактно диффеоморфны (т. е. существует диффеоморфизм достаточно малой окрестности любой точки одного контактного многообразия на окрестность любой точки другого, переводящий отмеченную точку первой окрестности в отмеченную точку второй и поле плоскостей в первой окрестности в поле плоскостей второй).

Теорема. Всякое контактное многообразие размерности $2m-1$ локально контактно диффеоморфно многообразию контактных элементов m -мерного пространства.

Теорема. Всякая дифференциальная 1-форма, задающая на многообразии размерности $2n+1$ невырожденное поле гиперплоскостей, записывается в некоторой локальной системе координат в «нормальном виде»

$$\omega = x dy + dz,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ и z — локальные координаты.

Ясно, что первые две теоремы вытекают из третьей. Ее же мы выведем из аналогичной теоремы Дарбу о нормальном виде 2-форм, задающих симплектические структуры (см. § 43).

Доказательство теоремы Дарбу. Симплектизуем наше многообразие. На полученном $2n+2$ -мерном симплектическом многообразии определены каноническая 1-форма α , невырожденная 2-форма $d\alpha$, проекция π на исходное контактное многообразие и вертикальное направление в каждой точке.

Заданная на контактном многообразии дифференциальная 1-форма ω определяет в каждой точке контактную форму. Все эти контактные формы образуют в симплектическом многообразии $2n+1$ -мерное подмногообразие. Проекция π диффеоморфно отображает это подмногообразие на исходное контактное многообразие, а вертикали пересекают это подмногообразие под ненулевым углом.

Рассмотрим точку на построенной в симплектическом многообразии поверхности, лежащую над интересующей нас точкой контактного многообразия. В симплектическом многообразии можно выбрать вблизи этой точки локальную систему координат так, чтобы

$$d\alpha = dp_0 \wedge dq_0 + \dots + dp_n \wedge dq_n$$

и чтобы при этом координатная поверхность $p_0 = 0$ совпадала с нашим $2n+1$ -мерным многообразием (см. § 43, где при доказательстве симплектической теоремы Дарбу первая координата выбирается произвольно).

Заметим теперь, что 1-форма $p_0 dq_0 + \dots + p_n dq_n$ имеет производной $d\alpha$. Значит, локально

$$\alpha = p_0 dq_0 + \dots + p_n dq_n + dw,$$

где ω — некоторая функция, которую можно считать равной нулю в начале координат. В частности, на поверхности $p_0=0$ форма α принимает вид

$$\alpha|_{p_0=0} = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n + d\omega.$$

Проекция π позволяет перенести координаты $p_1, \dots, p_n; q_0; q_1, \dots, q_n$ и функцию ω на контактное многообразие. Точнее, мы определим функции x, y, z формулами

$$x_i(\pi A) = p_i(A), \quad y_i(\pi A) = q_i(A), \quad z(\pi A) = \omega(A),$$

где A — точка на поверхности $p_0=0$.

Тогда мы получаем

$$\omega = x dy + dz,$$

и остается лишь проверить, что функции $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z)$ образуют координатную систему. Для этого достаточно проверить, что отлична от нуля частная производная функции ω по q_0 . Иными словами, нужно проверить, что 1-форма α на векторе координатного направления q_0 отлична от нуля. Последнее эквивалентно отличию от нуля 2-формы $d\alpha$ на паре векторов: координатном направлении q_0 и вертикальном.

Но вектор координатного направления q_0 косоортогонален всем векторам координатной плоскости $p_0=0$. Если бы он был вдобавок косоортогонален и вертикальному вектору, то он был бы косоортогонален всем векторам вообще, вопреки невырожденности формы $d\alpha$. Итак, $\partial\omega/\partial q_0 \neq 0$, и теорема доказана.

И. Контактные гамильтонианы. Предположим, что контактная структура контактного многообразия задается дифференциальной 1-формой ω , и что эта форма фиксирована.

Определение. ω -вложением контактного многообразия в свою симплектизацию называется отображение, сопоставляющее точке контактного многообразия сужение формы ω на касательную плоскость в этой точке.

Определение. Контактной функцией Гамильтона контактного векторного поля на контактном многообразии с фиксированной 1-формой ω называется функция K на контактном многообразии, значение которой в каждой точке равно значению однородного гамильтониана H симплектизации поля в образе данной точки при ω -вложении:

$$K(A) = H(\omega|_A).$$

Теорема. Контактная функция Гамильтона K контактного векторного поля X на контактном многообразии с выбранной 1-формой ω равна значению формы ω на этом контактном поле:

$$K = \omega(X).$$

Доказательство. Воспользуемся выражением для приращения обычной функции Гамильтона вдоль пути через векторное поле и контактную структуру (§ 48, В).

Для этого проведем через ту точку B в симплектизации, в которой мы хотим вычислить функцию Гамильтона, вертикальный отрезок $\{\lambda B\}$, $0 < \lambda \leq 1$. Сдвиги этого отрезка за малое время τ под действием симплектизации потока,

заданного нашим полем X , заполняют некоторую двумерную полосу $\sigma(\tau)$. Значение гамильтониана в точке B равно пределу

$$H(B) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int \int_{\sigma(\tau)} d\alpha,$$

так как $H(\lambda B) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Но интеграл формы $d\alpha$ по полоске равен интегралу 1-формы α по краю, образованному траекторией точки B (остальные части границы дают нулевые интегралы). Поэтому двойной интеграл равен просто интегралу 1-формы α по отрезку траектории, а предел — значению 1-формы α на векторе скорости Y симплектизованного поля. Стало быть, $K(\pi B) = H(B) = \alpha(Y) = \omega(X)$, что и требовалось доказать.

К. Вычислительные формулы. Предположим теперь, что мы пользуемся координатами теоремы Дарбу, в которых форма ω имеет нормальный вид

$$\omega = x dy + dz, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Задача. Найти компоненты контактного поля с данной контактной функцией Гамильтона $K = K(x, y, z)$.

Ответ. Уравнения контактного потока имеют вид*

$$\begin{cases} \dot{x} = -K_y + xK_z, \\ \dot{y} = K_x, \\ \dot{z} = K - xK_x. \end{cases}$$

Решение. Точку симплектизации можно задать $2n+2$ числами x_i, y_i, z, λ , где (x, y, z) — координаты точки контактного многообразия, а λ — число, на которое надо умножить ω , чтобы получить данную точку симплектизованного пространства.

В этих координатах $\alpha = \lambda x dy + \lambda dz$. Поэтому в системе координат p, q , где

$$\begin{aligned} p &= (p, p_0), & p &= \lambda x, & p_0 &= \lambda, \\ q &= (q, q_0), & q &= y, & q_0 &= z, \end{aligned}$$

форма α принимает стандартный вид:

$$\alpha = p dq, \quad d\alpha = dp \wedge dq.$$

Действие T_μ мультипликативной группы свелось теперь к умножению p на число:

$$T_\mu(p, q) = (\mu p, q).$$

Контактный гамильтониан K выражается через обычный гамильтониан $H = H(p, q, p_0, q_0)$ по формуле

$$K(x, y, z) = H(x, y, 1, z).$$

Функция H однородна первой степени по p . Поэтому частные производные K в точке (x, y, z) связаны с производными H в точке $(p=x, p_0=1, q=y, q_0=z)$ соотношениями

$$\begin{aligned} H_q &= K_y, & H_{q_0} &= K_z, \\ H_p &= K_x, & H_{p_0} &= K - xK_x. \end{aligned}$$

Уравнения Гамильтона с функцией Гамильтона H имеют поэтому в рассматриваемой точке вид

$$\begin{aligned} \dot{x} + x\dot{\lambda} &= -K_y, & \dot{\lambda} &= -K_z, \\ \dot{y} &= K_x, & \dot{z} &= K - xK_x, \end{aligned}$$

откуда и получается приведенный выше ответ.

Задача. Найти контактный гамильтониан скобки Пуассона контактных полей с контактными гамильтонианами K и K' .

Ответ. $(K, K') + K_z \mathcal{E}K' - K'_z \mathcal{E}K$, где скобкой обозначена скобка Пуассона по переменным x и y , а \mathcal{E} — оператор Эйлера, $\mathcal{E}F = F - xF_x$.

Решение. В обозначениях решения предыдущей задачи требуется выразить обычную скобку Пуассона однородных гамильтонианов H, H' в точке $(p = x, p_0 = 1, q = y, q_0 = z)$ через контактные гамильтонианы K, K' . Имеем

$$(H, H') = H_q H'_p - H_p H'_q = H_q H'_p - H_p H'_q + H_{q_0} H'_{p_0} - H_{p_0} H'_{q_0}.$$

Подставляя значения производных из решения предыдущей задачи, находим в рассматриваемой точке

$$(H, H') = K_y K'_x - K_x K'_y + K_z (K' - xK'_x) - K'_z (K - xK_x).$$

Л. Лежандровы многообразия. Лагранжевым подмногообразиям симплектического фазового пространства в контактном случае соответствует интересный класс многообразий, которые можно назвать *лежандровыми*, так как они тесно связаны с преобразованием Лежандра.

Определение. *Лежандровым подмногообразием* контактного $2n + 1$ -мерного многообразия называется n -мерное интегральное многообразие поля контактных плоскостей.

Иными словами, это интегральные многообразия наивысшей размерности, которая возможна для интегральных многообразий невырожденного поля плоскостей.

Пример 1. Множество всех контактных элементов, касающихся подмногообразия любой размерности в m -мерном многообразии, является лежандровым $m - 1$ -мерным подмногообразием $2m - 1$ -мерного контактного многообразия всех вообще контактных элементов.

Пример 2. Множество всех касательных плоскостей к графику функции $f = \varphi(x)$ в $n + 1$ -мерном евклидовом пространстве с координатами $(x_1, \dots, x_n; f)$ является лежандровым подмногообразием в $2n + 1$ -мерном пространстве всех невертикальных гиперплоскостей в пространстве графика (контактная структура задается 1-формой

$$\omega = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n - df,$$

плоскость с координатами $(p, x; f)$ проходит через точку с координатами (x, f) параллельно плоскости $f = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$.

Преобразование Лежандра описывается в этих терминах следующим образом.

Рассмотрим еще второе $2n + 1$ -мерное контактное пространство с координатами (P, X, F) и контактной структурой, заданной формой

$$\Omega = P dX - dF.$$

Инволюцией Лежандра называется отображение, переводящее точку первого пространства с координатами (p, x, f) в точку второго с координатами

$$P = x, \quad X = p, \quad F = px - f.$$

Инволюция Лежандра, как легко сосчитать, переводит первую контактную структуру во вторую. Очевидно

Теорема. Диффеоморфизм одного контактного многообразия на другое, переводящий контактные плоскости в контактные, переводит каждое лежандрово многообразие в лежандрово.

В частности, под действием инволюции Лежандра лежандрово подмногообразие касательных к графику функции плоскостей переходит в новое лежандрово многообразие. Это новое многообразие называется *преобразованием Лежандра исходного*.

Проекция нового многообразия на пространство с координатами X, F (параллельно P -направлению), вообще говоря, не является гладким многообразием, но имеет особенности. Эта проекция называется *преобразованием Лежандра графика функции* φ .

Если функция φ выпукла, то проекция сама является графиком функции $F = \Phi(X)$. В этом случае функция Φ называется *преобразованием Лежандра функции* φ .

В качестве другого примера рассмотрим движение ориентированных контактных элементов под действием геодезического потока на римановом многообразии. Возьмем в качестве «начального волнового фронта» какое-нибудь гладкое подмногообразие нашего риманова многообразия (размерность подмногообразия может быть любой). Все ориентированные контактные элементы, касающиеся этого подмногообразия, образуют лежандрово многообразие в пространстве вообще всех контактных элементов. Мы получаем из предыдущей теоремы

Следствие. Семейство всех касательных к волновому фронту элементов преобразуется под действием геодезического потока за время t снова в лежандрово многообразие пространства всех контактных элементов.

Следует заметить, что это новое лежандрово многообразие может не быть семейством всех элементов, касательных к какому-либо гладкому многообразию, так как на волновом фронте могут возникать особенности.

Возникающие таким образом *лежандровы особенности* можно описать аналогично лагранжевым (см. добавление 12). *Лежандрово расслоение* в $2n + 1$ -мерном контактном многообразии — это расслоение, все слои которого — лежандровы n -мерные многообразия. *Лежандровы особенности* — это особенности проектирования n -мерных лежандровых подмногообразий $2n + 1$ -мерного контактного многообразия на $n + 1$ -мерную базу лежандрова расслоения.

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^{2n+1} с контактной структурой, заданной формой $\alpha = x dy + dz$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Проекция $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ задает лежандрово расслоение.

Эквивалентность лежандровых расслоений называется диффеоморфизм пространств расслоений, переводящий контактную структуру и слои первого расслоения в контактную структуру и слои второго. Можно доказать, что *всякое лежандрово расслоение эквивалентно только что описанному специальному* в окрестности каждой точки пространства расслоения.

Контактная структура пространства расслоения задает на слоях локальную структуру проективного пространства. Лежандровы эквивалентности сохраняют эту структуру, т. е. задают локально проективные преобразования слоев.

Следующая теорема позволяет локально описывать лежандровы подмногообразия и отображения при помощи производящих функций.

Теорема. Для любого разбиения $I + J$ множества индексов $(1, \dots, n)$ на два непересекающихся подмножества и для любой функции $S(x_i, y_j)$ от n переменных x_i , $i \in I$ и y_j , $j \in J$, формулы

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad x_j = -\frac{\partial S}{\partial y_j}, \quad z = S - x_i \frac{\partial S}{\partial x_i}$$

вадают лежандрово подмногообразие в \mathbb{R}^{2n+1} . Обратно, каждое лежандрово подмногообразие в \mathbb{R}^{2n+1} в окрестности каждой своей точки задается указанными формулами хотя бы при одном из 2^n возможных выборов подмножества I .

Доказательство основано на том, что на лежандровом многообразии $dz + x dy = 0$, поэтому $d(z + x_i y_i) = y_i dx_i - x_i dy_i$.

Подставим в формулы предыдущей теоремы в качестве S функции из списка простейших лагранжевых особенностей, приведенного в добавлении 12. Получатся лежандровы особенности, сохраняющиеся при малых деформациях лежандрова отображения $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ (т. е. переходящие в эквивалентные при малой деформации функции S). Всякое лежандрово отображение при $n < 6$ малым шевелением превращается в такое, у которого все особенности локально эквивалентны особенностям полученного списка A_k ($1 \leq k \leq 6$), D_k ($4 \leq k \leq 6$), E_6 .

В частности, мы получаем список особенностей волновых фронтов общего положения в пространствах менее 7 измерений.

В обычном трехмерном пространстве этот список таков:

$$A_1: S = \pm x_1^2, \quad A_2: S = \pm x_1^3; \quad A_3: S = \pm x_1^2 + x_1^2 y_2,$$

где $I = \{1\}$, $J = \{2\}$, $n = 2$.

Проекции указанных здесь лежандровых многообразий на базу лежандрова расслоения (т. е. на пространство с координатами y_1, y_2, z) имеют соответственно простую точку в случае A_1 , ребро возврата в случае A_2 и ласточкин хвост (см. рис. 246) в случае A_3 .

Таким образом, волновой фронт общего положения в трехмерном пространстве имеет только ребра возврата и точки типа «ласточкин хвост». При движении фронта в отдельные моменты времени наблюдаются еще перестройки трех типов A_4, D_4^-, D_4^+ (см. добавление 12, где нарисованы соответствующие каустики, заметаемые особенностями фронта при его движении).

Задача 1. Отложим на каждой внутренней нормали к эллипсу на плоскости отрезок длины t . Нарисовать полученную кривую и исследовать ее особенности и их перестройки при изменении t .

Задача 2. Прodelать то же для трехосного эллипсоида в трехмерном пространстве.

М. Контактизация. Наряду с симплектизацией контактных многообразий существует контактизация симплектических, имеющих гомологичную нулю симплектическую структуру.

Контактизация E^{2n+1} симплектического многообразия (M^{2n}, ω^2) строится как пространство расслоения со слоем \mathbf{R} над M^{2n} .

Пусть U — достаточно малая окрестность точки x из M , в которой существует система канонических координат p, q , так что $\omega = dp \wedge dq$. Рассмотрим прямое произведение $U \times \mathbf{R}$ с координатами p, q, z .

Пусть $V \times \mathbf{R}$ — такое же произведение, построенное по другой (или по той же) окрестности V , с координатами P, Q, Z ; $dP \wedge dQ = \omega$. Если окрестности U и V на M пересекаются, то мы отождествим слои над точками пересечения в обоих произведениях так, чтобы форма $dz + p dq = dZ + P dQ = \alpha$ была определена в целом (это возможно, так как $P dQ - p dq$ — полный дифференциал на $U \cap V$).

Легко проверить, что в результате склеивания возникает расслоение E^{2n+1} над M^{2n} , и что форма α задает на E контактную структуру. Многообразию E называется *контактизацией* симплектического многообразия M . Если класс гомологий формы ω^2 целочисленный, то можно определить контактизацию со слоем S^1 .

Н. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Пусть M^{2n+1} — контактное многообразие, E^{2n} — гиперповерхность в M^{2n+1} . Контактная структура M определяет на E некоторую геометрическую структуру, в частности — поле так называемых характеристических направлений. Анализ этой гео-

метрической структуры позволяет свести интегрирование общих нелинейных уравнений с частными производными первого порядка к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы предположим, что многообразии E^{2n} трансверсально контактным плоскостям во всех своих точках. В таком случае пересечение касательной плоскости к E^{2n} в каждой точке с контактной плоскостью имеет размерность $2n - 1$, так что на E^{2n} возникает поле гиперплоскостей. Более того, контактная структура M^{2n+1} определяет на E^{2n} поле прямых, лежащих в указанных $2n - 1$ -мерных плоскостях.

Действительно, пусть α — 1-форма на M^{2n+1} , локально задающая контактную структуру, пусть $\omega = d\alpha$, и пусть \mathbb{R}^{2n} — контактная плоскость в точке x из E^{2n} . Пусть $\Phi = 0$ — локальное уравнение E^{2n} (так что $d\Phi$ в x не 0).

Сужение $d\Phi$ на \mathbb{R}^{2n} задает ненулевую линейную форму в \mathbb{R}^{2n} . 2-форма ω задает в \mathbb{R}^{2n} структуру линейного симплектического пространства, и стало быть, изоморфизм этого пространства с сопряженным к нему. Ненулевой 1-форме $d\Phi|_{\mathbb{R}^{2n}}$ соответствует поэтому ненулевой вектор ξ из \mathbb{R}^{2n} , так что $d\Phi(\cdot) = \omega(\xi, \cdot)$. Вектор ξ называется *характеристическим вектором* многообразия E^{2n} в точке x . Характеристический вектор ξ лежит в пересечении \mathbb{R}^{2n} с касательной к E^{2n} плоскостью, так как $d\Phi(\xi) = 0$.

Вектор ξ определен многообразием E^{2n} и контактной структурой на M не однозначно, а с точностью до умножения на отличное от 0 число. Действительно, как 2-форма ω на \mathbb{R}^{2n} , так и 1-форма $d\Phi$ на \mathbb{R}^{2n} определены с точностью до умножения на отличное от 0 число.

Направления характеристических векторов (т. е. содержащие их прямые) определены контактной структурой в каждой точке многообразия E однозначно.

Таким образом, на гиперповерхности E в контактном многообразии M возникает поле характеристических направлений.

Интегральные кривые этого поля направлений называются *характеристиками*.

Пусть теперь дано $n - 1$ -мерное подмногообразие I нашей гиперповерхности E^{2n} , которое является интегральным для контактного поля (так что касательная плоскость к I в каждой точке принадлежит контактной плоскости).

Теорема. Если в точке x из I характеристика на E^{2n} не касается I , то в окрестности точки x характеристики на E^{2n} , проходящие через точки I , образуют лежандрово подмногообразие L^n в M^{2n+1} .

Доказательство. Пусть ξ — векторное поле на E^{2n} , образованное характеристическими векторами. По формуле гомотопии (см. стр. 168), на E^{2n} имеем $L_\xi \alpha = di_\xi \alpha + i_\xi d\alpha$.

Но $i_{\xi}\alpha = 0$, так как характеристический вектор принадлежит контактной плоскости. Следовательно, на E^{2n} имеем $L_{\xi}\alpha = i_{\xi}\omega$. Но 1-форма $i_{\xi}\omega$ равна нулю на пересечении касательной плоскости к E^{2n} с контактной плоскостью (ибо на контактной плоскости $i_{\xi}\omega = d\Phi$, а на касательной $d\Phi = 0$). Поэтому на касательной к E^{2n} плоскости $i_{\xi}\omega = c\alpha$. Итак, на гиперповерхности E

$$L_{\xi}\alpha = c\alpha$$

(где c — гладкая в окрестности точки x функция).

Пусть теперь $\{g^t\}$ — фазовый (локальный) поток поля ξ и η — вектор, касательный к E^{2n} . Положим $\eta(t) = g_*^t \eta$ и $y(t) = \alpha(\eta(t))$. Тогда функция y удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$dy/dt = c(t)y(t).$$

Если $\eta(0)$ касается I , то $y(0) = \alpha(\eta(0)) = 0$. Значит, $y(t) = \alpha(\eta(t)) = 0$, т. е. $\eta(t)$ при всех t лежит в контактной плоскости. Следовательно, $g^t I$ — интегральное многообразие контактного поля. Поэтому образованное всеми $\{g^t I\}$ при малых t многообразие лежандрово. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим \mathbb{R}^{2n+1} с координатами $x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n; u$ и с контактной структурой, заданной 1-формой $\alpha = du - p dx$. Функция $\Phi(x, p, u)$ задает дифференциальное уравнение $\Phi(x, \partial u/\partial x, u) = 0$ и подмногообразие $E = \Phi^{-1}(0)$ в пространстве \mathbb{R}^{2n+1} (называемом *пространством 1-струй* функций в \mathbb{R}^n).

Начальным условием для уравнения $\Phi = 0$ называется задание значений f функции u на гиперповерхности Γ размерности $n-1$ в n -мерном пространстве с координатами x_1, \dots, x_n .

Начальное условие определяет производные u по $n-1$ независимому направлению в каждой точке Γ . Производную по направлению, трансверсальному к Γ , можно, вообще говоря, найти из уравнения; если при этом выполняются условия теоремы о неявной функции, то начальное условие называется *нехарактеристическим*.

Нехарактеристическое начальное условие задает интегральное $n-1$ -мерное подмногообразие I формы α (являющееся графиком отображения $u = f(x)$, $p = p(x)$, $x \in \Gamma$). Характеристики на E , пересекающие I , образуют лежандрово подмногообразие в \mathbb{R}^{2n+1} , являющееся графиком отображения $u = u(x)$, $p = \partial u/\partial x$. Полученная функция $u(x)$ — решение уравнения $\Phi(x, \partial u/\partial x, u) = 0$ с начальным условием $u|_{\Gamma} = f$.

Заметим, что для нахождения функции u нужно лишь решить систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для характеристик на E и проделать ряд «алгебраических» операций.

ДОБАВЛЕНИЕ 5

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЕЙ

По теореме Э. Нётер однопараметрические группы симметрий динамической системы определяют первые интегралы. Если система выдерживает более широкую группу симметрий, то возникает несколько интегралов.

Совместные многообразия уровня этих первых интегралов в фазовом пространстве являются инвариантными многообразиями фазового потока. Подгруппа группы симметрий, оставляющая такое инвариантное многообразие на месте, действует на нем. Во многих случаях можно рассматривать фактор-многообразие инвариантного многообразия по этой подгруппе. Это фактор-многообразие называется приведенным фазовым пространством. Приведенное фазовое пространство имеет естественную симплектическую структуру. Исходная гамильтонова динамическая система задает на нем снова гамильтонову систему.

Разбиение фазового пространства на совместные многообразия уровня первых интегралов имеет, вообще говоря, особенности. Примером является разбиение фазовой плоскости на линии уровня энергии.

В настоящем добавлении кратко обсуждаются динамические системы в приведенных фазовых пространствах и их связь с инвариантными многообразиями в исходном фазовом пространстве. Все эти вопросы исследовались еще Якоби и Пуанкаре («исключение узла» в задаче многих тел, «понижение порядка» в системах с симметрией, «перманентные вращения» твердого тела и т. п.). Подробное изложение в современной терминологии имеется в статьях: С. Смейл «Топология и механика», Успехи математических наук 27, № 2 (1972), 78—133 (Inventiones Mathematicae 10:4 (1970), 305—331, 11:1 (1970), 45—64 и Дж. Марсден и А. Вейнштейн «Редукция симплектических многообразий с симметриями».

А. Пуассоновские действия групп Ли. Рассмотрим симплектическое многообразие (M^{2n}, ω^2) , и пусть группа Ли G действует на нем как группа симплектических диффеоморфизмов. Каждая

однопараметрическая подгруппа группы G действует тогда как локально-гамильтонов фазовый поток на M . Во многих важных случаях эти потоки имеют однозначные функции Гамильтона.

Пример. Пусть V — гладкое многообразие, G — какая-либо группа Ли его диффеоморфизмов. Каждый диффеоморфизм переводит 1-формы на V в 1-формы. Поэтому группа G действует на кокасательном расслоении $M = T^*V$.

Напомним, что на кокасательном расслоении всегда имеется каноническая 1-форма α («форма $p dq$ »), и естественная симплектическая структура $\omega = d\alpha$. Действие группы G на M симплектическое, так как оно сохраняет 1-форму α , а значит, и 2-форму $d\alpha$.

Однопараметрическая подгруппа $\{g^t\}$ группы G задает на M фазовый поток. Легко проверить, что этот фазовый поток имеет однозначную функцию Гамильтона. А именно, функция Гамильтона H дается формулой теоремы Нётер

$$H(x) = \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x \right), \text{ где } x \in M.$$

Теперь мы предположим, что задано такое симплектическое действие группы Ли G на связном симплектическом многообразии M , что каждому элементу a алгебры Ли группы G соответствует однопараметрическая группа симплектических диффеоморфизмов с однозначным гамильтонианом H_a . Эти гамильтонианы определены с точностью до постоянных слагаемых, которые можно выбрать так, чтобы зависимость H_a от a была линейной. Для этого достаточно как угодно выбрать константы в функциях Гамильтона для каких-нибудь базисных векторов алгебры Ли группы G и затем определить функцию Гамильтона для любого элемента алгебры как линейную комбинацию базисных.

Итак, по симплектическому действию группы Ли G с однозначными на M гамильтонианами можно построить линейное отображение алгебры Ли группы G в алгебру Ли функций Гамильтона на M . При этом коммутатору двух элементов алгебры Ли сопоставляется функция $H_{[a, b]}$, равная скобке Пуассона (H_a, H_b) или же отличающаяся от этой скобки Пуассона на постоянную:

$$H_{[a, b]} = (H_a, H_b) + C(a, b).$$

Замечание. Появление константы C в этой формуле является следствием интересного явления: существования двумерного класса когомологий алгебры Ли (глобально) гамильтоновых полей.

Величина $C(a, b)$ является билинейной кососимметрической функцией на алгебре Ли. Из тождества Якоби вытекает, что

$$C([a, b], c) + C([b, c], a) + C([c, a], b) = 0.$$

Билинейная кососимметрическая функция на алгебре Ли с таким свойством называется *двумерным коциклом* алгебры Ли.

Если выбрать константы в функциях Гамильтона по-другому, то коцикл C заменится на C' , где

$$C'(a, b) = C(a, b) + p([a, b])$$

и где p — линейная функция на алгебре Ли.

Такой коцикл C' называется *когомологичным* коциклу C .

Класс когомологичных друг другу коциклов называется *классом когомологий* алгебры Ли.

Итак, симплектическое действие группы G , при котором существуют однозначные гамильтонианы, задает двумерный класс когомологий алгебры Ли группы G . Этот класс когомологий измеряет отклонение действия от такого, при котором функцию Гамильтона коммутатора можно выбрать равной скобке Пуассона функций Гамильтона.

Определение. Действие связной группы Ли на симплектическом многообразии называется пуассоновским, если функции Гамильтона для однопараметрических групп однозначны и выбраны так, что функция Гамильтона линейно зависит от элемента алгебры Ли и функция Гамильтона коммутатора равна скобке Пуассона функций Гамильтона:

$$H_{[a, b]} = (H_a, H_b).$$

Иными словами, пуассоновское действие группы задает гомоморфизм алгебры Ли этой группы в алгебру Ли функций Гамильтона.

Пример. Пусть V — гладкое многообразие, G — некоторая группа Ли, действующая на V как группа диффеоморфизмов. Пусть $M = T^*V$ — кокасательное расслоение многообразия V с обычной симплектической структурой $\omega = d\alpha$. Функции Гамильтона однопараметрических групп определим как указано выше:

$$H_a(x) = \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x \right), \quad x \in T^*V. \quad (1)$$

Теорема. Построенное действие пуассоновское.

Доказательство. По определению 1-формы α функции Гамильтона H_a линейные однородные «по импульсам» (т. е. на каждом кокасательном пространстве). Следовательно, и их скобки Пуассона линейны и однородны. Итак, функция

$$H_{[a, b]} - (H_a, H_b)$$

линейна и однородна по импульсам. Будучи константой, она равна нулю, что и требовалось доказать.

Аналогично проверяется, что симплектизация всякого контактного действия является пуассоновским действием.

Пример. Пусть V — трехмерное евклидово пространство, а G — шестимерная группа его движений. Базис алгебры Ли образуют шесть однопараметрических групп: сдвиги со скоростью 1 вдоль координатных осей q_1, q_2, q_3 и вращения с угловой скоростью 1 вокруг этих осей. Соответствующие функции Гамильтона, согласно формуле (1), равны (в обычных обозначениях) $p_1, p_2, p_3; M_1, M_2, M_3$, где $M_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2$ и т. д. Доказанная теорема означает, что попарные скобки Пуассона этих шести функций равны функциям Гамильтона коммутаторов соответствующих однопараметрических групп.

Пуассоновское действие группы G на симплектическом многообразии M определяет отображение многообразия M в дуальное пространство алгебры Ли группы

$$P: M \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

А именно, зафиксируем точку x из M и рассмотрим функцию на алгебре Ли, сопоставляющую каждому элементу a алгебры Ли значение гамильтониана H_a в фиксированной точке x :

$$p_x(a) = H_a(x).$$

Эта линейная функция p_x на алгебре Ли и является тем элементом дуального к алгебре пространства, который сопоставляется точке x_i

$$P(x) = p_x.$$

Мы будем называть отображение P *моментом*, следуя предложению Сурио. Заметим, что значение момента — всегда вектор линейного пространства \mathfrak{g}^* .

Пример. Пусть V — гладкое многообразие, G — группа Ли, действующая на V как группа диффеоморфизмов, $M = T^*V$ — кокасательное расслоение, H_a — функция Гамильтона пуассоновского действия G на M , построенная выше (см. (1)).

Тогда отображение «момент» $P: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ может быть описано следующим образом. Рассмотрим отображение $\Phi: G \rightarrow M$, заданное действием всех элементов группы G на фиксированную точку x из M (так что $\Phi(g) = gx$). Каноническая 1-форма α на M индуцирует на G 1-форму $\Phi^*\alpha$. Ее сужение на касательное пространство к G в единице есть линейная форма на алгебре Ли.

Итак, каждой точке x из M мы сопоставили линейную форму на алгебре Ли. Легко проверить, что полученное отображение и есть момент рассматриваемого пуассоновского действия.

В частности, если V — евклидово трехмерное пространство, а G — группа его вращений вокруг точки O , то значения момента — это обычные векторы кинетического момента; если G — группа вращений вокруг оси, то значения момента суть кинетические моменты относительно этой оси; если G — группа параллельных переносов, то значения момента — это векторы импульсов.

Теорема. Пуассоновское действие связной группы Ли G при отображении момента P переходит в коприсоединенное действие группы G на дуальном к ее алгебре Ли \mathfrak{g} пространстве \mathfrak{g}^* (см. добавление 2), т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Следствие. Пусть функция Гамильтона $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ инвариантна относительно пуассоновского действия группы G на M . Тогда момент является первым интегралом системы с функцией Гамильтона H .

Доказательство теоремы. Теорема утверждает, что функция Гамильтона H_a однопараметрической группы h^t при диффеоморфизме g переходит в функцию Гамильтона $H_{\text{Ad}_g a}$ однопараметрической группы $gh^t g^{-1}$.

Пусть g^s — однопараметрическая группа с функцией Гамильтона H_b . Достаточно доказать совпадение производных по s (при $s=0$) функций $H_a(g^s x)$ и $H_{\text{Ad}_{g^s} a}(x)$. Первая из производных равна значению скобки Пуассона функций (H_a, H_b) в точке x . Вторая же есть $H_{[a, b]}(x)$. Поскольку действие пуассоновское, теорема доказана.

Доказательство следствия. Производная каждой компоненты момента по направлению фазового потока с функцией Гамильтона H равна нулю, так как она равна производной функции H по направлению фазового потока соответствующей однопараметрической подгруппы группы G , ч. т. д.

Б. Приведенное фазовое пространство. Пусть дано пуассоновское действие группы G на симплектическом многообразии M . Рассмотрим множество уровня момента, т. е. прообраз какой-либо точки $p \in \mathfrak{g}^*$ при отображении P . Это множество мы обозначим через M_p , так что (рис. 238)

$$M_p = P^{-1}(p).$$

Во многих важных случаях множество M_p является многообразием. Например, это будет так, если p — регулярное значение момента, т. е. если дифференциал отображения P в каждой точке множества M_p отображает касательное пространство к M на все касательное пространство к \mathfrak{g}^* .

Группа Ли G , действовавшая на M , вообще говоря, переставляет множества M_p друг с другом. Однако стационарная подгруппа точки p в сопряженном представлении (т. е. подгруппа, состоящая из тех элементов g группы G , для которых $\text{Ad}^*_g p = p$) оставляет M_p на месте.

Обозначим эту стационарную подгруппу через G_p . Группа G_p является группой Ли, и она действует на множестве уровня момента M_p .

Приведенное фазовое пространство получается из M_p факторизацией по действию группы G_p . Для того чтобы такая факторизация имела смысл, нужно сделать некоторые предположения. Например, достаточно предположить, что

- 1) p — регулярное значение, так что M_p — многообразие.
- 2) Стационарная подгруппа G_p компактна.
- 3) Элементы группы G_p действуют на M_p без неподвижных точек.

З а м е ч а н и е. Эти условия можно ослабить. Например, вместо компактности группы G_p можно потребовать, чтобы действие было собственным (т. е. чтобы прообразы компактных множеств при отображении $(g, x) \rightarrow (g(x), x)$ были компактными). Например, действие группы на себе левыми или правыми сдвигами всегда собственное.

Если условия 1), 2), 3) выполнены, то легко определить на множестве орбит действия G_p на M_p структуру гладкого многообразия. А именно, карту в окрестности точки $x \in M_p$ доставляет любая трансверсальная к орбите $G_p x$ площадка, размерность которой равна коразмерности орбиты.

Получающееся многообразие орбит и называется *приведенным фазовым пространством системы с симметрией*.

Мы будем обозначать приведенное фазовое пространство, соответствующее значению момента p , через F_p . Многообразие F_p

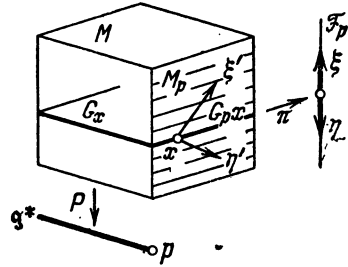


Рис. 238. Приведенное фазовое пространство.

является базой расслоения $\pi: M_p \rightarrow F_p$ со слоем, диффеоморфным группе G_p .

На приведенном фазовом пространстве F_p имеется естественная симплектическая структура. А именно, рассмотрим какие-либо два вектора ξ, η , касательных к F_p в точке f . Точка f является одной из орбит группы G_p на многообразии M_p . Пусть x — одна из точек этой орбиты. Векторы ξ и η , касательные к орбите, получаются из некоторых векторов ξ', η' , касательных к M_p в точке x , при проекции $\pi: M_p \rightarrow F_p$.

Определение. Кососкалярным произведением векторов ξ, η , касательных к приведенному фазовому пространству в одной точке, называется кососкалярное произведение соответствующих им векторов ξ', η' , касательных к исходному симплектическому многообразию M :

$$[\xi, \eta]_p = [\xi', \eta'].$$

Теорема*) Кососкалярное произведение векторов ξ, η не зависит от выбора точки x и представителей ξ', η' и задает на приведенном фазовом пространстве симплектическую структуру.

Следствие. Приведенное фазовое пространство четномерно.

Доказательство теоремы. Рассмотрим в касательном к M в x пространстве следующие два пространства:

$T(M_p)$ — касательное пространство к многообразию уровня момента M_p ;

$T(Gx)$ — касательное пространство к орбите группы G .

Лемма. Эти два пространства являются косоортогональными дополнениями друг друга в TM .

Доказательство. Вектор ζ лежит в косоортогональном дополнении к касательной плоскости орбиты группы G тогда и только тогда, когда кососкалярные произведения вектора ζ с векторами скоростей гамильтоновых потоков группы G равны нулю (по определению). Но эти кососкалярные произведения равны производным соответствующих функций Гамильтона по направлению ζ . Следовательно, вектор ζ лежит в косоортогональном дополнении к орбите группы G , если и только если производная момента по направлению ζ равна нулю, т. е. если ζ лежит в $T(M_p)$. Первое утверждение леммы доказано; второе очевидно.

Представители ξ' и η' определены с точностью до прибавления вектора из касательной плоскости к орбите группы G_p . Но эта касательная плоскость есть пересечение касательных плоскостей к орбите Gx и к многообразию M_p (по последней теореме пункта А). Следовательно добавление к ξ' вектора из $T(G_p x)$ не меняет кососкалярных произведений со всеми векторами η' из $T(M_p)$ (так как по лемме $T(G_p x)$ косоортогонально $T(M_p)$). Итак, независимость от выбора представителей ξ', η' доказана.

*) В таком виде эта теорема впервые сформулирована Марсденом и Вейнштейном. Многочисленные частные случаи рассматривались со времен Якоби и использовались Пуанкаре и его последователями в механике, Кирилловым и Костантом в теории групп, а Фаддеевым — в общей теории относительности.

Независимость величины $[\xi, \eta]_p$ от выбора точки x на орбите f вытекает из симплектичности действия группы G на M и инвариантности M_p . Итак, на F_p определена дифференциальная 2-форма:

$$\Omega_p(\xi, \eta) = [\xi, \eta]_p.$$

Она не вырождена. Ибо, если $[\xi, \eta]_p = 0$ для всех η , то соответствующий представитель ξ' косоортогонален всем векторам из $T(M_p)$. Следовательно, ξ' принадлежит косоортогональному дополнению к $T(M_p)$ в TM . Тогда по лемме $\xi' \in T(Gx)$, т. е. $\xi = 0$.

Форма Ω_p замкнута. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим какую-либо карту, т. е. площадку в M_p , трансверсально пересекающую орбиту группы G_p в одной точке.

Форма Ω_p изображается на этой карте 2-формой, индуцированной из 2-формы ω , задающей симплектическую структуру во всем пространстве M , при вложении площадки. Поскольку форма ω замкнута, индуцированная форма также замкнута. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}$ — евклидово пространство размерности $2n$ с координатами p_k, q_k и 2-формой $\sum dp_k \wedge dq_k$. Пусть $G = S^1$ — окружность, а действие G на M задается гамильтонианом линейного осциллятора

$$H = \frac{1}{2} \sum (p_k^2 + q_k^2).$$

Тогда отображение момента есть просто $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, многообразие нулевого уровня момента есть сфера S^{2n-1} , а фактор-пространство — комплексное проективное пространство CP^{n-1} .

Следовательно, предыдущая теорема определяет симплектическую структуру на комплексном проективном пространстве. Не трудно проверить, что эта структура совпадает (с точностью до множителя) с той, которую мы построили в добавлении 3.

Пример 2. Пусть V — группа Ли, G — эта же группа, а действие определяется левыми сдвигами. Тогда M_p — это подмногообразие касательного расслоения группы, образованное теми векторами, которые при правом сдвиге в единицу группы дают один и тот же элемент в дуальном пространстве к алгебре Ли.

Следовательно, многообразие M_p диффеоморфно самой группе и является правоинвариантным сечением кокасательного расслоения. Все значения p регулярны.

Стационарная подгруппа G_p точки p состоит из тех элементов группы, для которых левый и правый сдвиги элемента p дают одинаковый результат. Действия отличных от единицы элементов группы G_p на M_p не имеют неподвижных точек (так как их нет у правых сдвигов группы по себе).

Группа G_p действует собственно (см. замечание на стр. 339). Следовательно пространство орбит группы G_p на M_p является симплектическим многообразием.

Но это пространство орбит легко отождествляется с орбитой точки p в коприсоединенном представлении. Действительно, ото-

бразим *правоинвариантное* сечение M_p кокасательного расслоения в кокасательное пространство к группе в единице *левыми* сдвигами. Получаем отображение

$$\pi: M_p \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Образ этого отображения есть орбита точки p в коприсоединенном представлении, а слои — орбиты действия группы G_p . Симплектическая структура приведенного фазового пространства определяет, таким образом, симплектическую структуру на орбитах коприсоединенного представления.

Нетрудно проверить непосредственным подсчетом, что это — та самая структура, которую мы обсуждали в добавлении 3.

Пример 3. Пусть группа $G = S^1$ — окружность, и пусть она действует без неподвижных точек на многообразии V . Тогда возникает пуассоновское действие окружности на кокасательном расслоении $M = T^*V$. Мы можем определить многообразия уровня момента M_p (коразмерности 1 в M) и фактор-многообразия F_p (размерность которых на 2 меньше размерности M).

Кроме того, мы можем построить фактор-многообразие конфигурационного пространства V , отождествив друг с другом все точки каждой орбиты группы на V . Обозначим это профакторизованное пространство через W .

Теорема. *Приведенное фазовое пространство F_p симплектически диффеоморфно кокасательному расслоению профакторизованного конфигурационного пространства W .*

Доказательство. Пусть $\pi: V \rightarrow W$ — факторизация, $\omega \in T^*W$ — 1-форма на W в точке $\omega = \pi v$. Форма $\pi^*\omega$ на V в точке v принадлежит M_0 и после факторизации задает точку в F_0 . Обратно, элементы F_0 — это инвариантные 1-формы на V , равные нулю на орбитах; они задают 1-формы на W . Итак, мы построили отображение $T^*W \rightarrow F_0$; легко видеть, что это — симплектический диффеоморфизм.

Случай $p \neq 0$ сводится к случаю $p = 0$ следующим приемом. Рассмотрим на V риманову метрику, инвариантную относительно G . Пересечение M_p с кокасательной плоскостью к V в точке v является гиперплоскостью. Квадратичная форма, задающая метрику, имеет в этой гиперплоскости единственную точку минимума $s(v)$. Вычитание вектора $s(v)$ переводит гиперплоскость $M_p \cap T^*V_v$ в $M_0 \cap T^*V_v$, и мы получаем диффеоморфизм $F_p \rightarrow F_0$. Теорема доказана.

В. Применения к исследованию стационарных вращений и бифуркаций инвариантных многообразий. Пусть дано пуассоновское действие группы G на симплектическом многообразии M , и пусть H — функция на M , инвариантная относительно G . Пусть F_p — приведенное фазовое пространство (мы предполагаем, что условия, при которых его можно определить, выполнены).

Гамильтоново поле с функцией Гамильтона H касается каждого многообразия уровня момента M_p (так как момент — первый интеграл). Возникающее поле на M_p инвариантно относительно G_p

и задает поле на приведенном фазовом пространстве F_p . Это векторное поле на F_p мы будем называть *приведенным полем*.

Теорема. *Приведенное поле на приведенном фазовом пространстве гамильтоново. Значение функции Гамильтона приведенного поля в какой-либо точке приведенного фазового пространства равно значению исходной функции Гамильтона в соответствующей точке исходного фазового пространства.*

Доказательство. Соотношение, определяющее гамильтоново поле X_H с гамильтонианом H на многообразии M с формой ω

$$dH(\xi) = \omega(X_H, \xi) \text{ для всех } \xi$$

включает аналогичное соотношение для приведенного поля ввиду определения симплектической структуры на F_p , ч. т. д.

Пример. Рассмотрим асимметричное твердое тело, закрепленное в неподвижной точке и находящееся под действием силы веса (или иной потенциальной силы, симметричной относительно вертикальной оси).

На конфигурационном пространстве $SO(3)$ действует группа S^1 вращений относительно вертикали. Функция Гамильтона инвариантна относительно вращений, поэтому возникает приведенная система на приведенном фазовом пространстве.

Приведенное фазовое пространство является в данном случае кокасательным расслоением профакторизованного конфигурационного пространства (см. пример 3, стр. 342). Факторизация конфигурационного пространства по действию вращений вокруг вертикальной оси была проведена Пуассоном следующим образом.

Будем задавать положение тела ортонормированным репером (e_1, e_2, e_3) . Три вертикальные компоненты векторов репера задают вектор l в трехмерном координатном евклидовом пространстве. Длина этого вектора 1 (почему?). Этот *вектор Пуассона* *) γ определяет исходный репер с точностью до поворотов относительно вертикали (почему?).

Таким образом, профакторизованное конфигурационное пространство представляет собой двумерную сферу S^2 , а приведенное фазовое пространство — это кокасательное расслоение двумерной сферы T^*S^2 .

Приведенная функция Гамильтона на кокасательном расслоении сферы представляет собой сумму квадратичной относительно кокасательных векторов «кинетической энергии приведенного движения» и «эффективного потенциала» (включающего потенциальную

*) Пуассон показал, что уравнения движения тяжелого твердого тела записываются через вектор γ в замечательно простом виде «уравнений Эйлера — Пуассона»

$$\frac{dM}{dt} - [M, \omega] = \mu g [\gamma, l], \quad \frac{d\gamma}{dt} = [\gamma, \omega].$$

энергию и кинетическую энергию вращения относительно вертикали).

Переход к приведенному фазовому пространству в данном случае почти сводится к «исключению циклической координаты φ ». Разница состоит лишь в том, что обычная процедура исключения требует, чтобы конфигурационное или фазовое пространство было прямым произведением на окружность, тогда как в нашем случае имеется лишь расслоение. Это расслоение можно превратить в прямое произведение ценой уменьшения конфигурационного пространства (т. е. введением координат с особенностями у полюсов); преимущество изложенного выше подхода состоит в том, что выясняется, что никакой реальной особенности (кроме особенности системы координат) вблизи полюсов нет.

Определение. Фазовые кривые в M , проектирующиеся в положения равновесия приведенной системы на приведенном фазовом пространстве F_p , называются *относительными равновесиями* исходной системы.

Пример: Стационарные вращения твердого тела, закрепленного в центре инерции, являются относительными равновесиями.

Точно так же относительными равновесиями являются движения тяжелого твердого тела, сводящиеся к вращению с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси.

Теорема. *Фазовая кривая системы с G -инвариантной функцией Гамильтона является относительным равновесием тогда и только тогда, когда она является орбитой однопараметрической подгруппы группы G в исходном фазовом пространстве.*

Доказательство. Что фазовая кривая, являющаяся орбитой, проектируется в точку, очевидно. Если фазовая кривая $x(t)$ проектируется в точку, то ее можно однозначно представить в виде $x(t) = g(t)x(0)$, и тогда легко видеть, что $\{g(t)\}$ — подгруппа, ч. т. д.

Следствие 1. *Асимметричное твердое тело в любом осесимметричном потенциальном поле, закрепленное в точке на оси поля, имеет не менее двух стационарных вращений (при каждом значении кинетического момента относительно оси симметрии).*

Следствие 2. *Осесимметричное твердое тело в любом потенциальном силовом поле, закрепленное в точке на оси симметрии, имеет не менее двух стационарных вращений (при каждом значении кинетического момента относительно оси симметрии) в любом потенциальном силовом поле.*

Оба следствия вытекают из того, что функция на сфере имеет не менее двух критических точек.

Другое приложение относительных равновесий состоит в том, что с их помощью удобно исследовать перестройки топологии инвариантных многообразий энергии и момента.

Теорема. *Критические точки отображения момента и энергии*

$$P \times H : M \rightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathbf{R}$$

на регулярном множестве уровня момента — это в точности относительные равновесия.

Доказательство. Критические точки отображения $P \times H$ — это условные экстремумы функции H на многообразии уровня момента M_p (так как рассматриваемое многообразие уровня регулярно, т. е. для всех x из M_p имеем $P_* TM_x = T_{y_p}^*$).

Условные экстремумы функции H на M_p при факторизации по G_p дают критические точки приведенной функции Гамильтона (так как H инвариантна относительно G_p). Теорема доказана.

Фактическое исследование относительных равновесий и особенностей отображения энергии — момента не просто и не проведено полностью даже в такой классической задаче, как задача о движении асимметричного твердого тела в поле тяготения. Случай, когда центр тяжести лежит на одной из осей инерции, разобран в написанном С. Б. Каток приложении к переводу цитированной на стр. 335 статьи С. Смейла.

В этой задаче размерность фазового пространства 6, а группа окружность; приведенное фазовое пространство T^*S^2 четырехмерно.

Многообразия неособого уровня энергии в приведенном фазовом пространстве бывают (в зависимости от значений момента и энергии) следующих четырех видов: S^3 , $S^2 \times S^1$, RP^3 и «крендель», получающийся из трехмерной сферы S^3 приклеиванием двух «ручек» вида

$$S^1 \times D^2 \quad (D^2 \text{ — круг, } \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}).$$

ДОБАВЛЕНИЕ 6

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КВАДРАТИЧНЫХ ГАМИЛЬТониАНОВ

В настоящем добавлении приведена таблица нормальных форм, к которым можно привести квадратичную функцию Гамильтона вещественным симплектическим преобразованием. Эта таблица составлена Д. М. Галиным на основании работы: J. Williamson, On an algebraic problem, concerning the normal forms of linear dynamical systems, Amer. J. of Math. 58, N1 (1936), 141 — 163.

В работе Вильямсона указаны нормальные формы, к которым можно привести квадратичную форму в симплектическом пространстве над любым полем.

А. Обозначения. Мы будем записывать гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2} (Ax, x),$$

где $x = (p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ — вектор, записанный в симплектическом базисе, A — симметрический линейный оператор. Канонические уравнения имеют тогда вид

$$\dot{x} = IAx, \text{ где } I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами гамильтониана мы будем называть собственные числа линейного инфинитезимально-симплектического оператора IA . Точно также под жордановой клеткой мы будем понимать жорданову клетку оператора IA .

Собственные числа гамильтониана бывают четырех типов: вещественные пары $(a, -a)$, чисто мнимые пары $(ib, -ib)$, четверки $(\pm a \pm ib)$ и нулевые собственные числа.

Жордановы клетки, соответствующие двум членам пары или четырем членам четверки, всегда имеют одинаковую структуру.

В случаях, когда вещественная часть собственного числа равна нулю, приходится различать жордановы клетки четного и нечет-

ного порядка. При этом клеток нечетного порядка с нулевым собственным числом четное количество и они естественно разбиваются на пары.

Окончательный список нормальных форм следующий.

Б. Гамильтонианы. Паре жордановых клеток порядка k с вещественными собственными числами $\pm a$ отвечает гамильтониан

$$H = -a \sum_{j=1}^k p_j q_j + \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}.$$

Четверке жордановых клеток порядка k с собственными числами $\pm a \pm bi$ отвечает гамильтониан

$$H = -a \sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b \sum_{j=1}^k (p_{2j-1} q_{2j} - p_{2j} q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2}.$$

Паре жордановых клеток нечетного порядка k с собственным числом нуль отвечает гамильтониан

$$H = \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1} \quad (\text{при } k=1, H=0).$$

Жордановой клетке четного порядка $2k$ с собственным числом нуль соответствует гамильтониан ровно одного из следующих двух видов:

$$H = \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{k-1} p_j p_{k-j} - \sum_{j=1}^k q_j q_{k-j+1} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}$$

(при $k=1$ вида $H = \pm \frac{1}{2} q_1^2$). Гамильтонианы с верхним и нижним знаком не переводятся друг в друга.

Паре жордановых клеток нечетного порядка $2k+1$ с чисто мнимыми собственными числами $\pm bi$ отвечает гамильтониан ровно одного из следующих двух видов:

$$H = \pm \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^k (b^2 p_{2j} p_{2k-2j+2} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1} (b^2 p_{2j-1} p_{2k-2j+3} + q_{2j-1} q_{2k-2j+3}) \right] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1}.$$

При $k=0$ $H = \pm \frac{1}{2} (b^2 p_1^2 + q_1^2)$. Гамильтонианы с верхним и нижним знаками не переводятся друг в друга.

Паре жордановых клеток четного порядка $2k$ с чисто мнимыми собственными числами $\pm bi$ отвечает гамильтониан ровно одного из двух следующих видов:

$$H = \pm \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{b^2} q_{2j-1} q_{2k-2j+1} + q_{2j} q_{2k-2j+2} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} (b^2 p_{2j+1} p_{2k-2j+1} + p_{2j+2} p_{2k-2j+2}) \right] - b^2 \sum_{j=1}^k p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=1}^k p_{2j} q_{2j-1}.$$

(при $k=1$ $H = \pm \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - b^2 p_1 q_2 + p_2 q_1$).

Здесь также гамильтонианы с верхним и нижним знаками не переводятся друг в друга вещественным симплектическим преобразованием.

Теорема Вильямсона. *Линейное вещественное симплектическое пространство, на котором задана квадратичная форма H , распадается в прямую сумму попарно косоортогональных вещественных симплектических подпространств так, что форма H представляется в виде суммы форм указанных выше видов на этих подпространствах.*

В. Неустраняемые жордановы клетки. Индивидуальный гамильтониан «общего положения» не имеет кратных собственных чисел и приводится к простому виду (все жордановы клетки первого порядка). Однако если рассматривается не индивидуальный гамильтониан, а целое семейство систем, зависящих от параметров, то при некоторых исключительных значениях параметров могут появиться более сложные жордановы структуры. От некоторых из них можно избавиться малым шевелением семейства, другие же неустраняемы и при малом шевелении семейства лишь немного деформируются. Если число параметров семейства l конечно, то таких неустраняемых в l -параметрическом семействе случаев конечно число. Формулируемая ниже теорема Галина позволяет перечислить все эти случаи при любом фиксированном l .

Обозначим через $n_1(z) \geq n_2(z) \geq \dots \geq n_s(z)$ размеры жордановых клеток с собственным числом $z \neq 0$, а через $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_u$ и $\tilde{m}_1 \geq \tilde{m}_2 \geq \dots \geq \tilde{m}_v$ размеры жордановых клеток с собственным числом нуль, причем m_j четны, а \tilde{m}_j нечетны (из каждой пары клеток нечетного размера учитывается одна).

Теорема. *Многообразие гамильтонианов с указанными размерами жордановых клеток имеет в пространстве всех гамильто-*

ицанов коразмерность

$$c = \frac{1}{2} \sum_{z \neq 0} \left[\sum_{j=1}^{s(z)} (2j-1) n_j(z) - 1 \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^u (2j-1) m_j + \sum_{j=1}^v [2(2j-1) \tilde{m}_j + 1] + \\ + 2 \sum_{j=1}^u \sum_{k=1}^v \min \{m_j, \tilde{m}_k\}.$$

(Заметим, что если нуль не собственное число, то в сумме отлично от нуля только первое слагаемое).

Следствие. В семействах линейных гамильтоновых систем, зависящих общим образом от l параметров, встречаются системы только с такими жордановыми клетками, что вычисленное по предыдущей формуле число c не превосходит l : все случаи с большим c устранимы малым шевелением семейства.

Следствие. В одно-и двухпараметрических семействах встречаются как неустраиваемые только жордановы клетки следующих 12 типов:

$$l = 1 : (\pm a)^2, (\pm ia)^2, 0^2$$

(здесь жордановы клетки обозначаются их определителями, например $(\pm a)^2$ означает пару жордановых клеток порядка 2 с собственными числами a и $-a$ соответственно);

$$l = 2 : (\pm a)^3, (\pm ai)^3, (\pm a \pm bi)^2, 0^4, (\pm a)^2 (\pm b)^2,$$

$$(\pm ai)^2 (\pm bi)^2, (\pm a)^2 (\pm bi)^2, (\pm a)^2 0^2, (\pm ai)^2 0^2$$

(остальные собственные числа простые).

Галин вычислил также нормальные формы, к которым можно привести любое семейство гладко зависящих от параметров линейных гамильтоновых систем при помощи гладко зависящей от параметров симплектической линейной замены координат. Например, для простейшей жордановой клетки $(\pm a)^2$ такой нормальной формой гамильтониана будет

$$H(\lambda) = -a(p_1 q_1 + p_2 q_2) + p_1 q_2 + \lambda_1 p_1 q_1 + \lambda_2 p_2 q_1$$

(λ_1 и λ_2 — параметры).

ДОБАВЛЕНИЕ 7

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ

При исследовании поведения решений уравнения Гамильтона вблизи положения равновесия часто недостаточно ограничиваться линеаризованным уравнением. Действительно, асимптотически устойчивые положения равновесия для гамильтоновых систем невозможны по теореме Лиувилля о сохранении объема. Поэтому устойчивость линеаризованной системы всегда нейтральная: собственные числа линейной части гамильтонова векторного поля в устойчивом положении равновесия все лежат на мнимой оси.

Для систем дифференциальных уравнений общего вида такая нейтральная устойчивость может быть разрушена сколь угодно малыми нелинейными добавками. Для систем Гамильтона дело обстоит сложнее. Предположим, например, что квадратичная часть функции Гамильтона в положении равновесия (которая и определяет линейную часть векторного поля) знакоопределена. Тогда функция Гамильтона имеет максимум или минимум в положении равновесия. Следовательно, это положение равновесия устойчиво (по Ляпунову, но не асимптотически) не только для линеаризованной системы, но и для полной нелинейной системы.

Однако квадратичная часть функции Гамильтона в устойчивом положении равновесия может и не быть знакоопределенной. Простейший пример доставляет функция $H = p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2$. Исследование устойчивости систем с такой квадратичной частью должно учитывать члены ряда Тейлора следующих степеней, прежде всего кубические члены функции Гамильтона (т. е. квадратичные члены векторов поля фазовой скорости). Исследование это удобно производить, приводя функцию Гамильтона (и следовательно, гамильтоново векторное поле) к возможно более простому виду подходящей канонической заменой переменных. Иными словами, для изучения решений полезно подобрать систему канонических координат вблизи положения равновесия так, чтобы по возможности упростить вид функции Гамильтона и уравнений движения.

Аналогичный вопрос для общих (негамильтоновых) векторных полей решается просто: там общим случаем является такой, когда векторное поле в окрестности положения равновесия линейно в подходящей системе координат (соответствующие теоремы Пуанкаре и Зигеля имеются, например, в книге: К. Л. Зигель «Лекции по небесной механике», ИЛ, 1959).

В гамильтоновом случае картина сложнее. Первая трудность: привести гамильтоново поле к линейной нормальной форме канонической заменой переменных, вообще говоря, невозможно. А именно, обычно можно убить кубическую часть функции Гамильтона, но нельзя убить все члены четвертой степени (это связано с тем, что в линейной системе частота колебаний не зависит от амплитуды, а в нелинейной, вообще говоря, зависит). Указанное затруднение преодолевается выбором нелинейной нормальной формы, учитывающей изменение частот (так называемая вариация частоты). В результате можно (в так называемом нерезонансном случае) ввести переменные действие — угол вблизи положения равновесия так, что система станет интегрируемой с точностью до членов сколь угодно большой степени в ряду Тейлора.

Это позволяет изучать поведение системы в течение больших интервалов времени для близких к равновесию начальных условий. Однако этого недостаточно, чтобы определить, будет ли положение равновесия устойчивым по Ляпунову (из-за того, что на бесконечном отрезке времени влияние отброшенного остаточного члена ряда Тейлора может разрушить устойчивость). Такая устойчивость вытекала бы из точного приведения к аналогичной нормальной форме, без пренебрежения остаточными членами. Однако можно доказать, что это точное приведение, вообще говоря, невозможно, а формальные ряды для канонических преобразований, приводящих систему к нормальной форме, в действительности в общем случае *расходятся*.

Расходимость этих рядов связана с тем, что приводимость к нормальной форме повлекла бы за собой более простое поведение фазовых кривых (они должны были бы быть условно-периодическими обмотками торов), чем то, которое имеет место на самом деле. Поведение фазовых кривых вблизи положения равновесия гамильтоновой системы обсуждается в добавлении 8. В настоящем же добавлении приведены формальные результаты о нормализации с точностью до членов высокой степени.

Идея приведения гамильтоновых систем к нормальным формам восходит к Линдштредту и Пуанкаре *); нормальные формы в окрестности положения равновесия подробно изучал Дж. Д. Биркгоф (Дж. Д. Биркгоф, «Динамические системы», ОГИЗ, 1941).

*) См. А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики», т. 1 в «Избранных трудах» Наука, 1971.

Нормальные формы для вырожденных случаев приведены в работе: А. Д. Брюно, «Аналитическая форма дифференциальных уравнений» (Труды Московского математического общества, т. 25 и т. 26).

А. Нормальная форма консервативной системы вблизи положения равновесия. Предположим, что в линейном приближении положение равновесия гамильтоновой системы с n степенями свободы устойчиво, и что все n собственных частот $\omega_1, \dots, \omega_n$ различны. Тогда квадратичная часть гамильтониана приводится линейным каноническим преобразованием к виду

$$H = \frac{1}{2} \omega_1 (p_1^2 + q_1^2) + \dots + \frac{1}{2} \omega_n (p_n^2 + q_n^2).$$

(Среди чисел ω_k могут быть отрицательные.)

Определение. Собственные частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ удовлетворяют резонансному соотношению порядка K , если существуют целые не все равные нулю числа k_l , для которых

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0, \quad |k_1| + \dots + |k_n| = K.$$

Определение. *Нормальной формой Биркгофа степени s для гамильтониана* назовем многочлен степени s от канонических координат (P_l, Q_l) , являющийся в действительности многочленом (степени $[s/2]$) от переменных $\tau_l = (P_l^2 + Q_l^2)/2$.

Например, для систем с одной степенью свободы нормальная форма степени $2m$ (или $2m+1$) имеет вид

$$H_{2m} = H_{2m+1} = a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots + a_m \tau^m, \quad \tau = (P^2 + Q^2)/2,$$

а для систем с двумя степенями свободы нормальной формой Биркгофа степени 4 будет

$$H_4 = a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + a_{11} \tau_1^2 + 2a_{12} \tau_1 \tau_2 + a_{22} \tau_2^2.$$

Коэффициенты a_1 и a_2 — это собственные частоты, а коэффициенты a_{ij} описывают зависимость частот от амплитуд.

Теорема. *Предположим, что собственные частоты ω_l не удовлетворяют ни одному резонансному соотношению порядка s и меньше. Тогда существует такая каноническая система координат в окрестности положения равновесия, что в ней функция Гамильтона приводится к нормальной форме Биркгофа степени s с точностью до членов степени $s+1$:*

$$H(p, q) = H_s(P, Q) + R, \quad R = O(|P| + |Q|)^{s+1}.$$

Доказательство этой теоремы легко проводится в системе комплексных координат,

$$z_l = p_l + iq_l, \quad \omega_l = p_l - iq_l$$

(при переходе к которым надлежит умножить гамильтониан на $-2i$). Если не входящие в нормальную форму члены степени меньше N уже убиты, то замена с производящей функцией $Pq + S_N(P, q)$ (где S_N — многочлен сте-

пени N) изменит в разложении Тейлора функции Гамильтона лишь члены степени N и выше.

При этой замене коэффициент при одночлене степени N в функции Гамильтона, имеющем вид

$$z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \omega_1^{\beta_1} \dots \omega_n^{\beta_n} \quad (\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = N)$$

изменится, как легко сосчитать, на величину

$$s_{\alpha\beta} [\lambda_1 (\beta_1 - \alpha_1) + \dots + \lambda_n (\beta_n - \alpha_n)],$$

где $\lambda_l = i\omega_l$ и где $s_{\alpha\beta}$ — коэффициент при $z^\alpha \omega^\beta$ в разложении функции $S_N(p, q)$ по переменным z, ω .

При сделанных предположениях об отсутствии резонанса коэффициент в квадратных скобках при $s_{\alpha\beta}$ отличен от нуля. Кроме лишь случая, когда наш одночлен выражается через произведения $z_l \omega_l = 2\tau_l$ (т. е. когда все α_l равны β_l). Таким образом, мы можем убить все члены степени N , кроме выражающихся через переменные τ_l . Полагая $N = 3, 4, \dots, s$, получаем доказываемое.

При пользовании теоремой Биркгофа полезно заметить, что система, гамильтониан которой является нормальной формой, интегрируется. Именно, рассмотрим «канонические полярные координаты» τ_l, φ_l , через которые P_l и Q_l выражаются по формулам

$$P_l = \sqrt{2\tau_l} \cos \varphi_l, \quad Q_l = \sqrt{2\tau_l} \sin \varphi_l.$$

Поскольку гамильтониан выражается через одни лишь переменные действия τ_l , то система интегрируема и описывает условно-периодические движения по торам $\tau = \text{const}$ с частотами $\omega = \partial H / \partial \tau$. В частности, положение равновесия $P = Q = 0$ для нормальной формы устойчиво.

Б. Нормальная форма канонического преобразования вблизи неподвижной точки. Рассмотрим каноническое (т. е. просто сохраняющее площади) отображение двумерной плоскости на себя. Предположим, что это преобразование оставляет на месте начало координат, а его линейная часть имеет собственные числа $\lambda = e^{\pm i\alpha}$ (т. е. является поворотом на угол α в подходящем симплектическом базисе с координатами p, q). Такое преобразование будем называть *эллиптическим*.

Определение. *Нормальной формой Биркгофа степени s для преобразования* назовем каноническое преобразование плоскости в себя, являющееся поворотом на переменный угол, который является полиномом степени не выше $m = [s/2] - 1$ от переменной действия τ канонической полярной системы координат:

$$(\tau, \varphi) \mapsto (\tau, \varphi + \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \dots + \alpha_m \tau^m),$$

где

$$p = \sqrt{2\tau} \cos \varphi, \quad q = \sqrt{2\tau} \sin \varphi.$$

Теорема 2. Если собственное число λ эллиптического канонического преобразования не является корнем из единицы степени s и меньше, то это преобразование приводится канонической заменой переменных к нормальной форме Биркгофа степени s с погрешностью в членах степени $s+1$ и выше.

Многомерное обобщение эллиптического преобразования — это прямое произведение n эллиптических поворотов плоскостей (p_i, q_i) с собственными числами $\lambda_i = e^{\pm i\alpha_i}$. Нормальная форма Биркгофа степени s задается формулой

$$(\tau, \varphi) \mapsto (\tau, \varphi + \partial S / \partial \tau),$$

где S — многочлен степени не выше $[s/2]$ от переменных действия τ_1, \dots, τ_n .

Теорема 3. Если собственные числа λ_i многомерного эллиптического канонического преобразования не допускают резонансов

$$\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} = 1, \quad |k_1| + \dots + |k_n| \leq s,$$

то это преобразование приводится к нормальной форме Биркгофа степени s (с ошибкой в членах степени s в разложении отображения в ряд Тейлора в точке $p=q=0$).

В. Нормальные формы уравнения с периодическими коэффициентами вблизи положений равновесия. Пусть $p=q=0$ — положение равновесия системы с функцией Гамильтона, зависящей 2π -периодически от времени. Предположим, что линеаризованное уравнение приведено линейным симплектическим периодическим по времени преобразованием к автономной нормальной форме с собственными частотами $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Мы скажем, что система резонансная порядка $K > 0$, если существует соотношение

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n + k_0 = 0$$

с целыми k_0, k_1, \dots, k_n , для которого $|k_1| + \dots + |k_n| = K$.

Теорема. Если система не резонансная порядка s и меньше, то существует 2π -периодически зависящее от времени каноническое преобразование, приводящее систему в окрестности положения равновесия к такой же нормальной форме Биркгофа степени s , как если бы система была автономной, с той лишь разницей, что остаточные члены R степени $s+1$ и выше будут периодически зависеть от времени.

Наконец, пусть дана замкнутая траектория автономной системы уравнений Гамильтона. Тогда мы можем приводить систему в окрестности этой траектории к нормальной форме, пользуясь любым из следующих двух приемов:

1) **Изоэнергетическая редукция:** фиксируем постоянную энергии и рассматриваем окрестность замкнутой траектории

на $2n - 1$ -мерном многообразии уровня энергии как расширенное фазовое пространство системы с $n - 1$ степенью свободы, периодически зависящей от времени.

2) Поверхность сечения: фиксируем постоянную энергии и значение одной из координат (так, чтобы замкнутая траектория пересекала получившуюся $2n - 2$ -мерную площадку трансверсально). Тогда фазовые кривые, близкие к данной, определяет отображение этой $2n - 2$ -мерной площадки на себя, с неподвижной точкой на замкнутой траектории. Это отображение сохраняет естественную симплектическую структуру на нашей $2n - 2$ -мерной площадке, и мы можем изучать его при помощи нормальной формы пункта Б.

При исследовании замкнутых траекторий автономных гамильтоновых систем возникает одно новое обстоятельство по сравнению с исследованием положений равновесия систем с периодическими коэффициентами. Дело в том, что замкнутые траектории автономных систем не лежат изолированно, а образуют (как правило) однопараметрические семейства.

Параметром семейства является значение постоянной энергии. Действительно, предположим, что при некотором выборе значения постоянной энергии замкнутая траектория трансверсально пересекает описанную выше $2n - 2$ -мерную площадку в $2n - 1$ -мерном многообразии уровня энергии. Тогда и при близких значениях постоянной энергии будет существовать подобная же замкнутая траектория. По теореме о неявной функции мы можем даже утверждать, что эта замкнутая траектория гладко зависит от значения постоянной энергии.

Если мы захотим теперь воспользоваться нормальной формой Биркгофа для исследования однопараметрического семейства замкнутых траекторий, то мы встретимся со следующим затруднением. При изменении параметра семейства собственные числа линеаризованной задачи будут, вообще говоря, меняться. Следовательно, при некоторых значениях параметра мы неизбежно встретимся с резонансами, препятствующими приведению к нормальной форме.

Особенно опасны резонансы низких порядков, так как они влияют на первые члены ряда Тейлора. Если нас интересует замкнутая траектория, для которой собственные числа близки к резонансному соотношению низкого порядка, то нормальную форму Биркгофа следует несколько видоизменить. А именно, при резонансе порядка N обращаются в нуль некоторые из выражений

$$k_0 - [\omega_1(\beta_1 - \alpha_1) + \dots + \omega_n(\beta_n - \alpha_n)], \quad |\alpha| + |\beta| = N,$$

на которые приходится делить при уничтожении членов степени N в функции Гамильтона. При близких к резонансу нерезонансных

значениях параметра указанная комбинация собственных частот, вообще говоря, не равна нулю, но весьма мала (эта комбинация называется поэтому «малым знаменателем»).

Деление на малый знаменатель приводит к тому, что:

1) приводящее к нормальной форме преобразование разрывно зависит от параметра (оно имеет полюс при резонансном значении параметра);

2) область, в которой нормальная форма Биркгофа хорошо описывает систему, стягивается до нуля при резонансе.

Чтобы избавиться от этих недостатков, надо отказаться от уничтожения некоторых членов в гамильтониане (именно тех, которые становятся резонансными при резонансном значении параметра). Причем *их следует сохранить не только при резонансном, но и при всех близких значениях параметра* *).

Получающаяся в результате нормальная форма несколько сложнее, чем обычная, но во многих случаях из нее можно извлечь полезную информацию о поведении решений вблизи резонанса.

Г. Пример: исследование резонанса порядка 3. В качестве простого примера исследуем, что происходит с замкнутой траекторией автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы вблизи такого значения постоянной энергии, при котором период колебаний соседних траекторий около замкнутой траектории в три раза больше периода обращения по замкнутой траектории.

В соответствии со сказанным выше эта задача сводится к исследованию однопараметрического семейства неавтономных гамильтоновых систем с одной степенью свободы, 2π -периодически зависящих от времени, в окрестности положения равновесия. Это положение равновесия можно считать началом координат при всех значениях параметра (чтобы этого добиться, нужно сделать зависящую от параметра замену переменных).

Далее, линеаризованную в положении равновесия систему можно превратить в линейную систему с постоянными коэффициентами при помощи 2π -периодически зависящей от времени линейной канонической замены координат. В полученных координатах фазовый поток линеаризованной системы представляет собой равномерное вращение вокруг положения равновесия. Угловая скорость ω этого вращения зависит от параметра.

При резонансном значении параметра $\omega = 1/3$ (т. е. за время 2π совершается треть оборота вокруг начала координат). Произ-

* Указанный здесь прием полезен не только при исследовании гамильтоновых систем, но и в общей теории дифференциальных уравнений. См., например, В. И. Арнольд, Лекции о бифуркациях и версальных семействах, УМН, 27, № 5, 1972, 120–184.

водная угловой скорости ω по параметру в общем случае отлична от нуля. Поэтому мы можем принять за параметр саму эту угловую скорость или, еще лучше, ее отклонение от $1/3$. Это отклонение мы обозначим через ϵ . Величина ϵ называется *расстройкой частоты*. Резонансное значение параметра — это $\epsilon = 0$. нас интересует поведение системы при малых ϵ .

Если пренебречь нелинейными членами в уравнениях Гамильтона и пренебречь расстройкой частоты ϵ , то все траектории нашей системы замыкаются, сделав три оборота (т. е. имеют период 6π). Мы хотим теперь исследовать влияние нелинейных членов и расстройки частоты на поведение траекторий. Ясно, что все траектории в общем случае замыкаться не будут. Чтобы исследовать, как они себя ведут, полезно рассмотреть нормальную форму.

В выбранной системе координат $z = p + iq$, $\bar{z} = p - iq$ функция Гамильтона имеет вид

$$-2iH = -i\omega z\bar{z} + \sum_{\alpha + \beta = 3} \sum_{k = -\infty}^{+\infty} h_{\alpha\beta k} z^\alpha \bar{z}^\beta e^{ikt} + \dots,$$

где точками обозначены члены степени выше третьей и где $\omega = (1/3) + \epsilon$.

При приведении к нормальной форме мы сможем убить все члены третьей степени, кроме тех членов, для которых малый знаменатель

$$\omega(\alpha - \beta) + k$$

становится равным нулю при резонансе. Эти члены можно описать также как такие, которые постоянны вдоль траектории периодического движения, получающегося при пренебрежении расстройкой частоты и нелинейностью. Они называются *резонансными членами*. Итак, для резонанса $\omega = 1/3$ резонансные члены — это такие, для которых

$$\alpha - \beta + 3k = 0.$$

Стало быть, из членов третьей степени резонансными оказываются только $z^3 e^{-it}$ и $\bar{z}^3 e^{it}$. Следовательно, мы можем привести функцию Гамильтона к виду

$$-2iH = -i\omega z\bar{z} + h z^3 e^{-it} - \bar{h} \bar{z}^3 e^{it} + \dots$$

(сопряженность h и \bar{h} соответствует вещественности H).

Заметим, что при приведении функции Гамильтона к этой нормальной форме мы сделали 2π -периодически зависящее от времени гладкое каноническое преобразование, гладко зависящее от параметра даже в случае резонанса. Это преобразование отличается от тождественного лишь членами второго порядка малости

относительно отклонения от замкнутой траектории (а его производящая функция отличается от производящей функции тождественного преобразования лишь кубическими членами).

Дальнейшее исследование поведения решений уравнений Гамильтона проводится следующим образом. Сначала мы отбросим в функции Гамильтона все члены выше третьей степени и исследуем решения получившейся укороченной системы. Затем нужно посмотреть, как могут повлиять на поведение траекторий отброшенные члены.

Исследование укороченной системы упрощается введением на плоскости комплексной переменной z равномерно вращающейся с угловой скоростью $1/3$ системы координат, т. е. подстановкой $z = \zeta e^{it/3}$. Для переменной ζ получается тогда автономная гамильтонова система с функцией Гамильтона

$$-2iH_0 = -i\varepsilon\zeta^2 + h\zeta^3 - \bar{h}\bar{\zeta}^3, \quad \text{где } \varepsilon = \omega - (1/3).$$

Тот факт, что во вращающейся системе координат укороченная система автономна, является большой удачей. Полная система уравнений Гамильтона (с учетом членов степени выше третьей в гамильтониане) во вращающейся системе координат не только не автономна, но даже и не 2π -периодична (а лишь бл-периодична) по времени. Автономная система с гамильтонианом H_0 является в сущности результатом усреднения исходной системы по замкнутым траекториям линейной системы с $\varepsilon=0$ (причем мы пренебрегаем членами выше третьей степени).

Коэффициент h можно сделать вещественным (этого можно добиться поворотом систем координат). Итак, функция Гамильтона в вещественных координатах (x, y) приводится к виду

$$H_0 = \frac{\varepsilon}{2} (x^2 + y^2) + a(x^3 - 3xy^2).$$

Коэффициент a зависит от расстройки частоты ε как от параметра. При $\varepsilon=0$ этот коэффициент в общем случае отличен от нуля. Поэтому мы можем сделать этот коэффициент равным 1 гладко зависящей от параметра заменой координат. Итак, нужно исследовать зависимость фазового портрета системы с функцией Гамильтона

$$H_0 = \frac{\varepsilon}{2} (x^2 + y^2) + (x^3 - 3xy^2)$$

на плоскости (x, y) от малого параметра ε .

Легко видеть, что эта перестройка состоит в следующем (рис. 239). При $\varepsilon=0$ линия нулевого уровня функции H_0 состоит из трех прямых, пересекающихся в нуле под углами 60° . При изменении ε все время существует линия уровня из трех прямых, причем эти три прямые перемещаются при изменении ε поступательно, всегда образуя равносторонний треугольник с центром в начале координат. Вершины этого треугольника — седловые кри-

точные точки функции Гамильтона. Критическая точка в начале координат при прохождении ϵ через нуль (т. е. при переходе через резонанс) превращается из минимума в максимум.

Таким образом, для системы с функцией Гамильтона H_0 начало координат является устойчивым положением равновесия при всех значениях параметра, кроме резонансного, а при резонансном значении — неустойчивым. При близких к резонансу значениях параметра треугольник вблизи начала координат, заполненный

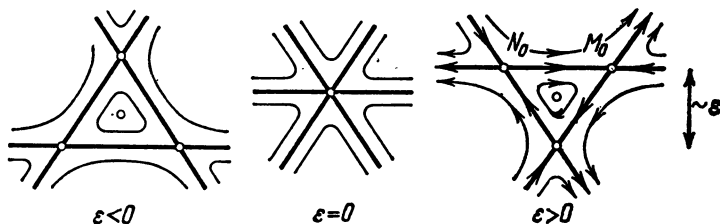


Рис. 239. Прохождение резонанса 3 : 1.

замкнутыми фазовыми кривыми, мал (порядка ϵ), так что «радиус устойчивости» начала координат при $\epsilon \rightarrow 0$ приближается к нулю: достаточно небольшого возмущения, начального условия (порядка ϵ), чтобы фазовая точка оказалась вне треугольника и начала уходить от положения равновесия.

Возвращаясь к исходной задаче о периодической траектории, мы приходим к следующим выводам (которые конечно не доказаны, поскольку мы отбросили члены выше третьей степени, но могут быть обоснованы):

1. В момент прохождения рассматриваемого резонанса 3 : 1 периодическая траектория в общем случае теряет устойчивость.

2. При близких к резонансному значениях параметра вблизи рассматриваемой периодической траектории на том же многообразии уровня энергии имеется неустойчивая периодическая траектория. Она замыкается, обойдя три раза вдоль исходной траектории и сделав один оборот вокруг нее. При резонансном значении параметра эта неустойчивая траектория сливается с исходной.

3. Расстояние указанной неустойчивой периодической траектории от исходной убывает при подходе к резонансу как первая степень расстройки частоты (т. е. как первая степень отклонения параметра от резонансного значения).

4. Через указанную неустойчивую траекторию на все том же трехмерном многообразии уровня энергии проходят две двумерные инвариантные поверхности, заполненные траекториями, приближающимися к этой неустойчивой периодической траектории при $t \rightarrow +\infty$ на одной поверхности и при $t \rightarrow -\infty$ на другой.

5. Расположение сепаратрис таково, что в пересечении с площадкой, трансверсальной исходной траектории, получается фигура, близкая к трем сторонам равностороннего треугольника и их продолжениям. Вершины треугольника — это точки пересечения неустойчивой периодической траектории с трансверсальной площадкой.

6. При начальных условиях внутри образованного сепаратрисами треугольника фазовая точка в течение длительного времени (порядка не менее $1/\epsilon$) остается вблизи от исходной периодической траектории (на расстоянии порядка ϵ), а при начальных условиях вне его — довольно быстро уходит на большое по сравнению с ϵ расстояние.

Д. Расщепление сепаратрис. В действительности сепаратрисы, о которых идет речь в предложениях 4, 5 и 6 устроены весьма сложно (из-за влияния неучтенных в нашем приближении членов выше третьей степени). Чтобы ясно представить себе картину, удобно рассмотреть двумерную площадку, трансверсально пересекающую исходную замкнутую траекторию в какой-либо из ее точек (и лежащую целиком в одном многообразии уровня энергии *).

Траектории, начинающиеся на этой площадке, снова пересекают ее через время, близкое к периоду обращения по исходной замкнутой траектории. Таким образом, возникает отображение окрестности точки пересечения замкнутой траектории с площадкой на площадке в площадку. Это отображение имеет неподвижную точку (в месте пересечения площадки с замкнутой траекторией) и близко к повороту на угол 120° вокруг этой точки, которую мы примем за начало координат на плоскости нашей площадки.

Рассмотрим теперь третью степень указанного выше отображения. Это — снова отображение некоторой окрестности нуля на плоскости площадки, оставляющее начало координат на месте. Но теперь уже это отображение близко к повороту на 360° , т. е. к тождественному отображению: оно осуществляется траекториями нашей системы за время, близкое к трем периодам рассматриваемой замкнутой траектории.

Приведенные выше вычисления дают нетривиальную информацию о строении этого «отображения за три периода». В самом деле, отбрасывая члены степени четыре и выше в функции Гамильтона, мы меняем члены степени три и выше у отображения. Стало быть, отображение за три периода, которое соответствует укороченной функции Гамильтона, аппроксимирует (с кубической ошибкой) настоящее отображение за три периода.

Но свойства отображения за три периода, отвечающего укороченной функции Гамильтона, нам известны, так как это есть

*) Здесь проявляется следующее общее явление: думать удобнее об отображениях за период, а считать легче с потоками.

отображение фазового потока системы с функцией Гамильтона $H_0(x, y)$ за время $b\lambda$ (доказательство основано на том, что через время $b\lambda$ наша вращающаяся система координат возвращается к исходному положению). Посмотрим теперь, какие из этих свойств сохраняются при возмущении третьего порядка малости относительно расстояния от неподвижной точки, а какие нет.

Обозначим отображение за три периода для укороченной системы через A_0 , а настоящее отображение за три периода через A .

1. Отображение A_0 включается в поток: оно является преобразованием за время $b\lambda$ в фазовом потоке с гамильтонианом H_0 .

Нет никаких оснований думать, что отображение A включается в поток.

2. Отображение A_0 выдерживает поворот на 120° : существует нетривиальный диффеоморфизм g , для которого $g^3 = E$ и который коммутирует с A_0 .

Нет никаких оснований думать, что отображение A коммутирует с каким-либо нетривиальным диффеоморфизмом g , для которого $g^3 = E$.

3. Отображение A_0 имеет три неустойчивых неподвижных точки на расстоянии порядка ϵ от начала координат, близкие к вершинам правильного треугольника. При достаточно малых отклонениях от резонанса (т. е. при достаточно малых ϵ) отображение A также имеет три неустойчивые неподвижные точки вблизи вершин равностороннего треугольника. Это вытекает из теоремы о неявной функции.

4. Сепаратрисы неподвижных точек отображения A_0 образуют (при близких к резонансу нерезонансных значениях параметра) фигуру, близкую к сторонам и продолжениям сторон равностороннего треугольника. Если начать с точки на одной из сторон треугольника, то при повторении отображения A_0 из этой точки получится последовательность точек на той же стороне треугольника, стремящаяся к одной из ограничивающих сторону вершин, скажем к M_0 . При применении A_0^{-1} получится последовательность, сходящаяся к другой вершине, которую мы обозначим через N_0 .

Каждая из трех неустойчивых неподвижных точек отображения A также имеет сепаратрисы, близкие к сторонам треугольника (рис. 240). А именно, те точки плоскости, которые стремятся к неподвижной точке M при применении к ним отображений A^n , $n \rightarrow +\infty$, образуют гладкую кривую Γ^+ , инвариантную относительно A , проходящую через точку M и вблизи точки M близкую к стороне M_0N_0 треугольника сепаратрис преобразования A_0 . Те же точки, которые стремятся к N при применении A^n , где $n \rightarrow -\infty$, образуют другую гладкую инвариантную кривую Γ^- , проходящую через точку N и также близкую к M_0N_0 вблизи точки N_0 .

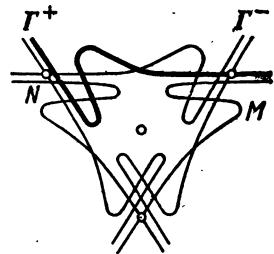


Рис. 240. Расщепление сепаратрис.

Однако две кривые Γ^+ и Γ^- , обе близкие к прямой M_0N_0 , отнюдь не обязаны совпадать. В этом и состоит явление расщепления сепаратрис, коренным образом отличающее поведение траекторий укороченной и полной систем.

Величина расщепления сепаратрис при малых ϵ экспоненциально мала, поэтому явление расщепления легко пропустить при вычислениях по той или иной схеме «теории возмущений». Однако это явление весьма важно в принципиальном отношении. Например, из его существования сразу следует *расходимость* рядов многочисленных вариантов теории возмущений (так как если бы ряды сходились, расщепления бы не было).

Вообще расходимость рядов теории возмущений (при хорошем приближении, даваемом несколькими первыми членами) обычно связана с тем, что ищется несуществующий объект. Если мы пытаемся подогнать изучаемое явление под схему, которая в действительности не ухватывает существенных черт явления, то неудивительно, что наши ряды расходятся.

Ряды Биркгофа (которые получатся если не ограничиваться нормализацией нескольких первых членов ряда Тейлора функции Гамильтона, а идти до бесконечности) — один из примеров формально состоятельной, но на самом деле расходящейся схемы теории возмущений. Если бы эти ряды сходились, то общая колебательная система с одной степенью свободы с периодическими коэффициентами приводилась бы вблизи положения равновесия к автономной нормальной форме и в ней не было бы расщепления сепаратрис (а на самом деле оно есть).

Возвращаясь к исходной замкнутой траектории, мы увидим, что трем неустойчивым неподвижным точкам преобразования A соответствует неустойчивая замкнутая траектория, близкая к утренней исходной. Существует семейство траекторий, стремящихся к этой неустойчивой траектории при $t \rightarrow +\infty$, и другое семейство траекторий, стремящихся к неустойчивой при $t \rightarrow -\infty$. Точки траекторий каждого из этих семейств образуют гладкую поверхность, содержащую нашу неустойчивую траекторию.

Эти две поверхности и есть сепаратрисы, о которых шла речь выше в утверждениях 4, 5, 6, стр. 359. При их пересечении с нашей трансверсальной площадкой получаются инвариантные кривые Γ^+ и Γ^- отображения A . Эти две кривые при своем пересечении образуют запутанную сеть, о которой А. Пуанкаре, впервые обнаруживший явление расщепления сепаратрис, писал: «Пересечения образуют нечто вроде решетки, или ткани, или сетки с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна сама себя пересекать, но она должна изгибаться столь сложным образом, чтобы пересечь бесконечное число раз все петли сети».

Приходится поражаться сложности этой фигуры, которую даже не пытаюсь начертить. Ничто не может дать нам лучшее представление о сложности проблемы трех тел и всех проблем динамики, где нет голоморфного интеграла и ряды Болина расходятся» (А. Пуанкаре, Новые методы небесной механики, Избранные труды, т. 2, «Наука», 1972, гл. 33).

Следует заметить, что в картине пересекающихся сепаратрис до сих пор многое неясно.

Е. Резонансы высших порядков. Резонансы следующих порядков также можно исследовать с помощью нормальной формы. Заметим при этом, что резонансы порядка выше 4 обычно не вызывают неустойчивости, так как в нормальной форме появляются члены четвертой степени, гарантирующие минимум или максимум функции H_0 даже в момент резонанса.

В случае резонанса порядка $n > 4$ типичная перестройка фазового портрета системы с функцией Гамильтона H_0 дается формулой

$$H_0 = \varepsilon\tau + \tau^2\alpha(\tau) + a\tau^{n/2} \sin n\varphi, \\ 2\tau = p^2 + q^2, \quad \alpha(0) = \pm 1,$$

и состоит в следующем (рис. 241).

При малом (порядка ε) отклонении частоты от резонанса на малом расстоянии (порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$) от положения равновесия в начале координат функция H_0 имеет $2n$ критических точек вблизи вершин правильного $2n$ -угольника с центром в начале координат. Половина этих критических точек — седла, а вторая половина — максимумы, если в начале координат минимум, и минимумы, если в начале координат максимум. Седла и устойчивые точки перемежаются. Все n седел лежат на одном уровне функции H_0 , и их сепаратрисы, соединяя последовательные седла, образуют n «островов», каждый из которых заполнен замкнутыми фазовыми кривыми, окружающими устойчивую точку. Ширина островов порядка $\varepsilon^{(n/4)-1}$. Замкнутые фазовые кривые внутри каждого острова называют *фазовыми колебаниями* (так как меняется в основном фаза колебания вокруг начала координат). Период фазовых колебаний растет при уменьшении расстройки частоты ε как $\varepsilon^{-n/4}$.

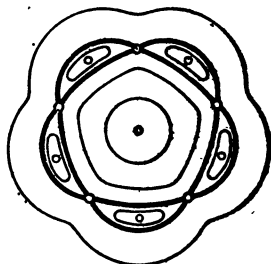


Рис. 241. Усредненный гамильтониан фазовых колебаний вблизи резонанса $\delta : 1$.

Внутри узкого кольца, образованного островами, ближе к началу координат, лежат замкнутые фазовые кривые, обходящие начало координат; вне кольца фазовые кривые также замкнуты, но движение по ним происходит в другую сторону, чем внутри кольца. Заметим, что радиус кольца имеет порядок $\sqrt{|\varepsilon|}$ независимо от порядка резонанса, лишь бы этот порядок был больше 4. При этом кольцо островов существует только при одном из двух знаков ε .

При переходе от укороченной системы с гамильтонианом H_0 к полной сепаратрисы расщепляются подобно тому, как описано

выше для резонанса порядка 3. Величина расщепления сепаратрис экспоненциально мала (порядка $e^{-1/\varepsilon^{n/4}}$), однако расщепление имеет принципиальное значение для исследования устойчивости, особенно в многомерном случае.

Возвращаясь к нашей исходной замкнутой траектории, мы приходим к следующей картине. При приближении к резонансу по оси ε с одной определенной стороны *) от периодической траектории ответвляются две другие: устойчивая и неустойчивая. Эти новые траектории замыкаются после n оборотов вдоль исходной траектории и удалены от исходной на расстояние порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$. Вблизи устойчивой траектории имеется зона медленных фазовых колебаний с периодом порядка $\varepsilon^{-n/4}$ и амплитудой порядка π/n в азимутальном направлении и порядка $\varepsilon^{(n/4)-1}$ в радиальном. Потери устойчивости исходной периодической траектории в момент прохождения резонанса не происходит, по меньшей мере в том приближении, которое мы рассматриваем.

Случай резонанса четвертого порядка стоит несколько особняком. Дело в том, что в этом случае в нормальной форме имеются как резонансные, так и нерезонансные члены четвертой степени. Вид фазовых кривых укороченной системы зависит от того, какой из этих членов нормальной формы перетянет: резонансный или нерезонансный. В первом случае перестройка такая же, как для резонанса третьего порядка, только вместо треугольника — квадрат. Во втором случае перестройка такая же, как при $n > 4$.

Заметим в заключение, что даваемое нормальной формой приближение тем лучше, чем ближе мы находимся к резонансу ($\varepsilon \ll 1$) и чем меньше отклонение начальной точки от периодической траектории. А именно, при приближении к точной соизмеримости периода замкнутой траектории с периодом колебаний соседних траекторий около нее и при приближении начального условия к замкнутой траектории возрастает промежуток времени, на котором наше приближение правильно описывает поведение фазовых кривых.

Никакого вывода о поведении незамкнутых фазовых кривых на бесконечном интервале времени (например, об устойчивости исходной периодической траектории по Ляпунову) из наших рассуждений не вытекает, так как отброшенные при приведении к нормальной форме члены высокой степени могут за бесконечное время совершенно изменить характер движения. В действительности в рассматриваемых условиях исходная периодическая траектория устойчива по Ляпунову, но доказательство требует существенно новых соображений по сравнению с нормальной формой Биркгофа (см. добавление 8).

*) В отличие от резонанса порядка 3, для которого ответвляющаяся неустойчивая периодическая траектория есть по обе стороны от резонанса.

ДОБАВЛЕНИЕ 8

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ И ТЕОРЕМА КОЛМОГорова

Имеющийся в нашем распоряжении набор точно решаемых «интегрируемых» задач невелик (одномерные задачи, движение точки в центральном поле, эйлерово и лагранжево движения твердого тела, задача двух неподвижных центров, движение по геодезическим на эллипсоиде). Однако, с помощью этих «интегрируемых случаев» можно получить довольно значительную информацию о движении многих важных систем, рассматривая интегрируемую задачу как первое приближение.

Примером такой ситуации является задача о движении планет вокруг Солнца по закону всемирного тяготения. Масса планет составляет примерно 0,001 массы Солнца, поэтому в первом приближении можно пренебречь взаимодействием планет друг с другом и учитывать только их притяжение Солнцем. В результате получается точно интегрируемая задача о движении невзаимодействующих планет вокруг Солнца; каждая планета независимо от остальных будет описывать свой кеплеров эллипс, и движение системы в целом будет условно-периодично. Если теперь учесть взаимодействие планет друг с другом, то кеплерово движение каждой планеты несколько изменится.

Небесно-механическая теория возмущений призвана учитывать это взаимодействие.

При этом ясно, что расчет на времена порядка 1000 лет не должен вызывать принципиальных трудностей. Однако если мы захотим исследовать большие промежутки времени, а особенно если мы заинтересуемся качественными вопросами о поведении точных решений уравнений движения на бесконечном интервале времени, то такие трудности возникают.

Дело в том, что накопление возмущений в течение большого по сравнению с 1000 лет промежутка времени может привести к полному изменению характера движения: например, планеты могут падать на Солнце, уходить от него и сталкиваться друг с другом.

Заметим, что к задаче о движении реальных планет вопрос о поведении решений уравнений движения на бесконечных промежутках времени имеет лишь косвенное отношение. Дело в том, что на интервалах времени порядка миллиардов лет сильно сказываются малые неконсервативные эффекты, неучтенные в уравнениях Ньютона. Таким образом, эффекты гравитационного взаимодействия планет реально существуют лишь в том случае, если они серьезно изменяют картину движения за конечное время, малое по сравнению с временем проявления неконсервативных эффектов.

При расчете движения на такое конечное время существенную пользу дают вычислительные машины, быстро определяющие движение планет на много тысяч лет вперед или назад.

Однако следует заметить, что даже применение современных вычислительных средств может оказаться неспособным предсказать влияние возмущений, если фазовая точка попадает в зону экспоненциальной неустойчивости.

Еще большее значение асимптотические и качественные методы имеют при исследовании движения заряженных частиц в магнитных полях, так как при этом частица обгоняет вычислительную машину и успевает сделать столь много оборотов, что машинное вычисление ее траектории невозможно даже в отсутствие экспоненциальной неустойчивости.

Для учета возмущений в небесной механике был разработан целый ряд методов. (Подробный разбор их имеется в книге: А. Пуанкаре, «Новые методы небесной механики», Избранные труды, т. 1 и 2, М., «Наука», 1971 и 1972 гг.) Особенностью всех этих методов является то, что они приводят к *расходящимся* рядам и потому не дают никакой информации о поведении движения в целом на бесконечных интервалах времени.

Причиной расходимости рядов теории возмущений являются «малые знаменатели»: целочисленные линейные комбинации частот невозмущенных движений, на которые приходится делить при вычислении влияния возмущений. При точном резонансе (т. е. при соизмеримости частот) эти знаменатели обращаются в нуль, а соответствующий член ряда теории возмущений становится бесконечно большим. Вблизи резонанса этот член ряда очень велик.

Так, например, Юпитер и Сатурн в своем движении вокруг Солнца проходят за сутки примерно 299 и 120,5 секунды дуги соответственно. Следовательно, знаменатель $2\omega_{\text{Ю}} - 5\omega_{\text{С}}$ весьма мал по сравнению с каждой из частот. Это приводит к большому долгопериодическому возмущению планет друг другом (его период около 800 лет); изучение Лапласом этого эффекта было одним из первых успехов теории возмущений.

Заметим, что трудность, вызванная малыми знаменателями, весьма существенна. Действительно, рациональные числа образуют всюду плотное множество. Поэтому в фазовом пространстве невозмущенной задачи всюду плотное множество образуют такие начальные условия, при которых имеются резонансы и малые знаменатели обращаются в нуль. Таким образом, функции, к которым приводят ряды теории возмущений, имеют всюду плотное множество особых точек.

Указанная здесь трудность характерна не только для задач небесной механики, но для всех задач, близких к интегрируемым.

(например, для задачи о движении асимметричного тяжелого волчка, приведенного в очень быстрое вращение). Пуанкаре даже называл *основной задачей динамики* задачу об исследовании возмущений условно-периодических движений в системе, заданной гамильтонианом:

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi), \quad \varepsilon \ll 1,$$

в переменных действие I — угол φ .

Здесь H_0 — гамильтониан невозмущенной задачи, а εH_1 — возмущение, являющееся 2π -периодической функцией угловых переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. В невозмущенной задаче ($\varepsilon = 0$) углы φ меняются равномерно, с постоянными частотами

$$\omega_k = \partial H_0 / \partial I_k,$$

а все переменные действия являются первыми интегралами.

Требуется исследовать фазовые кривые уравнений Гамильтона

$$\dot{I} = -\partial H / \partial \varphi, \quad \dot{\varphi} = \partial H / \partial I$$

в фазовом пространстве, которое является прямым произведением области в n -мерном пространстве с координатами I и n -мерного тора с угловыми координатами φ .

Существенное продвижение в исследовании возмущенных фазовых кривых этой задачи было начато в 1954 г. работой А. Н. Колмогорова «О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона», ДАН 98, № 4 (1954), 527—530. В настоящем добавлении излагаются основные результаты, полученные с тех пор в этой области. Доказательства можно найти в следующих работах:

В. И. Арнольд, Малые знаменатели I, Об отображениях окружности на себя, Известия АН СССР, 25 № 1 (1961), 21—86.

В. И. Арнольд, Малые знаменатели II, Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, УМН, 18 № 5 (1963), 13—40.

В. И. Арнольд, Малые знаменатели III, Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике, УМН, 18 № 6, (1963), 81—192.

V. I. Arnold, A. Avez, Problemes ergodiques de la mecanique classique, Paris, G. V. 1967.

Ю. Мозер, Об инвариантных кривых сохраняющего площадь отображения кольца в себя, Математика 6 : 5 (1963), 51—67. (Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl 11 a, N1 (1962), 1—20.)

Ю. Мозер, Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения, УМН т. 23, в. 4 (142) (1968), 179—238. (Annali della Scuola Norm. Sup. de Pisa, Ser. III, 20 N2 (1966), 265—315; N3 (1966), 499—535.)

Ю. Мозер, О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды, УМН, т. 24, № 2 (1969), 165—211. (Math. Ann. 169 (1967), 136—176.)

C. L. Siegel, J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer 1971.
S. Sternberg, Celestial Mechanics I, II. N. Y., Benjamin, 1969.

Прежде чем формулировать результаты, мы коротко обсудим поведение фазовых кривых невозмущенной задачи, уже изученное в гл. 10.

А. Невозмущенное движение. Система с гамильтонианом $H_0(I)$ имеет n первых интегралов в инволюции (n переменных действия). Каждое множество уровня всех этих интегралов представляет собой n -мерный тор в $2n$ -мерном фазовом пространстве. Этот тор инвариантен относительно фазового потока невозмущенной системы: каждая фазовая кривая, начавшаяся в точке такого тора, на нем и останется.

Движение фазовой точки по инвариантному тору $I = \text{const}$ является условно-периодическим. Частоты этого движения суть производные невозмущенного гамильтониана по переменным действия:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k(I), \text{ где } \omega_k = \partial H_0 / \partial I_k.$$

Следовательно, фазовая кривая всюду плотно заполняет тор такого числа измерений, сколько среди частот ω_k арифметически независимых.

Заметим, что частоты зависят от того, какой именно из торов мы рассматриваем, т. е. какие именно значения первых интегралов мы зафиксировали. Система n функций ω от n переменных I , вообще говоря, функционально независима; в таком случае мы можем просто нумеровать торы частотами, выбрав переменные ω за координаты в окрестности рассматриваемой точки в пространстве переменных действия I .

Случай, когда частоты функционально независимы, мы будем называть *невырожденным случаем*. Таким образом, условие невырожденности имеет вид

$$\det \left| \frac{\partial \omega}{\partial I} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right| \neq 0.$$

Итак, в невырожденном случае на различных инвариантных торах в фазовом пространстве невозмущенной задачи реализуются условно-периодические движения с разным числом частот. В частности, всюду плотное множество в фазовом пространстве образуют инвариантные торы, на которых число частот максимально возможное (т. е. n); такие торы называются *нерезонансными*.

Можно показать, что нерезонансные торы образуют в фазовом пространстве множество полной меры, так что мера Лебега объединения всех резонансных инвариантных торов невозмущенной невырожденной системы равна нулю. Тем не менее резонансные инвариантные торы существуют и перемежаются с нерезонансными таким образом, что они также образуют всюду плотное множество. Более того, всюду плотно множество резонансных торов с любым числом независимых частот от 1 до $n-1$. В частности, всюду плотное множество образуют такие инвариантные торы, на которых все фазовые кривые замкнуты (число независимых частот 1).

Заметим все же, что вероятность попасть на резонансный тор при случайном выборе начальной точки в фазовом пространстве

невозмущенной системы равна нулю (так же как вероятность попасть на рациональное число при случайном выборе вещественного числа). Таким образом, пренебрегая множествами меры нуль можно сказать, что почти все инвариантные торы в невырожденной невозмущенной системе нерезонансные и имеют полный набор из n арифметически независимых частот.

На нерезонансном торе траектория условно-периодического движения всюду плотна. Таким образом, для почти всех начальных условий фазовая кривая невозмущенной невырожденной системы всюду плотно заполняет инвариантный тор, размерность которого равна числу степеней свободы (т. е. половине размерности фазового пространства).

Чтобы лучше представить себе всю картину, рассмотрим случай двух степеней свободы ($n=2$). В этом случае фазовое пространство четырехмерно. Следовательно, множества уровня энергии трехмерны. Зафиксируем одно из таких множеств уровня. Это трехмерное многообразие, расслоенное на двумерные инвариантные торы, можно представить себе в обычном трехмерном пространстве как семейство концентрических торов, вложенных друг в друга (рис. 242).

Фазовые кривые являются обмотками этих торов, причем обе частоты обращения меняются от тора к тору. В общем случае от тора к тору будут меняться не только обе частоты, но их отношение. Если производная отношения частот по переменной действия, нумерующей тору на заданном множестве уровня функции H_0 , отлична от нуля, то мы скажем, что наша система *изоэнергетически невырождена*. Условие изоэнергетической невырожденности имеет (как нетрудно сосчитать) вид

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Условия невырожденности и изоэнергетической невырожденности независимы одно от другого, т. е. невырожденная система может быть изоэнергетически вырожденной, а изоэнергетически невырожденная — вырожденной. В n -мерном ($n > 2$) случае изоэнергетическая невырожденность означает невырожденность следующего отображения $n-1$ -мерного многообразия уровня функции H_0 от n переменных действия в проективное пространство размерности $n-1$:

$$I \mapsto (\omega_1(I) : \omega_2(I) : \dots : \omega_n(I)).$$

Итак, рассмотрим изоэнергетически невырожденную систему с двумя степенями свободы. Легко построить двумерную пло-



Рис. 242. Инвариантные торы в трехмерном многообразии уровня энергии.

щадку, трансверсально пересекающую двумерные торы нашего семейства (по семейству концентрических окружностей в модели в трехмерном евклидовом пространстве).

Фазовая кривая, начинающаяся на такой площадке, снова на нее возвращается, сделав оборот вокруг тора. В результате мы получаем новую точку на той же окружности, по которой тор пересекает площадку. Тем самым возникает отображение площадки на себя.

Это отображение плоскости на себя оставляет на месте концентрические меридианные окружности, по которым плоскость пересекает инвариантные торы. При этом каждая окружность поворачивается на некоторый угол, а именно на такую долю полного оборота, какую частота вдоль меридиана тора составляет от частоты вдоль экватора. Следовательно, если система изоэнергетически не вырождена, то угол поворота инвариантных окружностей на плоскости сечения будет меняться от одной окружности к другой.

Стало быть, на одних окружностях этот угол будет соизмерим с полным оборотом, на других же несоизмерим. Те и другие окружности будут образовывать всюду плотное множество, но на почти всех окружностях (в смысле меры Лебега) угол поворота несоизмерим с полным оборотом.

Соизмеримость или несоизмеримость следующим образом называются на поведении точек окружности при отображении площадки на себя. Если угол поворота соизмерим с полным оборотом, то после нескольких итераций отображения точка возвращается на прежнее место (число итераций тем больше, чем больше знаменатель дроби, выражающей угол поворота). Если же угол поворота несоизмерим с полным оборотом, то последовательные образы точки при повторении преобразования всюду плотно заполняют меридианную окружность.

Заметим еще, что соизмеримость соответствует резонансным торам, а несоизмеримость — нерезонансным. Заметим также, что из существования резонансных торов вытекает следующее обстоятельство. Рассмотрим некоторую степень отображения нашей площадки на себя, осуществляемого фазовыми кривыми. Пусть показатель степени является знаменателем дроби, выражающей отношение частот на одном из резонансных торов. Тогда возведенное в указанную степень отображение имеет целую окружность, сплошь состоящую из неподвижных точек (а именно, меридиан рассматриваемого резонансного тора).

Такое поведение неподвижных точек является противостественным для отображений сколько-нибудь общего вида, даже канонических (обычно неподвижные точки изолированы). В данном случае целая окружность неподвижных точек появилась из-за того, что мы рассматривали невозмущенную, интегрируемую систему.

При сколь угодно малом возмущении общего вида указанное свойство отображения (иметь целую окружность неподвижных точек) должно пропасть. Окружность из неподвижных точек должна рассыпаться, так что их останется только конечное число.

Иными словами, при малом возмущении нашей интегрируемой системы следует ожидать изменения качественной картины фазовых кривых хотя бы в том отношении, что целые инвариантные торы, заполненные замкнутыми фазовыми кривыми, должны распастись, причем останется конечное число замкнутых кривых, близких к невозмущенным, а остальные фазовые кривые будут вести себя сложнее. Мы уже встречались с таким случаем в добавлении 7 при исследовании фазовых колебаний вблизи резонанса.

Посмотрим теперь, что происходит при малом возмущении функции Гамильтона с нерезонансными инвариантными торами. Формальное применение принципа усреднения (т. е. первое приближение классической теории возмущений, см. § 52) приводит к выводу, что *никакой эволюции нерезонансный тор не претерпевает*.

Заметим, что здесь весьма существенна гамильтоновость возмущений, так как при неконсервативном возмущении переменные действия, очевидно, могут эволюционировать. В небесно-механической ситуации их эволюция означает вековое изменение больших полуосей кеплеровых эллипсов, т. е. падение планет на Солнце или их столкновение, или уход на большое расстояние за время, обратно пропорциональное величине возмущения. Если бы консервативные возмущения приводили к эволюции в первом приближении, это сказало бы на судьбе планет через время порядка 1000 лет. К счастью, порядок величины неконсервативных возмущений много меньше.

Формулируемая ниже теорема Колмогорова доставляет одно из оправданий приведенного вывода нестройной теории возмущений об отсутствии эволюции переменных действия.

Б. Инвариантные торы возмущенной системы.

Теорема. Если невозмущенная гамильтонова система не вырождена, то при достаточно малом консервативном гамильтоновом возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически, с числом частот, равным числу степеней свободы.

Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.

Доказательство этой теоремы А. Н. Колмогорова основано на следующих его двух замечаниях.

1. Зафиксируем нерезонансный набор частот невозмущенной системы так, чтобы частоты не только были независимы, но и не удовлетворяли приближенно никаким резонансным соотношениям малого порядка.

Точнее говоря, фиксируется набор частот ω , для которого существуют такие C и ν , что $|\langle \omega, k \rangle| > C |k|^{-\nu}$ при всех целых векторах $k \neq 0$.

Можно показать, что если ν достаточно велико (скажем, $\nu = n + 1$), то мера множества таких векторов ω (лежащих в фиксированной ограниченной области), для которых указанное условие нерезонантности нарушается, мала вместе с C .

Далее, будем искать вблизи нерезонансного инвариантного тора невозмущенной системы, соответствующего фиксированным значениям частот, такой инвариантный тор возмущенной системы, на котором происходит условно-периодическое движение в точности с теми самыми частотами, которые мы фиксировали и которые, стало быть, удовлетворяют выписанному выше условию нерезонантности.

Таким образом, вместо обычной для многих схем теории возмущений вариации частоты (состоящей во введении частот, зависящих от возмущения), следует сохранять частоты нерезонансными и постоянными, но зато подбирать начальные условия по данному возмущению так, чтобы обеспечить движение с фиксированными частотами. Добиться этого малым вместе с возмущением изменением начальных условий можно потому, что частоты меняются с переменными действия согласно условию невырожденности.

2. Второе замечание состоит в том, что для отыскания инвариантного тора вместо обычных для многих схем теории возмущений разложений в ряды по степеням возмущения можно использовать быстросходящийся метод типа ньютоновского метода касательных.

Метод касательных. Ньютона для отыскания корней алгебраических уравнений при начальной погрешности ε дает после n приближений ошибку порядка ε^{2^n} . Такая *сверхсходимость* позволяет парализовать влияние малых знаменателей, появляющихся в каждом приближении, и в результате удается не только провести бесконечное число приближений, но и доказать сходимость всей процедуры.

Предположения, в которых все это удается сделать, состоят в том, что невозмущенная функция Гамильтона $H_0(I)$ аналитична и невырождена, а возмущающая функция Гамильтона $\varepsilon H_1(I, \varphi)$ аналитична и 2π -периодична по угловым переменным φ . Присутствие малого параметра ε несущественно: важно лишь, чтобы возмущение было достаточно мало в какой-нибудь комплексной окрестности радиуса ρ вещественной плоскости переменных φ (меньше некоторой положительной функции $M(\rho, H_0)$).

Как показал Ю. Мозер, требование аналитичности можно заменить дифференцируемостью достаточно высокого порядка, если комбинировать метод Ньютона с предложенным Дж. Нэшем сглаживанием функций в каждом приближении.

Получающиеся в результате условно-периодические движения возмущенной системы с фиксированными частотами ω оказываются даже гладкими (в аналитическом случае — аналитическими) функциями параметра возмущения ε . Следовательно, их можно было бы искать и без метода Ньютона в виде ряда по степеням ε . Коэффициенты этого ряда, называемого рядом Линдштедта, действительно можно найти; однако доказать его сходимоть удается только косвенно, с помощью ньютонских приближений.

В. Зоны неустойчивости. Присутствие инвариантных торов в фазовом пространстве возмущенной задачи означает, что при большинстве начальных условий в системе; близкой к интегрируемой, движение остается условно-периодическим с максимальным набором частот.

Возникает, естественно, вопрос, что же происходит с остальными фазовыми кривыми, начальные условия которых попадают в щели между инвариантными торами, образовавшиеся на месте резонансных инвариантных торов невозмущенной задачи.

Распад резонансного тора, на котором число частот на 1 меньше полного, легко исследовать в первом приближении теории возмущений. Для этого нужно усреднить возмущение по тем $n-1$ -мерным инвариантным торами, на которые распадается резонансный инвариантный тор и которые всюду плотно заполняются фазовыми кривыми невозмущенной системы. В результате усреднения получим консервативную систему с одной степенью свободы (см. исследование фазовых колебаний вблизи резонанса в добавлении 7), которую легко изучить.

В рассматриваемом приближении мы получаем вблизи распавшегося n -мерного резонансного тора перемежающийся набор неустойчивых и устойчивых $n-1$ -мерных торов, причем вокруг устойчивых происходят фазовые колебания. Соответствующие им условно-периодические движения имеют полный набор из n частот, в том числе $n-1$ быструю частоту исходных колебаний и одну медленную (порядка $\sqrt{\varepsilon}$) частоту фазовых колебаний.

Однако не следует думать, что все отличие движений в невозмущенной и возмущенной системе сводится к возникновению «островов» фазовых колебаний. В действительности явление гораздо сложнее, чем описанное выше первое приближение. Одним из проявлений этого сложного поведения фазовых кривых возмущенной задачи является расщепление сепаратрис, обсуждавшееся в добавлении 7.

При исследовании движений возмущенной системы вне инвариантных торов следует различать случаи двух и большего числа степеней свободы. В случае двух степеней свободы размерность фазового пространства равна четырем и многообразие уровня энергии трехмерно. Поэтому инвариантные двумерные торы делят множество уровня энергии.

При этом начавшаяся в щели между двумя инвариантными торами возмущенной системы фазовая кривая вечно остается запертой между этими торами. Стало быть, как бы сложно ни вилась эта кривая, она не выходит из своей щели, и соответствующие переменные действия вечно остаются вблизи своих начальных условий.

Если же число степеней свободы n больше двух, то n -мерные инвариантные торы не делят $2n-1$ -мерное многообразие уровня энергии, но расположены в нем подобно точкам на плоскости или линиям в пространстве. В этом случае «щели», отвечающие разным резонансам, соединяются друг с другом, поэтому инвариантные торы не препятствуют начавшейся вблизи резонанса фазовой кривой уйти далеко. Стало быть, нет оснований ожидать, что переменные действия вдоль такой фазовой кривой будут оставаться близкими к своим начальным значениям во все моменты времени.

Иными словами, в системах с двумя степенями свободы (удовлетворяющих условию изоэнергетической невырожденности, вообще говоря, выполненному) при достаточно малых возмущениях переменные действия вдоль фазовой траектории не только не имеют векового возмущения ни в каком приближении теории возмущений (т. е. мало меняются в течение времени порядка $(1/\varepsilon)^N$ при любом N , где ε — величина возмущений), но и вечно остаются вблизи своих начальных значений как для нерезонансных фазовых кривых, условно-периодически заполняющих двумерные торы (и составляющих большую часть фазового пространства), так и при остальных начальных условиях.

В то же время существуют удовлетворяющие всем условиям невырожденности системы с большим двух числом степеней свободы, в которых, несмотря на то, что при большинстве начальных условий движение условно-периодично, при некоторых начальных условиях возможен медленный уход переменных действия от их начальных значений. Средняя скорость этого ухода в имеющихся примерах *) оказывается порядка $\varepsilon^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$, т. е. эта скорость убывает при уменьшении возмущения быстрее любой его степени. Поэтому неудивительно, что указанный уход не обнаруживается ни в каком приближении теории возмущений (здесь под средней скоростью понимается отношение приращения переменных действия к времени, так что фактически речь идет о приращении порядка 1 за большое время порядка $\varepsilon^{1/\sqrt{\varepsilon}}$).

Оценка сверху средней скорости ухода переменных действия от начальных условий в общих системах канонических уравнений

*) См. В. И. Арнольд, Неустойчивость динамических систем со многими степенями свободы, Доклады АН СССР 156, № 1 (1964), 9—12.

Гамильтона с n степенями свободы, близких к интегрируемым, содержится в недавней работе Н. Н. Нехорошева *).

Эта оценка, как и приведенная выше оценка снизу, имеет вид e^{-1/ε^d} ; таким образом, приращение переменных действия мало, пока время мало по сравнению с e^{1/ε^d} , если $\varepsilon < \varepsilon_0$. Здесь ε — величина возмущения, а d — заключенное между 0 и 1 число, определяемое, как и ε_0 , свойствами невозмущенного гамильтониана H_0 . При этом на невозмущенный гамильтониан накладывается некоторое условие невырожденности (которое длинно формулируется, но которое, вообще говоря, выполнено; в частности, достаточна квадратичная выпуклость невозмущенного гамильтониана, т. е. знакоопределенность второго дифференциала функции H_0).

Из указанной оценки сверху видно, что вековые изменения переменных действия не улавливаются ни в каком приближении теории возмущений, так как средняя скорость этих изменений экспоненциально мала. Заметим также, что вековые изменения переменных действия, по-видимому, не имеют направленного характера, а представляют собой более или менее случайное блуждание по резонансам вокруг инвариантных торов. Подробное обсуждение возникающих здесь вопросов можно найти в статье: Г. М. З а с л а в с к и й и Б. В. Ч и р и к о в, «Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний», Успехи физических наук, т. 105, № 1 (1971), 3 — 39.

Г. Разные варианты теоремы об инвариантных торах. Аналогичные теореме о сохранении инвариантных торов в автономной системе утверждения доказаны для неавтономных уравнений с периодическими коэффициентами и для симплектических отображений.

Другие случаи, где имеют место аналогичные утверждения, связаны с теорией малых колебаний в окрестности положения равновесия автономной системы или системы с периодическими коэффициентами, а также в окрестности замкнутой фазовой кривой фазового потока или в окрестности неподвижной точки симплектического отображения.

Условия невырожденности, нужные в разных случаях, различны. Поэтому здесь для справок приведены эти условия невырожденности. Мы ограничиваемся простейшими требованиями невырожденности, которые все выполнены в системах «общего положения». Во многих случаях требования невырожденности можно ослабить, но достигаемый при этом выигрыш не окупает усложнения формулировки.

1. Автономная система. Функция Гамильтона

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi), \quad I \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad \varphi \bmod 2\pi \in T^n.$$

*) Н. Н. Нехорошев, О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, Функциональный анализ и его приложения, т. 5, вып. 4 (1971), 82—83.

Условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right| \neq 0$$

гарантирует сохранение *) большинства инвариантных торов при малом возмущении ($\varepsilon \ll 1$).

Условие изоэнергетической невырожденности

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

гарантирует существование на каждом многообразии уровня энергии множества инвариантных торов, дополнение к которому имеет малую меру. Частоты на этих торах, вообще говоря, зависят от величины возмущения, но отношения частот сохраняются при изменении ε .

Если $n=2$, то условие изоэнергетической невырожденности гарантирует также устойчивость переменных действия в том смысле, что они остаются вечно вблизи своих начальных значений при достаточно малом возмущении.

2. Периодическая система а. Функция Гамильтона:

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, t), \\ I \in G \subset \mathbb{R}^n, \varphi \bmod 2\pi \in T^n;$$

возмущение 2π -периодично не только по φ , но и по t . Невозмущенную систему естественно рассматривать в $2n+1$ -мерном пространстве $\{(I, \varphi, t)\} = \mathbb{R}^n \times T^{n+1}$. Инвариантные торы имеют размерность $n+1$. Условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right| \neq 0$$

гарантирует сохранение большинства $n+1$ -мерных инвариантных торов при малом возмущении ($\varepsilon \ll 1$).

Если $n=1$, то это условие невырожденности гарантирует также устойчивость переменной действия в том смысле, что она вечно остается вблизи своего начального значения при достаточно малом возмущении.

3. Отображение $(I, \varphi) \mapsto (I', \varphi')$ « $2n$ -мерного кольца». Производящая функция

$$S(I', \varphi) = S_0(I') + \varepsilon S_1(I', \varphi), \quad I' \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in T^n.$$

*) Разумеется, при возмущении горы несколько деформируются.

Условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 S_0}{\partial I'^2} \right| \neq 0$$

гарантирует сохранение большинства инвариантных торов невозмущенного отображения $((I, \varphi) \mapsto (I, \varphi + \partial S_0 / \partial I))$ при малом возмущении ($\varepsilon \ll 1$).

Если $n = 1$, то получается сохраняющее площади отображение обычного кругового кольца на себя. Невозмущенное отображение представляет собой на каждой окружности $I = \text{const}$ поворот. Условие невырожденности означает в этом случае, что угол поворота от одной окружности к другой меняется.

Инвариантные торы в случае $n = 1$ превращаются в обычные окружности. В этом случае теорема гарантирует, что при повторении отображения все образы точки будут оставаться вблизи той окружности, на которой лежала исходная точка, если возмущение достаточно мало.

4. Окрестность положения равновесия (автономный случай). Положение равновесия предполагается устойчивым в линейном приближении, так что определены n собственных частот $\omega_1, \dots, \omega_n$. Предполагается, что между собственными частотами нет резонансных соотношений

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0 \text{ с целыми } k_i, 0 < \sum |k_i| \leq 4.$$

Тогда функцию Гамильтона можно привести к нормальной форме Биркгофа (см. добавление 7)

$$H = H_0(\tau) + \dots,$$

где $H_0(\tau) = \sum \omega_k \tau_k + \frac{1}{2} \sum \omega_{kl} \tau_k \tau_l$, а точки означают члены выше четвертой степени относительно расстояния от положения равновесия.

Условие невырожденности

$$\det |\omega_{kl}| \neq 0$$

гарантирует существование множества инвариантных торов почти полной меры в достаточно малой окрестности положения равновесия.

Условие изоэнергетической невырожденности

$$\det \begin{vmatrix} \omega_{kl} & \omega_k \\ \omega_l & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

гарантирует существование такого множества инвариантных торов

на каждом множестве уровня энергии (достаточно близком к критическому).

В случае $n=2$ условие изоэнергетической невырожденности заключается в том, что квадратичная часть функции H_0 не должна делиться на линейную. В этом случае изоэнергетическая невырожденность гарантирует устойчивость положения равновесия по Ляпунову.

5. Окрестность положения равновесия (периодический случай). Здесь снова предполагается устойчивость в линейном приближении, так что определены n собственных частот $\omega_1, \dots, \omega_n$. Предполагается, что между собственными частотами и частотой изменения коэффициентов (которую мы будем считать равной единице) нет резонансных соотношений

$$k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n + k_0 = 0 \text{ с } 0 < \sum_{i=1}^n |k_i| \leq 4.$$

Тогда функцию Гамильтона можно привести к нормальной форме Биркгофа такого же вида, как в автономном случае, но с 2π -периодическим по времени остаточным членом.

Условие невырожденности

$$\det |\omega_{kl}| \neq 0$$

гарантирует существование $n+1$ -мерных инвариантных торов в $2n+1$ -мерном расширенном фазовом пространстве, близких к окружности $\tau=0$, изображающей положение равновесия.

В случае $n=1$ условие невырожденности сводится к отличию от нуля производной периода малых колебаний по квадрату амплитуды малых колебаний. В этом случае невырожденность гарантирует устойчивость положения равновесия по Ляпунову.

6. Неподвижная точка отображения. Здесь предполагается, что все $2n$ собственных чисел линеаризации канонического отображения в неподвижной точке имеют модуль 1 и не удовлетворяют резонансным соотношениям низкого порядка

$$\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} = 1, \quad |k_1| + \dots + |k_n| \leq 4$$

(где $2n$ собственных чисел — это $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$).

Тогда отображение, если пренебречь членами выше третьей степени в ряду Тейлора в неподвижной точке, записывается в нормальной форме Биркгофа

$$(\tau, \varphi) \mapsto (\tau, \varphi + \alpha(\tau)), \text{ где } \alpha(\tau) = \partial S / \partial \tau,$$

$S = \sum \omega_k \tau_k + \frac{1}{2} \sum \omega_{kl} \tau_k \tau_l$ (обычные координаты в окрестности положения равновесия — это $p_k = \sqrt{2\tau_k} \cos \varphi_k$, $q_k = \sqrt{2\tau_k} \sin \varphi_k$).

Условие невырожденности

$$\det |\omega_{kl}| \neq 0$$

гарантирует существование n -мерных инвариантных торов (близких к торам $\tau = \text{const}$), образующих множество почти полной меры в достаточно малой окрестности положения равновесия.

Если $n = 1$, то мы имеем дело с отображением обычной плоскости на себя, а инвариантные торы превращаются в окружности. Условие невырожденности означает, что для нормальной формы производная угла поворота окружности по площади, ограниченной этой окружностью, отлична от нуля (в неподвижной точке и, следовательно, в некоторой ее окрестности).

В случае $n = 1$ условие невырожденности гарантирует устойчивость неподвижной точки отображения по Ляпунову. Заметим, что в этом случае условие отсутствия младших резонансов имеет вид

$$\lambda^3 \neq 1, \quad \lambda^4 \neq 1.$$

Таким образом, неподвижная точка сохраняющего площадь отображения плоскости на себя устойчива по Ляпунову, если линейная часть отображения является поворотом на угол, не кратный 90° и 120° , и если отличен от нуля коэффициент ω_{11} в нормальной форме Биркгофа (гарантирующий нетривиальную зависимость угла поворота от радиуса).

Выше мы нигде не останавливались на условиях гладкости, предполагаемых в этих теоремах. Минимальная необходимая гладкость неизвестна ни в одном случае. В качестве примера можно указать, что последнее предложение об устойчивости неподвижных точек отображений плоскости на себя было вначале доказано Ю. Мозером в предположении 333-кратной дифференцируемости, и лишь впоследствии (усилиями Мозера и Рюссмана) число производных было понижено до 6.

Д. Приложения теоремы об инвариантных торах и ее обобщений. Существует много механических задач, к которым применимы сформулированные выше теоремы. В качестве одной из простейших задач такого рода можно указать движение маятника под действием периодически меняющегося внешнего поля или под действием вертикальных колебаний точки подвеса.

Известно, что в отсутствие параметрического резонанса ниже положение равновесия маятника устойчиво в линейном приближении. *Устойчивость этого положения равновесия с учетом нелинейных эффектов* (при дополнительном предположении отсутствия резонансов порядков три и четыре) может быть доказана лишь с помощью теорем об инвариантных торах.

Аналогичным образом можно использовать теорему об инвариантных торах для исследования условно-периодических движений системы связанных нелинейных осцилляторов.

Другой пример доставляет геодезический поток на выпуклой поверхности, близкой к эллипсоиду. В этой системе две степени свободы, и мы убеждаемся, что *большинство геодезических на близкой к трехосному эллипсоиду поверхности колеблется между двумя «каустиками», близкими к линиям кривизны поверхности, всюду плотно заполняя кольцо между ними.* В то же время мы приходим к теоремам об устойчивости двух замкнутых геодезических, полученных при деформации поверхности из двух эллипсов, содержащих среднюю ось эллипсоида (в отсутствие резонансов порядков 3 и 4).

В качестве еще одного примера можно рассмотреть замкнутые траектории на бильярдном столе любой выпуклой формы. Среди замкнутых бильярдных траекторий имеются устойчивые в линейном приближении, и мы можем заключить, что в общем случае они по-настоящему устойчивы. Примером такой устойчивой бильярдной траектории является малая ось эллипса и, следовательно, *близкая к малой оси эллипса замкнутая бильярдная траектория на бильярде, близком к эллипсу, устойчива.*

Применение теорем об инвариантных торах к задаче о вращении несимметричного тяжелого твердого тела позволяет рассмотреть неинтегрируемый случай тела, приведенного в быстрое вращение. Задача о быстром вращении математически эквивалентна задаче о движении с умеренной скоростью в слабом поле тяжести: существенным параметром является отношение потенциальной энергии к кинетической. Если этот параметр мал, то мы можем использовать в первом приближении эйлерово движение твердого тела.

Применяя теоремы об инвариантных торах к задаче с двумя степенями свободы, которая получается после исключения циклической координаты (вращения вокруг вертикали), мы приходим к следующему выводу о движении быстро вращающегося тела: *если кинетическая энергия вращения тела достаточно велика по сравнению с потенциальной, то длина вектора кинетического момента и его наклон к горизонту вечно остаются вблизи своих начальных значений.*

Из этого вытекает, что движение тела будет вечно близким к комбинации движения Эйлера — Пуансо с азимутальной процессией, исключая, однако, случай, когда начальные значения кинетической энергии и полного момента близки к таким, для которых тело может вращаться вокруг средней оси симметрии. В этом последнем случае, реализующемся лишь при специальных начальных условиях, вследствие расщепления сепаратрис вблизи средней оси возникает более сложное кувыркание около средней оси, чем в движении Эйлера — Пуансо.

Одним из обобщений теоремы об инвариантных торах является теорема о вечной адиабатической инвариантности переменной

действия в одномерной колебательной системе с периодически меняющимися параметрами. Здесь следует предположить, что закон изменения параметров задан фиксированной гладкой периодической функцией медленного времени, а малым параметром задачи является отношение периода собственных колебаний и периода изменения параметров.

Тогда, *если период изменения параметров достаточно велик, то изменение адиабатического инварианта фазовой точки останется малым в течение бесконечного промежутка времени.*

Аналогичным образом доказывается *вечная адиабатическая инвариантность переменной действия в задаче о движении заряженной частицы в аксиально-симметричном магнитном поле.* Нарушение аксиальной симметрии в этой задаче увеличивает число степеней свободы с двух до трех, так что инвариантные торы перестают делить многообразие уровня энергии и становится существенным блуждание фазовой кривой по резонансным зонам.

Наконец, в применении к задаче трех (или многих) тел удастся найти *условно-периодические движения «планетного типа».* Чтобы описать эти движения, нужно сказать несколько слов о следующем после кеплеровского приближении в задаче о движении планет. Для простоты мы ограничимся здесь плоской задачей.

Рассмотрим для каждого кеплерова эллипса вектор, соединяющий фокус эллипса (т. е. Солнце) с центром эллипса. Этот вектор, называемый *вектором Лапласа*, характеризует как величину эксцентриситета орбиты, так и направление на перигелий.

Взаимодействие планет друг с другом приводит к тому, что кеплеров эллипс (и, следовательно, вектор Лапласа) слегка меняется со временем. При этом существует большая разница между изменением большой полуоси и изменением вектора Лапласа. А именно, большая полуось не имеет вековых возмущений, т. е. в первом приближении лишь слегка колеблется вокруг своего среднего значения («теорема Лапласа»). Вектор же Лапласа совершает как периодические колебания, так и вековое движение. Вековое движение получится, если размазать каждую планету по ее орбите пропорционально времени, затрачиваемому на прохождение участка орбиты, и заменить притяжение планет притяжением полученных колец, т. е. если усреднить возмущения по быстрым движениям. Истинное движение вектора Лапласа получается из векового наложением малых колебаний; эти колебания весьма существенны, если нас интересует малый интервал времени (годы), но их эффект становится малым по сравнению с эффектом векового движения, если рассмотреть большой интервал времени (тысячелетия).

Вычисления (проведенные еще Лагранжем) показывают, что вековое движение вектора Лапласа каждой из n планет, движущихся в одной плоскости, состоит в следующем (если пренебречь

квадратами эксцентриситетов орбит по сравнению с самими эксцентриситетами).

На плоскости орбиты планеты нужно расположить n векторов фиксированных длин, равномерно вращающихся каждый со своей угловой скоростью. Вектор Лапласа — их сумма.

Такое описание движения вектора Лапласа получается потому, что усредненная по быстрым движениям гамильтонова система, описывающая вековое движение вектора Лапласа, имеет положение равновесия, соответствующее нулевым эксцентриситетам. Описанное движение вектора Лапласа — это разложение малых колебаний вблизи указанного положения равновесия на собственные колебания. Угловые скорости равномерно вращающихся составляющих вектора Лапласа — это собственные частоты, а длины этих составляющих определяют амплитуды собственных колебаний.

Заметим, что движение вектора Лапласа Земли является, по-видимому, одним из факторов, с которым и связаны ледниковые периоды. Дело в том, что при увеличении эксцентриситета орбиты Земли время, которое она проводит вблизи Солнца, уменьшается, а вдали от него — увеличивается (по закону площадей); итак, климат становится более суровым при увеличении эксцентриситета. Величина этого эффекта такова, что, например, количество солнечной энергии, получаемое за год на широте Ленинграда может достигать значений, которые сейчас соответствуют широтам Киева (при уменьшении эксцентриситета) и Таймыра (при его увеличении). Характерное время изменения эксцентриситета (десятки тысяч лет) хорошо согласуется с периодом наступления ледников.

Теоремы об инвариантных торах приводят к выводу, что при достаточно малой массе планет в фазовом пространстве задачи имеется множество положительной меры, заполненное такими условно-периодическими фазовыми кривыми, что соответствующее движение планет близко к движению по медленно меняющимся эллипсам малых эксцентриситетов, причем движение векторов Лапласа близко к тому, которое дается описанным выше приближением. Более того, если массы планет достаточно малы, то движения описанного типа заполняют большую часть области фазового пространства, соответствующей в кеплеровом приближении движениям планет в одну сторону по непересекающимся эллипсам малых эксцентриситетов.

Число степеней свободы в плоской задаче n планет равно $2n$, если считать Солнце неподвижным. Интеграл кинетического момента позволяет исключить одну циклическую координату, однако остается еще слишком много переменных, чтобы инвариантные торы делили многообразие уровня энергии (даже если планет всего две, это многообразие пятимерное, а торы трехмерные). Поэтому в рассматриваемой задаче не удастся сделать выводы о сохранении больших полуосей в течении бесконечного интервала времени для всех начальных условий, но только для большинства.

Задача с двумя степенями свободы получается при дальнейшей идеализации. Заменяем одну из двух планет «астероидом», который движется в поле второй планеты («Юпитера»), не возмущая движения последнего.

Задача о движении такого астероида называется *ограниченной задачей трех тел*. Плоская ограниченная задача трех тел приводит к системе с двумя степенями свободы, периодически зависящей от времени, для движения астероида. Если же вдобавок орбита Юпитера круговая, то во вращающейся вместе с ним системе координат для движения астероида получается автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы — так называемая плоская ограниченная круговая задача трех тел.

В этой задаче имеется малый параметр — отношение масс Юпитера и Солнца. Нулевому значению параметра отвечает невозмущенное кеплерово движение астероида, изображающееся в нашем четырехмерном фазовом пространстве условно-периодическим движением по двумерному тору (так как система координат вращается). Одна из частот этого условно-периодического движения одинакова при всех начальных условиях: это угловая скорость вращения системы координат, т. е. частота обращения Юпитера вокруг Солнца. Вторая же частота зависит от начальных условий (эта частота обращения астероида вокруг Солнца) и меняется на фиксированном трехмерном многообразии уровня функции Гамильтона.

Следовательно, условие невырожденности в нашей задаче не выполняется, но условие изоэнергетической невырожденности выполняется. Итак, теорема Колмогорова применима, и мы заключаем, что большинство инвариантных торов с иррациональным отношением частот сохраняется в случае, когда масса возмущающей планеты (Юпитера) отлична от нуля, но достаточно мала.

Далее, двумерные инвариантные торы делят трехмерное многообразие уровня функции Гамильтона. Следовательно, *величина большой полуоси и эксцентриситет кеплерова эллипса астероида будут вечно оставаться вблизи своих начальных значений, если в начальный момент кеплеров эллипс не пересекал орбиту возмущающей планеты и если масса этой планеты достаточно мала.*

При этом в неподвижной системе координат кеплеров эллипс астероида может медленно поворачиваться, так как наша система лишь изоэнергетически невырождена, и поэтому при возмущении инвариантного тора сохраняются не частоты, а только их отношение. В результате возмущения частота азимутального движения перигелия астероида в подвижной системе координат может сделаться слегка отличной от частоты Юпитера, и тогда в неподвижной системе перигелий будет медленно поворачиваться.

ДОБАВЛЕНИЕ 9

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ, ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В своем исследовании периодических решений задач небесной механики А. Пуанкаре построил весьма простую модель, уже содержащую основную трудность задачи. Такой моделью является сохраняющее площади отображение плоского кругового кольца на себя.

Отображения указанного вида возникают при исследовании динамических систем с двумя степенями свободы. А именно, отображение двумерной поверхности сечения на себя строится так: каждая точка поверхности сечения переходит в следующую точку пересечения выпущенной из этой точки фазовой кривой с поверхностью сечения (см. добавление 7).

При этом замкнутым фазовым кривым соответствуют неподвижные точки отображения или его степеней. И обратно, каждая неподвижная точка отображения или его степени определяет замкнутую фазовую кривую.

Таким образом, вопрос о существовании периодических решений задач динамики сводится к вопросу о неподвижных точках сохраняющих площади отображений кольца на себя.

Занимаясь такими отображениями, Пуанкаре пришел к следующей теореме.

А. Неподвижные точки отображения кольца на себя.

Теорема. Пусть дано сохраняющее площади гомеоморфное отображение плоского кругового кольца на себя. Предположим, что граничные окружности кольца сдвигаются отображением в разные стороны. Тогда это отображение имеет не менее двух неподвижных точек.

Условие, что граничные окружности сдвигаются в разные стороны, означает, что если выбрать в кольце координаты $(x, y \bmod 2\pi)$, так что граничные окружности будут $x = a$ и $x = b$, то отображение задается формулами

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), y + g(x, y)),$$

где функции f и g непрерывны и 2π -периодичны по y , причем $f(a, y) \equiv a$, $f(b, y) \equiv b$ и $g(a, y) < 0$, $g(b, y) > 0$ при всех y .

Доказательство этой теоремы, опубликованной Пуанкаре незадолго до его смерти, было дано лишь позже Дж. Д. Биркгофом (см. его книгу «Динамические системы», М., 1941).

При этом до сих пор остаются открытыми многие вопросы, связанные с этой теоремой и особенно с попытками ее многомерного обобщения, важными для исследования периодических решений задач с большим числом степеней свободы.

Дело в том, что рассуждение, с помощью которого Пуанкаре пришел к своей теореме, применимо в целом ряде других случаев. Однако хитрое доказательство, данное Биркгофом, плохо поддается обобщению. Поэтому неизвестно, правильны ли выводы, которые подсказывает рассуждение Пуанкаре, за пределами теоремы о двумерном кольце. Рассуждение, о котором идет речь, состоит в следующем.

Б. Связь между неподвижными точками отображения и критическими точками производящей функции. Будем задавать симплектический диффеоморфизм кольца

$$(x, y) \mapsto (X, Y)$$

с помощью производящей функции $Xy + S(X, y)$, где функция S 2π -периодична по y . Для такой записи диффеоморфизма нужно, чтобы $\partial X/\partial x \neq 0$. Тогда

$$dS = (x - X) dy + (Y - y) dX,$$

и следовательно, неподвижные точки диффеоморфизма являются критическими точками функции $F(x, y) = S(X(x, y), y)$. Последнюю функцию F всегда можно построить, определив ее как интеграл от формы $(x - X) dy + (Y - y) dX$. Градиент этой функции направлен либо внутрь кольца, либо наружу на обеих граничных окружностях одновременно (в силу условия о вращении в разные стороны).

Но всякая гладкая функция в кольце, градиент которой на обеих граничных окружностях направлен внутрь кольца (или вовне его) имеет внутри кольца критическую точку (максимум или минимум). Более того, можно показать, что число критических точек такой функции в кольце не меньше двух. Следовательно, мы могли бы утверждать, что наш диффеоморфизм имеет не менее двух неподвижных точек, если бы мы были уверены, что каждая критическая точка функции F является неподвижной точкой отображения.

К сожалению, последнее верно лишь при дополнительном условии, что $\partial X/\partial x \neq 0$, при котором можно выразить F через X и y . Таким образом, наше рассуждение проходит для отображений, не слишком сильно отличающихся от тождественного. На-

пример, достаточно, чтобы производные производящей функции S были меньше 1.

Некоторое усовершенствование того же рассуждения (с другим выбором производящей функции *) показывает, что достаточно даже, чтобы собственные числа матрицы Якоби $D(X, Y)/D(x, y)$ ни в одной точке не были равны -1 , т. е. чтобы наше отображение не переворачивало бы касательное пространство ни в одной точке. К сожалению, все такие условия нарушаются в некоторых точках для отображений, далеких от тождественного. Доказательство теоремы Пуанкаре в общем случае использует совсем иные соображения.

Связь неподвижных точек отображения с критическими точками производящих функций кажется более глубоким фактом, чем сама теорема об отображениях двумерного кольца.

Ниже приведено несколько примеров, в которых эта связь приводит к содержательным выводам, правда, при некоторых ограничениях, необходимость которых неясна.

В. Симплектические диффеоморфизмы тора. Рассмотрим симплектический диффеоморфизм тора, оставляющий на месте центр тяжести

$$(x, y) \mapsto (x + f(x, y), y + g(x, y)) = (X, Y),$$

где x и $y \bmod 2\pi$ — угловые координаты на торе, симплектичность означает равенство 1 якобиана $D(X, Y)/D(x, y)$, а условие сохранения центра тяжести состоит в том, что средние значения функций f и g равны нулю.

Теорема. Такой диффеоморфизм имеет не менее четырех неподвижных точек, считая кратности, и не менее трех геометрически различных, по меньшей мере в предположении, что собственные числа матрицы Якоби ни в одной точке не равны -1 .

Доказательство основано на рассмотрении функции на торе, заданной формулой

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \int (X - x)(dY + dy) - (Y - y)(dX + dx),$$

и на том, что гладкая функция на торе имеет не менее четырех критических точек (считая кратности), в том числе не менее трех геометрически различных.

Попытки доказательства этой теоремы без ограничения на собственные числа наталкиваются на трудности, очень похожие на те, с которыми столкнулся Пуанкаре в теореме о кольце.

Заметим, что теорема о кольце вытекала бы из теоремы о торе, если бы в последней можно было отбросить условие на собственные числа. В самом

*) $d\Phi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X-x & Y-y \\ dX+dx & dY+dy \end{vmatrix}$.

деле, составим тор из двух экземпляров нашего кольца, вставив вблизи каждой из двух граничных окружностей еще по узкому соединительному кольцу.

Тогда мы можем достроить наше отображение кольца до симплектического диффеоморфизма тора так, что: 1) на каждом из двух больших колец диффеоморфизм будет совпадать с исходным, 2) на каждом из соединительных колец диффеоморфизм не будет иметь неподвижных точек, 3) центр тяжести будет оставаться на месте.

Построение такого диффеоморфизма тора, использует свойство вращения граничных окружностей в разные стороны. На каждом соединительном кольце все точки сдвигаются в ту же сторону, что и на обеих окружностях, ограничивающих соединительное кольцо. Поскольку направления сдвига на обоих соединительных кольцах противоположны, величину сдвига можно подобрать так, чтобы обеспечить сохранение центра тяжести.

Теперь из четырех неподвижных точек на торе две должны лежать в исходном кольце, и мы получаем из теоремы о торе теорему о кольце.

Сформулированная выше теорема о торе допускает обобщение на другие симплектические многообразия, как двумерные так и многомерные. Чтобы сформулировать эти обобщения, нужно прежде всего переформулировать условие сохранения центра тяжести.

Пусть $g: M \rightarrow M$ — симплектический диффеоморфизм. Мы скажем, что диффеоморфизм g гомологичен тождественному, если его можно соединить с тождественным диффеоморфизмом (оставляющим на месте все точки многообразия M) гладкой кривой g_t , состоящей из симплектических диффеоморфизмов, так, что поле скоростей \dot{g}_t в каждый момент времени t имеет однозначную функцию Гамильтона. Можно доказать, что симплектические диффеоморфизмы, гомологичные тождественному, образуют коммутант связной компоненты единицы в группе всех симплектических диффеоморфизмов многообразия.

В случае, когда наше многообразие — двумерный тор, гомологичные тождественному симплектические диффеоморфизмы — это в точности те, которые мы назвали выше сохраняющими центр тяжести.

Таким образом, мы приходим к следующему обобщению теоремы Пуанкаре.

Теорема. Всякий гомологичный тождественному симплектический диффеоморфизм компактного симплектического многообразия имеет по меньшей мере столько неподвижных точек, сколько критических точек имеет гладкая функция на этом многообразии, во всяком случае, если этот диффеоморфизм не слишком далек от тождественного.

Заметим, что условие гомологичности тождественному отображению существенно, как видно уже из примера сдвига на торе, не имеющего ни одной неподвижной точки.

Что касается последнего ограничения (диффеоморфизм не слишком далек от тождественного), то неясно, существенно ли оно.

В случае, когда наше многообразие — $2n$ -мерный тор, достаточно, чтобы ни одно из собственных чисел матрицы Якоби диффеоморфизма (в какой-либо глобальной симплектической системе координат, заданной в \mathbb{R}^{2n}) не равнялось минус единице.

Ограничение такого рода, быть может, и необходимо в многомерных задачах. Ибо не исключено, что теорема Пуанкаре является существенно двумерным эффектом, подобно следующей теореме А. И. Шнирельмана и Н. А. Никишина. *Всякий сохраняющий площадь диффеоморфизм двумерной сферы на себя имеет по меньшей мере две геометрически различные неподвижные точки.*

Доказательство этой теоремы основано на том, что индекс векторного поля градиента гладкой функции двух переменных в изолированной критической точке не может быть больше единицы (хотя может быть равен 1, 0, -1 , -2 , -3 , ...), а сумма индексов всех неподвижных точек сохраняющего ориентацию диффеоморфизма двумерной сферы на себя равна двум.

Индекс же градиента гладкой функции большого числа переменных в критической точке может принимать любые целые значения.

Г. Пересечения лагранжевых многообразий. Рассуждению Пуанкаре можно придать несколько иную форму, если рассмотреть на каждом радиусе кольца точки, сдвигающиеся чисто радиально. Такие точки есть на каждом радиусе, так как ограничивающие кольцо окружности поворачиваются в разные стороны. Предположим, что нам удалось составить из радиально сдвигающихся точек замкнутую кривую, разделяющую внешнюю и внутреннюю окружности кольца. Тогда образ этой кривой при нашем отображении должен пересекаться с самой кривой (так как области, на которые кривая делит кольцо, переходят в области равной площади).

Если указанная кривая и ее образ пересекают каждый радиус по одному разу, то точки пересечения кривой с образом являются, очевидно, неподвижными точками отображения.

Кое-что из приведенного рассуждения можно перенести на многомерный случай, и это дает полезные результаты о периодических решениях задач динамики. Роль кольца в многомерном случае играет фазовое пространство: прямое произведение области в евклидовом пространстве на тор того же числа измерений (кольцо — это произведение интервала на окружность). Симплектическая структура в фазовом пространстве задается обычным образом, т.е. имеет вид $\Omega = \sum dx_k \wedge dy_k$, где x_k — переменные действия, а y_k — угловые переменные.

Нетрудно выяснить, какие симплектические диффеоморфизмы нашего фазового пространства гомологичны тождественному. Именно, симплектический диффеоморфизм A гомологичен тождественному, если его можно получить из тождественного непрерывной деформацией и кроме того,

$$\oint_{\gamma} x dy = \oint_{A\gamma} x dy$$

для всякого замкнутого контура (не обязательно гомологичного нулю).

Условие гомологичности тождественному преобразованию превращает систематический сдвиг вдоль x -направления («эволюцию переменных действия»), разрешая сдвиги вдоль торов.

Рассмотрим какой-нибудь из n -мерных торов $x = c = \text{const}$ и применим к нему наш гомологичный тождественному симплектический диффеоморфизм. Получим снова n -мерный тор. Оказывается, исходный тор пересекается со своим образом по меньшей мере в 2^n точках (считая с кратностями), в том числе не менее $n + 1$ из них геометрически различны, во всяком случае в предположении, что тор-образ имеет уравнение вида $x = f(y)$ с гладкой f .

При $n = 1$ выделенное утверждение означает, что каждая из концентрических окружностей, составляющих кольцо, пересекается со своим образом не менее чем в двух точках. Это сразу следует из сохранения площадей, причем предположение о том, что образ имеет уравнение $x = f(y)$, не нужно.

Нужно ли это предположение в многомерном случае, неизвестно. Если его принять, то доказательство проходит следующим образом.

Заметим, что исходный тор является лагранжевым подмногообразием фазового пространства. Наш диффеоморфизм симплектический, поэтому тор-образ также лагранжев. Стало быть, 1-форма $(x - c) dy$ на нем замкнута. Более того, эта форма на торе является полным дифференциалом некоторой однозначной гладкой функции F , так как наш диффеоморфизм гомологичен единице, и следовательно, для любого замкнутого контура

$$\oint_{A\gamma} (x - c) dy = \oint_{A\gamma} x dy - \oint_{A\gamma} c dy = \oint_{A\gamma} x dy - \oint_{A\gamma} c dy = c \oint_{A\gamma} dy - c \oint_{A\gamma} dy = 0.$$

Заметим, что точки пересечения тора с его образом являются критическими точками функции F (поскольку в них $dF = (x - c) dy = 0$).

Из условия однозначной проектируемости тора-образа (т. е. из того, что тор-образ имеет уравнение $x = f(y)$) вытекает, что и обратно, все критические точки функции F являются точками пересечения наших торов. В самом деле, при указанном условии y можно принять за локальную координату на торе, и следовательно, равенство dF нулю для всех касательных к тору-образу векторов влечет $x = c$.

Гладкая функция на n -мерном торе имеет не менее 2^n критических точек, считая кратности, в том числе не менее $n + 1$ геометрически различных (см., например, Милнор, Теория Морса, М., 1965).

Следовательно, наши торы пересекаются не менее чем в 2^n точках (считая кратности), причем геометрически различных точек пересечения не менее $n+1$.

Точно такое же рассуждение показывает, что образ любого лагранжева тора пересекается с этим тором по меньшей мере в 2^n точках (в том числе геометрически различных точек не менее $n+1$), в предположении, что как исходный тор, так и его образ, однозначно проектируются на y -пространство, т. е. задаются уравнениями $x=f(y)$, $x=g(y)$ соответственно.

Впрочем, это предложение сводится к предыдущему каноническим преобразованием $(x, y) \mapsto (x-f(y), y)$.

Д. Применения к отысканию неподвижных точек и периодических решений. Рассмотрим теперь гомологичное тождественному симплектическое преобразование того специального вида, которое возникает в интегрируемых проблемах динамики, т. е. вида

$$A_0(x, y) = (x, y + \omega(x)), \text{ где } \omega = \partial S / \partial x.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ переменная действия, $y \bmod 2\pi \in T^n$ — угловая координата.

Предположим, что на торе $x=x_0$ все частоты соизмеримы:

$$\omega_i(x_0) = \frac{k_i}{N} 2\pi \text{ с целыми } k_i, N;$$

$$\omega(x_0) \neq 0,$$

и что выполнено условие невырожденности

$$\det |\partial \omega / \partial x|_{x_0} \neq 0.$$

Теорема. *Всякий гомологичный тождественному симплектический диффеоморфизм A , достаточно близкий к A_0 , имеет вблизи тора $x=x_0$ не менее 2^n периодических точек ξ периода N (так что $A^N \xi = \xi$), считая кратности.*

Доказательство можно было бы свести к исследованию пересечения двух лагранжевых подмногообразий $4n$ -мерного пространства $(\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{R}^n \times T^n)$ с $\Omega = dx \wedge dy - dX \wedge dY$, одно из которых диагональ $(X=x, Y=y)$, а другое — график отображения A^N .

Однако проще непосредственно построить подходящую функцию на торе. Действительно, отображение A_0^N имеет вид

$$(x, y) \mapsto (x, y + \alpha(x)), \text{ где } \alpha(x_0) = 0, \det |\partial \alpha / \partial x|_{x_0} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции отображение A^N имеет близ тор $x=x_0$ тор, смещающийся чисто радиально $((x, y) \mapsto (X, y))$ и задающийся уравнением вида $x=f(y)$, причем его образ также задается уравнением такого же вида, $x=g(y)$. В этих обозначениях $X(f(y), y)=g(y)$, $Y(f(y), y)=y$.

Из гомологичности отображения A единиче вытекает, что A^N имеет однозначную глобальную производящую функцию вида $Xy + S(X, y)$ где S имеет по переменным y период 2π .

Функция $F(y) = S(X(f(y), y), y)$ имеет на торе минимум 2^n критических точек y_k . Все точки $\xi_k = (f(y_k), y_k)$ являются неподвижными точками для AN . Действительно,

$$dF = (x - X) dy + (Y - y) dX = (x - X) dy = (f(y) - g(y)) dy.$$

Поэтому из $dF|_{y_k} = 0$ вытекает, что $f(y_k) = g(y_k)$, т. е. $AN\xi_k = \xi_k$, что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к замкнутым траекториям консервативных систем. Пользуясь терминологией добавления 8, мы можем сформулировать результат так.

Следствие. При распаде n -мерного инвариантного тора, сплошь заполненного замкнутыми траекториями изоэнергетически невырожденной системы с n степенями свободы, образуются не менее 2^{n-1} замкнутых траекторий возмущенной задачи (считая с кратностями), в том числе не менее n геометрически различных, по меньшей мере если возмущение достаточно мало.

Доказательство сводится к предыдущей теореме при помощи $2n-2$ -мерной поверхности сечения. При этом следует вначале выбрать угловые координаты y так, чтобы замкнутые траектории невозмущенной задачи на торе задавались уравнениями $y_2 = \dots = y_n = 0$, а затем определить поверхность сечения уравнением $y_1 = 0$.

В случае двух степеней свободы можно применять теорему Пуанкаре к кольцам, которые образуются при пересечении инвариантных торов с двумерной секущей поверхностью. Мы получаем следующий результат.

В щели между двумя двумерными инвариантными торами системы с двумя степенями свободы всегда есть не менее двух замкнутых фазовых траекторий, если отношения частот условно-периодических движений на этих торах различны.

Тем самым получается много периодических решений во всех задачах с двумя степенями свободы, где найдены инвариантные торы (например, в ограниченной круговой задаче трех тел, в задаче о замкнутых геодезических и т. п.). Существует даже гипотеза, что в гамильтоновых системах «общего вида» с компактным фазовым пространством замкнутые фазовые кривые образуют всюду плотное множество. Впрочем, если это и верно, замкнутость большинства из таких кривых не имеет существенного значения, так как их периоды чрезвычайно велики.

Примером применения методики Пуанкаре к системе с большим чем 2 числом степеней свободы является теорема Биркгофа о существовании бесконечного числа периодических решений, близких к данному линейно-устойчивому периодическому решению общего вида (или о существовании бесконечного числа периодических точек в окрестности неподвижной точки линейно-устойчивого

невырожденного симплектического отображения пространства на себя). Доказательства заключаются в том, что сначала отображение аппроксимируется своей нормальной формой, а потом используется связь между неподвижными точками отображения и критическими точками производящей функции.

Знание периодических решений позволяет, между прочим, доказывать *несуществование первых интегралов* (отличных от классических) во многих задачах динамики. Предположим, например, что на каком-либо многообразии уровня известных интегралов обнаружена периодическая траектория, которая неустойчива. Ее сепаратрисы в общем случае образуют сложную сеть, которую мы рассматривали в добавлении 7. Если это явление расщепления сепаратрис удастся обнаружить и если мы сумеем доказать, что сепаратрисы не укладываются ни в какое многообразие меньшего числа измерений, чем рассматриваемое многообразие уровня, то мы можем быть уверенными, что система не имеет новых первых интегралов.

Впрочем, сложное поведение фазовых кривых, препятствующее существованию первых интегралов, часто удается обнаружить и без помощи периодических решений, просто с одного взгляда на найденную вычислительной машиной картину, образованную пересечением фазовой кривой с поверхностью сечения.

Е. Инвариантность производящей функции. Выше мы уже отмечали удручающую неинвариантность производящих функций относительно выбора канонической системы координат в симплектическом многообразии.

С другой стороны, мы неоднократно использовали связь между неподвижными точками отображения и критическими точками производящей функции.

Оказывается, хотя вообще производящая функция и неинвариантно связана с отображением, вблизи неподвижной точки инвариантная связь имеется.

Точнее, пусть дан оставляющий на месте некоторую точку симплектический диффеоморфизм. Определим в окрестности этой точки «производящую функцию» $\Phi = \frac{1}{2} \int \sum \left| \begin{array}{cc} X_k - x_k & Y_k - y_k \\ dX_k + dx_k & dY_k + dy_k \end{array} \right|$ с помощью некоторой симплектической системы координат $(x, y)^*$.

Далее, построим с помощью другой симплектической системы координат (x', y') аналогично определяемую производящую функцию Φ' .

*) Приращение этой функции вдоль какой-либо дуги равно интегралу формы, задающей симплектическую структуру по полоске, образованной прямыми отрезками, соединяющими каждую точку с ее образом. Поэтому такая функция Φ связана с отображением инвариантно относительно линейных канонических замен координат.

Теорема. Если линеаризация симплектического диффеоморфизма в неподвижной точке не имеет собственных чисел, равных -1 , то функции Φ и Φ' эквивалентны в ее окрестности в том смысле, что существует такой диффеоморфизм g (вообще несимплектический), что

$$\Phi(z) \equiv \Phi'(g(z)) + \text{const.}$$

Доказательство см. в статье: A. Weinstein, The invariance of Poincaré's generating function for canonical transformations, *Inventiones Mathematicae*, 16, № 3 (1972), 202—214.

Следует заметить, что два диффеоморфизма с эквивалентными в окрестности неподвижной точки производящими функциями не обязательно эквивалентны в классе симплектических диффеоморфизмов (пример — поворот и поворот на угол, зависящий от радиуса, с невырожденными квадратичными частями производящей функции в нуле).

ДОБАВЛЕНИЕ 10

КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ЭЛЛИпсоИДЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Семейства эллипсоидов в евклидовом пространстве встречались нам несколько раз в этом курсе. Например, при изучении зависимости собственных частот малых колебаний от параметров мы встречались с зависящим от жесткости системы эллипсоидом уровня потенциальной энергии в евклидовом пространстве (метрика пространства определяется кинетической энергией). Другой пример — эллипсоид инерции твердого тела (параметры здесь — форма твердого тела и распределение масс в нем).

Здесь мы рассмотрим общий вопрос о том, при каких значениях параметров спектр собственных чисел вырождается, т. е. соответствующий эллипсоид становится эллипсоидом вращения. Заметим, что собственные числа квадратичной формы в евклидовом пространстве (или длины осей эллипсоида) непрерывно меняются при непрерывном изменении параметров системы (коэффициентов формы). Кажется естественным ожидать, что в зависящей от одного параметра системе при изменении параметра в отдельные моменты одно из собственных чисел будет сталкиваться с другим, так что при отдельных значениях параметра система будет иметь кратный спектр.

Представим себе, например, что мы хотим превратить эллипсоид инерции твердого тела в эллипсоид вращения, перемещая по жестко закрепленной в теле штанге одну юстировочную массу, так что в нашем распоряжении имеется один параметр. Три главные оси инерции a , b , c будут непрерывными функциями от этого параметра, и на первый взгляд кажется, что при надлежащем значении параметра (p) можно добиться равенства двух осей, скажем $a(p) = b(p)$.

Оказывается, однако, что дело обстоит в действительности не так и что, вообще говоря, нужно перемещать *не менее двух* юстировочных масс, чтобы сделать эллипсоид инерции эллипсоидом вращения.

Вообще, *кратный спектр в типичных семействах квадратичных форм наблюдается лишь при двух или более параметрах,*

а в однопараметрических семействах общего вида спектр при всех значениях параметра простой. Практически это проявляется в том, что при изменении параметра в типичном однопараметрическом семействе собственные числа могут тесно сближаться, но, подойдя достаточно близко одно к другому, как бы начинают оттапливать друг друга и снова расходятся, обманув надежду меняющего параметр лица добиться кратного спектра.

В настоящем добавлении рассматриваются причины этого странного на первый взгляд поведения собственных чисел, а также коротко обсуждаются аналогичные вопросы для систем с различными группами симметрий.

А. Многообразие эллипсоидов вращения. Рассмотрим множество всевозможных квадратичных форм в евклидовом n -мерном пространстве \mathbb{R}^n . Это множество само имеет естественную структуру линейного пространства размерности $n(n+1)/2$. Например, все квадратичные формы на плоскости образуют трехмерное пространство (форма $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ имеет координатами три числа A, B, C).

Положительно определенные формы образуют в этом пространстве квадратичных форм открытую область (например, в случае плоскости это внутренность одной из пол конуса $B^2 = AC$, образованного вырожденными формами).

Каждый эллипсоид с центром в начале координат задает положительно определенную квадратичную форму, для которой он является множеством уровня 1; обратно, множество уровня 1 любой положительно определенной квадратичной формы является эллипсоидом. Мы можем, следовательно, отождествить множества положительно определенных квадратичных форм и эллипсоидов с центром в начале координат.

Тем самым мы введем в множестве эллипсоидов с центром O в \mathbb{R}^n структуру гладкого многообразия размерности $n(n+1)/2$ (это многообразие покрыто одной картой: указанной выше областью в пространстве квадратичных форм).

Рассмотрим теперь множество всевозможных *эллипсоидов вращения*. Я утверждаю, что это множество имеет в рассматриваемом пространстве коразмерность 2, т. е. задается двумя независимыми уравнениями, а не одним, как это кажется на первый взгляд. Точнее, справедлива

Теорема 1. *Множество эллипсоидов вращения представляет собой конечное объединение гладких подмногообразий коразмерности 2 и выше в многообразии всех эллипсоидов.*

Здесь *коразмерностью* подмногообразия называется разность между размерностью объемлющего пространства и размерностью подмногообразия.

Доказательство. Рассмотрим вначале эллипсоиды в n -мерном пространстве, у которых две равные оси, а остальные

оси различны. Такой эллипсоид определяется направлениями различных осей, что дает

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 = (n+1)(n-2)/2$$

параметров, и еще величинами осей, что дает $n-1$ параметр. Итак, общее число параметров равно

$$(n^2 - n - 2 + 2n - 2)/2,$$

что на два меньше размерности пространства всех эллипсоидов (равной $n(n+1)/2$). Приведенный подсчет параметров показывает также, что множество эллипсоидов с ровно двумя равными осями является многообразием.

Что касается эллипсоидов с большим числом равных осей, то ясно, что все они образуют множество еще меньшей размерности. Строгое доказательство вытекает из следующей леммы.

Лемма. Множество всех эллипсоидов, имеющих v_2 двукратных, v_3 трехкратных, v_4 четырехкратных осей и т. д., является гладким подмногообразием многообразия всех эллипсоидов, имеющим коразмерность

$$2v_2 + 5v_3 + 9v_4 + \dots = \sum \frac{1}{2} (i-1)(i+2) v_i.$$

Доказательство этой леммы проводится таким же подсчетом параметров, как в разобранным выше частном случае (который соответствует $v_2=1$, $v_3=v_4=\dots=0$). Читатель легко сам проведет этот подсчет, заметив сперва, что размерность многообразия всех k -мерных подпространств в n -мерном линейном пространстве равна $k(n-k)$ (так как k -мерную плоскость общего положения в n -мерном пространстве можно рассматривать как график отображения из k -мерного пространства в $n-k$ -мерное, а такое отображение задается прямоугольной матрицей размера $k \times (n-k)$).

Пример. Рассмотрим случай $n=2$, т. е. эллипсы на плоскости. Эллипс определяется тремя параметрами (например, двумя длинами осей и углом, задающим направление одной из них). Таким образом, многообразие эллипсов на плоскости трехмерно, как и должно быть по нашей формуле.

Окружность же определяется одним параметром (радиусом). Таким образом, многообразие окружностей в пространстве эллипсоидов — это линия в трехмерном пространстве, а не поверхность, как кажется на первый взгляд.

Этот «парадокс» становится, быть может, более понятным из следующего вычисления. Квадратичные формы $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ с равными собственными числами образуют в трехмерном пространстве с координатами A, B, C многообразие, заданное одним уравнением $\lambda_1 = \lambda_2$, где $\lambda_{1,2}(A, B, C)$ — собственные

числа. Однако левая часть этого уравнения является суммой двух квадратов, что видно из формулы для дискриминанта характеристического уравнения

$$\Delta = (A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2.$$

Таким образом, одно уравнение $\Delta = 0$ определяет в трехмерном пространстве квадратичных форм прямую ($A = C, B = 0$), а не поверхность.

Простейший вывод из того, что многообразие эллипсоидов вращения имеет коразмерность 2, состоит в том, что это многообразие *не делит* пространство всех эллипсоидов (а многообразие квадратичных форм с кратным спектром не делит пространство квадратичных форм), подобно тому как прямая не делит трехмерное пространство.

Следовательно, мы можем утверждать не только, что у эллипсоида «общего положения» все оси разной длины, но и что *любые два таких эллипсоида можно соединить гладкой кривой в пространстве эллипсоидов, сплошь состоящей из эллипсоидов с осями разной длины*. Более того, если два эллипсоида общего положения соединены гладкой кривой в пространстве эллипсоидов, на которой есть точки, являющиеся эллипсоидами вращения, то сколь угодно малым шевелением кривой можно снять ее с множества эллипсоидов вращения, так что на новой кривой все точки будут эллипсоидами без кратных осей.

Из сказанного вытекает, в частности, простое доказательство теоремы о возрастании собственных частот при возрастании жесткости системы. Действительно, производные некратного собственного числа квадратичной формы по параметру определяются производной квадратичной формы по соответствующему собственному направлению. Если жесткость растет, то потенциальная энергия растет по каждому направлению, в том числе и по собственному. Значит, и собственная частота растет. Тем самым мы доказали теорему о возрастании частот в случае, когда от исходной системы к более жесткой можно перейти, минуя кратный спектр. Доказательство в присутствии кратного спектра получается теперь предельным переходом на основании того, что внутреннюю часть пути перехода от исходной системы к более жесткой можно сдвинуть с множества систем с кратным спектром сколь угодно малым шевелением.

Резюмируя, мы можем сказать, что *типичное однопараметрическое семейство эллипсоидов (или квадратичных форм в евклидовом пространстве) не содержит эллипсоидов вращения (квадратичных форм с кратным спектром)*. Применительно к эллипсоиду инерции получаем приведенный выше вывод о необходимости двух юстировочных масс.

Обратимся теперь к двухпараметрическим семействам. Из наших подсчетов следует, что *в типичных двухпараметрических семействах эллипсоиды вращения встречаются лишь в отдельных изолированных точках плоскости параметров*.

Рассмотрим, например, выпуклую поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Вторая квадратичная форма поверхности определяет эллипс в касательном пространстве в каждой точке. Поэтому возникает двухпараметрическое семейство эллипсов (которые можно перенести в одну плоскость, выбрав вблизи точки на поверхности локальную систему координат). Мы приходим к выводу, что в каждой точке поверхности, кроме отдельных изолированных точек, эллипс имеет оси разной длины. Следовательно, на поверхности общего вида возникает два ортогональных поля направлений (больших и малых осей эллипсов) с *изолированными особыми точками*. В дифференциальной геометрии эти направления называются направлениями главных кривизн, а эти особые точки — *омблическими точками*. Например, на поверхности эллипсоида имеется четыре омблические точки; они лежат на содержащем большую и малую оси эллипсе и две из них хорошо видны на рисунке геодезических на эллипсоиде (см. рис. 207).

Точно так же в *типичном трехпараметрическом семействе эллипсоиды вращения встречаются лишь на отдельных линиях в трехмерном пространстве параметров*. Например, если в каждой точке трехмерного евклидова пространства задан эллипсоид (т. е. задан симметричный двухиндексный тензор), то особенности полей главных осей будут, вообще говоря, на отдельных линиях (где два из трех полей направлений терпят разрыв).

Эти линии, как и омблические точки в предыдущем примере, бывают нескольких различных типов. Их классификацию (для типичных полей эллипсоидов) можно получить из классификации особенностей лагранжевых проекций, приведенной в добавлении 12.

В *типичном четырехпараметрическом семействе эллипсоиды вращения встречаются на двумерных поверхностях пространства параметров*. Эти поверхности не имеют особенностей, кроме трансверсальных пересечений в отдельных точках пространства параметров; этим значениям параметров отвечают эллипсоиды с двумя (разными) парами равных осей.

Трехкратная ось появляется впервые при пяти параметрах, в отдельных изолированных точках пространства параметров. Значения параметров, соответствующие эллипсоидам с двукратной осью, образуют в пятимерном пространстве параметров трехмерное многообразие с особенностями двух типов: трансверсальными пересечениями двух ветвей вдоль некоторой кривой и коническими особенностями в отдельных (не лежащих на этой кривой) точках, а именно в точках пространства параметров, соответствующих эллипсоидам с трехкратной осью.

Указанная коническая особенность устроена так, что в пересечении четырехмерной сферой малого радиуса с центром в особой точке получаются два экземпляра проективной плоскости. Возникающие вложения проективной плоскости в четырехмерную сферу диффеоморфны вложению, которое задается пятью сферическими функциями второй степени на двумерной сфере (пять ортонормированных в пространстве функций на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ линейных комбинаций функций $x_i x_j$, ортогональных единице, задают четное отображение $S^2 \rightarrow S^4$ и, следовательно, вложение $RP^2 \rightarrow S^4$).

Полезно разобраться еще, как ведут себя собственные числа квадратичной формы из типичного двухпараметрического семейства при подходе к особой точке, где два собственных числа совпадают. Небольшое вычисление показывает, что график указанной пары собственных чисел имеет над плоскостью параметров вблизи особой точки вид двуполого конуса, вершина которого отвечает особой точке, а каждая из половин — одному из собственных чисел (рис. 243).

Типичное одномерное подсемейство нашего двумерного семейства имеет вид кривой в плоскости параметров, не проходящей через особую точку. Всякое одномерное подсемейство, содержащее особую точку, можно сдвинуть с нее малым шевелением, причем получающееся одномерное семейство будет кривой в пространстве параметров, проходящей близко от особой точки. График собственных чисел над кривой на плоскости параметров, проходящей вблизи особой точки, состоит из тех точек конуса, которые проектируются на эту кривую.

Следовательно, указанный график вблизи особой точки близок к гиперболе, похожей на пару пересекающихся прямых (пара прямых получилась бы, если бы наше однопараметрическое семейство проходило через особую точку).

Приведенное рассуждение о собственных числах двухпараметрических семейств квадратичных форм объясняет странное поведение собственных частот при изменении одного параметра: вообще говоря (исключая случаи совершенно особые) при изменении одного параметра собственные частоты могут подходить близко друг к другу, но не могут обгонять друг друга, а должны, сблизившись, снова разойтись в разные стороны.

Б. Применение к исследованию колебаний сплошных сред. Приведенные выше общие соображения имеют многочисленные приложения при исследовании зависимости от параметров собственных частот разнообразных механических систем с конечным числом степеней свободы; однако, вероятно, наиболее интересные их приложения относятся к системам с бесконечным числом степеней свободы, описывающим колебания сплошных сред. Эти приложения основаны на том, что *коразмерности многообразий эллипсоидов с теми или иными кратностями осей определяются этими кратностями и не зависят от числа измерений пространства.*

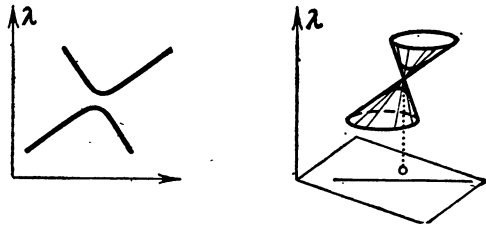


Рис. 243. Собственные частоты одно- и двухпараметрических семейств колебательных систем общего вида.

Например, коразмерность множества эллипсоидов вращения в многообразии всех эллипсоидов равна двум в пространстве любого числа измерений; поэтому естественно считать, что и в бесконечном «многообразии» эллипсоидов в бесконечномерном гильбертовом пространстве множество эллипсоидов вращения имеет коразмерность 2 (и, в частности, пространство эллипсоидов без кратных осей связано).

Конечно, рассуждения подобного рода нуждаются в строгом обосновании. Мы однако не будем этим заниматься, а посмотрим, к каким выводам приводят развитые выше общие соображения, если не побояться применить их к задаче о колебаниях сплошной среды.

Кинетическая энергия сплошной среды, заполняющей компактную область D , выражается через отклонение u точки x от равновесия формулой

$$T = \frac{1}{2} \int_D u^2 dx.$$

Среду мы будем для определенности считать мембраной (в этом случае область D двумерна, а отклонение u одномерно). Кинетическая энергия задает евклидову структуру в конфигурационном пространстве задачи (т. е. в пространстве функций u). Потенциальная энергия дается интегралом Дирихле

$$U = \frac{1}{2} \int_D (\nabla u)^2 dx$$

(с математической точки зрения эти данные входят в определение мембраны).

Квадраты собственных частот мембраны — это собственные числа квадратичной формы U в конфигурационном пространстве, метрика которого задана с помощью кинетической энергии. Мы *примем*, что типичной мембране отвечает типичная квадратичная форма (предположение это означает трансверсальность многообразия квадратичных форм, соответствующих разным мембранам, многообразию форм с кратными собственными числами). Если поверить в это свойство общего положения, то мы приходим к следующим выводам.

1. *Для мембраны общего положения все собственные частоты различны. От одной мембраны общего положения к другой можно перейти непрерывным путем, сплошь состоящим из мембран с простым спектром. Более того, типичный путь, соединяющий две любые мембраны, не содержит ни одной мембраны с кратным спектром (исключая, возможно, концы пути).*

2. *Меняя два параметра мембраны, можно добиться совпадения двух собственных частот; чтобы получить трехкратную*

частоту, нужно иметь в своем распоряжении пять независимых параметров, четырехкратную — девять и т. д.

3. Если, отправляясь от мембраны с простым спектром и непрерывно деформируя ее, перейти к другой мембране с простым спектром по любому пути общего положения, то в результате такого продолжения из k -й по величине собственной частоты исходной мембраны получится независимо от пути деформации всегда k -я по величине собственная частота конечной мембраны; продолжение же собственных функций, вообще говоря, зависит от пути деформации (а именно, при изменении пути может измениться знак получающейся собственной функции).

В частности, если, начав с мембраны с простым спектром и деформируя ее, мы опишем замкнутый путь в пространстве мембран и вернемся к исходной мембране, обойдя вокруг множества мембран с кратным спектром (которое ведь имеет коразмерность 2), то k -я собственная частота вернется к исходному значению, а k -я собственная функция может сменить знак.

В. Влияние симметрий на кратность спектра. Кратный спектр является исключением в системах общего вида, но он появляется неустранимым малым шевелением образом в случаях, когда данная система симметрична и деформации сохраняют симметрию.

Рассмотрим, например, систему из трех одинаковых масс в вершинах равностороннего треугольника, соединенных одинаковыми пружинами друг с другом и с центром треугольника и способных двигаться в плоскости треугольника. Система имеет поворотную симметрию третьего порядка. Следовательно, в конфигурационном пространстве (размерность коего равна 6) действует линейный оператор g , куб которого равен 1, и который оставляет неизменной как евклидову структуру конфигурационного пространства (заданную кинетической энергией), так и эллипсоид в конфигурационном пространстве, задающий потенциальную энергию.

Из сказанного следует, что этот эллипсоид должен быть эллипсоидом вращения. Действительно, если g — указанный оператор действия симметрии в конфигурационном пространстве, а ξ — вектор на главной оси эллипсоида, то ось направления $g\xi$ также является главной осью (ибо вращение g переводит эллипсоид в себя).

Для вектора $g\xi$ возможны два случая: либо $g\xi = \xi$, либо векторы ξ и $g\xi$ линейно независимы и образуют угол 120° в конфигурационном пространстве. Во втором случае плоскость, натянутая на векторы ξ и $g\xi$, сплошь состоит из главных осей. Поэтому соответствующее такой оси собственное число как минимум двукратное.

Наше рассуждение показывает, что собственные колебания системы с поворотной симметрией третьего порядка могут быть

двух типов: выдерживающие поворот на 120° ($g\xi = \xi$) и переходящие при таком повороте в независимое собственное колебание с той же частотой ($g\xi$ и ξ независимы). Во втором случае возникают даже три формы собственных колебаний с одинаковой частотой (ξ , $g\xi$ и $g^2\xi$), но независимых среди них только две:

$$\xi + g\xi + g^2\xi = 0,$$

так как сумма трех векторов равной длины, образующих углы по 120° на плоскости, равна нулю.

Общее число собственных колебаний нашей системы равно 6. Чтобы узнать, сколько из них первого (симметричного) и второго (несимметричного) типа, можно воспользоваться следующим рассуждением. Рассмотрим предельный случай, когда каждая из масс колеблется независимо от других.

В этом случае мы можем выбрать в конфигурационном пространстве ортонормированный базис из шести собственных колебаний, по два на каждую точку, при которых одна точка движется, а две другие нет. Обозначим через ξ_i и η_i соответствующие i -й точке собственные векторы с собственными частотами a и b соответственно, и пусть x_i , y_i — координаты в ортонормированном базисе ξ_i , η_i . Тогда потенциальная энергия запишется в виде

$$U = \frac{1}{2}(a^2x_1^2 + b^2y_1^2) + \frac{1}{2}(a^2x_2^2 + b^2y_2^2) + \frac{1}{2}(a^2x_3^2 + b^2y_3^2).$$

Оператор симметрии g переставляет оси координат:

$$\begin{aligned} g\xi_1 &= \xi_2, & g\xi_2 &= \xi_3, & g\xi_3 &= \xi_1, \\ g\eta_1 &= \eta_2, & g\eta_2 &= \eta_3, & g\eta_3 &= \eta_1. \end{aligned}$$

Мы можем теперь представить наше шестимерное пространство в виде ортогональной прямой суммы двух прямых и двух двумерных плоскостей, инвариантных относительно оператора симметрии g . А именно, инвариантные прямые определяются направляющими векторами

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$

а инвариантные плоскости — это их ортогональные дополнения в пространствах, натянутых на орты ξ_i и η_i соответственно.

При этом первая прямая является направлением симметричного собственного колебания с частотой a , а вторая — с частотой b . Точно так же любой вектор первой плоскости является направлением собственного колебания с частотой a , которое при повороте на 120° переходит в независимое с ним колебание той же частоты; для всех векторов второй плоскости колебание также несимметричное, с частотой b .

Итак, в рассматриваемом вырожденном случае трех независимых точек *имеется* два независимых собственных колебания симметричного типа и четыре несимметричного, причем последние разбиты на две пары. В каждой паре колебания имеют одинаковую собственную частоту и получаются друг из друга поворотом плоскости наших точек на 120° .

Я утверждаю теперь, что подчеркнутый выше вывод остается справедливым для любого закона взаимодействия между нашими точками, лишь бы взаимодействие было симметричным, т. е. потенциальная энергия системы сохранялась при повороте плоскости на 120° .

В самом деле, выберем любую систему из шести взаимно ортогональных собственных колебаний ζ_1, \dots, ζ_6 . Каждый из векторов ζ_i в конфигурационном пространстве при применении оператора g либо остается на месте, либо поворачивается на 120° . Но все остающиеся на месте при преобразовании g векторы образуют двумерную плоскость, а все поворачивающиеся на 120° — четырехмерное пространство. Следовательно, ровно два из 6 векторов соответствуют симметричным колебаниям, а остальные четыре лежат в ортогональном им четырехмерном пространстве векторов, поворачивающихся на 120° . Возьмем один из этих векторов, применим к нему оператор g и объявим полученный вектор парным с исходным направлением собственного колебания. Затем в ортогональном дополнении к получившейся плоскости в четырехмерном пространстве выберем любой вектор и в пару ему возьмем его образ при действии оператора g . Мы получили систему из шести собственных колебаний, обладающую требуемыми свойствами.

Таким образом, в системе общего вида трех точек на плоскости с поворотной симметрией третьего порядка *имеется* четыре различных собственных частоты, в том числе две простые и две двукратные. При этом каждой из простых собственных частот отвечает симметричное собственное колебание, а каждой из двукратных — три собственных колебания, получающихся друг из друга поворотом на 120° и дающих в сумме нуль (так что независимых среди них только два):

Задача. Расклассифицировать собственные колебания системы с симметрией правильного треугольника (допускающей не только повороты на 120° , но также отражения относительно высот треугольника).

Задача. Расклассифицировать собственные колебания системы, группа симметрий которой есть группа из 24 вращений куба.

Ответ. Колебания бывают пяти типов. При вращениях из каждого колебания может получиться система из 8, либо 6, либо 4, либо 2, либо 1 независимого колебания (в последнем случае колебания полностью симметричны).

Замечание. Для классификации колебаний в системах с любыми группами симметрий разработан специальный аппарат (так называемая теория представлений групп). См., например, Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, М., Физматгиз, 1958, где имеются необходимые таблицы.

Г. Поведение частот симметричной системы при изменении параметров, сохраняющем симметрию. Предположим теперь, что наша симметричная система зависит общим образом от некоторого числа параметров, причем симметрия не нарушается при изменении параметров. Тогда собственные частоты различных кратностей также будут зависеть от параметров, и возникает вопрос о столкновениях собственных частот. Я ограничусь формулировкой результата для простейшего случая систем с поворотной симметрией третьего порядка (для поворотной симметрии любого порядка $n \geq 3$ ответ такой же). Подробности можно найти в статьях: В. И. Арнольд, Моды и квазимоды, Функциональный анализ и его приложения, 6:2 (1972), 12—20; В. Н. Карпушкин, Об асимптотике собственных чисел симметричных многообразий и о «наиболее вероятных» представлениях конечных групп, Вестник МГУ, Сер. мат., 1974, № 2, 9—13.

Собственные колебания любой системы с поворотной симметрией третьего порядка делятся на два типа: симметричные колебания и колебания, переходящие при повороте на 120° в независимые с исходным. Для общей системы с поворотной симметрией третьего порядка (не имеющей, в частности, никакой дополнительной симметрии) все собственные частоты первого типа просты, а второго — двукратны.

Далее оказывается, что если система зависит общим образом от одного параметра и симметрична при всех значениях параметра, то при изменении параметра собственные частоты симметричных колебаний не сталкиваются друг с другом, а двукратные собственные частоты несимметричных колебаний не распадаются. Кроме того, двукратные собственные частоты несимметричных колебаний не сталкиваются друг с другом при изменении параметров. Однако собственные частоты симметричных и несимметричных колебаний движутся при изменении параметра независимо друг от друга, так что при отдельных значениях параметра могут сталкиваться (и проходить друг сквозь друга) собственная частота симметричного колебания и (двукратная) собственная частота несимметричного колебания.

Чтобы столкнулись две собственные частоты симметричных колебаний, нужно менять как минимум два параметра, а две собственные частоты несимметричных колебаний — минимум три.

Вообще, чтобы в типичном семействе систем с поворотной симметрией третьего порядка встречались системы, соответствующие столкновению i простых собственных частот (i симметричных колебаний) и j двукратных (j несимметричных колебаний), число параметров семейства должно быть не менее, чем

$$(i-1)(i+2)/2 + j^2.$$

Применим сказанное к колебаниям симметричных мембран. Здесь мы будем считать, что мембране общего вида, выдерживающей поворот на 120° , соответствует эллипсоид общего вида в пространстве эллипсоидов конфигурационного пространства, выдерживающих индуцированное поворотом мембраны преобразование конфигурационного пространства.

Точная формулировка этого предположения заключается в трансверсальности отображения пространства симметричных мембран в пространство симметричных эллипсоидов к многообразиям эллипсоидов с различными числами кратных осей для всех мембран, исключая множество коразмерности бесконечность.

Если согласиться с этим предположением, то мы приходим к следующим выводам о колебании симметричных мембран.

1. Для мембран общего вида, выдерживающих поворот на 120° , асимптотически треть собственных частот (считая их с кратностями) простая и соответствующие собственные колебания выдерживают поворот на 120° . Остальные собственные частоты двукратные, каждой двукратной собственной частоте соответствуют три собственные функции, в сумме равные нулю и переходящие друг в друга при повороте на 120° .

2. В однопараметрических семействах общего вида таких симметричных мембран встречаются при изолированных значениях параметров столкновения однократной частоты с двукратной, но не встречаются ни столкновения однократных частот друг с другом, ни столкновения друг с другом двукратных частот.

3. Минимальное число параметров семейства мембран, в котором реализуются (неустранимо посредством сохраняющего симметрию малого шевеления) более сложные столкновения собственных частот, дается формулой

$$\sum_{i,j} [(i-1)(j+2)/2 + j^2] \nu_{ij},$$

где ν_{ij} — число точек столкновения i однократных и j двукратных частот.

В частности, при типичной малой деформации круглой мембраны, сохраняющей вращательную симметрию третьего порядка, сразу же распадается треть двукратных собственных чисел (соответствующих собственным функциям с азимутальной частью $\cos 3k\phi$ и $\sin 3k\phi$). При дальнейшей однопараметрической деформации простые и двукратные собственные частоты могут проходить друг сквозь друга, но ни две простые, ни две двукратные собственные частоты друг с другом не сталкиваются.

Д. Обсуждение. Значение соображений общего положения и симметрии состоит, в частности, в том, что они позволяют получить некоторую информацию в тех случаях, когда найти точное решение задачи не удается.

В частности, почти ни для каких мембран не известны формы собственных колебаний. Тем не менее из общих соображений можно кое-что сказать, например, о кратностях собственных чисел.

Исследование высокочастотных колебаний сплошных сред имеет весьма большое значение для ряда областей (оптика, акустика и т. д.), и для приближенного отыскания формы собственных колебаний разработаны специальные приемы. Один из этих приемов (так называемая *квазиклассическая асимптотика*) состоит в том, что колебание ищется в виде, локально близком к простой гармонической волне малой длины, у которой, однако, от точки к точке слегка меняются амплитуда и направление фронта.

Анализ (на котором мы не можем здесь останавливаться), показывает, что в некоторых случаях можно построить приближенные решения уравнения собственных функций с указанными свойствами. При этом приближенными решениями они являются в том смысле, что почти удовлетворяют уравнению для собственных функций (а не в том, что близки к настоящим собственным функциям).

В частности, если мембрана имеет форму равностороннего треугольника со сглаженными и сильно затупленными углами, то удастся построить приближенное решение описанного типа, которое заметно отличается от нуля лишь в окрестности одной из высот треугольника. (Физики называют это приближенное решение волновым аналогом луча, движущегося по высоте треугольника; этот луч является устойчивой*) траекторией бильярда, имеющего форму нашей мембраны; ср. добавление о коротковолновых асимптотиках).

Из соображений симметрии и общего положения вытекает, что у типичных мембран с поворотной симметрией третьего порядка настоящих собственных колебаний описанного типа нет. Действительно, предположим, что одно из собственных колебаний мембраны сосредоточено близ высоты (но не вблизи центра мембраны). Тогда, повернув его на 120° и на 240° , мы получим три собственных колебания с одинаковыми собственными частотами. Эти три колебания независимы (это следует из отличия от нуля их суммы). Следовательно, собственная частота трехкратна, что у типичных систем с поворотной симметрией третьего порядка не встречается.

Из приведенного рассуждения видно, что пытаться строить строгую высокочастотную асимптотику собственных функций — довольно безнадежное дело: лучшее, на что можно надеяться, — это получить приближенные формулы для почти собственных коле-

*) Условие линейной устойчивости бильярдной траектории имеет вид

$$(r_1 + r_2 - l)(r_1 - l)(r_2 - l) > 0,$$

где l — длина отрезка траектории, r_1 и r_2 — радиусы кривизны стенки в его концах.

баний. Такое почти собственное колебание может весьма сильно отличаться от настоящих собственных колебаний, однако если задать соответствующее ему начальное условие, то движение в течение длительного времени будет напоминать стоячую волну (собственное колебание).

Пример почти собственного колебания — движение одного из двух одинаковых маятников, соединенных очень слабой пружиной. Если в начальный момент приведем в движение первый маятник, а второй неподвижен, то в течение длительного времени колебаться будет практически один лишь первый маятник, и колебания будут почти собственными. При настоящих же собственных колебаниях амплитуды обоих маятников одинаковы.

Вопрос о связи геометрии мембраны со свойствами ее собственных колебаний в последние годы интенсивно изучался многими авторами (в том числе Г. Вейлем, С. Минакхисундарамом и А. Плейелем, А. Сельбергом, Дж. Милнором, М. Кацем, И. Зингером, Н. Маккином, М. Берже, И. Колин де Вердые, Ж. Чезареном, Ж. Дюистермаатом, В. Ф. Лазуткиным, А. И. Шнирельманом, С. А. Молчановым).

На простейший вопрос «можно ли услышать форму барабана?» ответ оказался отрицательным: существуют не изометричные римановы многообразия с одинаковым спектром. С другой стороны, некоторые свойства многообразия восстанавливаются по спектру собственных чисел оператора Лапласа и по свойствам собственных функций (например, восстанавливается полный набор длин замкнутых геодезических).

ДОБАВЛЕНИЕ II

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИКИ

Описание распространения света в геометрической оптике при помощи лучей (т. е. с помощью канонических уравнений Гамильтона) или волновых фронтов (т. е. с помощью уравнений Гамильтона — Якоби) с точки зрения физической оптики является лишь приближением. Согласно представлениям физической оптики свет — это электромагнитные волны, а геометрическая оптика — это первое приближение, хорошо описывающее явления, лишь когда длина волны мала по сравнению с размерами рассматриваемых тел.

Математическим вариантом этих физических представлений являются асимптотические формулы для решений соответствующих дифференциальных уравнений, формулы, которые дают тем лучшее приближение, чем выше частота колебаний (т. е. чем короче волны). Эти асимптотические формулы записываются в терминах лучей (т. е. движений в некоторой гамильтоновой динамической системе) или фронтов (т. е. решений уравнения Гамильтона — Якоби).

Подобная коротковолновая асимптотика существует для решений многих уравнений математической физики, описывающих всевозможные волновые процессы. При этом в разных областях физики и математики ее связывают с различными именами. Например, в квантовой механике коротковолновая асимптотика называется квазиклассическим приближением, а ее отыскание — методом ВКБДж (Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна, Джеффриса), хотя гораздо раньше этим приближением пользовались, например, Лиувилль, Грин, Стокс и Релей.

Построение коротковолновой асимптотики основано на представлении, что локально в каждом месте наблюдается ряд почти строго синусоидальных волн, однако амплитуда этих волн и направление их фронтов медленно меняются от точки к точке. Формальная подстановка функции такого вида в уравнение с частными производными, описывающее волновой процесс, приводит (в первом приближении при малой длине волны) к уравнению

Гамильтона—Якоби для волновых фронтов. Следующие приближения позволяют определить также и зависимость амплитуды колебаний от точки.

Конечно, вся процедура требует математического обоснования. Точная формулировка и доказательство соответствующих теорем совсем не просты. Особенно большие затруднения вносят так называемые каустики (иначе—фокальные или сопряженные точки, или точки поворота).

Каустики—это огибающие семейств лучей; их можно видеть на стене, освещенной лучами, отраженными от какой-либо гладкой кривой поверхности. Если лучи, возникающие при описании волн, пересекаются и образуют каустики, то вблизи каустик формулы коротковолновой асимптотики должны быть несколько изменены. А именно, фаза колебаний вдоль каждого луча испытывает стандартный разрыв (на четверть волны) при каждом прохождении луча у каустики.

Точное описание всех этих явлений удобно проводить в терминах геометрии лагранжевых подмногообразий соответствующего фазового пространства и их проекций на конфигурационное пространство.

Каустики интерпретируются при этом как особенности проекции лагранжева многообразия, задающего семейство лучей, из фазового пространства в конфигурационное. Таким образом, нормальные формы особенностей лагранжевых проекций, приведенные в добавлении 12, доставляют, в частности, классификацию особенностей каустик, образованных системами лучей «общего положения».

В настоящем добавлении приведены (без доказательств) простейшие формулы коротковолновой асимптотики для квантовомеханического уравнения Шредингера. Более подробное изложение имеется в следующих местах:

Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов, «Мир», 1965 (см. особенно Дополнение II в книге Хединга).

В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ, 1965.

В. И. Арнольд, О характеристическом классе, входящем в условия квантования, Функциональный анализ и его приложения, т. I, вып. 1 (1967), 1—14.

Л. Хермандер, Интегральные операторы Фурье, Математика 16:1 (1972), 17—61 и 16:2 (1972), 67—136; Acta Mathematica 127, 1—2 (1971), 119.

А. Квазиклассическое приближение для решений уравнения Шредингера. Уравнение Шредингера для частицы в поле с потенциалом U в евклидовом пространстве называется уравнение относительно комплексной функции $\psi(q, t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + U(q) \psi, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь \hbar — некоторая вещественная постоянная, которая и является малым параметром рассматриваемой задачи, Δ — оператор Лапласа.

Предположим, что начальное условие имеет коротковолновый вид

$$\psi|_{t=0} = \varphi(q) e^{\frac{i}{\hbar} s(q)},$$

где гладкая функция φ отлична от нуля лишь внутри некоторой ограниченной области. Мы укажем ниже асимптотическую (при $\hbar \rightarrow 0$) формулу для решения уравнения Шредингера с таким начальным условием.

Прежде всего рассмотрим движение классической частицы в поле с потенциалом U , т. е. рассмотрим уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \text{где } H = \frac{1}{2} p^2 + U(q)$$

в $2n$ -мерном фазовом пространстве. Решения этих уравнений определяют фазовый поток (при некоторых условиях на потенциал, которые мы предположим выполненными; эти условия запрещают уход на бесконечность за конечное время).

Нашим коротковолновым начальным условиям мы сопоставим лагранжево подмногообразие в фазовом пространстве (т. е. многообразие, размерность которого равна размерности конфигурационного пространства и на котором обращается тождественно в нуль 2-форма $dp \wedge dq$, задающая симплектическую структуру в фазовом пространстве). А именно, мы определим «импульс», соответствующий нашему начальному условию, как градиент фазы, т. е. положим

$$p(q) = ds/dq.$$

Лемма. *Какова бы ни была гладкая функция s , график построенной по ней функции $p(q)$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ является лагранжевым многообразием. Обратно, если лагранжево многообразие однозначно проектируется на q -пространство (является графиком), то оно задается некоторой производящей функцией s по предыдущей формуле.*

Обозначим лагранжево многообразие, построенное по начальному условию (по функции s) через M . Фазовый поток g^t за время t переводит многообразие M в другое многообразие $g^t M$. Это новое многообразие также лагранжево, так как фазовый поток сохраняет симплектическую структуру.

При малых t новое лагранжево многообразие, как и старое, однозначно проектируется на конфигурационное пространство. Однако при больших t это уже не обязательно так (рис. 244).

Иными словами, в одну точку Q конфигурационного пространства может проектироваться несколько точек нового лагранжева многообразия. Мы предположим, что этих точек конечное

число, и что все они невырождены (т. е. что невырождена производная отображения проектирования нового лагранжева многообразия на конфигурационное пространство в каждой из точек, проектирующихся в заданную точку Q).

Условие невырожденности выполнено для почти всех точек Q . Те особые точки Q , для которых оно не выполнено, образуют в конфигурационном пространстве множество меры нуль. В общем случае это множество — поверхность, размерность которой на 1 меньше числа измерений конфигурационного пространства. Эта поверхность, играющая роль каустики в нашей задаче, сама может иметь довольно сложные особенности.

Проектирующиеся в заданную точку Q точки нового лагранжева многообразия произошли при преобразовании фазового потока из некоторых точек исходного лагранжева многообразия (построенного по начальному условию). Иными словами, в точку Q за время t приводит несколько траекторий классической частицы, начальные условия которых принадлежат исходному лагранжеву многообразию.

Обозначим через (p_j, q_j) эти начальные точки фазового пространства, а через S_j действие вдоль траектории фазового потока, выходящей из точки (p_j, q_j) . Точнее, мы положим

$$S_j(Q, t) = s(q_j) + \int_0^t L d\theta, \text{ где } L = \frac{q^2}{2} - U(q) \text{ и } g^\theta(p_j, q_j) = (p(\theta), q(\theta)).$$

Тогда при $\hbar \rightarrow 0$ решение уравнения Шредингера с заданными функциями s и φ осциллирующим начальным условием имеет асимптотику

$$\psi(Q, t) = \sum_j \varphi(q_j) \left| \frac{DQ}{Dq_j} \right|^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_j(Q, t) - \frac{i\pi}{2} \mu_j} + O(\hbar),$$

где μ_j — целое число (индекс Морса), определение которого дано ниже.

Чтобы разобраться в этой формуле, рассмотрим сперва случай, когда промежуток времени t мал. В этом случае сумма сводится к одному-единственному слагаемому, так как лагранжево многообразие, полученное из исходного лагранжева многообразия преобразованием фазового потока за малое время, проектируется на конфигурационное пространство однозначно. Иными словами, из семейства частиц, соответствующих начальному условию для уравнения Шредингера, только одна приходит в Q через малое время t .

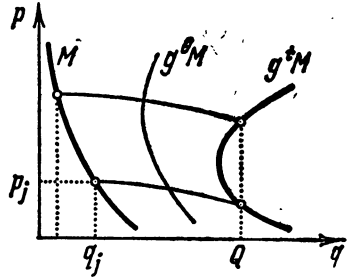


Рис. 244. Преобразование лагранжевых многообразий фазовым потоком.

Для малых t индекс Морса равен нулю (как мы увидим ниже из его определения). Таким образом, функция $\psi(Q, t)$ имеет, так же как и начальное условие, быстро осциллирующий вид.

При этом функция S , определяющая фронты волн в момент t , есть не что иное, как значение в момент t решения уравнения Гамильтона — Якоби, начальное условие для которого задается функцией s , определяющей фронты волн в начальный момент. Амплитуда же волн в момент t в точке Q получается из их амплитуды в начальный момент в исходной точке приходящей в Q траектории умножением на некоторый множитель. Этот множитель подобран так, чтобы при движении частиц, соответствующих нашему начальному условию, интеграл квадрата модуля функции ψ по заполненной частицами области конфигурационного пространства не менялся с течением времени. (Здесь предполагается, что в начальный момент выделена любая область в конфигурационном пространстве, затем рассматриваются фазовые точки на исходном лагранжевом многообразии, чьи проекции на конфигурационное пространство лежат в этой области, далее — их образы под действием фазового потока через время t и, наконец, проекции последних на конфигурационное пространство образуют область, «заполненную частицами в момент t ».)

Б. Индексы Морса и Маслова. Число μ_j определяется как число фокальных к многообразию M точек на отрезке $[0, t]$ фазовой кривой, выходящей из точки (p_j, q_j) .

Определение фокальной к M точки состоит в следующем. Мы выбрали точку Q так, что при проекции получившегося из M в момент t лагранжева многообразия условие невырожденности в этой точке выполняется. Однако если мы рассмотрим всю фазовую кривую, выходящую из точки (p_j, q_j) , то в некоторые моменты времени θ между 0 и t условие невырожденности может не выполняться в точке $(p(\theta), q(\theta))$ лагранжева многообразия $g^\theta M$. Такие точки и называются *фокальными точками* к многообразию M вдоль рассматриваемой фазовой кривой.

Заметим, что определения фокальной к M точки и индекса Морса не зависят от уравнения Шредингера, а относятся просто к геометрии фазового потока в кокасательном расслоении к конфигурационному пространству (или, что то же, к вариационному исчислению). В частности, в качестве лагранжева многообразия M можно взять слой кокасательного расслоения, проходящий через точку (p_0, q_0) (заданный условием $q = q_0$).

В этом случае фокальная к M точка на выходящей из (p_0, q_0) фазовой кривой называется *сопряженной* к исходной точке (точнее, проекция этой фокальной точки на конфигурационное пространство называется сопряженной точкой к точке q_0 вдоль экстремали в конфигурационном пространстве, выходящей из точки q_0 с импульсом p_0). В еще более частном случае движения по геодезическим на римановом многообразии фокальная точка к слою кокасательного расслоения называется сопряженной с начальной {точкой геодезической вдоль этой геодезической. Например, Южный полюс сферы — сопряженная точка Северного полюса вдоль любого меридиана.

Индекс Морса отрезка геодезической, равный числу сопряженных началу точек, играет важную роль в вариационном исчислении. А именно, рассмотрим второй дифференциал действия как квадратичную форму на пространстве вариаций изучаемой геодезической (с закрепленными концами). Тогда отрицательный индекс инерции этой квадратичной формы равен индексу Морса (см., например, Дж. Милнор, Теория Морса, «Мир», 1965).

Таким образом, до первой сопряженной точки геодезическая реализует минимум действия, чем и оправдывается название «принцип наименьшего действия» для различных вариационных принципов механики.

Заметим, что при вычислении индекса Морса фокальные точки нужно учитывать с кратностями (кратность фокальной точки общего положения равна 1).

Индекс Морса является частным случаем так называемого *индекса Маслова*, который определяется независимо от какого бы то ни было фазового потока для любых кривых на лагранжевом многообразии кокасательного расслоения над конфигурационным пространством.

Рассмотрим проекцию нашего n -мерного лагранжева многообразия на n -мерное конфигурационное пространство. Это — гладкое отображение многообразий одинаковой размерности. Оно может иметь особые точки, т. е. точки, в которых ранг производной отображения падает и в окрестности которых проекция не является диффеоморфизмом.

Оказывается, вообще говоря, множество особых точек само имеет размерность $n - 1$ и состоит из объединения гладкого многообразия размерности $n - 1$ простейших особых точек, в которых ранг падает на 1, и из конечного набора многообразий, размерность которых $n - 3$ и меньше.

Здесь «вообще говоря» означает, что указанных свойств можно добиться сколь угодно малым шевелением лагранжева многообразия, при котором оно остается лагранжевым.

Существенно отметить, что среди частей разных рангов, на которые разбивается множество особых точек, нет части размерности $n - 2$. За простейшими особыми точками, образующими многообразие размерности $n - 1$, следуют точки, где ранг падает на две единицы, и они образуют многообразие размерности $n - 3$. Проекция множества особых точек на конфигурационное пространство (каустика) состоит, вообще говоря, из частей всех размерностей от 0 до $n - 1$ без пропусков.

Далее, оказывается, что $n - 1$ -мерное многообразие простейших особых точек расположено на лагранжевом многообразии двусторонне, а именно можно следующим образом согласовать ориентации нормалей во всех его точках.

Рассмотрим какую-либо простейшую особую точку на лагранжевом многообразии.

Рассмотрим систему координат q_1, \dots, q_n в окрестности проекции этой точки на конфигурационное пространство. Пусть p_1, \dots, p_n — соответствующие координаты в слоях кокасательного

расслоения. В окрестности нашей особой точки лагранжево многообразие можно рассматривать как график вектор-функции (q_1, p_2, \dots, p_n) от переменных (p_1, q_2, \dots, q_n) (или вектор-функции аналогичного вида, в которой роль выделенной координаты исполняет не первая, а какая-либо из остальных).

Особые точки вблизи данной определяются тогда из условия $dq_1/dp_1 = 0$. Для лагранжевых многообразий общего положения эта производная меняет знак при переходе с одной стороны многообразия особых точек на другую в рассматриваемой окрестности простейшей особой точки. Мы выбираем за *положительную сторону* τ , где эта производная положительна.

Заметим, что согласованность определения положительного направления вблизи разных точек нуждается в доказательстве. Более того, нужно доказать, что положительное направление вблизи одной точки определено корректно, т. е. не зависит от координатной системы. Все это можно сделать прямыми вычислениями (см. цитированную выше статью в «Функциональном анализе»).

Теперь индекс Маслова ориентированной кривой на лагранжевом многообразии определяется как число переходов с отрицательной стороны многообразия особенностей на положительную минус число обратных переходов. При этом предполагается, что концы кривой неособы и что кривая пересекает лишь многообразие простейших особых точек и лишь под ненулевыми углами. Определив индекс для таких кривых, можно определить его для произвольной кривой, соединяющей две неособые точки: для этого достаточно аппроксимировать кривую такой, которая пересекает лишь многообразие простейших особых точек и притом под ненулевыми углами. Можно показать, что от выбора аппроксимирующей кривой индекс не зависит.

Задача. Найти индекс ориентированной параметром t , $0 \leq t \leq 2\pi$, окружности $p = \cos t$, $q = \sin t$ на лагранжевом многообразии $p^2 + q^2 = 1$ фазовой плоскости.

Ответ. + 2.

Наконец, индекс Морса фазовой кривой в \mathbb{R}^{2n} можно теперь определить как индекс Маслова кривой на $n+1$ -мерном лагранжевом многообразии в подходящем $2n+2$ -мерном фазовом пространстве. Координатами в этом пространстве служат $(p_0, p; q_0, q)$ (где $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$). Если положить здесь $q_0 = t$, $p_0 = -H(p, q)$, а точку (p, q) заставить пробегать n -мерное лагранжево многообразие в \mathbb{R}^{2n} , полученное из исходного за время t под действием фазового потока, то при изменении t полученные точки в \mathbb{R}^{2n+2} заметут $n+1$ -мерное лагранжево многообразие. График движения фазовой точки под действием фазового потока можно рассматривать как кривую на этом $n+1$ -мерном лагранжевом многообразии. Можно проверить, что индекс Маслова этого графика совпадает с индексом Морса исходной фазовой кривой.

В. Индексы замкнутых кривых. Индексы замкнутых кривых на лагранжевых подмногообразиях линейного фазового пространства можно вычислять также с помощью комплексной структуры. Введем в линейном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$, кроме симплектической структуры, $dp \wedge dq$ еще евклидову структуру (со скалярным квадратом $p^2 + q^2$) и комплексную структуру, заданную умножением на мнимую единицу

$$I: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad I(p, q) = (-q, p); \quad z = p + iq, \quad C^n = \{z\}.$$

Все три структуры связаны соотношением

$$[x, y] = (Ix, y),$$

где квадратными скобками обозначено кососкалярное произведение.

Линейные преобразования фазового пространства, сохраняющие какие-нибудь две (и тогда все три) структуры, называются *унитарными*. Такие преобразования переводят лагранжевы плоскости в лагранжевы.

Каждая лагранжева плоскость может быть получена из какой-нибудь одной (например, из вещественной плоскости \mathbb{R}^n , заданной уравнением $q=0$) унитарным преобразованием. При этом любые два унитарных преобразования A, B , переводящие вещественную плоскость в одну и ту же лагранжеву плоскость, отличаются на унитарное преобразование, являющееся вещественным ортогональным преобразованием:

$$B = AC, \quad \text{где } C\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n.$$

Обратно, любое предварительное ортогональное преобразование не меняет образа вещественной плоскости под действием унитарного преобразования.

Заметим теперь, что определитель ортогонального преобразования равен ± 1 . Поэтому *квадрат определителя* унитарного преобразования, переводящего вещественную плоскость в данную лагранжеву плоскость, зависит лишь от самой лагранжевой плоскости и совершенно не зависит от специального выбора унитарного преобразования.

После этих предварительных замечаний вернемся к нашему лагранжеву многообразию и лежащей на нем замкнутой ориентированной кривой. В каждой точке кривой имеется касательная плоскость к лагранжеву многообразию в линейном симплектическом пространстве. Квадрат определителя унитарного преобразования, переводящего вещественную плоскость в касательную, есть комплексное число, по модулю равное единице. При движении точки по нашей замкнутой кривой это комплексное число меняется. За время полного обхода кривой квадрат определителя совершит некоторое целое число оборотов вокруг начала координат на плоскости комплексного переменного, ориентированной от

1 к i . Это целое число и есть индекс рассматриваемой замкнутой кривой.

Индексы замкнутых кривых входят в асимптотические формулы для стационарных задач (собственных колебаний). Предположим, что фазовый поток, соответствующий потенциалу U , имеет инвариантное лагранжево многообразие, лежащее на уровне энергии $H = E$. Тогда уравнение

$$\frac{1}{2} \Delta \psi = \lambda^2 (U(q) - E) \psi$$

имеет серию собственных чисел $\lambda_N \rightarrow \infty$ с асимптотикой $\lambda_N = \mu_N + O(\mu_N^{-1})$, если для всех замкнутых контуров γ на нашем лагранжевом многообразии выполняется сравнение

$$\frac{2\mu_N}{\pi} \oint_{\gamma} p dq \equiv \text{ind } \gamma \pmod{4}.$$

В одномерном случае лагранжево многообразие — окружность, ее индекс равен 2, и предыдущая формула превращается в так называемое «условие квантования»:

$$\mu_N \oint_{\gamma} p dq = 2\pi \left(N + \frac{1}{2}\right).$$

Собственные функции, соответствующие этим собственным числам, также связаны с лагранжевым многообразием, но эта связь не так проста. В действительности удается написать не асимптотические формулы для собственных функций, а лишь формулы для функций, приближенно удовлетворяющих уравнению собственных функций. Эти функции оказываются малыми вне проекции лагранжева многообразия на конфигурационное пространство. Асимптотические формулы имеют особенности вблизи каустик, образующихся при проектировании.

Настоящие собственные функции могут, однако, вести себя совершенно по-другому, по меньшей мере, если собственное число кратное или если имеются близкие к нему собственные числа (см. добавление 10).

ЛАГРАНЖЕВЫ ОСОБЕННОСТИ

Лагранжевы особенности — это особенности проекций лагранжевых многообразий на конфигурационное пространство. Такие особенности встречаются при исследовании решений уравнения Гамильтона—Якоби в целом, при изучении каустик, фокальных или сопряженных точек, при анализе распространения разрывов и ударных волн в механике сплошной среды, а также в задачах, приводящих к коротковолновой асимптотике (см. добавление 11).

Чтобы описать лагранжевы особенности, нужно вначале сказать несколько слов об особенностях гладких отображений вообще. Начнем с простейших примеров.

А. Особенности гладких отображений поверхности на плоскость. Отображение проектирования сферы на плоскость имеет особенность на экваторе сферы (в точках экватора ранг производной падает на единицу). В результате на плоскости проекции образуется кривая (так называемый видимый контур), разграничивающая области с разным числом прообразов точки: у каждой точки плоскости внутри видимого контура два прообраза, а вне — ни одного.

В более сложных случаях «видимый контур» может иметь более сложные особенности. Рассмотрим, например, поверхность, заданную в трехмерном пространстве с координатами (x, y, z) уравнением (рис. 245)

$$x = yz - z^3$$

и отображение проектирования параллельно оси z на плоскость с координатами (x, y) .

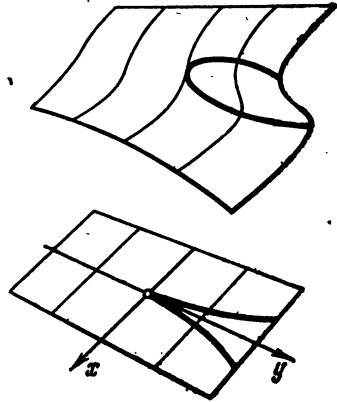


Рис. 245. Сборка Уитни.

Особые точки проектирования образуют на поверхности гладкую кривую (с уравнением $3z^2 = y$). Однако образ этой кривой на плоскости (x, y) уже не является гладкой кривой. Этот образ — полукубическая парабола с острием в точке $(0, 0)$ с уравнением

$$27x^2 = 4y^3.$$

Такая кривая разделяет плоскость на две части: меньшую (внутри острия) и большую (вне). Над каждой точкой меньшей части имеется три точки нашей поверхности, а большей — всего одна.

Рассмотрим теперь любую малую деформацию нашей поверхности. Оказывается, при проектировании всякой поверхности, близкой к нашей, видимый контур всегда будет иметь подобную же особенность (полукубическое острие) в некоторой точке, близкой к особенности видимого контура исходной поверхности. Иными словами, *рассматриваемая особенность неустранима малым шевелением поверхности.*

Более того, вместо деформации поверхности можно как угодно деформировать само отображение поверхности на плоскость (не заботясь более, чтобы оно было проектированием), лишь бы оно оставалось гладким и деформация была мала. Оказывается, и при таких деформациях острие не исчезает, а лишь слегка деформируется.

Приведенные здесь примеры исчерпывают все типичные особенности отображений поверхности на плоскость. Можно показать, что все более сложные особенности устранимы малым шевелением. Поэтому, слегка продеформировав любое гладкое отображение, можно всегда добиться того, что в окрестности любой точки отображаемой поверхности оно будет либо неособым, либо будет устроено как отображение проектирования сферы на плоскость близ экватора, либо как отображение проектирования рассмотренной выше поверхности с кубическим острием на видимом контуре.

Слова «устроено как» означают, что на поверхности-прообразе и плоскости-образе можно выбрать локальные координаты (в окрестности рассматриваемой точки и ее образа) так, что в этих координатах отображение запишется некоторым специальным образом. А именно, нормальные формы, к которым приводится отображение поверхности на плоскость в окрестности точек трех указанных выше типов, суть

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2 \text{ (неособая точка),}$$

$$y_1 = x_1^2, y_2 = x_2 \text{ (складка, как на экваторе сферы),}$$

$$y_1 = x_1 x_2 - x_1^3, y_2 = x_2 \text{ (сборка с острием видимого контура.)}$$

Здесь (x_1, x_2) — локальные координаты в прообразе, а (y_1, y_2) — в образе.

Доказательства приведенных теорем (они принадлежат Х. Уитни) и их многомерные обобщения можно найти в работах по теории особенностей гладких отображений, см., например:

В. И. Арнольд, Особенности гладких отображений, Успехи математических наук, 23, № 1 (1968), 3—44.

Р. Том, Г. Левин, Дж. Мазер и др., Особенности дифференцируемых отображений, «Мир», 1968.

Б. Особенности проектирования лагранжевых многообразий. Рассмотрим теперь n -мерное конфигурационное многообразие, соответствующее $2n$ -мерное фазовое пространство и в нем n -мерное лагранжево подмногообразие (т. е. n -мерное подмногообразие, на котором 2-форма, задающая симплектическую структуру фазового пространства, равна тождественно нулю).

Проектируя лагранжево многообразие на конфигурационное пространство, мы получаем отображение одного гладкого n -мерного многообразия на другое той же размерности.

В общей точке это отображение является локальным диффеоморфизмом, однако в некоторых точках лагранжева многообразия ранг дифференциала падает. Такие точки называются особыми. При проекции множества особых точек в конфигурационном пространстве образуется «видимый контур», который в лагранжевом случае называется *каустикой*.

Каустики могут иметь сложные особенности, однако, как и в обычной теории особенностей гладких отображений, от слишком сложных особенностей можно избавиться малым шевелением. (Здесь под малым шевелением подразумевается такая малая деформация лагранжева многообразия в фазовом пространстве, при которой это многообразие остается лагранжевым).

После этого останутся лишь простейшие неустранимые особенности, для которых можно выписать нормальные формы и которые можно раз навсегда подробно изучить. При рассмотрении задач общего положения, не обладающих какими-либо специальными свойствами симметрии, естественно ожидать появления лишь этих простейших неустранимых особенностей.

Рассмотрим, например, каустики, образованные при освещении стены светом от точечного источника, отраженным от какой-либо гладкой искривленной поверхности (здесь четырехмерное фазовое пространство образовано прямыми, пересекающими поверхность стены по всевозможным направлениям, а лагранжево подмногообразие — лучами света, выходящими из источника, при пересечении ими стены). Перемещая источник, можно заметить, что, вообще говоря, каустики имеют лишь простейшие особенности (полукубические острия), а более сложные особенности появляются лишь при специальных, исключительных положениях источника.

Ниже приведены нормальные формы для особенностей проектирования n -мерного лагранжева подмногообразия из $2n$ -мерного

фазового пространства на n -мерное конфигурационное пространство для $n \leq 5$. Этих нормальных форм конечное число, и их классификация связана (довольно загадочным образом) с классификациями простых групп Ли, простейших вырожденных критических точек функций, правильных многогранников и многих других объектов. При $n \geq 6$ нормальные формы некоторых особенностей неизбежно должны содержать параметры. За дальнейшими подробностями читатель отсылается к статье:

В. И. Арнольд, Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k , D_k , E_k и лагранжевы особенности, Функциональный анализ и его приложения, 6:4 (1972), 3—25.

В. Таблица нормальных форм типичных особенностей проекций лагранжевых многообразий размерности $n \leq 5$. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

(q_1, \dots, q_n) — координаты в конфигурационном пространстве,

(p_1, \dots, p_n) — соответствующие импульсы, так что вместе p и q образуют симплектическую систему координат в фазовом пространстве.

Лагранжево многообразие мы будем задавать при помощи производящей функции F формулами

$$q_i = \partial F / \partial p_i, \quad p_j = -\partial F / \partial q_j,$$

где индекс i пробегает некоторую часть множества $(1, \dots, n)$, а индекс j — остальную часть. А именно, $i=1, j>1$ для особенностей, обозначенных в списке через A_k , и $i=1,2, j>2$ для особенностей, обозначенных через D_k и E_k .

При таких обозначениях одно и то же выражение $F(p_i, q_j)$ может рассматриваться как задающее лагранжево многообразие в пространствах разного числа измерений: мы можем дописать сколько угодно аргументов q_j , от которых F на самом деле не зависит.

Список нормальных форм типичных особенностей имеет теперь следующий вид:

при $n=1$

$$A_1: F = p_1^2; \quad A_2: F = \pm p_1^3;$$

при $n=2$, кроме двух предыдущих, еще

$$A_3: F = \pm p_1^4 + q_2 p_1^2;$$

при $n=3$, кроме трех предыдущих, еще

$$A_4: F = \pm p_1^5 + q_3 p_1^3 + q_2 p_1^2;$$

$$D_4: F = \pm p_1^3 p_2 \pm p_2^2 + q_3 p_2^2;$$

при $n=4$, кроме пяти предыдущих, еще

$$A_5: F = \pm p_1^6 + q_4 p_1^4 + q_3 p_1^3 + q_2 p_1^2;$$

$$D_5: F = \pm p_1^4 p_2 \pm p_2^2 + q_4 p_2^2 + q_3 p_2^2;$$

при $n = 5$, кроме семи предыдущих, еще

$$A_6: F = \pm p_1^7 \pm q_5 p_1^5 + \dots + q_2 p_1^3,$$

$$D_6: F = \pm p_1^3 p_2 \pm p_2^3 + q_5 p_2^2 + q_4 p_2^2 + q_3 p_2^2,$$

$$E_6: F = \pm p_1^3 \pm p_2^4 + q_5 p_1 p_2^2 + q_4 p_1 p_2 + q_3 p_2^2.$$

Г. Обсуждение нормальных форм. Точка типа A_1 неособая.

Особенность типа A_2 — это особенность типа складки. Действительно, если за координаты на лагранжевом многообразии взять (p_1, q_2, \dots, q_n) , то отображение проектирования запишется как

$$(p_1, q_2, \dots, q_n) \mapsto (\pm 3p_1^2, q_2, \dots, q_n).$$

Особенность типа A_3 — это сборка с полукубическим острием на видимом контуре. Чтобы в этом убедиться, достаточно выпи-

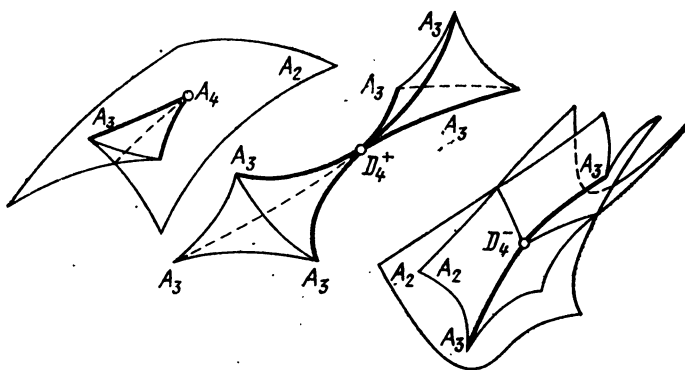


Рис. 246. Типичные особенности каустика в трехмерном пространстве.

сать явно соответствующее отображение двумерного лагранжева многообразия на плоскость:

$$(p_1, q_2) \mapsto (\pm 4p_1^3 + 2q_2 p_1, q_2).$$

Особенность типа A_4 впервые появляется в трехмерном случае, и соответствующая каустика представляет собой поверхность в трехмерном пространстве (рис. 246) с особенностью, называемой ласточкиным хвостом (мы уже встречались с ней в § 46).

Каустика особенности типа D_4 в трехмерном пространстве представляет собой поверхность с тремя ребрами возврата (типа A_3), касающимися в одной точке; при этом два из этих ребер возврата могут быть мнимыми, так что имеется два варианта каустики D_4 .

Д. Лагранжевы эквивалентности. Теперь следует сказать, в каком смысле приведенные примеры являются нормальными формами типичных особенностей проектирования лагранжевых многообразий. Прежде всего мы определим, какие особенности мы будем считать «одинаково устроенными».

Отображение проектирования лагранжева многообразия на конфигурационное пространство будем для краткости называть *лагранжевым отображением*. Пусть даны два лагранжевых отображения многообразий одинаковой размерности n (соответствующие n -мерные лагранжевы многообразия лежат, вообще говоря, в разных фазовых пространствах, являющихся кокасательными расслоениями двух разных конфигурационных пространств). Мы скажем, что два таких лагранжевых отображения *лагранжево эквивалентны*, если существует симплектический диффеоморфизм первого фазового пространства на второе, переводящий слой первого кокасательного расслоения в слой второго и переводящий первое лагранжево многообразие во второе. Сам симплектический диффеоморфизм называется тогда *лагранжевой эквивалентностью отображений*.

Заметим, что два лагранжево эквивалентных лагранжевых отображения превращаются одно в другое при помощи диффеоморфизмов в пространстве-прообразе и пространстве-образе (или, как говорят в анализе, приводятся одно к другому заменой координат в прообразе и в образе). Действительно, наш симплектический диффеоморфизм, суженный на лагранжево многообразие, задает диффеоморфизм прообразов; диффеоморфизм же конфигурационных пространств-образов возникает потому, что слои переходят в слои.

В частности, каустики двух лагранжево эквивалентных отображений диффеоморфны, поэтому классификация с точностью до лагранжевой эквивалентности влечет за собой классификацию каустик. Однако классификация с точностью до лагранжевой эквивалентности, вообще говоря, тоньше, чем классификация каустик, так как из диффеоморфности каустик вообще не вытекает лагранжева эквивалентность отображений. Более того, классификация с точностью до лагранжевой эквивалентности тоньше, чем классификация с точностью до диффеоморфизмов прообраза и образа, так как не всякая такая пара диффеоморфизмов реализуется симплектическим диффеоморфизмом фазового пространства.

Лагранжево отображение, рассматриваемое в окрестности некоторой выделенной точки, называется *лагранжево эквивалентным в этой точке* другому лагранжеву отображению (также имеющему выделенную точку), если существует лагранжева эквивалентность первого отображения в некоторой окрестности первой точки на второе в некоторой окрестности второй точки, переводящая первую точку во вторую.

Теперь мы можем сформулировать классификационную теорему для особенностей лагранжевых отображений в размерностях $n \leq 5$.

Всякое n -мерное лагранжево многообразие ($n \leq 5$) можно сколь угодно малой деформацией в классе лагранжевых многообразий превратить в такое, что отображение проектирования на конфигурационное пространство будет в каждой точке лагранжево

эквивалентным одному из лагранжевых отображений приведенного выше списка.

В частности, двумерное лагранжево многообразие можно сколь угодно малым шевелением в классе лагранжевых многообразий привести в «общее положение», так что отображение проектирования на конфигурационное (двумерное) пространство не будет иметь других особенностей, кроме складок (которые лагранжевой эквивалентностью приводятся к нормальной форме A_2) и сборок (которые лагранжевой эквивалентностью приводятся к нормальной форме A_3).

Заметим, что уже приведенное утверждение о двумерных лагранжевых отображениях не вытекает из классификационной теоремы для общих (нелагранжевых) отображений. Ибо, во-первых, лагранжевы отображения составляет среди всех гладких отображений весьма узкий класс, и поэтому могут иметь (и действительно имеют при $n > 2$) в качестве типичных для лагранжевых отображений такие особенности, которые для отображений общего вида нетипичны. Во-вторых же, из возможности привести отображение к нормальной форме диффеоморфизмами прообраза и образа еще не следует возможность такого приведения с помощью лагранжевой эквивалентности.

Таким образом, каустики лагранжева двумерного многообразия общего положения имеют в качестве особенностей лишь полукубические острия (и точки трансверсального самопересечения). Все более сложные особенности распадаются при малом шевелении лагранжева многообразия, тогда как точки возврата и точки самопересечения каустики неустранимы малым шевелением и лишь немного деформируются.

Нормальные формы следующих особенностей A_4, D_4, \dots можно подобным же образом использовать для исследования каустик лагранжевых многообразий большего числа измерений, а также для исследования перестроек каустик лагранжевых многообразий небольшого числа измерений при изменении параметров, от которых зависит многообразие.

Другие применения формулы настоящего раздела находят в теории *лежандровых особенностей*, то есть особенностей волновых фронтов, преобразований Лежандра, огибающих и выпуклых оболочек (см. добавление 4, стр. 331). Теории лагранжевых и лежандровых особенностей имеют очевидные приложения не только в геометрической оптике и теории асимптотик осциллирующих интегралов, но и в вариационном исчислении, в теории разрывных решений нелинейных уравнений с частными производными, в задачах оптимизации, погоны и т. п. Р. Том предложил для теории особенностей, теории бифуркаций и их приложений объединяющее название *теория катастроф*.

ДОБАВЛЕНИЕ 13
УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА

Не все первые интегралы уравнений классической механики объяснены явной симметрией задачи (примеры — специфические интегралы задачи Кеплера, задачи о геодезических на эллипсоиде и т. п.). В таких случаях говорят о «скрытой симметрии».

Интересные примеры такой скрытой симметрии доставляет уравнение Кортевега—де Фриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}. \quad (1)$$

Это нелинейное уравнение с частными производными возникло первоначально в теории мелкой воды; впоследствии оказалось, что это же уравнение встречается в целом ряде задач математической физики.

В результате серии численных экспериментов были обнаружены удивительные свойства решений этого уравнения с нулевыми граничными условиями на бесконечности: эти решения при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ распадаются на «солитоны» — волны определенной формы, бегущие с разными скоростями.

Чтобы получить солитон, бегущий со скоростью c , достаточно подставить в уравнение (1) функцию $u = \varphi(x - ct)$. Для φ получится тогда уравнение $\varphi'' = 3\varphi^2 + c\varphi + d$ (d — параметр). Это — уравнение Ньютона с кубическим потенциалом. На фазовой плоскости (φ, φ') имеется седло. Сепаратриса, идущая из седла в седло, в котором $\varphi = 0$, определяет стремящееся к 0 при $x \rightarrow \pm\infty$ решение φ ; оно и есть солитон.

При столкновениях солитонов наблюдается довольно сложное нелинейное взаимодействие. Однако численный эксперимент показал; что размеры и скорости солитонов не меняются в результате столкновения. Это обстоятельство навело на мысль о законах сохранения. И действительно, Крускалу, Забусскому, Лаксу, Гарднеру, Грину и Миуре удалось найти целую серию первых интегралов для уравнения Кортевега—де Фриза. Эти интегралы имеют вид $I_s = \int P_s(u, \dots, u^{(s)}) dx$, где P_s — многочлен. Например, легко

проверить, что первыми интегралами уравнения (1) являются

$$I_{-1} = \int u dx, \quad I_0 = \int u^2 dx, \quad I_1 = \int \left(\frac{u^2}{2} + u^3 \right) dx, \\ I_2 = \int \left(\frac{u^2}{2} - \frac{5}{2} u^2 u' + \frac{5}{2} u^4 \right) dx.$$

Появление бесконечной серии первых интегралов легко объясняется следующей теоремой Лакса *). Будем обозначать оператор умножения на функцию от x знаком этой функции, а оператор дифференцирования по x — символом ∂ . Рассмотрим зависящий от функции $u(x)$ оператор Штурма—Лиувилля $L = -\partial^2 + u$. Непосредственно проверяется

Т е о р е м а. Уравнение Кортевега — де Фриза (1) эквивалентно уравнению $\dot{u} = [L, A]$, где $A = 4\partial^3 - 3(u\partial + \partial u)$.

Из этой теоремы Лакса непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. Операторы L , построенные по решению уравнения (1), при всех t унитарно эквивалентны; в частности, каждое из собственных чисел λ задачи Штурма—Лиувилля $Lf = \lambda f$ с нулевыми условиями на бесконечности является первым интегралом уравнения Кортевега — де Фриза.

В. Е. Захаров и Л. Д. Фаддеев заметили, что уравнение (1) является вполне интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системой, и указали соответствующие переменные действие — угол **). Симплектическая структура в пространстве убывающих на бесконечности функций $u(x)$ задается кососкалярным произведением $\omega^2(\partial w, \partial v) = \frac{1}{2} \int (\omega \partial v - v \partial \omega) dx$, а гамильтонианом уравнения (1) является интеграл I_1 . Иными словами, уравнение (1) записывается в виде уравнения Гамильтона в функциональном пространстве функций от x , $\dot{u} = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_1}{\delta u}$.

Каждый интеграл I_s задает таким же образом «высшее уравнение Кортевега — де Фриза» $\dot{u} = Q_s[u]$, где $Q_s = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_s}{\delta u}$ — полином от u, u', \dots, u^{2s+1} . Интегралы I_s находятся в инволюции, и соответствующие им потоки в функциональном пространстве коммутируют.

Явный вид полиномов P_s и Q_s , а также явный вид переменных действие — угол (и, следовательно, решений уравнения (1)), описывается в терминах решения прямой и обратной задач теории рассеяния на потенциале u .

*) Лакс П. Д., Интегралы эволюционных уравнений и уединенные волны, сб. Математика, 13 : 5 (1969), 128—150.

***) Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д., Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система, Функциональный анализ, 5 : 4 (1971), 18—27.

Явный вид полиномов Q_s можно получить также из следующей теоремы Гарднера, обобщающей теорему Лакса. Рассмотрим в пространстве функций от x дифференциальный оператор вида $A = \sum p_i \partial^{n-i}$, где $p_0 = 1$, а остальные коэффициенты p_i — многочлены от u и производных u по x . Оказывается, для каждого s существует такой оператор A_s порядка $2s+1$, что его коммутатор с оператором Штурма—Лиувилля L есть оператор умножения на функцию: $[L, A_s] = Q_s$.

Оператор A_s определяется выписанными условиями однозначно с точностью до добавления линейной комбинации A_r с $r < s$; тем самым и многочлены Q_s от u и от производных u определены с точностью до прибавления линейной комбинации предыдущих Q_r .

В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Л. Д. Фаддеев и другие исследовали с помощью приема Лакса и техники обратной задачи теории рассеяния целый ряд физически важных уравнений, в том числе уравнения $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$, $i\psi_t + \psi_{xx} \pm \psi |\psi|^2 = 0$.

Исследование задачи с периодическими граничными условиями для уравнения Кортевега—де Фриза привело С. П. Новикова *) к открытию интересного класса вполне интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы. Эти системы строятся следующим образом.

Рассмотрим какую-либо конечную линейную комбинацию первых интегралов $I = \sum c_i I_{n-i}$, и пусть $c_0 = 1$. Множество стационарных точек потока с гамильтонианом I в функциональном пространстве инвариантно относительно фазовых потоков с гамильтонианами I_s , в частности относительно фазового потока уравнения (1).

С другой стороны, эти стационарные точки определяются из уравнения $\frac{d}{dx} \frac{\delta I}{\delta u} = 0$, или $\frac{\delta I}{\delta u} = d$. Последнее уравнение представляет собой уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $I - dI_{-1}$, включающего n -е производные. Следовательно, оно имеет порядок $2n$ и может быть записано как система уравнений Гамильтона в $2n$ -мерном евклидовом пространстве.

Оказывается, получающаяся гамильтонова система с n степенями свободы имеет n интегралов в инволюции и может быть полностью проинтегрирована с помощью подходящих координат действия—угла. Таким образом получается конечномерное семейство частных решений уравнения Кортевега—де Фриза, зависящее от $3n+1$ параметров ($2n$ фазовых координат и еще $n+1$ параметр $c_1, \dots, c_n; d$).

Найденные решения обладают, как показал Новиков, замечательными свойствами: например, в периодической задаче они задают функции $u(x)$, для которых линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами $-X'' + u(x)X = \lambda X$ имеет конечное число зон параметрического резонанса (см. § 25) на оси λ .

*) Новиков С. П., Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза, I, Функциональный анализ, 8 : 3 (1974), 54—66.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра Ли 176, 282
— — векторных полей 179
— — группы Ли 181
— — первых интегралов 185
— — функций Гамильтона 182
Апоцентр 32
Атлас 68
— симплектический 196
Атласы эквивалентные 68

Базис симплектический 187
— эрмитово-ортонормированный 307

Вариация 48
Вектор касательный к многообразию 70
— кокасательный к многообразию 171
— Лапласа 381
— Пуассона 343
— формы нулевой 201
— — характеристический 333
Векторы косоортгональные 187
Вихрь двумерного поля скоростей 297
Волчок быстро запущенный 135
— быстрый 133
— Лагранжа 127
— симметричный 127
— спящий 132
Вращение 107
— стационарное 124, 291
Время 9

Гамильтониан квадратичный 346
— , собственные числа 346
Гиперплоскость контактная 318
Гомологии 169
Граница цепи 157
Группа галилеева 9

Группа диффеоморфизмов однопараметрическая 21, 177
— Ли 181, 282
— ортогональная 192
— параллельных переносов 8
— симплектическая 188
— стационарная 237
— унитарная 192

Движение в галилеевой системе координат 11
— в подвижной системе координат 107
— поступательное 107
— условно-периодическое 247, 381
Действие 52
— группы Ли пуассоновское 337
Дивергенция 159
Диффеоморфизм, гомологичный тождественному 387
— контактный 323
Длина пути оптическая 216
Дополнение косоортгональное 187

Жесткость системы 95

Задача двух тел 44
— Кеплера 35
— трех тел ограниченная 283
Закон Кеплера 29, 30
— сохранения циркуляций 296
— — энергии 22, 176

Импульс 40
Импульсы обобщенные 52
Инвариант адиабатический 259, 380, 381

- Инвариант интегральный** 174
 — — — относительный 175
 — — — Пуанкаре 204
 — — — Пуанкаре — Картана 204
Инволютивность 55
Инволюция Лежандра 330
Индекс Маслова 413
 — Морса 411
Индикатриса 214
Интеграл формы по цепи 157
Интегрирование дифференциальных форм 153
- Карта** 67
Карты совместные 67
Каустики 409, 419
Класс когомологий алгебры Ли 336
Клетки жордановы неустраиваемые 348
Когомологии 168
Колесания малые 88
 — собственные 90
 — фазовые 363
Количество движения 40
Коммутатор 177, 179
 — Ли 181
Контактизация симплектического многообразия 332
Координаты обобщенные 52
 — циклические 59
Коразмерность многообразия 395, 399
Коцикл алгебры Ли двумерный 336
Кривая фазовая 18
Кривизна риманова 265
 — — по двумерному направлению 269
- Лагранжиан** 52
Лемма Пуанкаре 167
 — Стокса 200
 — — многомерная 202
Линеаризация системы 86, 87
Линии вихревые 200
 — ротора 200, 202
Линия мировая 11, 12
Луч 215
- Маятник Фуко** 113
Медлительность фронта нормальная 216
Метрика келерова 310
 — риманова 71
 — — левоинвариантная 285, 292
 — — правоинвариантная 293
- Мир** 9
Мировые точки 9
Многообразие вложенное 69
 — келерово 310
 — лагранжево 410
 — лежандрово 328
 — параллелизуемое 116
 — риманово 71
 — связанное 68
 — симплектическое 170
Многочлен Чебышева 26
Множество эллипсоидов вращения 395
Момент вектора относительно оси 39
 — инерции относительно оси 119
 — кинетический 29, 41, 287, 291
 — количества движения 29
- Направление сопряженное** 216
Неравенство Юнга 56
Нутация 131, 134
- Образ контактной формы** 324
Одночлены внешние 141
Окрестность точки многообразия 68
Оператор дифференциальный 177
 — инерции 118, 287
Оси инерции 118
Особенности лагранжевы 417
 — лежандровы 331
Отображение за период 99
 — каноническое 205
 — лагранжево 422
- Переменные действие — угол** 242, 244
 — действия 242, 244, 445
Перемещения виртуальные 80
Перенесение вектора на поверхности параллельное 263
Перицентр 32
Плоскость контактная 319
 — Лобачевского 264
 — симплектического пространства *изотропная* 189
 — — — лагранжева 189
 — — — нулевая 189
 — — — фазовая 18
- Подалгебра** 185
Подгруппа дискретная 233
Подмногообразие лежандрово 329
Подпространства трансверсальные 191
Поле векторное вариации геодезической 271

- Поле векторное гамильтоново 172
 — — контактное 324
 — — локально гамильтоново 186
 — — фазовой скорости 18
 — гиперплоскостей невырожденное 317
 — осесимметричное 38
 — правинвариантное 182
 — приведенное 343
 — силовое потенциальное 26, 27, 38
 — центральное 28, 30, 38, 53
 Полином возвратный 193
 Полиэдр сингулярный k -мерный 155
 Положение равновесия 18, 82, 85
 Поля изозавихренны 296
 Поток гамильтонов 173
 — геодезический 274
 — — ориентированных контактных элементов 323
 — поля через поверхность 158
 — фазовый 21, 60
 — — локально гамильтонов 186
 Представление группы коприсоединенное 283
 — — присоединенное 282
 Преобразование галилеево 10
 — каноническое 205
 — — бесконечно малое 232
 — — свободное 223, 230
 — Лежандра 54, 330
 — симплектическое линейное 188, 192
 — — сильно устойчивое 194
 — — устойчивое 194
 — унитарное 415
 — эллиптическое 353
 Прецессия 132, 134
 Принцип Гюйгенса 215
 — Даламбера.— Лагранжа 80
 — детерминированности Ньютона 8
 — наименьшего действия Гамильтона 52
 — — — Мопертюи 211
 — относительности Галилея 8
 — усреднения 253
 — Ферма 214
 Проекция естественная 71
 Произведение внешнее 141, 143
 — внутреннее 168
 — кососкалярное 186, 340
 — скалярное 9
 — — эрмитово 306
 Производная ковариантная 269, 271
 — Ли 168
 — отображения 71
 — по направлению 177
 — рыбака 168
 — формы внешняя 161
 Промежуток времени 9
 Пространство аффинное 8
 — галилеево 9
 — — координатное 10
 — евклидово 9
 — касательное 70
 — кокасательное 171, 283, 318
 — комплексное проективное 306
 — конфигурационное 11
 — — системы со связями 67
 — одновременных событий 9
 — симплектическое линейное 186
 — фазовое 23,60
 — — приведенное 339
 Путь характерный 273
 Работа поля 27
 — силы 26
 Равновесие 85
 — относительное 344
 Размерность многообразия 68
 Расслоение касательное 70
 — кокасательное 171, 318
 — лежандрово 331
 Расстояние между одновременными событиями 9
 Расстройка частоты 357
 Расщепление сепаратрис 360
 Резонанс параметрический 103, 192
 Ротор 164
 — двумерного поля скоростей 297
 Связи голономные 67
 — идеальные 80
 Сдвиг правый 181
 Сила 16, 39
 — внешняя 40
 — внутренняя 40
 — инерции 84, 111
 — — вращения 112
 — Кориолиса 112
 — реакции связи 79
 — центробежная 112
 Силы взаимодействия 40, 44
 — обобщенные 52
 Симплектизация контактного векторного поля 325
 — — многообразия 320
 Система замкнутая 40
 — координат галилеева 10
 — — инерциальная 8
 — — неподвижная 107
 — — подвижная 107
 — — симплектическая 188

- Система лагранжева 72
 — — неавтономная 75
 — механическая 11
 — натуральная 73
 — интегрируемая невырожденная 251
 — — изоэнергетически 369
 — потенциальная 16, 22, 43
 — с двумя степенями свободы 22
 — с одной степенью свободы 17
 Скобка Пуассона 179, 182
 Скорости обобщенные 52
 Скорость 10
 — вторая космическая 15
 — первая космическая 37
 — секториальная 30
 — угловая 108
 След цепи при гомотопии 173
 Сложение скоростей 107—110
 Слой расслоения над точкой x 71
 События 9
 — одновременные 9
 Солитон 424
 Соотношение между частотами 250
 Среднее временное 248
 — пространственное 247
 Структура галилеева 9
 — евклидова 8, 285
 — комплексная 192
 — комплексного проективного пространства симплектическая 309
 — — — эрмитова 306
 — контактная 312, 317
 — проективных алгебраических многообразий симплектическая 310
 — симплектическая 170
 — — линейная 186
- Тело твердое 114
 Тензор инерции 287
 — кривизны 268
 Теорема Вильямсона 348
 — Галина 348
 — Гарднера 425
 — Гюйгенса 214
 — Дарбу 198
 — — для контактных структур 326
 — Колмогорова 371
 — Лакса 425
 — Лиувилля 60
 — — об интегрируемых системах 235
 — Нётер 77
 — об усреднении 248
 — Пуанкаре геометрическая 384
 — — о возвращении 62
 — Пуансо 125
- Теорема Пуассона 184
 — Релея 300
 — Штейнера 121
 — Якоби 224
 Течения стационарные 294
 Тожество Якоби 179, 184
 Торы инвариантные 368
 — — нерезонансные 368
 — — резонансные 369
 Точка контакта 317, 319
 — пространства моментов регулярная 291
 Точки фазовые 18
 — фокальные к многообразию 412
 Траектория 11
 Трубка ротора 200, 202
- Углы Эйлера 127, 128
 Умножение внешнее 143
 Уравнение Гамильтона — Якоби 219, 224
 — Кортевега — де Фриза 424
 — Ньютона 12
 — Шредингера 409
 — Эйлера 123
 — Эйлера — Лагранжа 50
 — Якоби 271
 Уравнения Гамильтона канонические 57, 203, 207
 — Лагранжа 52, 57
 — с частными производными первого порядка нелинейные 333
 — Эйлера 123
 — — для обобщенного твердого тела 288
 Ускорение 11, 12
 Условие интегрируемости поля плоскостей 316
 — — Фробениуса 316
 Устойчивость 86
 — по Ляпунову 99
 — сильная 100
- Факторизация конфигурационного пространства 343
 — фазового потока 289
 Фигуры Лиссажу 24, 25
 Форма Биркгофа нормальная для гамильтониана 352
 — — — для преобразования 353
 — замкнутая 166
 — контактная 319
 — неособая 201

- Формула гомотопии 168
 — Стокса 162
 Формы базисные 141
 — внешние 138, 139, 140
 — дифференциальные 147, 149
 Фронт волновой 214
 — —, скорость движения 215
 Функция Гамильтона 57, 172, 233, 346
 — — контактная 327
 — —, собственные числа 346
 — действия 217
 — Лагранжа 52
 — производящая 223, 230
 — —, инвариантность 392
 — тока 297
 Функции двойственные по Юнгу 56
 — —, находящиеся в инволюции 234
 Функционал 48
 — дифференцируемый 48
- Характеристика 202, 220, 333
 Хвост ласточкин 221, 332, 421
- Центр инерции 41
 Цепь 156
- Цикл 167
 Циркуляция 158
- Частота условно-периодического движения 247
 Частоты независимые 247, 248
 Число Бетти 168
 — степеней евободы 68
 Члены резонансные 357
- Эволюция 254
 Эквивалентность отображений лагран-
 жева 422
 Экстремаль 49
 — условная 80
 Элемент контактный 317
 — — ориентированный 323
 — — —, геодезический поток 323
 Эллипсоид инерции 119, 395
 Энергия кинетическая 17, 42, 73
 — немеханическая 44
 — полная 17, 22, 43, 58
 — потенциальная 14, 17, 43, 73
 — — эффективная 31

Владимир Игоревич Арнольд
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

М., 1974 г., 432 стр. с. илл.

Редактор *Н. Н. Колесников*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*

Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 17/IV 1974 г. Подписано к печати 20/XI 1974 г. Бумага 60×90^{1/16}, тип. № 3. Физ. печ. л. 27. Условн. печ. л. 27. Уч.-изд. л. 27,44. Тираж 17 500 экз. Т-18369. Цена книги 1 р. 10 к. Заказ № 1404.

Издательство «Наука»
Главная редакция
Физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц, изготовленных в Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26, 4-ой типографией издательства «Наука»: 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25. Заказ № 297.

