МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 1

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПРИЛОЖЕНИЯ

МСМ

А. В. Арутюнов
Г. Г. Магарил-Ильяев
В. М. Тихомиров

Факториал

МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 1.

А. В. Арутюнов Г. Г. Магарил-Ильяев
В. М. Тихомиров

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПРИЛОЖЕНИЯ

Рекомендовано учебно-методическими советами по математике и механике, по прикладной математике и информатике Учебно-методического объединения по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «010101 Математика», «010200 Прикладная математика и информатика» и по направлению «510200 Прикладная математика и информатика».

Москва
ФАКТОРИАЛ ПРЕСС
2006

УДК 517
ББК 22.16
А 86

Арутюнов А. В.

А 86 Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения / А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2006. — 144 с. — ISBN 5-88688-082-8.

Книга посвящена необходимым условиям экстремума для различных классов экстремальных задачах. Особое внимание уделено задачам оптимального управления и принципу максимума Понтрягина — необходимому условию минимума для таких задач. Отличительной чертой доказательств является их простота и прозрачность. Они опираются на вполне стандартные факты анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые собраны в приложениях. Принцип максимума иллюстрируется на большом числе примеров.

Книга может служить учебным пособием по различным курсам оптимизации. Она рассчитана на студентов средних и старших курсов, аспирантов и преподавателей университетов и технических вузов с повышенной математической подготовкой, а также научных работников, занимающихся исследованием экстремальных задач.

УДК 517
ББК 22.16

Научное издание

Арам Владимирович Арутюнов
Георгий Георгиевич Магарил-Ильяев
Владимир Михайлович Тихомиров

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПРИЛОЖЕНИЯ.

Формат 60 × 90/16. Усл. печ. л. 9. Бумага офсетная №1. Гарнитура литературная. Подписано к печати 09.03.2006. Тираж 1000 экз. Заказ № 3032.

Издательство «Факториал Пресс», 117449, Москва, а/я 331; ЛР ИД № 00316 от 22.10.99. e-mail: factorialco@mail.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов издательства «Факториал Пресс» в ППП типографии «Наука» Академиздатцентра «Наука» РАН. 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-88688-082-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена задачам классического вариационного исчисления и оптимального управления. В настоящее время теория оптимального управления представляется весьма важным и востребованным разделом математики, имеющим разнообразные приложения к задачам техники, экономики, управления, естествознания и к самой математике.

Книга рассчитана на широкий круг читателей с различной математической подготовкой. Для тех, кто хочет ознакомиться лишь с «техникой» решения задач вариационного исчисления и оптимального управления, написаны первые два параграфа, а также третий параграф, где демонстрируется приложение этой техники (основанной на принципе Лагранжа) к самым различным задачам, которые были поставлены и сотни лет назад и к задачам, которые весьма актуальны в наши дни. После этого разумно порешать задачи, приведенные в конце книги (ко всем из них даны ответы, а к некоторым — указания к решению).

Для тех, кто хочет освоить методологию доказательства необходимых условий экстремума в задачах вариационного исчисления и в сравнительно простой, но вполне содержательной задаче оптимального управления, написан §4. Для его понимания требуются знания несколько большие тех, которые дает технический вуз, но в Приложении I собраны все необходимые для этого сведения.

Два последних параграфа посвящены более общим задачам оптимального управления. Здесь требуются знания, нередко выходящие за пределы и университетского образования. Для тех, кто хочет освоить материал этих параграфов, написано Приложение II.

ВВЕДЕНИЕ

В книге обсуждаются необходимые условия экстремума в различных экстремальных задачах, но основное внимание уделено принципу максимума Понтрягина — необходимому условию минимума в задачах оптимального управления.

Решение первой задачи, по сути своей относящейся к оптимальному управлению, было опубликовано И. Ньютоном в 1687 г. (ее постановку и обсуждение см. далее в этом параграфе). Затем, после того как И. Бернулли поставил свою знаменитую задачу о брахистохроне (1696 г.), стало развиваться направление в теории экстремума, которое получило название *вариационного исчисления*. Этот раздел математического анализа сыграл огромную роль в истории науки, ибо было обнаружено, что большинство законов природы могут быть сформулированы на языке вариационного исчисления, которое впоследствии активно развивалось Л. Эйлером, Ж.-Л. Лагранжем, А. Лежандром, К. Якоби, У. Гамильтоном, К. Вейерштрассом и многими другими выдающимися математиками на протяжении двух с половиной веков. К середине двадцатого века оно выглядело вполне завершённой теорией.

Однако именно тогда, в середине двадцатого века, было замечено, что многие задачи техники (в частности, задача Ньютона), экономики, управления и других прикладных отраслей, использующих математические средства, не укладываются в рамки вариационного исчисления. И тогда эта теория была расширена, получив название *теории оптимального уравления*. Начала теории были изложены в книге[1] Л. С. Понтрягина,

---

[1] М.: Физматлит, 1961.

В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко «Математическая теория оптимальных процессов». Основным аппаратом исследования задач оптимального управления стал принцип максимума Понтрягина, доказательству и обсуждению которого и посвящена настоящая книга.

В начале книги формулируется задача оптимального управления в несколько облегчённой форме и её частные случаи — задача Лагранжа и простейшая задача вариационного исчисления. Далее приводятся формулировки необходимых условий экстремума в простейшей задаче, задаче Лагранжа и необходимое условие минимума — принцип максимума Понтрягина — для упрощённой задачи оптимального управления. И постановка упрощённой задачи, и формулировка принципа максимума для неё требуют для своего понимания владения лишь стандартными сведениями из математического анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений и тем самым доступны весьма широкой аудитории не только математиков, но и инженеров, экономистов, других специалистов в области приложений математики.

Одна лишь формулировка принципа максимума даёт возможность до конца исследовать самые разнообразные задачи из механики, физики, экономики, техники, теории управления, наконец, из самой математики. Это мы и хотим продемонстрировать в нашей книге: сразу после формулировки принципа максимума решаются разнообразные задачи, некоторые из которых сыграли важную роль во всей истории математики и были поставлены и решены Ньютоном, И. Бернулли, Эйлером и другими математиками в 17–19 веках. Также здесь решаются задачи теории управления, экономики, космической навигации, исследованные в двадцатом веке.

Затем даётся детальное и замкнутое в себе доказательство необходимых условий экстремума сначала для простейшей задачи вариационного исчисления, затем для задачи Лагранжа и, наконец, для упрощенной задачи оптимального управления. Далее приводится формулировка общей задачи оптимального управления и доказывается для нее принцип максимума.

В книге имеется два Приложения. В Приложении I излагаются факты из конечномерного анализа (связанные, в основном, с дифференцируемостью функций и отображений) и теории обыкновенных дифференциальных уравнений, на которые опираются доказательства необходимых условий экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления и задаче Лагранжа. Приложение II имеет самостоятельное значение. Здесь доказывается обобщенная версия теоремы о неявной функции и обсуждаются вопросы ее дифференцируемости и единственности. Затем на основании этой теоремы доказываются необходимые условия экстремума в конечномерных задачах с ограничениями типа равенств, неравенств и включений. Кроме того, в этом приложении приводится ряд утверждений, необходимых для понимания доказательства принципа максимума в упрощенной форме. Общая постановка задачи оптимального управления и доказательство принципа максимума для нее (необходимые для исследовательской работы) требуют бо́льшей подготовки. Но нам не хотелось бы ограничивать число тех, кто захочет освоить это доказательство лишь студентами математических факультетов университетов, и поэтому в Приложении II приводится минимальный свод сведений, необходимых для понимания доказательства принципа максимума в общем случае. Здесь также доказывается одна теорема существования, которая используется при решении ряда конкретных задач.

В самом конце книги имеются задачи, к которым приведены ответы, а к некоторым даны указания к решению.

§ 1. Постановка задач и формулировка теорем

Принцип максимума Понтрягина — необходимое условие минимума в задачах оптимального управления. Мы начинаем изложение с описания достаточно простого класса таких задач.

1.1. Упрощенная задача оптимального управления и ее частные случаи.

Пусть $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$, U — непустое подмножество $\mathbb{R}^r$,[1]

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}, \quad \varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$$

(точки $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U$ обозначаем (t, x, u), где $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \ldots, u_r)^T \in U$) и $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1$.[2]

Задача

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \min, \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u),$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1, \quad u(t) \in U \quad (P)$$

называется *задачей оптимального управления с закреплённым временем и закреплёнными концами,* а если условие $x(t_1) = x_1$ отсутствует, то *задачей со свободным (правым) концом*. Обе задачи мы называем упрощёнными задачами оптимального управления, поскольку более общая ситуация (как уже говорилось) будет рассмотрена позже. Задача (P) является незначительным упрощением задачи, рассмотренной в книге Понтрягина и др. (см. § 6): там время t_1 не предполагается фиксированным.

Уточним постановку задачи, т. е. поясним, какие функции $x(\cdot)$, называемые *фазовыми переменными* (или *переменными*

---

[1] О пространстве $\mathbb{R}^n$ и функциях на нем см. Приложение I.

[2] Здесь x_1 обозначает одновременно как первую координату вектора $x \in \in \mathbb{R}^n$, так и вектор $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Это не приведет к недоразумениям, так как из контекста всегда будет ясно, что имеется в виду.

состояния), и какие функции $u(\cdot)$ — *называемые управлениями* — рассматриваются здесь, и как понимается минимум в данной задаче.

Совокупность всех непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций $x(\cdot)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ обозначим $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ (если $n = 1$, то пишем просто $C([t_0, t_1])$). Это — банахово пространство с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|,$$

где

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T, \quad \text{а} \quad |x(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t)}.$$

Введём ещё пространства

$$PC([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) \quad \text{и} \quad PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)^1$$

как совокупности соответственно всех кусочно-непрерывных вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$ и кусочно непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Задача (P) рассматривается в пространстве

$$Z = PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times PC([t_0, t_1], \mathbb{R}^r).$$

Точнее говоря, пара функций $(x(\cdot), u(\cdot))$ называется *допустимым управляемым процессом в задаче* (P) или просто *допустимым процессом*, если

$$(x(\cdot), u(\cdot)) \in Z$$

и удовлетворяются все ограничения задачи, т. е. во всех точках $t \in [t_0, t_1]$ непрерывности $u(\cdot)$ выполняются равенство $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$ и включение $u(t) \in U$, и наконец, удовлетворяются граничные условия $x(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$ (или только $x(t_0) = x_0$, если задача со свободным концом).

[1] P — от слова piecewise — кусочный, состоящий из кусков.

Допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ называется *оптимальным процессом* (или *сильным минимумом*) в задаче (P), если величина $J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ конечна и существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которого

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)).$$[1]

Если в (P) ограничение $u(t) \in U$ отсутствует (или, что тоже самое, если $U = \mathbb{R}^r$), то задачу (P) называют *задачей Лагранжа*. Задачу Лагранжа будем сразу рассматривать и на минимум, и на максимум или, как говорят, на экстремум:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \text{extr}, \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \qquad (P_1)$$

Это задача с закрепленным временем и закрепленными концами. Если ограничение $x(t_1) = x_1$ отсутствует, то задача называется задачей со свободным правым концом, а если момент времени t_1 заранее не фиксирован, то это — задача со свободным временем.

Задачу Лагранжа традиционно рассматривают в банаховом пространстве

$$W = C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r),$$

где $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций $x(\cdot)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ (если $n = 1$, то пишем $C^1([t_0, t_1])$) и нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} = \max(\|x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}, \|\dot{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}).$$

[1] Если требуется максимизировать функционал $J(x(\cdot), u(\cdot))$, то нужно рассмотреть задачу минимизации функционала $-J(x(\cdot), u(\cdot))$. Ясно, что решения этих задач совпадают, а их значения отличаются знаком.

Норма в W определяется так:

$$\|(x(\cdot), u(\cdot))\|_W = \\ = \max(\|x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}, \|\dot{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}, \|u(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)}).$$

Пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ называется допустимым процессом в (P_1), если $(x(\cdot), u(\cdot)) \in W$, равенство $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$ выполняется всюду на $[t_0, t_1]$ и $x(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$ (или только $x(t_0) = x_0$, если задача со свободным концом).

Локальный экстремум в этом пространстве называют *слабым экстремумом*. Точнее говоря, допустимая пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in W$ называется *слабым локальным минимумом (максимумом) в задаче Лагранжа*, если величина $J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ конечна и для некоторого $\varepsilon > 0$ и любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ такой, что $\|(x(\cdot), u(\cdot)) - (\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))\|_W < \varepsilon$, имеет место неравенство:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \quad (J(x(\cdot), u(\cdot)) \leqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))).$$

Задачу Лагранжа рассматривают не только на слабый, но и на сильный экстремум, когда близость производных фазовых переменных и близость управлений не учитывается: допустимая пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in W$ называется *сильным минимумом (максимумом) в задаче Лагранжа*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ такой, что

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,$$

справедливо неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \quad (J(x(\cdot), u(\cdot)) \leqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))).$$

Частным случаем задачи Лагранжа (P_1) является *простейшая задача вариационного исчисления*:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{P_0}$$

в которой интегрант $L = L(t, x, u)$ — функция трёх переменных (если в задаче (P_1) положить $f(t, x, u) = L(t, x, u)$ где t, x и u одномерны, $\varphi(t, x, u) = u$, то получаем задачу, равносильную (P_0)).

Задача (P_0) рассматривается нами в пространстве $C^1([t_0, t_1])$. Локальный экстремум в этом пространстве называется *слабым экстремумом*, или подробнее: допустимая функция $\widehat{x}(\cdot)$ (т. е. функция $\widehat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, которая удовлетворяет граничным условиям) является *слабым (локальным) минимумом* (*максимумом*) в задаче (P_0), если величина $J(\widehat{x}(\cdot))$ конечна и для некоторого $\varepsilon > 0$ и любой допустимой функции $x(\cdot)$ такой, что

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1])} < \varepsilon,$$

имеет место неравенство:

$$J(x(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot)) \quad (J(x(\cdot)) \leqslant J(\widehat{x}(\cdot))).$$

При определении сильного минимума и максимума вместо $C^1([t_0, t_1])$ берётся $C([t_0, t_1])$.

Задача Лагранжа охватывает (помимо простейшей задачи) множество других, рассматриваемых в вариационном исчислении (изопериметрические задачи, задачи со старшими производными и др.).

Первая задача вариационного исчисления (а именно задача о брахистохроне, обсуждаемая ниже) была поставлена в 1696 году Иоганном Бернулли (1667–1748), а затем Леонард Эйлер (1707–1783) и Жозеф-Луи Лагранж (1736–1813) построили теорию задач вида (P) без ограничения на управления типа включения. Такие задачи описывают многие явления в механике, электродинамике, оптике, к ним сводятся разнообразные геометрические задачи и задачи из анализа. Благодаря всему этому вариационное исчисление стало одним из важнейших разделов математики. Однако многие проблемы управления технологическими процессами, инженерии и экономики таковы, что нельзя не учитывать ограниченность материальных, энергетических и других ресурсов, а также возможностей человека в проблемах управления или при его воздействии на силы природы.

Такая ограничительность выражается в математических постановках в виде ограничений типа неравенств (или включений) на управления. Это и привело к постановке задач вида (P).

Приведём два примера задач вариационного исчисления и оптимального управления, поставленных ещё в семнадцатом веке. Как было сказано, вариационное исчисление ведёт свою историю с задачи И. Бернулли о брахистохроне. В 1696 году в основном научном журнале того времени «Acta eruditorum» (основанном в 1682 г.) вышла заметка И. Бернулли, озаглавленная «Problema novum, ad cujus solutionem Mathematici invitatur» (Новая задача, к решению которой приглашаются математики), в которой был поставлен такой вопрос: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под воздействием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, дойдёт до точки B за кратчайшее время.» [1]

Эта задача получила название задачи о брахистохроне — кривой наискорейшего спуска. Придадим этой задаче математическую формулировку. Для этого направим ось Ox, как обычно горизонтально, а ось Oy вертикально вниз. Поместим точку A в начало координат $(0,0)$, а точка B пусть имеет координаты (x_1, y_1), $x_1 > 0$, $y_1 > 0$. Допустим, что $y = y(x)$ — функция, график которой — путь, по которому движется тело M из точки A в точку B. Согласно закону Галилея его скорость в точке $(x, y(x))$ равна $\sqrt{2gy(x)}$, где g — ускорение силы тяжести. Значит, для прохождения пути ds от точки $(x, y(x))$ до точки $(x+dx, y(x+dx))$ потребуется время $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$, и, следовательно, время, которое будет затрачено телом на преодоление всего пути от A до B, равно $\int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$.

Таким образом, мы приходим к задаче вида (P_0) (множитель $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ можно, разумеется, отбросить):

$$\int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}dx \to \min, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{i}$$

Это простейшая задача вариационного исчисления. Она имеет тесные связи с механикой и оптикой.

Необходимое условие экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления было найдено Эйлером в 1732 году. (Итоги своих исследований по вариационному исчислению Эйлер подвел в монографии «Methodus inveniendi...», Geneva, 1744, переведенной на русский язык: «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума и минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» М.Л.:

[1] Цитируется по книге: *И. Бернулли* Избранные сочинения по механике. — М.-Л., Гл. ред. технико-теор. лит., 1937. с. 19–20.

Гостехиздат, 1934). Оно получило название *уравнения Эйлера.* Простейшая задача вариационного исчисления охватывается, как мы видели, постановкой (P), и уравнение Эйлера является частным случаем принципа максимума для этой задачи.

Интересным парадоксом в истории математики является то, что первая задача, относящаяся собственно к оптимальному управлению и теоретическая база для которой (а именно — принцип максимума Понтрягина) была разработана без малого три века спустя после её постановки, обсуждалась в величайшем когда-либо из написанных научном труде — сочинении Исаака Ньютона (1643–1727) «Philosophiae Naturalis Principia Mathematika» (Математические начала натуральной философии или, как наиболее естественно было бы сейчас назвать это сочинение, «Математические основания физики»). Ньютон ставит вопрос: когда «тело, образующееся при вращении кривой вокруг оси при движении в упомянутой среде [...] будет испытывать меньшее сопротивление, нежели всякое иное тело вращения при той же высоте и наибольшей ширине.» [1]

Формализация этой задачи зависит, естественно, от законов сопротивления среды. Ньютон представлял себе среду (он называл её редкой) состоящей из неподвижных частиц фиксированной массы m, являющихся абсолютно упругими шарами. Примем эту гипотезу и мы. Пусть тело вращения вокруг оси Oy движется в направлении обратном оси Oy (вниз) в описанной нами среде Ньютона со скоростью v. Элемент dx на оси Ox описывает в плоскости Oxz кольцо, элемент площади которого равен $d\sigma = 2\pi x dx$, и этому кольцу соответствует пояс $d\Sigma$ на самом теле вращения. За время dt этот пояс вытеснит объём $dV = 2\pi x dx v dt$. Пусть ρ — плотность среды. Тогда число частиц, ударившихся о слой, равно $N = \frac{\rho}{m} dV = \frac{\rho 2\pi x dx v}{m} dt$. Подсчитаем силу dF, действующую на слой $d\Sigma$ за время dt. Пусть участок ds наклонён к оси Ox. Отражаясь от $d\Sigma$, одна частица получает приращение импульса, равное $m(\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}) = -2mv\cos\varphi \cdot \mathbf{n}$, где $v = |\mathbf{v_1}| = |\mathbf{v_2}|$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к $d\Sigma$, а $\varphi = \operatorname{arctg} dy/dx$ — угол ds с горизонталью. В силу третьего закона Ньютона тело получает противоположное приращение импульса $2mv\cos\varphi \cdot \mathbf{n}$, а за время dt таких импульсов будет N, причём, в силу симметрии, компоненты импульса, ортогональные оси вращения, в сумме дают нуль, а осевая компонента суммарного приращения равна $Nm2v\cos^2\varphi = kx\cos^2\varphi dx dt$, где $k = 4\rho\pi v^2$. В силу второго закона Ньютона это выражение равно $dFdt$, откуда $dF = kxdx\cos^2\varphi$, а общая сила равна $F = k\int\limits_0^{x_1} \frac{xdx}{1+(dy/dx)^2}$. Таким образом, заменив x на t, y на x и x_1 на T, приходим к следующей задаче оптимального

[1] Цитируется по книге: *Исаак Ньютон* Математические начала натуральной философии. В собр. соч. акад. А. Н. Крылова, т. 5 — М.: Изд-во АН СССР, 1936.

управления:

$$\int_0^T \frac{tdt}{1+u^2(t)} \to \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = x_1, \quad u(t) \geqslant 0. \qquad \text{(ii)}$$

1.2. Необходимые условия экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления, задачи Лагранжа и принцип максимума для упрощенной задачи оптимального управления.

Здесь мы формулируем необходимые условия минимума — принцип максимума Понтрягина — для упрощенной задачи оптимального управления, а также необходимые условия слабого экстремума в задаче Лагранжа и простейшей задаче вариационного исчисления.

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $p(\cdot)\colon [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)'$. Функция

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), \lambda_0)\, dt,$$

где (интегрант)

$$L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda_0) = \lambda_0 f(t, x, u) + p \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u))$$

и $\lambda = (\lambda_0, p(\cdot))$, называется *функцией Лагранжа* задачи (P). Число λ_0 и вектор-функция $p(\cdot)\colon [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)'$ называются *множителями Лагранжа*, а λ — *набором множителей Лагранжа*.

Функцию $H(t, x, u, p, \lambda_0) = p \cdot \varphi(t, x, u) - \lambda_0 f(t, x, u)$ называют *функцией Понтрягина задачи* (P).

Далее, если фиксирована пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, то для сокращения записи мы используем обозначения:

$$\widehat{L}_x(t) = L_x(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda_0)$$

и аналогично для частных производных L по $\dot{x}$ и u,

$$\widehat{f}_x(t) = f_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)), \quad \widehat{\varphi}_x(t) = \varphi_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))$$

и аналогично для частной производной φ по u.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления, задаче Лагранжа и упрощенной задаче оптимального управления).

(a) *Уравнение Эйлера для простейшей задачи.*

Пусть функция $\widehat{x}(\cdot)$ *допустима в задаче* (P_0), *функции* L, L_x *и* $L_{\dot{x}}$ *непрерывны в окрестности кривой* $\{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$.

Тогда если $\widehat{x}(\cdot)$ — *локальный экстремум в* (P_0), *то* $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ *и для всех* $t \in [t_0, t_1]$ *выполнено уравнение Эйлера*:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0. \tag{1a}$$

В задаче со свободным правым концом выполняется еще и условие трансверсальности:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = 0. \tag{1b}$$

(b) *Уравнения Эйлера-Лагранжа для задачи Лагранжа.*

Пусть пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *допустима в задаче* (P_1), *функции* f, f_x, f_u, φ, φ_x *и* φ_u *непрерывны в окрестности кривой* $\{(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$.

Тогда если пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — *локальный экстремум в* (P_1), *то существуют множители Лагранжа* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *и* $p(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)')$, *не равные одновременно нулю, такие, что* $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, *для всех* $t \in [t_0, t_1]$ *выполнено уравнение Эйлера по* x:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{p} = -p\widehat{\varphi}_x(t) + \lambda_0 \widehat{f}_x(t) \tag{2a}$$

и уравнение Эйлера по u:

$$\widehat{L}_u(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(t)\widehat{\varphi}_u(t) = \lambda_0 \widehat{f}_u(t). \tag{2b}$$

В задаче со свободным правым концом $\lambda_0 = 1$ и выполняется еще условие трансверсальности:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = 0 \ \Leftrightarrow \ p(t_1) = 0. \tag{2c}$$

(c) *Принцип максимума Понтрягина для упрощенной задачи оптимального управления.*

Пусть пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ допустима в задаче (P), функции f, f_x, φ и φ_x непрерывны на множестве $G \times U$, где G — окрестность кривой $\{(t, \widehat{x}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$.

Тогда если $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — сильный минимум в задаче (P), то существуют множители Лагранжа $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $p(\cdot) \in PC^1([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)')$, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda_0 \geqslant 0$, для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполнено уравнение Эйлера по x:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ \dot{p} = -p\widehat{\varphi}_x(t) + \lambda_0 \widehat{f}_x(t) \tag{3a}$$

и для всех точек $t \in [t_0, t_1]$, в которых функция $\widehat{u}(\cdot)$ непрерывна, выполняется условие минимума по u:

$$\min_{v \in U} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), v, p(t), \lambda_0) = L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda_0) \tag{3b}$$

или (что то же самое) условие максимума:

$$\max_{v \in U} H(t, \widehat{x}(t), v, p(t), \lambda_0) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda_0). \tag{3b'}$$

В задаче со свободным правым концом $\lambda_0 = 1$ и выполняется еще условие трансверсальности:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = 0 \ \Leftrightarrow \ p(t_1) = 0. \tag{3c}$$

Условие $(3b')$ в совокупности с $(3a)$ и называют, собственно, *принципом максимума Понтрягина.*

Сделаем несколько замечаний, связанных с материалом этого параграфа.

1) В классическом вариационном исчислении наряду с простейшей задачей важную роль играет *задача Больца*:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}, \qquad (P_4)$$

где функция L определяется как и в простейшей задаче (P_0), а l — функция двух переменных ξ_0 и ξ_1. Данная задача рассматривается в том же пространстве функций, что и задача (P_0), и аналогично определяются понятия допустимой функции и слабого локального экстремума.

Теорема 2 (необходимые условия экстремума в задаче Больца).

Пусть функция $\widehat{x}(\cdot)$ допустима в задаче (P_4), функции L, L_x и $L_{\dot{x}}$ непрерывны в окрестности кривой $\{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$, а функции l, l_{ξ_0} и l_{ξ_1} непрерывны в окрестности точки $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$.

Тогда если $\widehat{x}(\cdot)$ — локальный экстремум в (P_4), то $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ и для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполнено уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0$$

и условия трансверсальности:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \widehat{l}_{\xi_i}, \quad i = 0, 1,$$

где $\widehat{l}_{\xi_i} = l_{\xi_i}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$, $i = 0, 1$.

2) Отметим два первых интеграла уравнения Эйлера (т. е. такие функции, которые постоянны на решениях данного уравнения) для простейшей задачи вариационного исчисления.

1. Если L не зависит от x, то имеется очевидный интеграл

$$L_{\dot{x}}(t, \dot{\widehat{x}}(t)) \equiv \mathrm{const},$$

который называется *интегралом импульса.*

2. Если L не зависит от t, то уравнение Эйлера имеет интеграл

$$L_{\dot{x}}(\widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))\dot{\widehat{x}}(t) - L(\widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) \equiv \mathrm{const},$$

который называется *интегралом энергии.* Для доказательства (в предположении, что $\ddot{\widehat{x}}(\cdot)$ существует) надо продифференцировать по t левую часть равенства и убедиться, что эта производная есть тождественный нуль.

3) Традиция обозначать в экстремальных задачах независимую переменную через x идет от Эйлера, который много занимался геометрическими задачами. Лагранж обозначал независимую переменную через t, так как в основном изучал задачи механики, и независимая переменная — это время. В общих утверждениях мы будем придерживаться лагранжевых обозначений. Рассматривая конкретные примеры, используем (отдавая дань традиции) и те, и другие обозначения.

§ 2. Принцип Лагранжа

Выписанные выше необходимые условия в простейшей задаче вариационного исчисления, в задаче Больца, в задаче Лагранжа и в задаче оптимального управления находятся в соответствии с общим принципом — *принципом Лагранжа* — получения необходимых условий экстремума в различных экстремальных задачах. Нам представляется полезным познакомить читателя с концепцией этого принципа.

В 1797 году Лагранж высказал идею, касающуюся нахождения решений в гладких конечномерных задачах с ограничениями типа равенств: «Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к функции, о которой говорилось, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределённые множители, и искать затем максимум и минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединённые к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных.»

Эта идея оказалась универсальной, она распространяется на широкий класс задач, и фактически все известные на сегодняшний день необходимые условия экстремума соответствуют принципу Лагранжа. Продемонстрируем это на следующей задаче оптимального управления достаточно общего вида:

$$J_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \min,$$
$$J_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leqslant 0,$$

$$1 \leqslant i \leqslant m',$$

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \tag{P}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0,$$

$$m' + 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U^1.$$

Здесь U — произвольное подмножество $\mathbb{R}^r$, $f_i\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$, $\psi_i\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $\varphi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^n$ и $t_i \in \operatorname{int} \Delta$, $i = 0, 1$, где Δ — отрезок числовой прямой.

Задача (P) рассматривается в пространстве

$$\Xi = PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times PC(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Иначе говоря, элемент (управляемый процесс)

$$\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \in \Xi$$

называется *допустимым в задаче* (P), если он удовлетворяет всем ограничениям задачи. Говорят, что управляемый процесс

$$\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$$

доставляет *сильный минимум в задаче* (P), если $J_0(\widehat{\xi})$ конечно и существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого допустимого элемента $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, удовлетворяющего условию

$$\max(\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1]\cap[\widehat{t}_0,\widehat{t}_1])}, |t_0 - \widehat{t}_0|, |t_1 - \widehat{t}_1|) < \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J_0(\xi) \geqslant J_0(\widehat{\xi}).$$

[1] Эти соотношения должны выполняться во всех точках непрерывности управления $u(\cdot)$.

Если $U = \mathbb{R}^r$, то задачу (P) называют *задачей Лагранжа*. Она рассматривается в пространстве

$$\Xi_1 = C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times C(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Локальный минимум в этом пространстве называют *слабым локальным минимумом*.

Далее рассуждаем эвристически, руководствуясь указаниями Лагранжа, но трактуя их несколько шире. Составим функцию Лагранжа задачи (P), считая, что это сумма минимизируемого функционала и всех функций, задающих уравнения связи, умноженных на неопределенные множители. При этом связь $\dot{x} - \varphi(t, x, u) = 0$ воспринимаем как континуум равенств, индексированных параметром t, и тогда умножение каждого из этих равенств на множитель и последующее «суммирование» надо понимать как интегрирование. Таким образом, функция Лагранжа задачи (P) имеет вид:

$$\mathcal{L}(\xi, p(\cdot), \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i J_i(\xi) + \int_{t_0}^{t_1} p(t) \cdot (\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), \lambda)dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1), \lambda),$$

где

$$\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m),$$

$$L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) + p \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u))$$

и

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1), \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i \left(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\right).$$

Теперь ищем (в соответствии с указаниями Лагранжа) необходимые условия минимума этой функции «как если бы переменные были независимы». Наши переменные — это $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, t_0 и t_1. Таким образом, необходимо рассмотреть следующие задачи:

(α) $\mathcal{L}(x(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1, p(\cdot), \lambda) \to \min$ (по $x(\cdot)$);

(β) $\mathcal{L}(\widehat{x}(\cdot), u(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1, p(\cdot), \lambda) \to \min, \quad u(t) \in U$;

(γ) $\mathcal{L}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda) \to \min, \quad t_i \in \operatorname{int} \Delta, \ i = 0, 1$.

Запишем эти задачи более подробно. Задача (α) выглядит так:

$$\int_{\widehat{t}_0}^{\widehat{t}_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), \widehat{u}(t), \lambda) dt + l(\widehat{t}_0, x(t_0), \widehat{t}_1, x(t_1), \lambda) \to \min (\text{по}\, x(\cdot))$$

и представляет собой задачу Больца, рассмотренную выше. Необходимые условия минимума здесь состоят в том, что должно выполняться уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) - \widehat{L}_x(t) = 0$$

для всех $t \in [\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$ и условия трансверсальности

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \widehat{l}_{x(t_i)},$$

где $\widehat{l}_{x(t_i)}$, $i = 0, 1$, — производные функции l соответственно по второму и четвертому аргументам в точке $(\widehat{t}_0, \widehat{x}(\widehat{t}_0), \widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1), \lambda)$.

Задача (β) имеет вид

$$\int_{\widehat{t}_0}^{\widehat{t}_1} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u(t), p(t), \lambda) dt \to \min, \quad u(t) \in U$$

и представляет собой так называемую *простейшую задачу оптимального управления*. Необходимые условия (они же оказываются и достаточными) здесь также выводятся без труда и состоят в том, что

$$\min_{v \in U} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), v, p(t), \lambda) = L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda)$$

в точках непрерывности $\widehat{u}(\cdot)$.

Если $U = \mathbb{R}^r$ (т. е. рассматриваем задачу Лагранжа), то задача (β) есть также задача Больца и необходимые условия минимума заключаются в том, что $\widehat{L}_u(t) = 0$.

Необходимые условия минимума в задаче (γ) — это просто равенство нулю производных функции Лагранжа по t_0 и t_1 соответственно в точках $\widehat{t}_0$ и $\widehat{t}_1$.

Наконец, следует отметить, что так как исходная задача на минимум, то необходимо $\lambda_0 \geqslant 0$ и если в исходной задаче присутствуют ограничения типа неравенств ($\leqslant 0$), то необходимо множители Лагранжа при них неотрицательны и выполнены условия дополняющей нежесткости. В нашем случае это означает, что $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_i J_i(\widehat{\xi}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m'$. Задачи с ограничениями типа неравенств рассмотрены в Приложении II.

Объединяя полученные соотношения и учитывая структуру L, приходим к тому, что если $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ доставляет *сильный минимум в задаче* (P), то необходимо выполнены:

(a) уравнение Эйлера по x:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{p} = -p\widehat{\varphi}_x(t) + \lambda_0 \widehat{f}_x(t);$$

(b) условия трансверсальности:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \widehat{l}_{x(t_i)}, \quad i = 0, 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p(t_i) = (-1)^i \widehat{l}_{x(t_i)}, \quad i = 0, 1;$$

(c) условие минимума по u:

$$\min_{v \in U} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), v, p(t), \lambda) = L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda)$$

в точках непрерывности $\widehat{u}(\cdot)$;

В задаче Лагранжа (c) заменяется на

(c') условие минимума по u в дифференциальной форме:

$$L_u(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda) = 0;$$

(d) неотрицательность множителей Лагранжа и условия дополняющей нежесткости: $\lambda_i \geqslant 0$, $0 \leqslant i \leqslant m'$, и

$$\sum_{i=1}^{m'} \lambda_i J_i(\widehat{\xi}) = 0;$$

(e) условия стационарности по концевым значениям:

$$\mathcal{L}_{t_i}(\widehat{\xi}, \lambda) = 0, \quad i = 0, 1.$$

Оказывается, что выписанные условия и есть основное содержание точного результата. Другими словами, справедлива следующая теорема, доказательство которой содержится в [АТФ].

Теорема (Принцип Лагранжа для задачи (P)).

1) *Пусть* $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ *— допустимый элемент в задаче Лагранжа, функции* f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *и* φ *и их частные производные по* x *и* u *непрерывны в окрестности кривой* $\{(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) \mid t \in \Delta\}$, *а функции* ψ_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\widehat{t}_0, \widehat{x}(\widehat{t}_0), \widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1))$. *Тогда, если* $\xi = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ *— локальный минимум в этой задаче, то существуют множители Лагранжа* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *и* $p(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)')$, *не равные одновременно нулю, такие, что выполнены условия* (a), (b), (c'), (d) *и* (e).

2) *Пусть* $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ *— допустимый элемент в задаче оптимального управления, функции* f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *и* φ *и их частные производные по* x *непрерывны на множестве* $G \times U$, *где* G *окрестность кривой* $\{(t, \widehat{x}(t)) \mid t \in \Delta\}$, *а функции* ψ_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\widehat{t}_0, \widehat{x}(\widehat{t}_0), \widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1))$.

Тогда если $\xi = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ *— оптимальный процесс в этой задаче, то существуют множители Лагранжа* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *и* $p(\cdot) \in PC^1([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)')$, *не равные одновременно нулю, такие, что выполнены условия* (a), (b), (c), (d) *и* (e).

§ 3. Решения задач

Здесь мы хотим продемонстрировать принцип Лагранжа как эффективный метод исследования задач на экстремум, решив некоторое количество задач, которые были поставлены в разные времена и часть из них сыграла важную роль в истории нашей науки. Все задачи решаются единообразно. Сначала выписывается формализованная постановка задачи. Затем применяется принцип Лагранжа, т. е. в соответствии с ним выписываются необходимые условия экстремума, и при этом мы действуем формально: не обращаем внимание на то, выполняются или нет те или иные требования сформулированных ранее теорем. Далее, анализируя полученные соотношения, находим функцию, которая им удовлетворяет. После этого проверяем, что найденная функция действительно является решением поставленной задачи.

1. Аэродинамическая задача Ньютона

1. *Формализация* (см. § 1):

$$\int_0^{t_1} \frac{t\,dt}{1+u^2(t)} \to \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad u \geqslant 0, \tag{$\mathcal{P}_1$}$$

где $x_1 > 0$. Это то, что было названо выше упрощенной задачей оптимального управления.

2. *Принцип Лагранжа.* Функция Лагранжа имеет вид:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \lambda) = \int_0^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), \lambda_0)dt,$$

где $L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda_0) = \lambda_0 t/(1+u^2) + p(\dot{x} - u)$ и $\lambda = (\lambda_0, p(\cdot))$.

Принцип Лагранжа заключается в том, что должно выполняться уравнение Эйлера по x:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\dot{p} = 0 \;\Leftrightarrow\; p = \text{const} \tag{i}$$

и условие минимума по u:

$$\min_{u\geqslant 0}\left(\frac{\lambda_0 t}{1+u^2}-pu\right)=\frac{\lambda_0 t}{1+\widehat{u}^2(t)}-p\widehat{u}(t). \tag{ii}$$

3. *Анализ*. Проверим,что $\lambda_0\neq 0$. Если $\lambda_0=0$, то необходимо $p\neq 0$, так как множители Лагранжа не могут быть все нулевые. Но если $p\neq 0$, то из (ii) следует, что $\widehat{u}(t)\equiv 0$ и тогда $\widehat{x}(t_1)=$ $=\int\limits_0^{t_1}\widehat{u}(t)\,dt=0$ в противоречие с предположением, что $x_1>0$. Итак, $\lambda_0\neq 0$, и мы можем считать, что $\lambda_0=1$[1].

Отметим еще, что $p<0$. Действительно, если $p\geqslant 0$, то при любом $t\geqslant 0$ функция $u\to f(t,u)=t/(1+u^2)-pu$ монотонно убывает и поэтому соотношение (ii) не может выполняться.

Легко видеть, что (при фиксированном $p<0$) для малых t функция $f(t,\cdot)$ достигает минимума в нуле, и что это происходит до того момента τ, когда значение в нуле становится равным второму, положительному минимуму этой функции, который достигается в точке $\widehat{u}(\tau)>0$ (под $\widehat{u}(\tau)$ понимаем $\widehat{u}(\tau+$ $+0)$). Таким образом, τ определяется из условий: $f_u(\tau,\widehat{u}(\tau))=0$ и $f(\tau,\widehat{u}(\tau))=f(\tau,0)=\tau$, что приводит к уравнениям:

$$p=-\frac{2\tau\widehat{u}(\tau)}{(1+\widehat{u}^2(\tau))^2},\quad \tau=\frac{\tau}{1+\widehat{u}^2(\tau)}-p\widehat{u}(\tau). \tag{iii}$$

Подставив одно из уравнений (iii) в другое, убеждаемся, что $\widehat{u}(\tau)=1$, $\tau=-2p$.

После момента τ (момента излома управления) управление определяется как единственный корень уравнения $f_u(t,u)=0$, из которого следует, что

$$t=-\frac{p(1+u^2)^2}{2u}=-\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u}+2u+u^3\right). \tag{iv}$$

[1] Множители Лагранжа определяются с точностью до ненулевого сомножителя, и поэтому один из них может быть тем или иным способом нормирован. Эти замечанием будем пользоваться и в дальнейшем.

При этом

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{du} = u\frac{dt}{du} = -\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{u} + 2u + 3u^3\right).$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что $x(\tau) = 0$ (так как $\widehat{u}(t) = 0$ для $t \in [0, \tau)$ и $\widehat{x}(0) = 0$) и $\widehat{u}(\tau) = 1$, приходим к семейству решений в параметрической форме:

$$x(t,p) = -\frac{p}{2}\left(\ln\frac{1}{u} + u^2 + \frac{3}{4}u^4\right) + \frac{7}{8}p,$$
$$t = -\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right), \qquad p < 0.$$

Константа p определяется из условия $x(t_1) = x_1$. Эту кривую называют *кривой Ньютона.* (Рис. 1).

Убедимся, что эта кривая доставляет абсолютный минимум в задаче. Пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в исходной задаче, т. е. она кусочно непрерывно дифференцируема, $x(0) = 0$ и $x(t_1) = x_1$. Тогда в силу (ii) ($\lambda_0 = 1$)

$$\frac{t}{1+\dot{x}^2(t)} - p\dot{x}(t) \geqslant \frac{t}{1+\widehat{u}^2(t)} - p\widehat{u}(t).$$

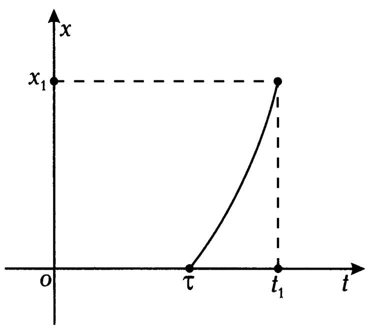

Рис. 1. Задача Ньютона.

Интегрируя это неравенство с учётом того, что

$$\int_0^{t_1} \dot{x}(t)\,dt = \int_0^{t_1} \dot{\widehat{x}}(t)\,dt = x_1,$$

получаем требуемое:

$$\int_0^{t_1} \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2(t)} \geqslant \int_0^{t_1} \frac{t\,dt}{1+\dot{\widehat{x}}^2(t)}.$$

Ответ. *Решение задачи Ньютона равно нулю до некоторого момента τ, определяемого граничным условием на правом конце, а далее оно идет по кривой Ньютона.*

2. Задача о брахистохроне

1. *Формализация* (см. § 1):

$$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}dx \to \min, \quad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1, \qquad (\mathcal{P}_2)$$

где ось y направлена вниз. По виду это простейшая задача вариационного исчисления, однако у подынтегральной функции есть особенность в нуле и условия теоремы 1 п. 2.2 тем самым не выполняются. Тем не менее, как уже говорилось, будем действовать формально.

2. *Принцип Лагранжа.* Поскольку интегрант $L = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ не зависит явно от x, то уравнение Эйлера имеет интеграл энергии (см. с. 23):

$$L - y'L_{y'} = \text{const} \;\Rightarrow\; y(1+y'^2) = C_1.$$

3. *Анализ.* Из последнего уравнения следует, что

$$y' = \sqrt{\frac{(C_1-y)}{y}}.$$

Сделаем замену

$$y = C_1 \sin^2\frac{\tau}{2} = \frac{C_1}{2}(1-\cos\tau), \quad \tau \in (0, 2\pi).$$

Тогда $y' = \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}$ и так как $\frac{dy}{d\tau} = C_1 \sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}$, то

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}} C_1 \sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2} = C_1\sin^2\frac{\tau}{2},$$

т. е. $x = \frac{C_1}{2}(\tau - \sin\tau) + C_2$.

Таким образом, учитывая, что $y(0)=0$, получаем однопараметрическое семейство циклоид

$$y=\frac{C}{2}(1-\cos\tau), \quad x=\frac{C}{2}(\tau-\sin\tau), \tag{i}$$

где константа C находится из условия: $y(x_1)=y_1$, $x_1>0$ и $y_1>0$. Ясно, что через точки $(0,0)$ и (x_1,y_1) проходит единственная циклоида нашего семейства (см. рис. 2). Обозначим эту функцию $\widehat{y}(\cdot)$ и покажем, что она есть решение задачи. Это можно сделать разными способами. Проще всего воспользоваться известной формулой Вейерштрасса (см. [ИТ], с. 326). Семейство (i) однозначно покрывает весь четвертый квадрант, и тем самым определяется функция наклона центрального поля $u(x,y)$. Если $y(\cdot)$— любая допустимая функция для задачи $(\mathcal{P}_2)$ (т. е. $y(\cdot)\in C^1[0,x_1]$, $y(0)=0$ и $y(x_1)=y_1$), то в силу основной формулы Вейерштрасса

$$J(y(\cdot))-J(\widehat{y}(\cdot))=\int\limits_0^{x_1}\mathcal{E}(x,y(x),u(x,y(x)),y'(x))dx\geqslant 0,$$

ибо вследствие выпуклости интегранта L по y' функция Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x,y,u,y')=L(x,y,y')-L(x,y,u)-(y'-u)L_{y'}(x,y,u)$$

всюду неотрицательна.

Можно также доказать, что $\widehat{y}(\cdot)$ доставляет абсолютный минимум в задаче $(\mathcal{P}_2)$ методом «принудительного ограничения», рассмотрев задачу оптимального управления, добавляя к этой задаче дополнительное ограничение $|u(t)|\leqslant\leqslant A$. Применяя принцип максимума (доказав предварительно существование решения), а затем переходя к пределу при $A\to\infty$, получим, что $\widehat{y}(\cdot)$ — решение задачи. Более подробно на этом останавливаться не будем.

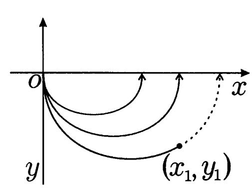

Рис. 2. Задача о брахистотроне.

Ответ. *Дуга арки циклоиды*

$$y = \frac{C}{2}(1 - \cos\tau), \quad x = \frac{C}{2}(\tau - \sin\tau),$$

проходящая через точку (x_1, y_1), *доставляет абсолютный минимум в задаче* $(\mathcal{P}_2)$.

3. Задача Дидоны

Эта задача связана с древней легендой о царице Дидоне, которой было позволено взять себе участок земли, примыкающей к берегу моря, и который можно окружить бычьей шкурой. Дидона разрезала шкуру на тонкие полоски, связала их в один тонкий ремень и, окружив им значительную территорию, заложила на ней город Карфаген (подробнее см. [АТФ], с. 12–16).

1. *Формализация.* Предполагая, что «ремень» представляет собой график некоторой функции, задача может быть формализована следующим образом:

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} y(x)dx \to \max, \quad \int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = l, \qquad (\mathcal{P}_3)$$
$$y(-x_0) = y(x_0) = 0, \quad y \geqslant 0.$$

Задачу о максимуме площади, которую можно охватить кривой заданной длины, называют *изопериметрической.* Впоследствии так стали называть задачи вида: $J_0(x(\cdot)) \to \min(\max)$, $J_i(x(\cdot)) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$ (и еще некоторые граничные условия), где J_i — интегральные функционалы простейшей задачи вариационного исчисления. Именно такую задачу Эйлер в своем труде «Metodus inviniendi...» называет «изопериметрической задачей, взятой в самом широком смысле».

2. *Принцип Лагранжа.* Для интегранта

$$L = \lambda_0 y + \lambda_1 \sqrt{1 + y'^2}$$

выполнено уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dx}\widehat{L}_{y'} + \widehat{L}_y = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dx}\left(\lambda_1 \frac{\widehat{y}'}{\sqrt{1 + \widehat{y}'^2}}\right) = \lambda_0.$$

3. *Анализ.* Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 \neq 0$ и из уравнения Эйлера следует, что $\widehat{y}' = \mathrm{const}$. Отсюда, в силу граничных условий, получаем, что $\widehat{y}(x) \equiv 0$ — единственная экстремаль и при этом необходимо $l = 2x_0$.

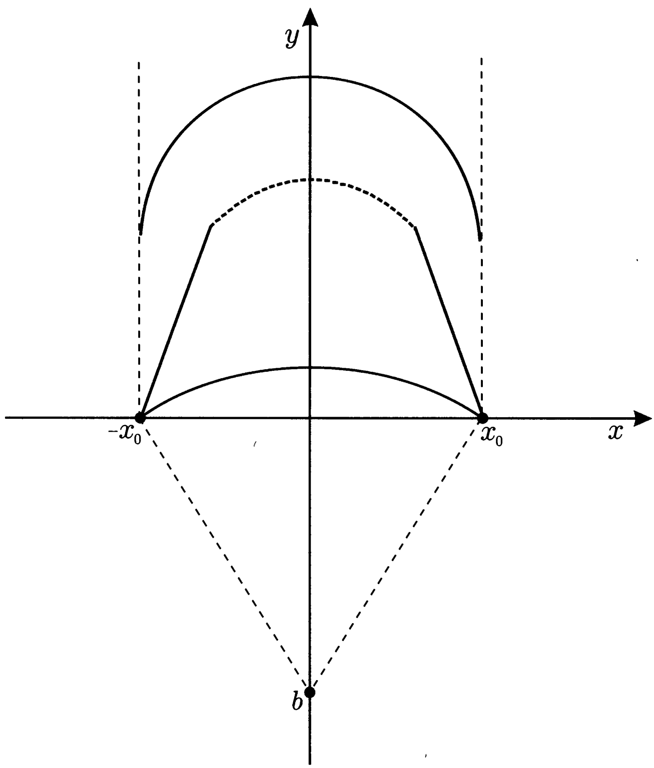

Рис. 3. Задача Дидоны.

Пусть $2x_0 < l \leqslant \pi x_0$. Тогда $\lambda_0 \neq 0$ и можно считать, что $\lambda_0 = -1$. Интегрируя уравнение Эйлера с учетом граничных условий, также приходим к единственной экстремали:

$$\widehat{y}(x) = b - \sqrt{b^2 + x_0^2 - x^2},$$

которая есть окружность радиуса $\sqrt{b^2 + x_0^2}$ с центром в точке

$(0, b)$, где $b \leqslant 0$ (см. рис. 3) и b находится из изопериметрического условия:

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+\widehat{y}'^2(x)}dx = \sqrt{b^2+x_0^2} \int\limits_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{b^2+x_0^2-x^2}} =$$
$$= 2\sqrt{b^2+x_0^2} \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{b^2+x_0^2}} = l.$$

Для того, чтобы доказать, что полученная кривая есть действительно решение задачи, можно и здесь воспользоваться методом «принудительного ограничения», т. е. рассмотреть задачу $(\mathcal{P}_3)$ с дополнительным ограничением $|y'| \leqslant A$, а затем устремить A к бесконечности. При каждом A решение задачи существует (согласно теореме существования из Приложения II) и, как нетрудно убедиться, представляет собой симметричную относительно оси y кривую, которая на некотором отрезке $[-x_0, -h]$ $(h > 0)$ есть прямая $x \to A(x + x_0)$, затем эта прямая гладко сопрягается с окружностью, и потом, снова прямая $x \to A(x_0 - x)$ на отрезке $[h, x_0]$ (см. рис. 3). Переходя к пределу при $A \to \infty$, получаем

Ответ. *Если* $2x_0 < l \leqslant \pi x_0$, *то найденная выше кривая есть решение задачи. Если* $l > \pi x_0$, *то получаем нестандартное решение: полуокружность, поднятая на высоту* $(l - \pi x_0)/2$.

4. Задача о минимальной поверхности вращения

Она заключается в том, чтобы среди функций, графики которых лежат в верхней полуплоскости, соединяя две заданные точки, найти ту функцию, график которой при вращении вокруг горизонтальной оси образует поверхность минимальной площади.

1. *Формализация.* Далее мы рассматриваем частный случай этой задачи, когда точки находятся на одной высоте. Тогда за-

дача формализуется следующим образом:

$$\int_{-t_0}^{t_0} x(t)\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt \to \min, \quad x(t) \geqslant 0, \quad x(\pm t_0) = h, \qquad (\mathcal{P}_4)$$

где t_0, h — положительные числа. Перепишем эту задачу как задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями и (для того, чтобы гарантировать существование) с принудительным ограничением на управление:

$$\int_{-t_0}^{t_0} x(t)\sqrt{1+u^2(t)}\,dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad |u(t)| \leqslant A, \quad x(t) \geqslant 0, \quad x(\pm t_0) = h. \qquad \text{(i)}$$

Параметр A будем выбирать достаточно большим и в последующем перейдём к пределу при $A \to \infty$. Решение задачи (i) (которое существует, см. Приложение II) обозначим $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$.

2. *Принцип Лагранжа* (см. теорему 4 § 6). Функция Лагранжа имеет вид:

$$\mathcal{L}((x(\cdot), u(\cdot)), \lambda) =$$
$$= \int_{-t_0}^{t_0} (\lambda_0 x(t)\sqrt{1+u^2(t)} + p(t)(\dot{x}(t) - u(t)))\,dt - \int_{-t_0}^{t_0} x(t)\,d\mu(t).$$

Здесь $\mu(\cdot)$ — неубывающая ограниченная функция, непрерывная слева, порождающая меру, носитель которой сосредоточен там, где фазовая переменная $\widehat{x}(\cdot)$ равна нулю, $p(\cdot)$ — функция ограниченной вариации и λ — набор множителей Лагранжа, состоящий из неотрицательного числа λ_0 и функций $p(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$.

Принцип Лагранжа — это уравнение Эйлера:

$$-\dot{p}(t) + \lambda_0\sqrt{1+u^2(t)} - d\mu(t) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p(t) = p(-t_0) + \lambda_0 \int_{-t_0}^{t} \sqrt{1+u^2(t)}\,dt - \mu(t) \qquad \text{(ii)}$$

и условие максимума

$$\max_{|u|\leqslant A} H(t,\widehat{x}(\cdot),u,p(t),\lambda_0) \equiv \widehat{H}(t) \equiv \mathrm{const} = c, \qquad \text{(iii)}$$

где $H(t,x,u,p,\lambda_0) = pu - \lambda_0 x\sqrt{1+u^2}$.

3. *Анализ*. Легко понять, что $\lambda_0 \neq 0$. Действительно, пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда в силу (iii) $\widehat{u}(t) \equiv A\,\mathrm{sign}\,p(t)$, а в силу (ii) функция $p(\cdot)$ не возрастает. Поэтому, если $p(-t_0) < 0$, то $p(t) < 0$ для всех t и, следовательно, $\widehat{u}(t) \equiv -A$. Таким образом, функция $\widehat{x}(\cdot)$ строго монотонно убывает, что несовместимо с условием $\widehat{x}(\pm t_0) = h$. Если же $p(-t_0) > 0$, то в силу (ii) и (iii) траектория $\widehat{x}(\cdot)$ не попадает на границу фазового ограничения и, значит, $p(t) \equiv p(-t_0) > 0$ и тем самым $\widehat{u}(t) \equiv A$, что снова несовместимо с условием $\widehat{x}(\pm t_0) = h$. Если $p(-t_0) = 0$, то в силу (iii) $c = 0$, тогда $p(\cdot) = 0$, что невозможно, так как все множители Лагранжа окажутся нулевыми.

Итак, $\lambda_0 \neq 0$ и поэтому будем считать, что $\lambda_0 = 1$. Выражение для

$$\mathcal{H}(x,p) = \max_{|u|\leqslant A}(pu - x\sqrt{1+u^2})$$

легко найти:

$$\mathcal{H}(x,p) = \begin{cases} -\sqrt{x^2-p^2}, & \text{если} \quad \frac{p^2}{x^2} \leqslant \frac{A^2}{(1+A^2)},\ x \neq 0; \\ -x\sqrt{1+A^2} + |p|A, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим два типа экстремалей, отвечающих случаям $c < 0$ и $c \geqslant 0$. Если $c < 0$, то из выражения для $\mathcal{H}(x,p)$ получаем, что $x(t) > 0$ для всех t, и эта функция удовлетворяет уравнению $\dot{x} = \sqrt{\frac{x^2}{c^2} - 1}$. Данное уравнение интегрируется подстановкой $x = \cosh z$,[1] что с учётом граничных условий приводит к однопараметрическому семейству экстремалей (*цепных линий*) $x(t) = \cosh\frac{t}{c}$. Поверхности вращения, образуемых цепными линиями называются *катеноидами*.

[1] sinh, cosh, tanh — обозначения для гиперболического синуса, косинуса и тангенса соответственно.

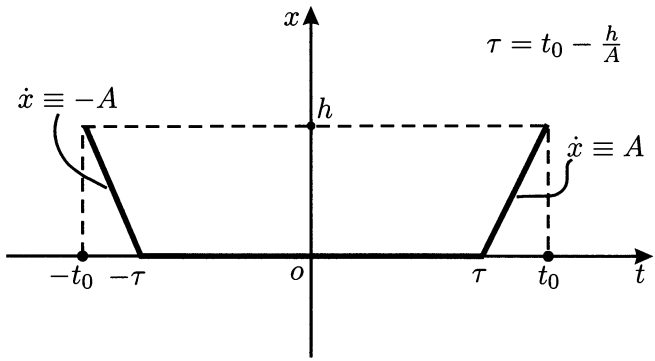

Рис. 4. Задача о минимальной поверхности вращения.

Эти экстремали двукратно покрывают внутренность угла $\frac{|x|}{t} > k$, где $k = \mathrm{sinh}\xi_0$, а $\xi_0 > 0$ является решением уравнения $\mathrm{tanh}\xi = \xi^{-1}$. (При этом можно проверить, что кривая $x = \mathrm{sinh}t$ касается прямых $x = \pm kt$ и непосредственный подсчет даёт $k = 1.5088\ldots$). Таким образом, если $\frac{h}{t_0} > k$, то через точки $(\pm t_0, h)$ проходят две экстремали, из которых одна не пересекает сторон угла (производная этих экстремалей не превосходит k), а другая касается этого угла и значит, содержит сопряжённые точки. (Во всём этом читатель без труда разберётся сам, но, если ему этого не захочется, он может прочитать об этом в книге [ИТ], с. 427–430).

Таким образом, подозреваемой на экстремум может быть лишь первая экстремаль. Но, повторимся, она не идёт по фазовому ограничению и не имеет (если $|A| > k$) участков, где её производная равна $|A|$. Однако, для любой пары точек $(\pm t_0, h)$, лежащих вне угла (т. е. когда $\frac{h}{t_0} < k$), решение существует. Значит, это решение соответствует $c \geqslant 0$. Опишем экстремали.

Из условия максимума для H нетрудно понять, что для этих экстремалей $|\widehat{u}(t)| \equiv A$. В этом случае траектория $\widehat{x}(\cdot)$ на отрезке $[-t_0, -\tau]$, где $\tau = t_0 - h/A$, удовлетворяет уравнению $\dot{x} = -A$. На отрезке $[-\tau, \tau]$ траектория $\widehat{x}(\cdot)$ идет по границе фазового ограничения, т. е. $\widehat{x}(t) \equiv 0$, и, на отрезке $[\tau, t_0]$ удовлетворяет уравнению $\dot{x} = A$ (см. рис. 4). При $A \to \infty$ соответствующая поверхность вращения стремится к двум дискам радиуса h, а значение минимизируемого функционала стремится к h^2.

Осталось провести «синтез решений» при фиксированном t_0.

Ответ. *Пока* $\frac{h}{t_0} < k$ *(единственным) решением будут два диска. Подсчёт показывает, что при* $k \leqslant \frac{h}{t_0} < k_1 = 1.8950\ldots$ *площадь двух дисков будет меньше площади соответствующего катеноида, при* $\frac{h}{t_0} = k_1$ *обе площади будут равны (т. е. задача имеет два решения), а при* $\frac{h}{t_0} \geqslant k_1$ *единственным решением будет катеноид.*

5. Простейшая задача о быстродействии

Задача заключается в том, чтобы тележку, которая движется прямолинейно без трения по горизонтальной поверхности и которая управляется внешней силой, изменяющейся в заданным пределах, остановить в определенном положении за кратчайшее время. Эта задача хорошо известна и разобрана во многих учебниках по теории оптимального управления (см., например, [ПБГМ], [Бол], [АТФ]).

1. *Формализация.* Пусть m — масса тележки, x_0 — ее начальная координата и v_0 — начальная скорость. Внешнюю силу (силу тяги) обозначим через u, а текущую координату тележки через $x(t)$. По закону Ньютона $m\ddot{x} = u$. Ограничение на тягу зададим в виде $u \in [u_1, u_2]$. Без ограничения общности можно считать, что $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ и $m = 1$. Это приводит к следующей формализации задачи:

$$\begin{gathered} T \to \min, \quad m\ddot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0, \end{gathered} \tag{$\mathcal{P}_5$}$$

или в стандартной форме задачи оптимального управления (обозначая $x_0 = \xi_1$, $v_0 = \xi_2$):

$$\begin{gathered} T \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leqslant 1, \\ x_1(0) = \xi_1, \quad x_2(0) = \xi_2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0. \end{gathered}$$

2. *Принцип Лагранжа.* Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_0^T \Big(p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u) \Big)\, dt +$$
$$+ \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - \xi_1) + \lambda_2(x_2(0) - \xi_2) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T).$$

Принцип Лагранжа приводит к соотношениям:

a) уравнение Эйлера для $L = p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u)$:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0,\ i = 1,2 \Rightarrow \dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = -p_1 \Rightarrow p_2(t) = Ct + C_1;$$

b) условия трансверсальности по x для $l = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - \xi_1) + \lambda_2(x_2(0) - \xi_2) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T)$:

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_2(0) = \lambda_2, \quad p_1(T) = -\lambda_3, \quad p_2(T) = -\lambda_4;$$

c) условие минимума по u:

$$\min_{|u| \leqslant 1} (-p_2(t)u) = -p_2(t)\widehat{u}(t) \Rightarrow \widehat{u}(t) = \operatorname{sign} p_2(t) \ \text{ при } \ p_2(t) \neq 0;$$

d) стационарность по T: $\mathcal{L}_T = 0 \Rightarrow \lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0$. Учитывая, что $\dot{x}_1(T) = 0$, $\lambda_4 = -p_2(T)$, $p_2(T)\widehat{u}(T) = |p_2(T)|$, получаем $\lambda_0 = |p_2(T)|$.

3. *Анализ.* Если допустить, что $\lambda_0 = 0$, то $p_2(T) = 0$, причем $|p_2(t)| \not\equiv 0$ (ибо иначе все множители Лагранжа были бы нули). Значит, $p_2(t) = C(t - T)$, а $\widehat{u}(t) \equiv +1$, либо $\widehat{u}(t) \equiv -1$. Множество начальных условий, соответствующих таким управлениям, описывается уравнением $\xi_2 = -\sqrt{2\xi_1}$, если $\xi_1 \geqslant 0$, и $\xi_2 = \sqrt{-2\xi_1}$, если $\xi_1 \leqslant 0$. Если же ξ_1 и ξ_2 не связаны этим соотношением, то $\lambda_0 \neq 0$ и полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из d) следует, что $|p_2(T)| = 1$, т. е. $p_2(t)$ равно либо $p_2^+(t) = C(t - T) + 1$, либо $p_2^-(t) = C(t - T) - 1$. Этим возможностям соответствуют такие управления: $u^+(t) = -1$, если $0 \leqslant t \leqslant \tau$, и $u^+(t) = 1$, если $\tau < t \leqslant T$, и $u^-(t) = 1$, если $0 \leqslant t \leqslant \tau$, и $u^-(t) = -1$, если $\tau < t \leqslant T$. Для тех значений t, где $\widehat{u}(t) = 1$, $\dot{x}_2 = 1 \Rightarrow \dot{x}_1 = t + C' \Rightarrow x_1 = \frac{t^2}{2} + C't + C'' = \frac{x_2^2}{2} + C$.

Аналогично получаем, что для тех значений t, для которых $\widehat{u}(t) = -1$, фазовая траектория — кусок параболы

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C.$$

Это определяет движение траекторий по фазовой плоскости, изображенных на рис. 5.

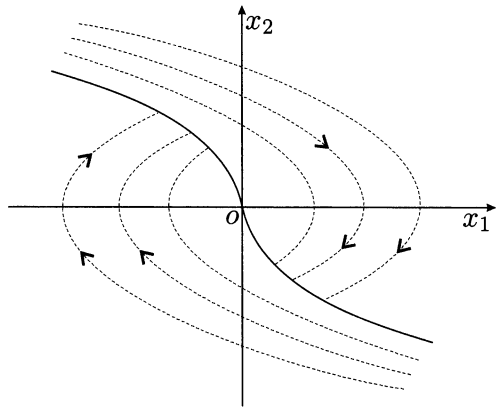

Рис. 5. Задача быстродействия.

Покажем, что найденное решение $\widehat{x}(\cdot) = \widehat{x}_1(\cdot)$, отвечающее заданной начальной точке (x_0, v_0), действительно доставляет решение задачи $(\mathcal{P}_5)$.

Предположим, что некоторая функция $x(\cdot)$ определена на отрезке $[0, \tilde{T}]$, имеет кусочно непрерывную вторую производную и $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $x(\tilde{T}) = \dot{x}(\tilde{T}) = 0$, причем $\tilde{T} \leqslant T$. При $\tilde{T} < T$ мы доопределим $x(\cdot)$, положив $x(t) \equiv 0$ при $t \in [\tilde{T}, T]$. После этого обе функции $x(\cdot)$ и $\widehat{x}(\cdot)$ будут определены на одном и том же отрезке $[0, T]$ и будут иметь одинаковые граничные условия

$$x(0) = \widehat{x}(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{\widehat{x}}(0) = v_0,$$
$$x(T) = \widehat{x}(T) = \dot{x}(T) = \dot{\widehat{x}}(T) = 0.$$

Покажем, что если $|\ddot{x}| \leqslant 1$, то $x(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$ и, в частности, неравенство $\tilde{T} < T$ невозможно. Тем самым будет доказана оптимальность функции $\widehat{x}(\cdot)$. Ввиду симметрии задачи ограничимся случаем, когда вначале управление $u = \ddot{x}$ положительно. Если $|\ddot{x}| \leqslant 1$, то, интегрируя дважды неравенство $\ddot{x}(t) \leqslant 1$ и учитывая граничные условия, получаем

$$\widehat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_0^\tau \int_0^t (1 - \ddot{x}(s))\, ds\, dt \geqslant 0, \tag{i}$$

причем равенство здесь возможно, только если во всех точках непрерывности $\ddot{x}(s) \equiv 1$, а тогда $x(t) \equiv \widehat{x}(t)$, $t \in [0,\tau]$.

Аналогично, интегрируя дважды неравенство $\ddot{x}(t) \geqslant -1$, получаем

$$\widehat{x}(\tau) - x(\tau) = \int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{t}^{T}(-1 - \ddot{x}(s))\,ds\,dt \leqslant 0, \tag{ii}$$

причем и здесь равенство возможно лишь, если $\ddot{x}(s) \equiv -1$ и $x(t) \equiv \widehat{x}(t)$, $t \in [\tau, T]$.

Сравнивая (i) и (ii), находим, что $x(\tau) = \widehat{x}(\tau)$, а тогда $x(t) \equiv \widehat{x}(t)$, $t \in [0, T]$.

Ответ. *Оптимальный процесс находится из условий* $|\ddot{x}(t)| = 1$ *во всех точках, кроме, может быть, одной, при переходе через которую* $\ddot{x}(\cdot)$ *меняет знак.*

6. Задача Фуллера

Здесь рассматривается задача оптимального управления, которая была поставлена и исследована американским инженером А. Т. Фуллером [Фул]. Позднее выяснилось, что точно к такой постановке приводит задача, связанная с наискорейшим успокоением спутника, выведенного на орбиту. Сразу отметим, что это пример задачи, где оптимальное управление не является кусочно непрерывной функцией.

1. *Формализация.*

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt \to \min, \quad \ddot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leqslant 1. \tag{$\mathcal{P}_6$}$$

Задача рассматривается на классе функций из $L_2(\mathbb{R}_+)$, у которых первая производная локально (т. е. на каждом конечном отрезке) абсолютно непрерывна, а вторая производная принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Обозначим это пространство функций через $\mathcal{W}^2_{2,\infty}(\mathbb{R}_+)$.

Перепишем задачу в стандартной форме

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} x_1^2(t)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 1, \quad |u(t)| \leqslant 1. \tag{$\mathcal{P}_6'$}$$

2. *Принцип Лагранжа.* Применим принцип Лагранжа к этой задаче, хотя она задана на полупрямой и формально не подходит ни под одну из сформулированных ранее теорем. Функция Лагранжа задачи $(\mathcal{P}_6')$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} L(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), u(t), p_1(t), p_2(t), \lambda_0)\,dt + \\ + l(x_1(0), x_2(0)),$$

где

$$L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0) = \lambda_0 x_1^2 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u)$$

и

$$l = \lambda_1(x_1(0) - 1).$$

Принцип Лагранжа заключается в том, что должно выполняться уравнение Эйлера по фазовым переменным:

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{L}_{x_i}(t) = 0, \qquad i = 1, 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\dot{p}_1 + 2\lambda_0\widehat{x}_1 = 0, \qquad -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \end{gathered} \tag{i}$$

условие трансверсальности в нуле

$$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(0) = \widehat{l}_{x_i(0)}, \;\; i = 1, 2 \Leftrightarrow p_1(0) = \lambda_1, \quad p_2(0) = 0 \tag{ii}$$

и условие минимума по u:

$$\min_{|u| \leqslant 1}(-p_2(t)u) = -p_2(t)\widehat{u}(t) \Leftrightarrow \widehat{u}(t) = \operatorname{sign} p_2(t). \tag{iii}$$

3. *Анализ.* Покажем, что $\lambda_0 \neq 0$. Действительно, если $\lambda_0 = 0$, то из (i) и (ii) следует, что $p_2(t) = at$ для некоторого

$a \neq 0$ (если $a = 0$, то все множители Лагранжа оказываются нулевыми), а тогда из (iii) вытекает, что решение задачи $\widehat{x}(\cdot)$ — парабола и она не может принадлежать $L_2(\mathbb{R}_+)$. Итак, $\lambda_0 \neq 0$ и мы будем считать, что $\lambda_0 = 1/2$.

Перейдём к исходным переменным и обозначим $\widehat{x} = \widehat{x}_1$ и $p = p_2$. Тогда условия (iii), (i), (ii) (добавим еще условие задачи) запишутся так:

$$\ddot{\widehat{x}}(\cdot) = \operatorname{sign} p(\cdot), \quad \ddot{p}(\cdot) = -\widehat{x}(\cdot), \quad p(0) = 0, \quad \widehat{x}(0) = 1. \tag{iv}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\dot{p}(t)\dot{\widehat{x}}(t) + \frac{\widehat{x}^2(t)}{2} - |p(t)| \equiv \text{const}. \tag{v}$$

Для проверки достаточно продифференцировать это тождество. Будем считать (и это эвристическое соображение), что константа справа в (v) равна нулю.

Обозначим $\dot{\widehat{x}}(0) = -\alpha < 0$ (снова, это эвристическое предположение, но его естественность не должна вызывать сомнений). Тогда из (v) следует, что

$$\dot{p}(0) = 1/2\alpha > 0 \tag{vi}$$

и, значит, при малых $t > 0$ имеем (см. (iv))

$$\widehat{x}(t) = \frac{t^2}{2} - \alpha t + 1. \tag{vii}$$

Вследствие (iv) и (vi) функция $p(\cdot)$ для таких t имеет вид

$$p(t) = -\frac{t^4}{24} + \frac{\alpha t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2\alpha}. \tag{viii}$$

Пусть τ — первый положительный нуль функции $p(\cdot)$. Подставляя его в (viii), получаем уравнение, связывающее α и τ:

$$-\frac{\tau^4}{24} + \frac{\alpha\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau}{2\alpha} = 0. \tag{ix}$$

Далее воспользуемся автомодельностью задачи, т. е. инвариантностью уравнений (iv) относительно преобразований

$$\lambda \to (x_\lambda(\cdot), p_\lambda(\cdot)),$$

где

$$x_\lambda(t) = \lambda^2 \widehat{x}(t/\lambda), \quad p_\lambda(t) = \lambda^4 p(t/\lambda).$$

Отсюда следует, что если $\widehat{x}(\tau) < 0$, то функции

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &= (\widehat{x}(\tau))^{-1}\, \widehat{x}\left(\sqrt{|\widehat{x}(\tau)|}t + \tau\right), \\ \overline{p}(t) &= -\,(\widehat{x}(\tau))^{-2}\, p\left(\sqrt{|\widehat{x}(\tau)|}t + \tau\right) \end{aligned}$$

удовлетворяют всем соотношениям в (iv). Исходная задача выпукла, а минимизируемый функционал строго выпуклый,[1] так что решение (если оно существует) единственно и поэтому

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t) &= (\widehat{x}(\tau))^{-1}\, \widehat{x}\left(\sqrt{|\widehat{x}(\tau)|}t + \tau\right), \\ p(t) &= -\,(\widehat{x}(\tau))^{-2}\, p\left(\sqrt{|\widehat{x}(\tau)|}t + \tau\right). \end{aligned}$$

Дифференцируя первое равенство в нуле и затем возводя его в квадрат, получим соотношение

$$\dot{\widehat{x}}^2(\tau) = -\widehat{x}(\tau)\dot{\widehat{x}}^2(0),$$

которое в силу (vii) равносильно равенству

$$(\tau - \alpha)^2 = -(\tau^2/2 - \alpha\tau + 1)\alpha^2.$$

Относительно τ это квадратное уравнение, решая которое, получаем, что

$$\tau = \alpha\left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2}{\alpha^2 + 2}}\right). \tag{x}$$

[1] То есть $J((1-\gamma)x(\cdot) + \gamma y(\cdot)) < (1-\gamma)J(x(\cdot)) + \gamma J(y(\cdot))$ для любых $\gamma \in (0,1)$ и $x(\cdot) \neq y(\cdot)$.

Отсюда видно, что $\alpha \geqslant \sqrt{2}$. Подставляя найденное выражение для τ в (ix) и обозначая левую часть (ix) через $f(\alpha)$, легко обнаружить, что $f(\sqrt{2}) = 0$, $f'(\sqrt{2}) = -\infty$ и $f(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to \infty$. Таким образом, существуют $\overline{\alpha} > \sqrt{2}$ и $\overline{\tau}$ (связанное с $\overline{\alpha}$ соотношением (x)), которые удовлетворяют равенству (ix).

Построим теперь решение системы (iv). На отрезке $[0, \overline{\tau}]$ положим

$$x_0(t) = \frac{t^2}{2} - \overline{\alpha}t + 1, \quad p_0(t) = -\frac{t^4}{24} + \frac{\overline{\alpha}t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2\overline{\alpha}}.$$

Автомодельность задачи позволяет продолжить эти функции на всю полупрямую. В результате мы получаем пару функций, обозначим их $\overline{x}(\cdot)$ и $\overline{p}(\cdot)$, которые удовлетворяют условиям (iv) и которые финитны, так как точки склейки $\overline{x}(\cdot)$ (нули $\overline{p}(\cdot)$) сходятся, как нетрудно проверить, к $\overline{\tau}(1-\lambda)^{-1}$, где

$$\lambda = \sqrt{(\overline{\alpha}^2 - 2)/(\overline{\alpha}^2 + 2)}.$$

Таким образом, $\overline{x}(\cdot)$ есть склейка счетного числа парабол и, значит, $\ddot{\overline{x}}(\cdot)$ имеет счетное число переключений.[1]

Покажем, что построенная функция $\overline{x}(\cdot)$ есть действительно решение задачи $(\mathcal{P}_6)$. Во-первых, ясно, что она принадлежит $\mathcal{W}^2_{2,\infty}(\mathbb{R}_+)$ и допустима в этой задаче. Пусть $x(\cdot)$ допустима в $(\mathcal{P}_6)$. Тогда, в частности, $|\ddot{x}(t)| \leqslant 1$ и мы имеем

$$\dot{\overline{p}}(0) - \int\limits_{\mathbb{R}_+} \overline{p}(t)\ddot{x}(t)\,dt \geqslant \dot{\overline{p}}(0) - \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\overline{p}(t)|\,dt. \tag{xi}$$

Так как (в силу (iv))

$$|\overline{p}(t)| = \overline{p}(t)\operatorname{sign}\overline{p}(t) = \overline{p}(t)\ddot{\overline{x}}(t),$$

[1] Такие процессы, где управление за конечное время совершает бесконечное число переключений, называются четтеринг-режимом. Задача, решенная Фуллером была, по-видимому, первым примером такого рода. Ныне теория четтеринга развита достаточно глубоко, см., например, [БЗ].

то, подставляя это в интеграл справа в (xi) и затем интегрируя два раза по частям, получим, что

$$\dot{\overline{p}}(0) - \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\overline{p}(t)|\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \overline{x}^2(t)\,dt. \tag{xii}$$

Далее, применяя неравенство Коши–Буняковского, соотношения (xi) и (xii), будем иметь

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt\right)^{1/2} \geqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} \overline{x}^2(t)\,dt\right)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \overline{x}(t)x(t)\,dt =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} \overline{x}^2(t)\,dt\right)^{-1/2} \left(\dot{\overline{p}}(0) - \int\limits_{\mathbb{R}_+} \overline{p}(t)\ddot{x}(t)\,dt\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} \overline{x}^2(t)\,dt\right)^{1/2},$$

т. е. $\overline{x}(\cdot)$ — решение задачи $(\mathcal{P}_6)$.

Ответ. *Решение задачи $(\mathcal{P}_6)$ есть финитная функция, представляющая собой склейку счетного числа парабол. Соответствующее оптимальное управление имеет счетное число переключений с 1 на -1 за конечное время. Вычисления на компьютере дают следующее значение для этой задачи*: $5^{-\frac{2}{5}}2^{\frac{3}{5}}(3+3\sqrt{33})^{-\frac{1}{10}}$

7. Задача о расширенном воспроизводстве при налогообложении, пропорциональном прибыли

Представим себе, что предприятие производит некоторую продукцию, и пусть $x(t)$ — денежная сумма, получаемая за реализацию этой продукции в момент t в единицу времени. Доля $u(t)$ этой суммы идёт на расширение производства. Считаем, что увеличение суммы $x(t)$ пропорционально затратам:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha u(t)x(t), \tag{i}$$

где α — положительная константа. Считаем, что известен начальный капитал:

$$x(0) = a, \tag{ii}$$

где a — положительное число. Считаем также, что расходы на текущее производство пропорциональны производимой продукции (т. е. в единицу времени равны $\beta x(t)$), а налог пропорционален прибыли (т. е. в единицу времени равен $b(x(t)-u(t)x(t)-\beta x(t))$. Поэтому прибыль за время от $t=0$ до $t=T$ исчисляется выражением

$$Q = \int_0^T b(1-u(t)-\beta)x(t)\,dt. \tag{iii}$$

Встаёт вопрос, как распорядиться долей $u(t)$, направляемой на расширенное воспроизводство, чтобы к заданному моменту прибыль была бы максимальна?

1. *Формализация.* Соотношения (i)–(iii) приводят к следующей постановке (далее $\gamma = 1-\beta$):

$$\int_0^T b(u(t)-\gamma)x(t)\,dt \to \min, \quad \dot x = \alpha u x, \quad 0 \leqslant u \leqslant \gamma, \quad x(0) = a. \tag{$\mathcal{P}_7$}$$

Это задача оптимального управления с фиксированным временем и закреплённым левым концом.

2. *Принцип Лагранжа.* Функция Лагранжа здесь такова:

$$\mathcal{L} = \int_0^T ((u(t)-\gamma)x(t) + p(t)(\dot x(t) - \alpha u(t)x(t)))\,dt.$$

Тогда должно выполняться

a) уравнение Эйлера по x:

$$-\dot p - \alpha u p - \gamma + u = 0;$$

b) условие минимума по u:

$$\min_{0\leqslant u\leqslant\gamma} \widehat{x}(t)u(1-p(t)\alpha) = \widehat{x}(t)\widehat{u}(t)(1-p(t)\alpha);$$

c) трансверсальность по x:

$$p(T) = 0.$$

3. *Анализ.* Из b) вытекает, что если $1 - p\alpha < 0$, то $\widehat{u}(t) = \gamma$, а если $1 - p\alpha > 0$, то $\widehat{u}(t) = 0$, откуда и из a) следует, что $\dot{p} = u(1 - p\alpha) - \gamma \leqslant -\gamma$. Таким образом, после переключения в точке τ получаем: $p(t) = -\gamma(t - T)$. При этом либо $\tau = 0$, либо $\tau > 0$. В последнем случае $(T - \tau)\alpha\gamma = 1$, т. е.

$$\tau = T - \frac{1}{\alpha\gamma}.$$

Очевидная модификация теоремы существования из Приложения II показывает, что решение задачи $(\mathcal{P}_7)$ существует, и тогда из единственности экстремали получаем

Ответ. *Если $\frac{1}{\alpha\gamma} < T$, то до момента $\tau = T - \frac{1}{\alpha\gamma}$ надо максимально «воспроизводиться», а потом лишь извлекать прибыль, если же $\frac{1}{\alpha\gamma} \geqslant T$, то «воспроизводиться» вовсе не следует.*

8. Одна проблема космической навигации

Рассмотрим задачу о мягкой посадке космического аппарата на плоский участок небесного тела, лишённого атмосферы. Примером такого небесного тела может служить Луна.

Пусть космический аппарат движется по прямолинейной траектории, перпендикулярной поверхности небесного тела, $m(t)$ — масса аппарата в момент t, а $x(t)$ — расстояние от него до поверхности тела. На космический аппарат действует сила тяжести $-\gamma m$ и сила тяги ku. Положительные коэффициенты γ (ускорения силы тяжести) и k (ускорения силы тяги) предполагаем постоянными; на управление u накладывается ограничение $0 \leqslant u \leqslant U$. Тогда по второму закону Ньютона динамика полёта опишется уравнениями:

$$m\ddot{x} = ku - \gamma m, \quad \dot{m} = -u, \quad 0 \leqslant u \leqslant U. \tag{i}$$

Поставим перед собой задачу мягко посадить аппарат, затратив минимум топлива (не фиксируя времени посадки).

1. *Формализация.* Поставленная задача приводит к следующей формализации (далее x обозначено через x_1, время посадки через T):

$$m_0 - m(T) \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{ku}{m} - \gamma, \quad \dot{m} = -u,$$

$$x_i(0) = \xi_i, \quad x_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, \quad m(0) = m_0, \quad 0 \leqslant u \leqslant U. \qquad (\mathcal{P}_8)$$

Действительно, разность между начальной и конечной массами равна затраченному топливу; числа $x_i(0)$ и m_0 характеризуют начальные положения и начальную массу аппарата; соотношения $x_i(T) = 0$ означают, что посадка «мягкая» — аппарат «прилунился» с нулевой скоростью.

2. *Принцип Лагранжа.* Функция Лагранжа задачи имеет вид:

$$\mathcal{L} = \lambda_0(m_0 - m(T)) + \int_0^T \Big(p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - \frac{ku}{m} + \gamma) +$$

$$+ p_3(\dot{m} + u)\Big)\, dt + \mu_1 x_1(T) + \mu_2 x_2(T).$$

Закрепленные краевые условия на левом конце в функцию Лагранжа не вносим.

Должны выполняться:

a) уравнение Эйлера:

$$-\dot{p}_1 = 0, \quad -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \quad -\dot{p}_3 + p_2 \frac{ku}{m^2} = 0;$$

b) условие минимума по u:

$$\min_{0 \leqslant u \leqslant U} \left(p_3(t)u - p_2(t)\frac{ku}{m(t)} \right) = p_3(t)\widehat{u}(t) - p_2(t)\frac{k\widehat{u}(t)}{\widehat{m}(t)};$$

c) условия трансверсальности по фазовой переменной:

$$p_1(T) = -\mu_1, \quad p_2(T) = -\mu_2, \quad p_3(T) = \lambda_0;$$

d) условия стационарности по T:

$$-\lambda_0 \dot{m}(T) + \mu_1 \dot{x}_1(T) + \mu_2 \dot{x}_2(T) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \lambda_0 \widehat{u}(T) - p_2(T) \left(\frac{k\widehat{u}(T)}{\widehat{m}(T)} \right) + p_2(T)\gamma = 0.$$

3. *Анализ.* Из а) следует, что

$$p_1(t) = p = \text{const}, \quad p_2(t) = -pt + q, \quad q = \text{const}. \qquad \text{(ii)}$$

Обозначим $\psi(t) = -p_3(t) + \frac{kp_2(t)}{m(t)}$. Тогда из а) получим:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{kp}{m(t)}. \qquad \text{(iii)}$$

Из условия стационарности по T приходим к равенству:

$$\psi(T)\widehat{u}(T) = p_2(T)\gamma, \qquad \text{(iv)}$$

а из условия минимума по u получаем: $\widehat{u}(t) = 0$ при $\psi(t) < 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Если $p = 0$, то из (iii) следует, что $\psi(t) = \psi_0 = \text{const}$. При этом $\psi_0 \neq 0$ (иначе все множители оказались бы нулями), а потому либо оптимальное управление тождественно равно нулю (что невозможно, ибо нельзя мягко прилуниться с выключенным двигателем), либо оно тождественно равно U. Если же $p \neq 0$, то функция $\psi(\cdot)$ строго монотонна, и, значит, имеется одно переключение с нуля на U.

Пусть τ — момент переключения. Движение аппарата при $t \leqslant \tau$ задаётся формулами свободного падения:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 t - \gamma\frac{t^2}{2}, \quad x_2 = \xi_2 - \gamma t, \quad m(t) = m_0.$$

В фазовой плоскости (x_1, x_2) эти соотношения задают параболу

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2\frac{\xi_2 - x_2}{\gamma} - \frac{(\xi_2 - x_2)^2}{2\gamma}.$$

Движение аппарата на участке $[\tau, T]$ определяется уравнениями (i), где

$$u(t) = U, \quad x_1(\tau) = \bar{\xi}_1, \quad x_2(\tau) = \bar{\xi}_2, \quad m(\tau) = m_0.$$

Решение соответствующей задачи Коши имеет вид ($\alpha = t - \tau$):

$$x_1(\tau+\alpha) = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2\alpha - \frac{1}{2}\gamma\alpha^2 + \\ + k\alpha + \frac{km_0}{U}\left(1 - \frac{U\alpha}{m_0}\right)\ln\left(1 - \frac{U\alpha}{m_0}\right),$$

$$x_2(\tau+\alpha) = \bar{\xi}_2 - \gamma\alpha - k\ln\left(1 - \frac{U\alpha}{m_0}\right), \quad m = m_0 - U\alpha.$$

Множество точек $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$, из которых можно прийти в начало координат, включив полную мощность, задаётся в параметрической форме уравнениями $x_1(\alpha) = x_2(\alpha) = 0$. Исключив из этих двух уравнений параметр α, получаем кривую $\Psi(\xi_1, \xi_2)$.

Ответ. *Следует в течение времени τ, определяемого первым положительным корнем уравнения*

$$\Psi(\xi_1 + \xi_2\tau - \gamma\frac{\tau^2}{2}, \xi_2 - \gamma\tau) = 0, \tag{v}$$

предоставить аппарату свободно двигаться, а затем включить тягу на полную мощность. Если при данных (ξ_1, ξ_2) уравнение (v) не имеет решения, мягкая посадка невозможна.

9. Гармонический осциллятор с принудительным ограничением

Этот учебный пример весьма поучителен; он позволяет проникнуть в технику и вариационного исчисления, и оптимального управления.

1. *Формализация.* Пусть T и A — положительные числа. Рассмотрим задачу:

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T (\dot{x}^2(t) - x^2(t))\,dt \to \min, \qquad (\mathcal{P}_9)$$
$$x(0) = x(T) = 0, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant A.$$

Перепишем ее в форме задачи оптимального управления

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^T(u^2(t)-x^2(t))\,dt\to\min,\quad \dot x(t)=u(t),$$
$$x(0)=\dot x(T)=0,\quad |u(t)|\leqslant A.\quad (\mathcal{P}_9')$$

Решение задачи $(\mathcal{P}_9')$ существует (см. Приложение II), обозначим его $(\widehat x(\cdot),\widehat u(\cdot))$.

2. *Принцип Лагранжа.* Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$\mathcal{L}(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)=\int_0^T L\,dt+l,$$

где

$$L=L(x,\dot x,u,p,\lambda_0)=\lambda_0(u^2-x^2)+p(\dot x-u)$$

и

$$l=l(x(0),x(T),\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1x(0)+\lambda_2x(T).$$

Согласно принципу Лагранжа для задачи $(\mathcal{P}_9')$ (т. е. принципу максимума Понтрягина) найдутся такие множители Лагранжа $\lambda_0\geqslant 0$, $p(\cdot)\in C^1([0,T])$, λ_1 и λ_2, не все равные нулю, что

$$-\frac{d}{dt}\widehat L_{\dot x}(t)+\widehat L_x(t)=0\ \Leftrightarrow\ -\dot p(t)-2\lambda_0\widehat x(t)=0,\qquad \text{(i)}$$

$$\begin{aligned}\widehat L_{\dot x}(0)&=\widehat l_{x(0)}\ \Leftrightarrow\ p(0)=\lambda_1,\\ \widehat L_{\dot x}(T)&=-\widehat l_{x(T)}\ \Leftrightarrow\ p(T)=-\lambda_2\end{aligned}\qquad \text{(ii)}$$

и

$$\min_{|u|\leqslant A}(\lambda_0u^2-p(t)u)=\lambda_0\widehat u^2(t)-p(t)\widehat u(t)\ \text{ для п. в. } t\in[0,T].\quad \text{(iii)}$$

Для всех положительных T и A нас интересуют решения задачи $(\mathcal{P}_9')$, ее значение, а также ее экстремали, т. е. такие $\widehat x(\cdot)$, что пара $(\widehat x(\cdot),\dot{\widehat x}(\cdot))$ удовлетворяет необходимым условиям минимума (i)–(iii).

3. *Анализ.* Покажем сначала, что в соотношениях (i)–(iii) $\lambda_0 \neq 0$. Действительно, если это не так, то из (i) следует, что $p = \mathrm{const}$. Предположим, что $p \neq 0$. Тогда из (iii) вытекает, что $\widehat{u}(t) = A \operatorname{sign} p$ и так как $\widehat{x}(0) = 0$, то $\widehat{x}(t) = At \operatorname{sign} p$. Это невозможно, ибо $\widehat{x}(T) \neq 0$. Таким образом, $p = 0$, а значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ согласно (ii), т. е. все множители Лагранжа нулевые, что также невозможно. Итак, $\lambda_0 \neq 0$ и мы будем считать, что $\lambda_0 = 1/2$.

Ясно, что для всех положительных T и A функция $\widehat{x}(\cdot)$, равная тождественно нулю, удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Из (iii) легко следует, что для п. в. $t \in [0, T]$

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} p(t), & |p(t)| \leqslant A; \\ A \operatorname{sign} p(t), & |p(t)| \geqslant A. \end{cases} \tag{iv}$$

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

а) $|p(0)| \leqslant A$. Если $|p(0)| < A$, то $|p(t)| < A$ и в некоторой окрестности нуля. Тогда из (i) и (iv) вытекает, что в этой окрестности

$$\ddot{\widehat{x}}(t) + \widehat{x}(t) = 0. \tag{v}$$

Так как $\widehat{x}(0) = 0$, то $\widehat{x}(t) = C \sin t$ и $|C| < A$, поскольку

$$C = \dot{\widehat{x}}(0) = p(0).$$

Таким образом, $|p(t)| < A$ всюду. Условие

$$\widehat{x}(T) = 0$$

удовлетворяется лишь тогда, когда либо $C = 0$, либо $T = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Если $|p(0)| = A$, то функции $\widehat{x}(t) = C \sin t$, где $|C| = A$, также экстремали при $T = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Итак, если $|p(0)| \leqslant A$, то семейство функций $\widehat{x}(t, C) = C \sin t$ — экстремали в $(\mathcal{P}_9')$ при $T = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. На фазовой плоскости с координатами x, p (см. рис. 6) при $T = \pi$ точка $(\widehat{x}(t), p(t))$ движется по полуокружности.

b) $|p(0)| > A$. Пусть, для определенности, $p(0) > 0$. Тогда $\widehat{x}(t) = At$ в некоторой окрестности нуля в силу (iv) и того, что $\widehat{x}(0) = 0$. Пусть τ — первая точка, где $p(\tau) = A$ (такая точка есть[1], иначе мы никогда не удовлетворили бы условию $\widehat{x}(T) = 0$). Так как (см. (i)) $\dot{p}(\tau) = -\widehat{x}(\tau) = -A\tau < 0$, то $p(t) < A$ для точек $t > \tau$ и близких к τ. Тогда согласно (i) и (iv) для таких t функция $\widehat{x}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (v) и тем самым имеет вид

$$\widehat{x}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Так как функция $\widehat{x}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то в точке τ необходимо выполнение условий

$$A\tau = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau,$$
$$A = -C_1 \sin\tau + C_2 \cos\tau.$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = A(\tau\cos\tau - \sin\tau), \quad C_2 = A(\cos\tau + \tau\sin\tau).$$

Подставляя эти значения в $\widehat{x}(\cdot)$ и $p(\cdot) = \dot{\widehat{x}}(\cdot)$, получаем для указанных точек t:

$$\widehat{x}(t) = A(\tau\cos(\tau - t) - \sin(\tau - t)),$$

$$p(t) = A(\tau\sin(\tau - t) + \cos(\tau - t)).$$

Пусть $0 < \gamma < \pi/2$ таково, что $\cos\gamma = \tau/\sqrt{1+\tau^2}$, тогда эти соотношения можно записать так

$$\widehat{x}(t) = A\sqrt{1+\tau^2}\cos(\gamma + \tau - t),$$
$$p(t) = A\sqrt{1+\tau^2}\sin(\gamma + \tau - t). \qquad \text{(vi)}$$

Это означает, что на фазовой плоскости с координатами x, p (см. рис. 6) точка $(\widehat{x}(t), p(t))$ движется по окружности радиуса

[1] На фазовой плоскости с координатами x, p (см. рис. 6) это означает, что точка $(\widehat{x}(t), p(t))$ от 0 до τ движется по параболе $p = p'(0) - x^2/2A$.

$A\sqrt{1+\tau^2}$ от точки $(A\tau, A)$. Через некоторое время t_1 она приходит в точку $(A\tau, -A)$ (при этом $|p(t)| < A$ для всех $\tau < t < t_1$). Легко видеть, что

$$t_1 = 2\operatorname{arctg}(1/\tau).$$

Далее, в силу (iv),

$$\widehat{x}(t) = -At + b$$

и существует единственное T такое, что $\widehat{x}(T) = 0$, т. е. $\widehat{x}(t) = A(T-t)$. Из условия $A\tau = A(T-t_1\tau)$ следует, что $t_1 = T-2\tau$.

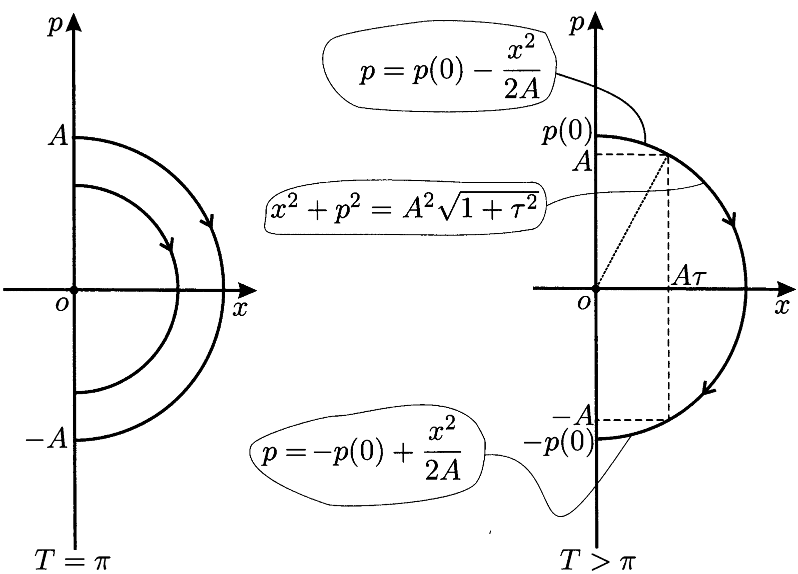

Рис. 6. Гармонический осциллятор.

Итак, общее время движения равно

$$T = 2\left(\tau + \operatorname{arctg}\frac{1}{\tau}\right) \tag{vii}$$

и построенная экстремаль (учитывая, что $\operatorname{arctg}(1/\tau) = \gamma$ и тогда из (vii) следует, что $\tau+\gamma=T/2$) имеет вид

$$\widehat{x}(t)=\begin{cases}At, & 0\leqslant t\leqslant\tau;\\ A\sqrt{1+\tau^2}\cos(t-T/2), & \tau\leqslant t\leqslant T-\tau;\\ A(T-t), & T-\tau\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

Функция справа в (vii) как функция τ, монотонно возрастает на $(0,+\infty)$ и ее предел справа в нуле равен π, поэтому только что построенная экстремаль возможна только при $T>\pi$. В частности, при $T<\pi$ единственной экстремалью в исходной задаче является тождественный нуль.

В силу симметрии функция $-\widehat{x}(\cdot)$ — также экстремаль.

Заметим, что из (vii) следует, что $T=2\tau+2\gamma$, т. е.

$$\tau+\gamma=\frac{T}{2}.$$

Тогда (vi) можно записать так

$$\begin{aligned}\widehat{x}(t)&=A\sqrt{1+\tau^2}\cos\Big(t-\frac{T}{2}\Big),\\ p(t)&=-A\sqrt{1+\tau^2}\sin\Big(t-\frac{T}{2}\Big).\end{aligned}\tag{viii}$$

Подсчитаем значение функционала на экстремали $\widehat{x}(\cdot)$.

$$\int\limits_0^T(\dot{\widehat{x}}^2(t)-\widehat{x}^2(t))\,dt=\int\limits_0^\tau(\dot{\widehat{x}}^2(t)-\widehat{x}^2(t))\,dt+$$
$$+\int\limits_\tau^{T-\tau}(\dot{\widehat{x}}^2(t)-\widehat{x}^2(t))\,dt+\int\limits_{T-\tau}^{T}(\dot{\widehat{x}}^2(t)-\widehat{x}^2(t))\,dt=$$
$$=A^2(\tau-\tau^3/3-(1+\tau^2)\sin(T-2\tau)+\tau-\tau^3/3).$$

Из (viii) следует (при $t=\tau$), что

$$\tau=\frac{1}{2}(1+\tau^2)\sin(T-2\tau)$$

и поэтому

$$\int_0^T (\dot{\widehat{x}}^2(t) - \widehat{x}^2(t))dt = -\frac{2}{3}A^2\tau^3.$$

Для каждого $a \in \mathbb{R}$ обозначим через $\{a\}$ число, равное $[a]$, если $a \notin \mathbb{Z}$, и $[a]-1$, если $a \in \mathbb{Z}$.

Ответ. *Пусть T и A — положительные числа. Тогда*

1) *если $T < \pi$, то функция $\widehat{x}(\cdot) = 0$ — единственная экстремаль в задаче $(\mathcal{P}_9)$, тем самым она является ее решением и значение задачи равно нулю;*

2) *если $T = \pi$, то функции $\widehat{x}(t, C) = C\sin t$, где $|C| \leqslant A$, и только они — экстремали в $(\mathcal{P}_9)$. Все они являются решениями задачи $(\mathcal{P}_9)$ и ее значение равно нулю.*

3) *если $T > \pi$, то следующие $2\{\frac{T}{\pi}\}+1$ функций: тождественный нуль, функции*

$$\widehat{x}_m(t) = \begin{cases} x_{\tau_m}(t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{m}; \\ -x_{\tau_m}(t - \frac{T}{m}), & \frac{T}{m} \leqslant t \leqslant 2\frac{T}{m}; \\ \dots \\ (-1)^{m-1}x_{\tau_m}(t-(m-1)\frac{T}{m}), & (m-1)\frac{T}{m} \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где

$$x_{\tau_m}(t) = \begin{cases} At, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_m; \\ A\sqrt{1+\tau_m^2}\cos(t - \frac{T}{2m}), & \tau_m \leqslant t \leqslant T/m - \tau_m; \\ A(T-t), & \frac{T}{m} - \tau_m \leqslant t \leqslant \frac{T}{m} \end{cases}$$

и τ_m — единственный корень уравнения

$$\frac{T}{m} = 2(\tau + \operatorname{arctg}(1/\tau)),$$

а также функции $(-\widehat{x}_m(\cdot))$, $m = 1, \dots, \{T/\pi\}$, являются экстремалями в задаче $(\mathcal{P}_9)$.

Кроме того, если $T = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 2$, то семейство функций $\widehat{x}(t, C) = C \sin t$, где $|C| \leqslant A$, — также экстремали в $(\mathcal{P}_9)$.

Решениями задачи $(\mathcal{P}_9)$ являются функции $\widehat{x}_1(\cdot)$ и $-\widehat{x}_1(\cdot)$, значение задачи равно $-2A^2\tau_1^3/3$.

§ 4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1 п. 2.2. Вывод необходимых условий экстремума в задаче вариационного исчисления (P_0), задаче Лагранжа (P_1) и задаче оптимального управления (P) следует, по существу, одной схеме, восходящей к Лагранжу: мы варьируем экстремальный элемент конечным числом параметров, сводя исходную задачу к конечномерной. Затем мы пользуемся необходимыми условиями экстремума в таких задачах (которые приведены в Приложениях I и II) и еще (в задаче Лагранжа и задаче оптимального управления) соображениями, связанными с условиями компактности множества в терминах центрированной системы его замкнутых подмножеств.

(a) **Уравнение Эйлера для простейшей задачи**. Для того, чтобы подчеркнуть единообразие рассуждений, запишем задачу (P_0) в форме задачи Лагранжа

$$\begin{gathered} J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \to \text{extr}, \\ \dot{x} = u, \quad x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1. \end{gathered} \tag{i}$$

Если $\widehat{x}(\cdot)$ — слабый локальный экстремум в (P_0), то это, очевидно, равносильно тому, что пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, где $\widehat{u}(\cdot) = \dot{\widehat{x}}(\cdot)$, доставляет слабый локальный экстремум в задаче (i).

Рассмотрим отдельно случай свободного правого конца, т. е. когда ограничение $x(t_1) = x_1$ отсутствует и случай закрепленных концов.

1. *Случай свободного правого конца.* По условию функция L непрерывна в окрестности кривой

$$\{(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)) \mid t \in [t_0,t_1]\},$$

и поэтому согласно теореме П 1.1 (о непрерывности суперпозиции отображений) интеграл $J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ конечен. Пусть пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ — слабый локальный экстремум в задаче (i). Построим семейство вариаций этой пары. Для $u(\cdot) \in C([t_0,t_1])$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ положим $u_\alpha(\cdot) = \widehat{u}(\cdot) + \alpha u(\cdot)$ и обозначим через $x_\alpha(\cdot)$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = u_\alpha(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

т. е.

$$x_\alpha(\cdot) = \widehat{x}(\cdot) + \alpha y(\cdot, u(\cdot)),$$

где

$$y(t,u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau.$$

Ясно, что $x_\alpha(t_0) = x_0$. Таким образом, для всех α пара $(x_\alpha(\cdot),u_\alpha(\cdot))$ допустима в (i). При малых α, скажем, для $\alpha \in [-\delta,\delta]$, кривая $\{(t,x_\alpha(t),u_\alpha(t)) \mid t \in [t_0,t_1]\}$ лежит в окрестности кривой $\{(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)) \mid t \in [t_0,t_1]\}$. Для таких α положим

$$g(\alpha) = g(\alpha;u(\cdot)) = \\ = J(x_\alpha(\cdot),u_\alpha(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\widehat{x}(t) + \alpha y(t,u(\cdot)),\widehat{u}(t) + \alpha u(t))\,dt. \tag{ii}$$

Так как $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ — локальный экстремум в задаче (i), то нуль — локальный экстремум функции g. Функция g дифференцируема в нуле. Действительно, подынтегральная функция в (ii) (обозначим ее f) по теореме П 1.1 непрерывна на $[t_0,t_1] \times [-\delta,\delta]$. В силу теоремы П 1.2 (о производной суперпозиции отображений для случая $n = 1$, $m = 2$ и $s = 1$) и условий теоремы

$$f_\alpha(t,\alpha) = L_x(t,\widehat{x}(t) + \alpha y(t,u(\cdot)),\widehat{u}(t) + \alpha u(t))y(t,u(\cdot)) + \\ + L_u(t,\widehat{x}(t) + \alpha y(t,u(\cdot)),\widehat{u}(t) + \alpha u(t))u(t)$$

и эта функция непрерывна на $[t_0, t_1] \times [-\delta, \delta]$, снова вследствие П 1.1 Тогда согласно теореме П 1.3 (о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра) функция g дифференцируема на $[-\delta, \delta]$, в частности, в нуле и, следовательно, в силу этой же теоремы и теоремы Ферма (теорема П 1.4) имеем

$$g'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\widehat{L}_x(t) y(t, u(\cdot)) + \widehat{L}_u(t) u(t)\Big)\, dt = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Пусть $p_0(\cdot)$ — решение задачи Коши: $\dot{p} = \widehat{L}_x(t)$, $p(t_1) = 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, т. е.

$$p_0(t) = \int_{t_1}^{t} \widehat{L}_x(\tau) d\tau.$$

Подставляя в (iii) вместо $\widehat{L}_x(\cdot)$ функцию $\dot{p}_0(\cdot)$ и интегрируя по частям (учитывая, что $\dot{y}(t, u(\cdot)) = u(t)$ и $y(t_0, u(\cdot)) = 0$), будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(-p_0(t) + \widehat{L}_u(t)\Big)\, u(t)\, dt = 0. \qquad \text{(iv)}$$

Это равенство справедливо для любого $u(\cdot) \in C([t_0, t_1])$. Полагая $u(\cdot) = -p_0(\cdot) + \widehat{L}_u(\cdot)$, получаем, что интеграл от квадрата непрерывной функции равен нулю, значит, сама функция равна нулю, т. е. $p_0(\cdot) = \widehat{L}_u(\cdot)$. Таким образом, $\widehat{L}_u(\cdot)$, или, что то же, $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$. Дифференцируя равенство $p_0(\cdot) = \widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot)$ и учитывая, что $\dot{p}_0(\cdot) = \widehat{L}_x(\cdot)$ и $p_0(t_1) = 0$, получаем соотношения (1a) и (1b).

2. *Случай закрепленных концов.* Пусть теперь $u(\cdot) \in C([t_0, t_1])$ и $\int_{t_0}^{t_1} u(t)\, dt = 0$. Строим то же семейство вариаций пары $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, что и выше, и поскольку $x_\alpha(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$, пара $(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ допустима в (i) для любого α. Далее, дословно повторяя предыдущие рассуждения, приходим к равенству (iv),

справедливому для всех функций $u(\cdot) \in C([t_0, t_1])$, для которых $\int\limits_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt = 0$. В силу последнего для любой константы c справедливо и такое равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(-p_0(t) + \widehat{L}_u(t) + c\Big)\, u(t)\,dt = 0. \tag{v}$$

Выберем $\widehat{c}$ так, чтобы

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (-p_0(t) + \widehat{L}_u(t) - \widehat{c})\,dt = 0.$$

Подставляя

$$u(\cdot) = -p_0(\cdot) + \widehat{L}_u(\cdot) - \widehat{c}$$

в (v), снова получаем, что интеграл от квадрата непрерывной функции равен нулю и значит,

$$-p_0(\cdot) + \widehat{L}_u(\cdot) - \widehat{c} = 0.$$

Отсюда следует, что $\widehat{L}_u(\cdot)$, или, что то же, $\widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot)$ принадлежит $C^1([t_0, t_1])$. Дифференцируя равенство

$$p_0(\cdot) = \widehat{L}_{\dot{x}}(\cdot) - \widehat{c}$$

и учитывая, что

$$\dot{p}_0(\cdot) = \widehat{L}_x(\cdot),$$

получаем уравнение Эйлера.

(b) **Уравнение Эйлера–Лагранжа для задачи Лагранжа**. Здесь также рассмотрим два случая.

1. *Случай свободного правого конца*. Пусть пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — слабый локальный экстремум в задаче (P_1). Построим семейство вариаций этой пары. Пусть $u(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим $u_\alpha(\cdot) = u_\alpha(\cdot; u(\cdot)) = \widehat{u}(\cdot) + \alpha u(\cdot)$. По лемме П 1.6 при $N = 1$ для всех достаточно малых α существует решение

$x_\alpha(\cdot) = x_\alpha(\cdot; u(\cdot))$ задачи Коши $\dot{x} = \varphi(t, x, u_\alpha(t))$, $x(t_0) = x_0$, т. е. пара $(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ допустима в (P_1). Так как $x_\alpha(\cdot) \to \widehat{x}(\cdot)$ равномерно при $\alpha \to 0$, то можно считать, что для таких α кривая $\{(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ лежит в окрестности исходной кривой. Для этих α положим

$$g(\alpha) = g(\alpha; u(\cdot)) = \\ = J(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\alpha(t), \widehat{u}(t) + \alpha u(t))\, dt. \qquad \text{(i}'\text{)}$$

Так как $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — локальный экстремум в задаче $(\mathcal{P}_1)$, то нуль — локальный экстремум функции g. Повторяя, фактически, рассуждения, которые были проведены при выводе формулы (iii) и учитывая при этом, что при каждом $t \in [t_0, t_1]$ функция $\alpha \to x_\alpha(t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности нуля (согласно лемме П 1.6), приходим к равенству

$$g'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\widehat{f}_x(t) \cdot y(t, u(\cdot)) + \widehat{f}_u(t) \cdot u(t)\Big)\, dt = 0, \qquad \text{(ii}'\text{)}$$

где $y(\cdot, u(\cdot))$ — производная функции $\alpha \to x_\alpha(\cdot)$ в нуле.

Пусть $p_0(\cdot)$ — решение задачи Коши:

$$\dot{p} = -p\widehat{\varphi}_x(t) + \widehat{f}_x(t), \quad p(t_1) = 0. \qquad \text{(iii}'\text{)}$$

По теореме П 1.7 существования и единственности решения линейной системы такое решение существует на всем отрезке $[t_0, t_1]$ и единственно. Это сразу доказывает соотношения $(2a)$ (с заменой $p_0(\cdot)$ на $p(\cdot)$) с $\lambda_0 = 1$ и $(2c)$. Докажем $(2b)$. Подставляя в (ii′) вместо функции $\widehat{f}_x(\cdot)$ ее выражение из (iii′) и используя то, что в силу леммы П 1.6 функция $y(\cdot, u(\cdot))$ является решением уравнения (**), будем иметь

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{p}_0(t) \cdot y(t, u(\cdot)) + p_0(t) \cdot \dot{y}(t, u(\cdot)) - \\ - p_0(t) \cdot \widehat{\varphi}_u(t) u(t) + \widehat{f}_u(t) \cdot u(t))dt =$$

$$= p_0(t)y(t,u(\cdot))\big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\widehat{f}_u(t) - p_0(t)\widehat{\varphi}_u(t)\Big)\cdot u(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\widehat{f}_u(t) - p_0(t)\widehat{\varphi}_u(t)\Big)\cdot u(t)\,dt. \quad (\mathrm{iv}')$$

Эти равенства справедливы для любого

$$u(\cdot) \in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^r).$$

Беря в последнем интеграле в качестве $u(\cdot)$ функцию

$$\Big(\widehat{f}_u(\cdot) - p_0(\cdot)\widehat{\varphi}_u(\cdot)\Big)^T,$$

получаем, что

$$p_0(\cdot)\widehat{\varphi}_u(\cdot) = \widehat{f}_u(\cdot).$$

Это есть соотношение ($2b$) (с заменой $p_0(\cdot)$ на $p(\cdot)$ и с $\lambda_0 = 1$), и тем самым теорема для случая свободного правого конца доказана.

2. *Случай закрепленных концов.* Пусть пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — слабый локальный экстремум в задаче (P_1). Построим семейство вариаций этой пары. Пусть

$$N \in \mathbb{N}, \quad u_i(\cdot) \in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^r), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,\dots,N,$$
$$\overline{u}(\cdot) = (u_1(\cdot),\dots,u_N(\cdot)), \quad \overline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_N)$$

и

$$u_{\overline{\alpha}}(\cdot,\overline{u}(\cdot)) = \widehat{u}(\cdot) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(\cdot).$$

По лемме П 1.6 для достаточно малых $\overline{\alpha}$ существует решение $x_{\overline{\alpha}}(\cdot;\overline{u}(\cdot))$ задачи Коши

$$\dot{x} = \varphi(t,x,u_{\overline{\alpha}}(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

определенное на всем отрезке $[t_0,t_1]$ и для каждого $t \in [t_0,t_1]$ отображение

$$\overline{\alpha} \to x_{\overline{\alpha}}(t)$$

непрерывно дифференцируемо. Можно считать, что для таких $\overline{\alpha}$ кривая

$$\{(t, x_{\overline{\alpha}}(t; \overline{u}(\cdot)), u_{\overline{\alpha}}(t; \overline{u}(\cdot))) \mid t \in [t_0, t_1]\}$$

лежит в окрестности исходной кривой. Положим

$$g_0(\overline{\alpha}) = g_0(\overline{\alpha}; \overline{u}(\cdot)) = J(x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \overline{u}(\cdot)), u_{\overline{\alpha}}(\cdot; \overline{u}(\cdot))).$$

Снова те же рассуждения, что и при выводе формулы (iii), показывают, что частные производные функции g_0 непрерывны в некоторой окрестности нуля и тем самым g_0 непрерывно дифференцируема в этой окрестности. Рассмотрим задачу:

$$g_0(\overline{\alpha}; \overline{u}(\cdot)) \to \text{extr}, \quad g_i(\overline{\alpha}; \overline{u}(\cdot)) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{v$'$}$$

где $g_i(\overline{\alpha}; \overline{u}(\cdot))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — компоненты вектора $x_{\overline{\alpha}}(t_1; \overline{u}(\cdot)) - x_1$. Ясно, что точка $\overline{\alpha} = 0$ является локальным экстремумом в этой задаче. Согласно правилу множителей Лагранжа (теорема П 1.5) найдется такой ненулевой вектор

$$\lambda = \lambda(\overline{u}(\cdot)) = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n),$$

что производная функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(\overline{\alpha}, \lambda) = \mu_0 g_0(\overline{\alpha}; \overline{u}(\cdot)) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i(\overline{\alpha}; \overline{u}(\cdot))$$

задачи (v$'$) в точке $\overline{\alpha} = 0$ равна нулю, т. е.

$$\mu_0 \int_{t_0}^{t_1} \Big(\widehat{f}_x(t) \cdot y(t, u_i(\cdot)) + \widehat{f}_u(t) \cdot u_i(t)\Big)\, dt + \mu \cdot y(t_1, u_i(\cdot)) = 0,$$

$$i = 1, \ldots, N, \tag{vi$'$}$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ и $y(\cdot, u_i(\cdot))$, $1 \leqslant i \leqslant N$ — частные производные отображения $\overline{\alpha} \to x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \overline{u}(\cdot))$ в нуле.

Так как $\lambda \neq 0$, то можно считать, что $|\lambda| = 1$, т. е. λ принадлежит единичной сфере $\mathbb{S}^n$ пространства $(\mathbb{R}^{n+1})'$. Обозначим через $\Lambda(\overline{u}(\cdot))$ множество всех наборов множителей Лагранжа λ для задачи (v′), удовлетворяющих условию $|\lambda| = 1$. Ясно, что $\Lambda(\overline{u}(\cdot))$ — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{S}^n$. Рассмотрим теперь семейство всех конечных наборов

$$\overline{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_N(\cdot)), \;\; u_i(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r), \;\; i = 1, \ldots, N.$$

Каждому такому набору, рассматривая соответствующую задачу (v′), сопоставим некоторое непустое замкнутое множество $\Lambda(\overline{u}(\cdot)) \subset \mathbb{S}^n$. Обозначим через $\mathcal{A}$ совокупность всех таких подмножеств. Это центрированная система (см. Приложение I). Действительно, пусть $\Lambda(\overline{u}_1(\cdot)), \ldots, \Lambda(\overline{u}_m(\cdot))$ — произвольный набор элементов из $\mathcal{A}$ и $\tilde{u}(\cdot)$ — набор, состоящий из объединения наборов $\overline{u}_1(\cdot), \ldots, \overline{u}_m(\cdot)$. Возьмём $\lambda \in \Lambda(\tilde{u}(\cdot))$. Тогда из (vi′) следует, что $\lambda \in \Lambda(\overline{u}_i(\cdot))$, $i = 1, \ldots, m$, следовательно, $\bigcap_{i=1}^m \Lambda(\overline{u}_i) \neq \varnothing$, т. е. $\mathcal{A}$ — центрированная система. По лемме П 1.8 о центрированной системе существует такое $\overline{\lambda} = (\overline{\mu}_0, \overline{\mu}) \in \mathbb{S}^n$, которое принадлежит всем элементам из $\mathcal{A}$, т. е. для любого набора $\overline{u}(\cdot)$ с данным $\overline{\lambda}$ выполняются равенства (vi′). В частности, для любой функции $u(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ справедливо равенство

$$\overline{\mu}_0 \int_{t_0}^{t_1} \Big(\widehat{f}_x(t) \cdot y(t, u(\cdot)) + \widehat{f}_u(t) \cdot u(t)\Big)\, dt + \overline{\mu} \cdot y(t_1, u(\cdot)) = 0. \quad \text{(vii′)}$$

Пусть $p_1(\cdot)$ — решение задачи Коши:

$$\dot{p} = -p\widehat{\varphi}_x(t) + \overline{\mu}_0 \widehat{f}_x(t), \quad p(t_1) = -\overline{\mu}. \quad \text{(viii′)}$$

По теореме П 1.7 такое решение существует, и это доказывает (2a) (обозначая $p_1(\cdot)$ через $p(\cdot)$) с $\lambda_0 = \overline{\mu}_0$. Подставляя в (vii′) вместо функции $\overline{\mu}_0 \widehat{f}_x(\cdot)$ ее выражение из (viii′), а затем вместо функции $\widehat{\varphi}_x(\cdot) y(\cdot, u(\cdot))$ ее выражение из (∗∗) в лемме П 1.6 и учитывая, что $y(t_0, u(\cdot)) = 0$ и $p_1(t_1) = -\overline{\mu}$, приходим точно так же, как и выше (см. вывод формулы (iv′)), к равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} (-p_1(t)\widehat{\varphi}_u(t) + \overline{\mu}_0 \widehat{f}_u(t)) \cdot u(t)\, dt = 0.$$

Так как это равенство справедливо для любого

$$u(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r),$$

то, как и раньше, беря

$$u(\cdot) = (-p_1(\cdot)\widehat{\varphi}_u(\cdot) + \overline{\mu}_0 \widehat{f}_u(\cdot))^T,$$

получаем, что

$$p_1(\cdot)\widehat{\varphi}_u(\cdot) = \overline{\mu}_0 \widehat{f}_u(\cdot),$$

т. е. выполняется равенство ($2b$) (обозначая $p_1(\cdot)$ через $p(\cdot)$) с $\lambda_0 = \overline{\mu}_0$.

(c) **Принцип максимума Понтрягина**. Снова рассматриваем два случая.

1. *Случай свободного правого конца.* Из теоремы П1.1 и условий теоремы следует, что подынтегральная функция кусочно непрерывна. Пусть пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — сильный минимум в задаче (P). Построим семейство вариаций этой пары. Обозначим через $T = T(\widehat{u}(\cdot))$ множество точек непрерывности $\widehat{u}(\cdot)$. Пусть $\alpha \geqslant 0$, $\tau \in (t_0, t_1) \cap T$ и $v \in U$. Положим $u_\alpha(t; \tau, v) = \widehat{u}(t)$, если $t \notin [\tau, \tau + \alpha]$ и $u_\alpha(t) = v$, если $t \in [\tau, \tau + \alpha]$, причем α столь мало, что $[\tau, \tau + \alpha] \subset T$. Значения $u_\alpha(\cdot; \tau, v)$ на концах отрезка $[\tau, \tau + \alpha]$ могут быть любыми. Согласно лемме П2.3 при $N = 1$ и условиям теоремы для достаточно малых $\alpha \geqslant 0$ существует решение $x_\alpha(\cdot; \tau, v)$ задачи Коши $\dot{x} = \varphi(t, x, u_\alpha(t; \tau, v))$, $x(t_0) = x_0$ и тем самым пара $(x_\alpha(\cdot; \tau, v), u_\alpha(\cdot; \tau, v))$ допустима в задаче (P). Можно считать, что для таких α кривая $\{(t, x_\alpha(t; \tau, v)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ принадлежит G, и для них положим $g_0(\alpha; \tau, v) = J(x_\alpha(\cdot; \tau, v), u_\alpha(\cdot; \tau, v))$. Из оптимальности процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ следует, что функция g_0 достигает минимума в нуле. Согласно следствию из леммы П2.3 функция g_0 дифференцируема при достаточно малых $\alpha \geqslant 0$ и тем самым ее производная справа в нуле должна быть неотрицательной, т. е. согласно формуле (***) из этого следствия

$$\Delta_{\tau v} f + \int\limits_{\tau}^{t_1} \widehat{f}_x(t) \cdot y_{\tau v}(t)\, dt \geqslant 0, \qquad \text{(i}''\text{)}$$

где $\Delta_{\tau v} f = f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - f(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau))$ и $y_{\tau v}(\cdot)$ — производная в нуле функции $\alpha \to x_\alpha(\cdot; \tau, v)$.

Пусть $p_0(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\dot{p} = -p\widehat{\varphi}_x(t) + \widehat{f}_x(t), \quad p(t_1) = 0. \tag{ii$''$}$$

Такое решение существует согласно теореме П 1.7, и поэтому доказаны соотношения (3a) (с заменой $p_0(\cdot)$ на $p(\cdot)$) с $\lambda_0 = 1$ и (3c).

Докажем (3b). Для $t \in [\tau, t_1]$ имеем ($y_{\tau v}(\cdot)$ — решение уравнения (**) в лемме П 2.3)

$$\widehat{f}_x(t) \cdot y_{\tau v}(t) \overset{(\mathrm{ii}'')}{=} p_0(t)\widehat{\varphi}_x(t) y_{\tau v}(t) + \dot{p}_0(t) \cdot y_{\tau v}(t) \overset{(**)}{=}$$
$$\overset{(**)}{=} p_0(t) \cdot \dot{y}_{\tau v}(t) + \dot{p}_0(t) \cdot y_{\tau v}(t) = \frac{d}{dt}(p_0(t) \cdot y_{\tau v}(t)).$$

Интегрируя обе части этого равенства на отрезке $[\tau, t_1]$ и подставляя в (i$''$), получим

$$0 \overset{(\mathrm{i}'')}{\leqslant} \Delta_{\tau v} f + p_0(t_1) \cdot y_{\tau v}(t_1) - p_0(\tau) \cdot y_{\tau v}(\tau) \overset{(\mathrm{ii}''),(**)}{=}$$
$$\overset{(\mathrm{ii}''),(**)}{=} \Delta_{\tau v} f - p_0(\tau) \cdot \Delta_{\tau v} \varphi.$$

Так как это верно для любых $\tau \in T$ и $v \in U$, то доказано (3b) (снова заменяя $p_0(\cdot)$ на $p(\cdot)$) с $\lambda_0 = 1$.

2. *Случай закрепленных концов.* Пусть $u_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ — функция, построенная в лемме П 2.3. Согласно этой лемме, следствию из нее и условиям теоремы при всех малых $\overline{\alpha} \geqslant 0$ существует $x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ — решение задачи Коши $\dot{x} = \varphi(t, x, u_{\overline{\alpha}}(t; \mathcal{N}))$, $x(t_0) = x_0$, функция $\overline{\alpha} \to g_0(\overline{\alpha}; \mathcal{N}) = J(x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), u_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}))$ и отображение $\overline{\alpha} \to x_{\overline{\alpha}}(t_1; \mathcal{N})$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля, пересеченной с $\mathbb{R}^N_+$. (Если в точке $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N_+$ i-я координата равна нулю, то соответствующая производная понимается как производная справа.) Рассмотрим на этом множестве задачу:

$$g_0(\overline{\alpha}; \mathcal{N}) \to \mathrm{extr}, \quad g_i(\overline{\alpha}; \mathcal{N}) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \overline{\alpha} \in \mathbb{R}^N_+,$$

где $g_i(\overline{\alpha};\mathcal{N})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — компоненты вектора $x_{\overline{\alpha}}(t_1;\mathcal{N}) - x_1$. Ясно, что точка $\overline{\alpha} = 0$ является локальным экстремумом в этой задаче. Согласно следствию 1 из теоремы П 2.2 существует ненулевой набор множителей Лагранжа $\lambda = \lambda(\mathcal{N}) = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mu_0 \geqslant 0$ такой, что $\sum_{i=0}^{n} \mu_i g_i'(0+0;\mathcal{N}) \geqslant 0$, или что то же (согласно следствию из леммы П 2.3),

$$\mu_0 \left(\Delta_{\tau v} f + \int\limits_{\tau_i}^{t_1} \widehat{f}_x(t) \cdot y_{\tau_i v_i}(t)\, dt \right) + \mu \cdot y_{\tau_i v_i}(t_1) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Дословное повторение рассуждений, связанных с применением леммы о центрированной системе из доказательства уравнения Эйлера–Лагранжа для задачи Лагранжа, приводит к тому, что существует такой ненулевой набор $\overline{\lambda} = (\overline{\mu}_0, \overline{\mu})$, где $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n)$, что для любой пары $(\tau, v) \in T \times U$ справедливо неравенство

$$\overline{\mu}_0 \left(\Delta_{\tau v} f + \int\limits_{\tau}^{t_1} \widehat{f}_x(t) \cdot y_{\tau v}(t)\, dt \right) + \overline{\mu} \cdot y_{\tau v}(t_1) \geqslant 0. \qquad \text{(iii}''\text{)}$$

Пусть $p_1(\cdot)$ — решение задачи Коши:

$$-\dot{p} = p\widehat{\varphi}_x(t) - \overline{\mu}_0 \widehat{f}_x(t), \quad p(t_1) = -\overline{\mu}.$$

Такое решение существует, и поэтому (3a) доказано (с заменой $p_1(\cdot)$ на $p(\cdot)$ и $\overline{\mu}_0$ на λ_0).

Теперь, повторяя рассуждения, проведённые для случая свободного конца, получаем, что для всех для $t \in [\tau, t_1]$ справедливо равенство $\overline{\mu}_0 \widehat{f}_x(t) \cdot y_{\tau v}(t) = \frac{d}{dt}(p_1(t) \cdot y_{\tau v}(t))$, интегрируя которое и подставляя в (iii$''$), приходим к неравенству $\overline{\mu}_0 \Delta_{\tau v} f - p_1(\tau) \cdot \Delta_{\tau v}\varphi \geqslant 0$, которое и есть соотношение (3b) (снова с заменой $p_1(\cdot)$ на $p(\cdot)$ и $\overline{\mu}_0$ на λ_0). □

§ 5. Доказательство принципа максимума для общей задачи оптимального управления

Пусть, по-прежнему, $[t_0, t_1]$ — заданный отрезок числовой прямой, даны функции $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$, $\varphi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^n$, $\psi_0\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\psi_1\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{k_1}$, $\psi_2\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{k_2}$ и многозначное отображение U, сопоставляющее каждому $t \in$ $\in [t_0, t_1]$ некоторое подмножество $U(t)\subseteq\mathbb{R}^r$. Задача оптимального управления, которую мы рассматриваем здесь, имеет вид:

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt + \psi_0(x(t_0), x(t_1)) \to \min,$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u),\ \ u(t)\in U(t) \quad \text{для п. в. } t\in[t_0, t_1], \qquad (\overline{P})$$

$$\psi_1(x(t_0), x(t_1)) \leqslant 0, \quad \psi_2(x(t_0), x(t_1)) = 0,$$

где ограничения, задаваемые отображениями ψ_1 и ψ_2, означают (в координатной форме), что имеются k_1 ограничений типа неравенств и k_2 ограничений типа равенств.

Обозначим через $AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ совокупность всех абсолютно непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и через $L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ пространство всех измеримых существенно ограниченных на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^r$.

Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть *допустимым процессом* в задаче $(\overline{P})$, если

$$(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r),$$

равенство $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$ и включение $u(t)\in U(t)$ выполняются для п. в. $t\in[t_0, t_1]$, для концевых значений $(x(t_0), x(t_1))$ выполняются ограничения

$$\psi_1(x(t_0), x(t_1)) \leqslant 0, \quad \psi_2(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

и минимизируемый функционал конечен.

Введем в $L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ метрику $d(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \operatorname{mes}\{t \in$ $\in [t_0, t_1] \mid u_1(t)\neq u_2(t)\}$, где mes обозначает меру Лебега.

Допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ называется *локальным понтрягинским минимумом*, если для каждого достаточно большого $c > 0$ найдется такое $\delta = \delta(c) > 0$, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которого

$$|(x(t_0), x(t_1)) - (\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))| < \delta,$$
$$d(u(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) < \delta, \quad |u(t)| \leqslant c \text{ для п. в. } t,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)).$$

Очевидно, что понтрягинский минимум слабее сильного минимума в том смысле, что если $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — сильный минимум в $(\overline{P})$ (т. е. из условия $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} < \delta$, справедливого для некоторого $\delta > 0$ и всех допустимых пар $(x(\cdot), u(\cdot))$, следует, что $J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$), то $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — понтрягинский минимум в данной задаче. Более того, следующий пример показывает, что понтрягинский минимум не обязан быть даже слабым минимумом. Действительно, рассмотрим задачу:

$$\int_0^{t_1} (u^2(t) - x^2(t))\, dt \to \min, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(t_1) = 0.$$

Если $t_1 \leqslant \pi$, то нулевая пара $(0, 0)$ является сильным локальным минимумом, а если $t_1 > \pi$, то она не является слабым минимумом, так как на интервале $(0, t_1)$ имеются сопряженные точки (см. [АТФ]). Но в то же время эта пара доставляет строгий понтрягинский минимум в рассматриваемой задаче для любых $t_1 > 0$ (см. теорему 3 ниже или [Ар2]).

Далее нам понадобится следующее определение: многозначное отображение U будем называть измеримым, если существует такая последовательность измеримых функций $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, что для п. в. $t \in [t_0, t_1]$ последовательность $\{u_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ лежит в $U(t)$ и всюду плотна в этом множестве. Хорошо известны различные критерии измеримости многозначных отображений (см., например, [Вар]).

Перейдем к формулировке теоремы. Пусть

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_i \in (\mathbb{R}^{k_i})', \quad i = 1, 2, \quad p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)').$$

Функция Лагранжа задачи $(\overline{P})$ такова:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \lambda) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), \lambda_0)\, dt + l(x(t_0), x(t_1), \lambda),$$

где

$$L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda_0) = \lambda_0 f(t, x, u) + p \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u)),$$

$$l(x_0, x_1, \lambda) = \lambda_0 \psi_0(x_0, x_1) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \cdot \psi_i(x_0, x_1)$$

и $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$.

Функция Понтрягина имеет вид

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) = p \cdot \varphi(t, x, u) - \lambda_0 f(t, x, u).$$

Теорема 2. (Необходимые условия минимума в задаче $(\overline{P})$). *Пусть $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — локальный понтрягинский минимум в задаче $(\overline{P})$ и выполнены следующие предположения: для п. в. t функции $(x, u) \to f(t, x, u)$ и $(x, u) \to \varphi(t, x, u)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x; для любых (x, u) функции $t \to f(t, x, u)$, $t \to \varphi(t, x, u)$ измеримы; функции f, φ и их частные производные по x ограничены на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$; функции ψ_i, $i = 0, 1, 2$ непрерывны в окрестности точки $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$ и дифференцируемы в этой точке; многозначное отображение U измеримо.*

Тогда найдутся ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$ и вектор-функция $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)')$ такие, что выполнены:

(*a*) *уравнение Эйлера:*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ \dot{p}(t) = -p(t)\widehat{\varphi}_x(t) + \lambda_0 \widehat{f}_x(t);$$

(b) *условия трансверсальности*:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \widehat{l}_{x(t_i)}, \ i = 0,1 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p(t_i) = (-1)^i l_{x_i}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda), \qquad i = 0,1;$$

(c) *условие минимума*:

$$\min_{v \in U(t)} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), v, p(t), \lambda_0) = L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda_0)$$

для п. в. $t \in [t_0, t_1]$
или, что то же самое, условие максимума:

$$\max_{v \in U(t)} H(t, \widehat{x}(t), v, p(t), \lambda_0) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda_0)$$

для п. в. $t \in [t_0, t_1]$;

(d) *условие дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_1 \cdot \psi_1(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) = 0.$$

(e) *Если, кроме того, функции f и φ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных, $U(t) \equiv U$ (т.е. отображение $U(\cdot)$ постоянно) и для допустимого процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ и множителей Лагранжа $\lambda, p(\cdot)$ выполнены условия (a)–(d), то для п. в. $t \in [t_0, t_1]$ справедливо равенство*:

$$\frac{d}{dt}\widehat{H}(t) = H_t(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda_0).$$

В частности, если рассматриваемая задача автономна (т.е. f и φ не зависят явно от t), то функция Понтрягина H постоянна вдоль кривой $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), p(\cdot))$.

Замечание. Если в точке $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$ концевые ограничения регулярны, т. е. $\operatorname{rank} \psi_2'(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) = k_2$ и $\exists\, \eta \in \operatorname{Ker} \psi_2'(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$ такое, что $\psi_{1j}'(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) \cdot \eta > 0$ для всех j, для которых $\psi_{1j}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) = 0$, ($\psi_i'(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$ — производные отображений $\psi_i = (\psi_{i1}, \ldots, \psi_{ik_i})^T$, $i = 1, 2$, в точке $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$, а $\psi_{1j}'(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$, $1 \leqslant j \leqslant k_1$ — строки матрицы $\psi_1'(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1))$), то в сформулированной теореме условия $\lambda \neq 0$ можно заменить более сильным *условием нетривиальности*:

$$\lambda_0 + |p(t)| \neq 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Это несложное следствие соотношений (a)–(d) и того, что $\lambda \neq 0$.

Доказательство теоремы разобьем на четыре этапа.

1. *Конечномерная аппроксимация. N-задача.* Предположим сначала, что множества $U(t)$ равномерно ограничены для п. в. t. Пусть $\delta > 0$ соответствует процессу $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ в определении понтрягинского минимума. Как известно (см., например, [Нат]) почти все точки измеримой функции являются ее точками Лебега. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда согласно лемме П 2.5 существует такое измеримое множество $\widetilde{M}_\varepsilon \subset [t_0, t_1]$, что $(t_1 - t_0) - \varepsilon \leqslant \operatorname{mes} \widetilde{M}_\varepsilon$, функции $\widehat{u}$, u_i, φ и f непрерывны на множестве $\widetilde{M}_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ и для каждого x все точки из $\widetilde{M}_\varepsilon$ являются точками Лебега функций $t \to \varphi(t, x, \widehat{u}(t))$, $t \to \varphi(t, x, u_i(t))$ и аналогично для функции f.[1] Далее, из теоремы Линдлефа (см. [Нат], с. 53)[2] следует, что существует подмножество $M_\varepsilon \subset \widetilde{M}_\varepsilon$, полученное из $\widetilde{M}_\varepsilon$ отбрасыванием не более, чем счетного множества точек так, что каждая точка из M_ε является точкой конденсации. Таким образом, множество M_ε не содержит изолированных точек и $(t_1 - t_0) - \varepsilon \leqslant \operatorname{mes} M_\varepsilon$.

---

[1] Напомним, что точка x_0 называется точкой Лебега функции $x \to g(x)$, если в этой точке выполняется условие: $\lim_{h \to 0} h^{-1} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |g(x) - g(x_0)|\, dx = 0$.

[2] Теорема утверждает, что у несчетного множества существует точка конденсации, т. е. точка, каждая окрестность которой содержит несчетное подмножество данного множества. Отсюда легко вытекает, что из множества можно удалить такое его счетное подмножество, что каждая точка дополнения будет точкой конденсации полученного множества.

Выберем во множестве M_ε счетное всюду плотное множество различных точек $\{t_i\}, i = 2, 3, \ldots$. Зафиксируем натуральное N такое, что $N^{-2} < \delta/2$. В силу свойств множества M_ε для любой точки t_i существует последовательность различных точек из M_ε, которая сходится к t_i. Поэтому для каждого натурального $j \leqslant N$ существуют такие точки $t_{j,1}(N) < \ldots < t_{j,N+1}(N)$ из M_ε, что

$$\begin{gathered} t_j \in [t_{j,1}(N), t_{j,N+1}(N)], \\ |t_{j,N+1}(N) - t_{j,1}(N)| < N^{-1} \ \forall j \leqslant N \end{gathered} \tag{5.1}$$

и

$$[t_{j,1}(N), t_{j,N+1}(N)] \cap [t_{j',1}(N), t_{j',N+1}(N)] = \varnothing \quad \forall j \neq j'.$$

Обозначим через Ξ подмножество пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ квадратных $N \times N$ матриц $\xi = (\xi_{j,p})$, которое состоит из тех матриц $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, элементы которых удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \xi_{j,p} \leqslant c(N)$. Здесь

$$c(N) = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant s,\, i \leqslant N} (t_{s,i+1}(N) - t_{s,i}(N)) > 0.$$

Каждой матрице $\xi \in \Xi$ сопоставим допустимое управление по формуле:

$$u(t;\xi) = \begin{cases} u_p(t), & \text{если } t \in (t_{j,p}(N),\, t_{j,p}(N) + \xi_{j,p}),\ 1 \leqslant j, p \leqslant N; \\ \widehat{u}(t) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Множество управлений такого вида обозначим через $\mathcal{U}(\Xi)$.

Теперь для фиксированных выше $\varepsilon > 0$ и N рассмотрим задачу, полученную из задачи $(\overline{P})$ заменой множества управлений $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}(\Xi)$. Эту задачу будем называть N-*задачей*. Выпишем ее в явном виде. Рассмотрим для этого задачу Коши:

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t;\xi)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.2}$$

где $\xi \in \Xi$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Из стандартных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений (с учетом леммы П 2.4) получаем, что для всех $\xi \in \Xi$, близких к нулю, и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, близких к $\widehat{x}(t_0)$, существует единственное решение задачи (6.2), определенное на всем отрезке $[t_0, t_1]$. Обозначим его через $X(t; x_0, \xi)$.

Таким образом, N-задача имеет вид:

$$\Psi_0(x_0,\xi) \to \min, \quad \Psi_1(x_0,\xi) \leqslant 0, \quad \Psi_2(x_0,\xi) = 0, \tag{6.3}$$

где

$$\Psi_0(x_0,\xi) = \psi_0(x_0, X(t_1;x_0,\xi)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, X(t;x_0,\xi), u(t,\xi))\,dt,$$

$$\Psi_1(x_0,\xi) = \psi_1(x_0, X(t_1;x_0,\xi)),$$
$$\Psi_2(x_0,\xi) = \psi_2(x_0, X(t_1;x_0,\xi))$$

и x_0 пробегает некоторую окрестность $\widehat{x}(t_0)$, а ξ — некоторую окрестность нуля в Ξ.

2. *Необходимые условия минимума в N-задаче.*

Покажем, что задача (6.3) удовлетворяет условиям следствия 1 теоремы П 2.2. Действительно, в силу стандартных утверждений теории обыкновенных дифференциальных уравнений существует такое $\gamma > 0$, что отображение

$$(t;x_0,\xi) \to X(t;x_0,\xi)$$

непрерывно на множестве

$$[t_0,t_1] \times (\widehat{x}(t_0) + \gamma B_1) \times (\gamma B_2 \bigcap \Xi),$$

где B_1 и B_2 — единичные шары соответственно в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Более того, для произвольного заданного $t \in \in [t_0,t_1]$ отображение $X(t;\cdot,\cdot)$ дифференцируемо относительно множества $(\widehat{x}(t_0)+\gamma B_1)\times(\gamma B_2 \cap \Xi)$ по (x_0,ξ) в точке $(\widehat{x}(t_0),0)$, т. е. для любых

$$x_0 \in \widehat{x}(t_0) + \gamma B_1, \quad \xi \in \gamma B_2 \cap \Xi, \quad t \in [t_0,t_1]$$

справедливо представление:

$$\begin{aligned} X(t;x_0,\xi) = & X(t;\widehat{x}(t_0),0) + \\ & + X_{x_0}(t)(x_0 - \widehat{x}(t_0)) + X_\xi(t)\xi + o(|\widehat{x}(t_0) - x_0| + \|\xi\|). \end{aligned}$$

Здесь $X_{x_0}(t)$ и $X_\xi(t)$ — соответствующие линейные операторы.[1]

[1] Отметим, что $X_\xi(t)$ является всего лишь односторонней производной

В силу леммы П 2.6
$$X_{x_0}(t) = \Phi(t),$$
где Φ — решение (фундаментальная матрица) матричного уравнения
$$\dot{\Phi}(t) = \varphi_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = \mathrm{Id}$$
и Id — единичная матрица.

Из сказанного следует, что N-задача удовлетворяет всем предположениям следствия 1 теоремы П 2.2. Согласно этому следствию существует такой ненулевой набор множителей Лагранжа
$$\lambda_N = (\lambda_N^0, \lambda_N^1, \lambda_N^2),$$
что
$$\lambda_N^0 \geqslant 0, \quad \lambda_N^1 \geqslant 0, \quad \lambda_N^1 \cdot \Psi_1(\widehat{x}(t_0), 0) = 0 \tag{6.4}$$
и для функции Лагранжа
$$\mathcal{L}(x_0, \xi, \lambda_N) = \lambda_N^0 \Psi_0(x_0, \xi) + \lambda_N^1 \cdot \Psi_1(x_0, \xi) + \lambda_N^2 \cdot \Psi_2(x_0, \xi)$$
задачи (6.3) выполняются условия:
$$\mathcal{L}_{x_0}(\widehat{x}(t_0), 0, \lambda_N) = 0, \tag{6.5}$$
$$\mathcal{L}_{\xi_{j,p}}(\widehat{x}(t_0), 0, \lambda_N) \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j, p \leqslant N. \tag{6.6}$$
Будем далее считать, что
$$|\lambda_N| = \lambda_N^0 + |\lambda_N^1| + |\lambda_N^2| = 1.$$

Обозначим через p_N решение задачи Коши
$$\dot{p} = -p\widehat{\varphi}_x(t) + \lambda_N^0 \widehat{f}_x(t), \quad p(t_0) = l_{x_0}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N). \tag{6.7}$$
Тогда по формуле для решения линейного дифференциального уравнения имеем (см. теорему П 1.7)
$$p_N(t_1) = \\ = \left(l_{x_0}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N) + \lambda_N^0 \int_{t_0}^{t_1} \widehat{f}_x(t)\Phi(t)\, dt \right) \Phi^{-1}(t_1). \tag{6.8}$$

и функция X не обязана быть дифференцируемой (даже в указанном смысле) в близких точках.

Расшифруем теперь условия (6.5) и (6.6). Равенство (6.5) означает, что

$$0 = l_{x_0}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N) + l_{x_1}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N) X_{x_0}(t_1) + \\ + \lambda_N^0 \int_{t_0}^{t_1} \widehat{f}_x(t) X_{x_0}(t)\, dt = l_{x_0}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N) + \\ + l_{x_1}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N)\Phi(t_1) + \lambda_N^0 \int_{t_0}^{t_1} \widehat{f}_x(t)\Phi(t)\, dt.$$

Из этих соотношений, используя (6.8), получаем:

$$-l_{x_1}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N) = p_N(t_1). \tag{6.9}$$

Таким образом, условия трансверсальности (b) доказаны.

Перейдем к расшифровке соотношений (6.6). Фиксируем индексы j и p. Пусть матрица $\xi \in \Xi$ такова, что единственным ее ненулевым элементом является $\xi_{j,p} > 0$. Обозначим

$$\Delta X(t, \xi) = X(t, \widehat{x}(t_0), \xi) - X(t, \widehat{x}(t_0), 0)$$

и

$$\Delta f(t, \xi) = f(t, X(t, \widehat{x}(t_0), \xi), u(t, \xi)) - f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)).$$

Тогда имеем

$$0 \geqslant -\mathcal{L}_{\xi_{j,p}}(\widehat{x}(t_0), 0, \lambda_N) = -l_{x_1}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_N) \cdot X_{\xi_{j,p}}(t_1) - \\ - \lambda_N^0 \frac{\partial}{\partial \xi_{j,p}} \left(\int_{t_0}^{t_1} (f(t, X(t, \widehat{x}(t_0), \xi), u(t, \xi))\, dt \right) \Big|_{\xi=0} \overset{(1)}{=} \\ \overset{(1)}{=} \xi_{j,p}^{-1} \left(p_N(t_1) \cdot \Delta X(t_1, \xi) - \lambda_N^0 \int_{t_0}^{t_1} \Delta f(t, \xi)\, dt \right) + \kappa(\xi) \overset{(2)}{=} \\ \overset{(2)}{=} \xi_{j,p}^{-1} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \Big(p_N(t) \cdot \Delta X(t, \xi) \Big) - \lambda_N^0 \Delta f(t, \xi) \right) dt + \kappa(\xi),$$

где $\kappa(\xi) \to 0$, при $\xi_{j,p} \to 0$.

Здесь равенство $\overset{(1)}{=}$ вытекает из (6.9) и определения производной по переменной $\xi_{j,p}$, а равенство $\overset{(2)}{=}$ следует из формулы Ньютона-Лейбница и того, что $\Delta X(0,\xi) \equiv 0$.

Далее,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\Big(p_N(t)\cdot \Delta X(t,\xi)\Big) - \lambda_N^0 \Delta f(t,\xi)\right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\dot{p}_N(t)\cdot \Delta X(t,\xi) + p_N(t)\cdot(\varphi(t, X(t,, \widehat{x}(t_0)),\xi), u(t,\xi)) -$$

$$- \varphi(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))) - \lambda_N^0 \Delta f(t,\xi))\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\dot{p}_N(t)\cdot \Delta X(t,\xi) + H(t, X(t,\xi), u(t,\xi), p_N(t), \lambda_N^0) -$$

$$- H(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t), p_N(t), \lambda_N^0))\, dt \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{p}_N(t)\cdot \Delta X(t,\xi) + H_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t), p_N(t), \lambda_N^0)\cdot \Delta X(t,\xi) +$$

$$+ H(t,\widehat{x}(t), u(t,\xi), p_N(t), \lambda_N^0) -$$

$$- H(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t), \psi_N(t), \lambda_N^0))\, dt + o(\xi_{j,p}) \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \int_{t_0}^{t_1} (H(t,\widehat{x}(t), u(t,\xi), p_N(t), \lambda_N^0) -$$

$$- H(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t), p_N(t), \lambda_N^0))\, dt + o(\xi_{j,p}).$$

Равенство $\overset{(3)}{=}$ верно в силу того, что

$$\int_{t_0}^{t_1} H_x(t,\widehat{x}(t), u(t,\xi), p_N(t), \lambda_N^0)\cdot \Delta X(t,\xi)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} H_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t), p_N(t), \lambda_N^0)\cdot \Delta X(t,\xi)\, dt + o(\xi_{j,p}),$$

а $\stackrel{(4)}{=}$ вытекает из того, что по построению вектор-функция $p_N(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (6.7).

Таким образом, мы получили, что

$$0 \geqslant \xi_{j,p}^{-1} \left(\int_{t_0}^{t_1} (H(t, \widehat{x}(t), u(t,\xi), p_N(t), \lambda_N^0 \right) - \\ - H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p_N(t), \lambda_N^0))\, dt + o(\xi_{j,p})).$$

Но из определения управления $u(\cdot, \xi)$ следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (H(t, \widehat{x}(t), u(t,\xi), p_N(t), \lambda_N^0) - H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p_N(t), \lambda_N^0))\, dt = \\ = \xi_{j,p}\Big(H(t_{j,p}(N), \widehat{x}(t_{j,p}(N)), u_p(t_{j,p}(N)), p_N(t_{j,p}(N)), \lambda_N^0) - \\ - H(t_{j,p}(N), \widehat{x}(t_{j,p}(N)), \widehat{u}(t_{j,p}(N)), p_N(t_{j,p}(N)), \lambda_N^0)\Big) + o(\xi_{j,p}),$$

так как по построению каждая из точек $t_{j,p}(N)$ является точкой Лебега каждой из функций

$$H_p(t) = H(t, \widehat{x}(t), u_p(t), p_N(t), \lambda_N^0)$$

и

$$H(t) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p_N(t), \lambda_N^0).$$

Переходя к пределу при $\xi_{j,p} \to 0$, получаем, что

$$H(t_{j,p}(N), \widehat{x}(t_{j,p}(N)), \widehat{u}(t_{j,p}(N)), p_N(t_{j,p}(N)), \lambda_N^0) \geqslant \\ \geqslant H(t_{j,p}(N), \widehat{x}(t_{j,p}(N)), u_p(t_{j,p}(N)), p_N(t_{j,p}(N)), \lambda_N^0), \\ \forall j, p \leqslant N. \quad (6.10)$$

3. *Предельный переход.*

Напомним, что $\varepsilon > 0$ фиксировано. По построению векторы λ_N являются единичными, а векторы $p_N(t_1)$ ограничены (в силу (6.9)), и поэтому можно считать, что $\lambda_N \to \lambda_\varepsilon$ и $p_N(t_1) \to \to p_\varepsilon(t_1)$ при $N \to \infty$. Из последнего и свойств решений линейных дифференциальных уравнений следует, что $p_N(\cdot)$ сходится при $N \to \infty$ равномерно на $[t_0, t_1]$ к функции $p_\varepsilon(\cdot)$, которая удовлетворяет соотношениям (см. (6.7))

$$\begin{aligned} \dot p &= -p\widehat{\varphi}_x(t) + \lambda^0_\varepsilon \widehat{f}_x(t), \\ p(t_0) &= l_{x_0}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_\varepsilon) \end{aligned} \tag{6.11}$$

и

$$-l_{x_1}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda_\varepsilon) = p_\varepsilon(t_1). \tag{6.12}$$

Зафиксируем индексы j, p. В силу (6.1) имеем:

$$t_{j,p}(N) \to t_j,\ N \to \infty.$$

Переходя в (6.10) к пределу при $N \to \infty$ и используя непрерывность соответствующих функций на M_ε, получаем:

$$H(t_j, \widehat{x}(t_j), \widehat{u}(t_j), p_\varepsilon(t_j), \lambda^0_\varepsilon) \geqslant \\ \geqslant H(t_j, \widehat{x}(t_j), u_p(t_j), p_\varepsilon(t_j), \lambda^0_\varepsilon), \quad \forall j, p.$$

По построению для любого фиксированного j последовательность $\{u_p(t_j)\}$ всюду плотна во множестве $U(t_j)$. Поэтому, используя непрерывность по u функций φ и f, получаем:

$$H(t_j, \widehat{x}(t_j), \widehat{u}(t_j), p_\varepsilon(t_j), \lambda^0_\varepsilon) \geqslant \\ \geqslant H(t_j, \widehat{x}(t_j), u, p_\varepsilon(t_j), \lambda^0_\varepsilon), \quad \forall u \in U(t_j).$$

В то же время последовательность $\{t_j\}$ всюду плотна в M_ε. Поэтому, переходя в полученном неравенстве к пределу при $j \to \to \infty$, имеем:

$$H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p_\varepsilon(t), \lambda^0_\varepsilon) \geqslant H(t, \widehat{x}(t), u, p_\varepsilon(t), \lambda^0_\varepsilon), \\ \forall u \in U(t) \ \text{ и для п. в. } t \in M_\varepsilon.$$

Осуществляя аналогичным образом еще один предельный переход в (6.11) и (6.12) при $\varepsilon \to 0$, получаем соотношения (a)–(d).

Проведенные выше рассуждения были сделаны в предположении, что множества $U(t)$ равномерно ограничены для п. в. t. В общем случае надо рассмотреть пересечение $U(t)$ с шаром достаточно большого радиуса, а затем в полученных соотношениях перейти к пределу при стремлении радиуса этого шара к бесконечности.

4. *Доказательство условия* (e).

Наряду с задачей $(\overline{P})$ рассмотрим такую задачу:

$$J(x(\cdot), x^{n+1}(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f(x^{n+1}(t), x(t), u(t))(v(t)+1)\,dt + \psi_0(x(t_0), x(t_1)) \to \min,$$
$$\dot{x} = (v+1)\varphi(x^{n+1}, x, u), \quad \dot{x}^{n+1} = v+1,$$
$$\psi_1(x(t_0), x(t_1)) \leqslant 0, \quad \psi_2(x(t_0), x(t_1)) = 0,$$
$$x^{n+1}(t_0) = t_0, \quad x^{n+1}(t_1) = t_1,$$
$$u(t) \in U(t), \quad |v(t)| \leqslant 1/2 \text{ для п. в. } t,$$

которую будем называть v-задачей. Управлением в v-задаче является пара $(u(\cdot), v(\cdot))$, где $v(\cdot)$ — скалярная функция, а фазовая переменная $(x, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ содержит дополнительную скалярную координату x^{n+1}.

Оказывается, что исходная задача $(\overline{P})$ и v-задача эквивалентны в следующем смысле. Допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ является локальным понтрягинским минимумом в задаче $(\overline{P})$ тогда и только тогда, когда процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{x}^{n+1}(\cdot), u(\cdot), 0)$ является локальным понтрягинским минимумом в v-задаче, где $\widehat{x}^{n+1} \equiv t$. Действительно, пусть

$$(\widetilde{x}(\cdot), x^{n+1}(\cdot), \widetilde{u}(\cdot), v(\cdot))$$

— допустимый процесс в v-задаче. Тогда функция $x^{n+1}(\cdot)$ липшицева и $\dot{x}^{n+1}(t) \geqslant 1/2$ для п. в. t. Поэтому в силу теоремы об обратной функции (см. [Кл], с. 231) функция $x^{n+1}(\cdot)$ имеет обратную функцию $\chi(\cdot)$, которая тоже является липшицевой. Положим

$$x(t) = \widetilde{x}(\chi(t)), \; u(t) = \widetilde{u}(\chi(t)).$$

Непосредственно проверяется, что $(x(\cdot), u(\cdot))$ является допустимым процессом в задаче $(\overline{P})$ и

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = J(\tilde{x}(\cdot), x^{n+1}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), v(\cdot)).$$

Обратный переход от допустимого процесса задачи $(\overline{P})$ к допустимому процессу v-задачи очевиден.

В силу доказанного процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{x}^{n+1}(\cdot), u(\cdot), 0)$ является локальным понтрягинским минимумом в v-задаче. Применим к нему необходимые условия, полученные на предыдущем этапе. В силу этих условий существуют множители Лагранжа $\lambda, p(\cdot), p^{n+1}(\cdot)$, для которых имеет место (a)–(d). Из условия максимума (c) вытекает, что $p^{n+1}(t) + \widehat{H}(t) = 0$, а из уравнения Эйлера (a) — что $\dot{p}^{n+1}(t) = -\widehat{H}_t(t)$ для п. в. t. Дифференцируя первое из полученных тождеств по t и подставляя во второе, получаем (e). Теорема доказана.

В заключение кратко обсудим связь необходимых условий минимума в форме принципа максимума Понтрягина с достаточными условиями оптимальности. Если ограничиться рассмотрением классических понятий слабого и сильного минимума, то принцип максимума Понтрягина (как и другие условия первого прядка) не гарантирует, вообще говоря, существование даже слабого локального минимума. Для доказательства его существования нужно привлекать условия второго порядка. В вариационном исчислении — это отсутствие сопряженных точек, в оптимальном управлении — это положительная определенность некоторых специальных квадратичных форм. Сказанное демонстрирует задача, рассмотренная перед формулировкой теоремы 2. Детальное обсуждение условий второго порядка (как необходимых, так и достаточных) выходит за рамки данной книги, и мы отсылаем читателя к книгам [ИТ] и [АТФ].

В то же время рассмотрение определенного выше понтрягинского минимума приводит к интересному эффекту. А именно, некоторое усиление условия (c) в теореме 2 дает достаточные условия локального понтрягинского минимума. Для простоты формулировок будем предполагать, что множества $U(t) \subset \mathbb{R}^r$ ограничены равномерно по $t \in [t_0, t_1]$ и имеют вид:

$$U(t) = \{u \in \mathbb{R}^r \mid R(u,t) \leqslant 0,\ S(u,t) = 0\},\ \forall t \in [t_0, t_1],$$

где отображения $R\colon \mathbb{R}^r \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $S\colon \mathbb{R}^r \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{m_2}$ непрерывны по совокупности переменных, дважды непрерывно дифференцируемы по u и удовлетворяют следующим условиям регулярности: для каждого $t \in [t_0, t_1]$ и $u \in U(t)$

$$\operatorname{rank} S'_u(u,t) = m_2$$

и

$$\exists\ a(u,t) \in \operatorname{Ker} S'_u(u,t) \ \text{такое, что}\ R'_{uj}(u,t) \cdot a(u,t) > 0$$
$$\text{для всех } j,\ \text{для которых}\ R_j(u,t) = 0,$$

($R'_u(u,t)$ и $S'_u(u,t)$ — производные по u отображений $R = (R_1, \ldots, R_{m_2})^T$ и $S = (S_1, \ldots, S_{m_1})^T$ в точке (u,t), а $R'_{uj}(u,t)$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$ — строки матрицы $R'_u(u,t)$). Кроме того, будем предполагать, что в задаче фиксирован левый конец. Другими словами, рассматривается следующая задача

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \psi_0(x(t_1)) \to \min, \qquad (\overline{P}_1)$$

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varphi(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0, \\ &\psi_1(x(t_1)) \leqslant 0, \quad \psi_2(x(t_1)) = 0, \\ &u(t) \in U(t) \ \text{для п. в.}\ t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Теорема 3. (Достаточные условия понтрягинского минимума). *Пусть $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — допустимый процесс в задаче $(\overline{P}_1)$, существуют множители Лагранжа $p(\cdot)$ и λ, для которых выполнены условия (a)–(d) теормы 2, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$H(t, \widehat{u}(t), \widehat{x}(t), p(t), \lambda_0) \geqslant H(t, u, \widehat{x}(t), p(t), \lambda_0) + \varepsilon |u - \widehat{u}(t)|^2$$

для всех $u \in U(t)$ и п. в. $t \in [t_0, t_1]$.

Тогда процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ является строгим локальным понтрягинским минимумом в задаче $(\overline{P}_1)$.

Доказательство теоремы см. в [Ар2].

§ 6. Задачи с фазовыми ограничениями

В прикладных задачах часто возникает ситуация, когда помимо ограничений, присутствующих в задаче $(\overline{P})$, есть еще ограничения на фазовые переменные. Рассмотрим здесь задачу такого вида:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \psi_0(x(t_0), x(t_1)) \to \min,$$

$$\begin{gathered} \dot{x} = \varphi(t, x, u), \\ \psi_1(x(t_0), x(t_1)) \leqslant 0, \quad \psi_2(x(t_0), x(t_1)) = 0, \\ g_i(t, x(t)) \leqslant 0, \ \forall t \in [t_0, t_1], \ i = 1, \ldots, m, \\ u(t) \in U(t) \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1], \end{gathered} \qquad (\overline{P}_2)$$

где f, φ и ψ_i, $i = 0, 1, 2,$ — те же, что и в задаче $(\overline{P})$, а $g_i \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ — заданные функции.

Ограничения вида $g_i(t, x(t)) \leqslant 0 \ \forall t$ называются *фазовыми ограничениями.*

Исследование задач с фазовыми ограничениями существенно сложнее и поэтому мы ограничимся лишь формулировкой соответствующего результата — принципа максимума Понтрягина для задачи $(\overline{P}_2)$.

Теорема 4. (Принцип максимума Понтрягина в задаче с фазовыми ограничениями). *Пусть выполнены предположения теоремы 2 и функции g_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x.*

Тогда если $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — сильный локальный минимум в задаче $(\overline{P}_2)$, то найдутся вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$, вектор-функция ограниченной вариации $p(\cdot) \colon [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)'$, неотрицательные борелевские меры μ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, сосредоточенные соответственно на множествах $T_i = \{t \in [t_0, t_1] \mid g_i(t, \widehat{x}(t)) = 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, не равные одновременно нулю, такие, что выполнены:

(a) *уравнение Эйлера*:

$$p(t) = -l_{x_1}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda) + \\ + \int_t^{t_1} H_x(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau), p(\tau), \lambda_0)\, d\tau - \sum_{i=1}^{m} \int_t^{t_1} g_{ix}(\tau, \widehat{x}(\tau))\, d\mu_i;$$

(b) *условия трансверсальности*:

$$p(t_0) = l_{x_0}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1), \lambda);$$

(c) *условие максимума*:

$$\max_{u \in U(t)} H(t, \widehat{x}(t), u, p(t), \lambda_0) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t), \lambda_0)$$

для п. в. $t \in [t_0, t_1]$;

(d) *условие дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_1 \cdot \psi_1(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) = 0.$$

(e) *Если, кроме того, функции* f, φ *и* g_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, *непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных,* $U(t) \equiv U$ *и для допустимого процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *и множителей Лагранжа* $\lambda, p(\cdot)$ *и* μ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, *выполнены условия* (a)–(d), *то существует такая константа* c, *что*

$$\max_{u \in U} H(t, \widehat{x}(t), u, p(t), \lambda_0) + \int_t^{t_1} (H_t(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau), p(\tau), \lambda_0)\, d\tau - \\ - \sum_{i=1}^{m} \int_t^{t_1} g_{it}(\tau, \widehat{x}(\tau)))\, d\mu_i = c \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Впервые необходимые условия минимума в форме принципа максимума для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями были получены Р. В. Гамкрелидзе (см. [ПБГМ]), а в приведенной здесь форме принцип максимума доказан А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным [ДМ]. Доказательство теоремы 4 можно найти в [ИТ], [Ap1].

Рассмотрим здесь одну задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями, интересную тем, что поведение оптимальных траекторий вблизи фазовых ограничений носит несколько неожиданный характер, что можно увидеть только применив принцип максимума.

Обозначим $x = (x_1, x_2)^T$, $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$, $u = (u_1, u_2)^T$ и рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x_2(t)\,dt \to \min, \\ &\dot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x_1 - x_2 \leqslant 0, \ -x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ &x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Множество $G = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \leqslant 0, -x_1 - x_2 \leqslant 0\}$, которое выделяют фазовые ограничения, симметрично относительно оси ординат (см. рис. 7), и поэтому далее будем считать, что $x_{10} \geqslant 0$.

Рассмотрим сначала несколько случаев, когда поведение оптимальной траектории очевидно (и легко проверяемо).

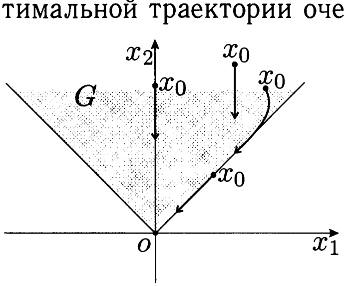

Рис. 7. Задача с фазовыми ограничениями.

Пусть $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T \in G$, $x_{20} > 0$ и $x_{10} = 0$. Тогда понятно, что надо идти вдоль оси ординат по направлению к нулю с максимальной по модулю скоростью, т. е. $\widehat{u}(t) = (0, -1)^T$ и тем самым $\widehat{x}_1(t) \equiv 0$, $\widehat{x}_2(t) = x_{20} - t$. Если $\widehat{x}_2(1) \geqslant 0$, то это и есть оптимальная траектория. Если же $\widehat{x}_2(1) < 0$, то, начиная с момента t_1, когда $\widehat{x}_2(t_1) = 0$, мы время $1 - t_1$ должны «стоять» в нуле, т. е. $\widehat{u}(t) \equiv 0$ и $\widehat{x}(t) \equiv 0$ при $t \in [t_1, 1]$.

Пусть теперь $x_{10} > 0$. Если $x_{20} - x_{10} \geqslant 1$, то процесс

$$\widehat{u}(t) = (0, -1)^T, \quad \widehat{x}_1(t) \equiv x_{10}, \quad \widehat{x}_2(t) = x_{20} - t,$$

очевидно, оптимален.

Если $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T \neq 0$ принадлежит границе области, то, очевидно, надо идти вдоль границы по направлению к нулю с максимальной по модулю скоростью, т. е. $\widehat{u}(t) = (-1/\sqrt{2})(1,1)^T$, $\widehat{x}_1(t) = x_{10} - (1/\sqrt{2})t$, $\widehat{x}_2(t) = x_{20} - (1/\sqrt{2})t$, и если мы достигли нуля за время меньшее единицы, то оставшееся время надо «стоять» в нуле и в этом случае $\widehat{u}(t) \equiv 0$, $\widehat{x}(t) \equiv 0$ (см. рис. 7).

Теперь подробнее рассмотрим наиболее интересную ситуацию, когда x_0 принадлежит внутренности области G, $x_{10} > 0$, и траектория по времени разбивается на два участка $[0, t_1)$ и $[t_1, 1]$, где $t_1 < 1$, следующим образом. На участке $[0, t_1)$ траектория находится внутри области G, в момент времени t_1 она попадает на границу, и дальше, как мы уже выяснили, ее путь предопределен. Нас интересует характер выхода траектории на границу. Оказывается, что это происходит гладким образом, т. е. вся траектория — гладкая кривая.

Итак, пусть $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — оптимальный процесс в рассматриваемом случае. Согласно условию максимума в теореме 4

$$\widehat{u}(t) = \frac{p(t)^T}{|p(t)|} \quad \text{для всех } t \in [0,1], \text{ где } p(t) \neq 0, \tag{2}$$

а в силу уравнения Эйлера

$$p(t) = (1-t)\lambda_0 e_1 - \mu(t) e_2, \tag{3}$$

для всех $t \in [0,1]$, где $e_1 = (0,1)$, $e_2 = (1,-1)$, функция $\mu(\cdot)$ (как функция нижнего предела интеграла по неотрицательной регулярной мере) монотонно убывает, непрерывна слева (регулярность меры) и постоянна на $[0, t_1)$.

Проверим, что $\lambda_0 \neq 0$. Допустим противное и покажем, что в этом случае все множители Лагранжа нулевые. Докажем сначала, что $p(t) \equiv 0$ на $[0,1]$. Действительно, если $\lambda_0 = 0$, то из (3) следует, что $p(t) = -\mu(t)e_2$ для любого $t \in [0,1]$. Как было отмечено выше, $\widehat{u}(t) = (-1/\sqrt{2})(1,1)^T$ на отрезке $[t_1, 1]$ и тогда, если $\tau \in [t_1, 1]$ и $p(\tau) \neq 0$, то в силу (2) $p(\tau) = (-|p(\tau)|/\sqrt{2})(1,1)$. Но векторы e_2 и $(1,1)$ ортогональны и поэтому, умножая скалярно последнее равенство на e_2, получаем, что $p(\tau) = 0$. Противоречие доказывает, что $p(t) \equiv 0$ на $[t_1, 1]$. Далее согласно условию (e) теоремы 4 имеем (с $\lambda_0 = 0$)

$$\max_{|u| \leqslant 1} p(t) \cdot u \equiv c = \text{const}.$$

Из доказанного вытекает, что $c = 0$, а значит, $p(t) = 0$ для любого $t \in [0,1]$. Из равенства $p(t) = -\mu(t)e_2$ следует, что и $\mu(t) \equiv 0$ на $[0,1]$. Таким образом, все множители Лагранжа нулевые, что невозможно, и поэтому $\lambda_0 \neq 0$. Далее считаем, что $\lambda_0 = 1$.

Гладкий выход на границу означает, что функция $\dot{\widehat{x}}(\cdot) = \widehat{u}(\cdot)$ непрерывна в точке t_1. Для этого, в силу (2), достаточно доказать, что функция $p(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot))$ отлична от нуля и непрерывна в t_1. Умножая (3) скалярно на вектор $(1,1)$, получаем, что $p_1(t) + p_2(t) = 1 - t$, т. е. $p(\cdot)$ отлична от нуля всюду кроме точки $t = 1$. В силу (3) функция $p(\cdot)$ непрерывна слева и тем самым нужно доказать, что $p(t_1 + 0) = p(t_1)$. Допустим, что это не так. Тогда функция $\mu(\cdot)$ в точке t_1 имеет скачок $\delta = \mu(t_1) - \mu(t_1 + 0) > 0$ ($\mu(\cdot)$ убывает) и из (3) вытекает, что

$$p(t_1 + 0) = p(t_1) + \delta e_2. \tag{i}$$

Если $t_1 < t < 1$, то $p(t) \neq 0$ и согласно (2) вектор $p(t)$ пропорционален вектору $(1,1)$. Следовательно, $p(t) \cdot e_2^T = 0$ и в пределе при $t \to t_1 + 0$ получаем, что $p(t_1 + 0) \cdot e_2^T = 0$. Учитывая это, выводим из (i), что

$$p(t_1) \cdot e_2^T = -2\delta < 0.$$

Отсюда в силу непрерывности $p(\cdot)$ слева вытекает, что $p(t) \times e_2^T < 0$ для $t < t_1$ достаточно близких к t_1. Это означает в силу (2), что $e_2 \cdot \dot{\widehat{x}}(t) < 0$ для тех же t. Поскольку $e_2 \cdot \widehat{x}(t_1) = 0$ ($\widehat{x}(t_1)$ принадлежит границе), то из этих соотношений следует, что $e_2 \cdot \widehat{x}(t) > 0$ для $t < t_1$ близких к t_1, т.е. для данных t траектория находится вне области G, что невозможно. Таким образом, функция $p(\cdot)$ непрерывна в точке t_1 и, значит, $\widehat{x}(\cdot)$ гладко выходит на границу (см. рис. 7).

Для того, чтобы построить сам оптимальный процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ нужно знать два параметра: $p(0)$ и t_1 — момент выхода $\widehat{x}(\cdot)$ на границу. Действительно, из (3) следует, что на интервале времени $[0, t_1]$ $p(t) = p(0) + t_1 e_1$. Тогда из (2) мы найдем $\widehat{u}(\cdot)$ и, значит, $\widehat{x}(\cdot)$. Поведение оптимального процесса на границе известно. Выпишем уравнения, которым должны удовлетворять эти параметры. Из (2) и непрерывности $p(\cdot)$ в t_1 имеем

$$\widehat{u}(t_1) = \frac{p(t_1)^T}{|p(t_1)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\widehat{x}(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} \frac{p(t)^T}{|p(t)|}\, dt$$

и $e_2 \cdot \widehat{x}(t_1) = 0$. Объединяя выписанные соотношения, приходим к следующим уравнениям

$$\frac{(p(0) + t_1 e_1)^T}{|p(0) + t_1 e_1|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_2 \cdot \left(x_0 + \int_0^{t_1} \frac{(p(0) + t e_1)^T}{|p(0) + t e_1|}\, dt \right) = 0$$

относительно неизвестных $p(0)$ и t_1.

Отметим одну особенность, характерную для задач с фазовыми ограничениями. Как уже говорилось выше, если фазовые ограничения отсутствуют, а концевые ограничения удовлетворяют некоторым условиям регулярности, то можно гарантировать выполнение соотношения: $\lambda_0 + |p(t)| \neq 0$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Если задаче фазовые ограничения присутствуют, то это уже не так: данное соотношение может нарушаться для любых множителей Лагранжа. Более того, следующий пример (предложенный

А. Я. и В. А. Дубовицкими) показывает, что для любых множителей Лагранжа необходимо $\lambda_0 = 0$ и $p(t) \equiv 0$ на $(t_0, t_1]$. Рассмотрим задачу

$$\int_0^1 u(t)\,dt \to \min, \quad \dot{x} = tu, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad -x \leqslant 0.$$

Покажем, что процесс $(0, 0)$ является оптимальным. Действительно, для любого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ и любого $0 < \varepsilon < 1$ имеем (интегрируя по частям и учитывая, что из ограниченности $u(\cdot)$ следует, что $|\dot{x}(t)| \leqslant ct$ и тем самым $|x(\varepsilon)| \leqslant c\varepsilon^2$)

$$\int_\varepsilon^1 u(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 t^{-1}\dot{x}(t)\,dt = -\varepsilon^{-1}x(\varepsilon) + \int_\varepsilon^1 t^{-2}x(t)\,dt \geqslant -\varepsilon^{-1}x(\varepsilon),$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ получаем, что $\int_0^1 u(t)\,dt \geqslant 0$.

Из условия максимума следует, что

$$tp(t) - \lambda_0 \equiv 0,$$

т. е.

$$p(t) \equiv \lambda_0 t^{-1}.$$

Но функция $p(\cdot)$ ограничена и поэтому $\lambda_0 = 0$ и $p(t) \equiv 0$ на $(t_0, t_1]$. В качестве меры μ_1 можно взять δ-функцию в нуле.

В то же время можно указать простые условия, гарантирующие существование таких множителей Лагранжа, для которых выполнены условия (a)–(e) теоремы 4 и при этом

$$\lambda_0 + \operatorname{mes}\{t \in [t_0, t_1] \mid p(t) \neq 0\} > 0.$$

Приведем эти условия, ограничиваясь для простоты случаем, когда $U(t) \equiv U$, где U — ограниченное множество и концы траектории фиксированы (т. е. $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$, а x_0, x_1 заданы).

Будем говорить, что в точках x_0 и x_1 выполнены условия управляемости относительно фазовых ограничений, если существуют такие $u_0, u_1 \in U$, что

$$g_{ix}(t_0, x_0) \cdot f(t_0, x_0, u_0) + g_{it}(t_0, x_0) < 0, \ \forall i \colon g_i(t_0, x_0) = 0$$

и

$$g_{ix}(t_1, x_1) \cdot f(t_1, x_1, u_1) + g_{it}(t_1, x_1) > 0, \ \forall i \colon g_i(t_1, x_1) = 0.$$

Лемма. *Пусть процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ является сильным локальным минимумом в задаче $(\overline{P}_2)$, в которой концы фиксированы, $U(t) \equiv U$, фазовые ограничения регулярны, т. е. для любого $t \in [t_0, t_1]$ существует вектор $a(t) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $g_{ix}(t, \widehat{x}(t)) \cdot a(t) > 0$ для всех тех i, для которых $g_i(t, \widehat{x}(t)) = 0$ и в точках x_0 и x_1 выполнены условия управляемости.*

Тогда существуют множители Лагранжа λ, $p(\cdot)$ и μ_i, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant m$, для которых выполнены утверждения теоремы 4, а также условие нетривиальности

$$\lambda_0 + \operatorname{mes} \{t \in [t_0, t_1] \mid p(t) \neq 0\} > 0.$$

Доказательство см. в [Ap1].

Отметим, что если исследуемый процесс, являющийся сильным локальным минимумом, удовлетворяет дополнительному предположению, называемому управляемостью траектории относительно фазовых ограничений, то для него справедлив принцип максимума Понтрягина с более сильным, чем приведенное в лемме, условием нетривиальности. Это условие нетривиальности имеет вид:

$$\lambda_0 + |p(t)| \neq 0, \ \ \forall t \in (t_0, t_1).$$

Об этом можно прочесть во 2-й главе книги [Ap1].

Наряду с фазовыми ограничениями в задачах оптимального управления рассматриваются также ограничения вида

$$r_i(t, x(t), u(t)) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant l, \ \text{для п. в. } t \in [t_0, t_1],$$

называемые смешанными ограничениями. Хотя формально фазовые ограничениям являются частным случаем смешанных, однако рассмотрение фазовых ограничений в таком качестве неэффективно. Действительно, пусть смешанные ограничения регулярны. В предположении, что все функции r_i непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по u, регулярность смешанных ограничений означает, что для любых (t, x, u) таких, что $r_i(t, x, u) \leqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant l$, выполняется следующее:

$$\exists\ a(t, x, u) \in \mathbb{R}^k\colon\ a(t, x, u) \cdot r_{iu}(t, x, u) < 0,\ \ \forall i\colon r_i(t, x, u) = 0.$$

Тогда формулировка и доказательство принципа максимума следуют стандартной схеме и не встречают затруднений (см. например, [Ар1]). Исследование задач с регулярными смешанными ограничениями в известном смысле проще, чем задач с фазовыми ограничениями.

Если же смешанные ограничения нерегулярны, то получение необходимых условий оптимальности принципиально усложняется и требует новых подходов и идей (см. [Мил]). Следует отметить, что построение теории таких задач в настоящее время находится лишь на начальном этапе.

Приложение I

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

В этом приложении подробно обсуждаются вопросы, связанные с дифференцируемостью отображений конечномерных пространств и формулируется ряд утверждений, необходимых для основного текста. Кроме того, здесь приводятся некоторые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и один топологический факт, касающийся понятия компактности в терминах центрированной системы.

Здесь мы будем иметь дело с функциями многих переменных, т. е. с функциями, определенными на подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$. Напомним необходимые для дальнейшего определения и факты, связанные с самим этим пространством, дифференциальными свойствами функций на нем, а также договоримся об обозначениях. Пространство $\mathbb{R}^n$ — это совокупность всех упорядоченных наборов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ из n действительных чисел, называемых *векторами или вектор-столбцами*, а сами числа $x_1, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора x. Ради экономии места, элементы $\mathbb{R}^n$ будем записывать так:

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T,$$

где T означает транспонирование. В $\mathbb{R}^n$ естественным образом вводится операция (покоординатного) сложения векторов и операция (покоординатного) умножения вектора на число, превращающие это множество в вещественное векторное пространство.

Наряду с пространством $\mathbb{R}^n$ будем также рассматривать пространство $(\mathbb{R}^n)'$, элементы которого суть те же наборы из n действительных чисел, но расположенные в строку, с аналогичными операциями сложения и умножения на числа. Элементы $(\mathbb{R}^n)'$ также называем *векторами или вектор-строками*. Пусть

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)'$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $a \cdot x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, т. е. это число есть матричное произведение вектор-строки a на вектор-столбец x. Для каждого $a \in \in (\mathbb{R}^n)'$ отображение $x \to a \cdot x$, очевидно, есть линейный функционал (линейная функция) на $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что и любой линейный функционал l на $\mathbb{R}^n$ задается подобным образом с $a = (l(e_1), \ldots, l(e_n))$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_n = (0, \ldots \ldots, 0, 1)^T$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. В этом смысле мы отождествляем пространство $(\mathbb{R}^n)'$ с пространством всех линейных функционалов на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Величина

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

(или, короче, $|x| = \sqrt{x^T \cdot x}$) называется *длиной* или *модулем* или *евклидовой нормой* вектора x. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо *неравенство Коши–Буняковского*:

$$|x^T \cdot y| \leqslant |x||y|.$$

Длина вектора удовлетворяет следующим (легко проверяемым) свойствам: $|x| \geqslant 0$ и $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для любых $x \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Если x и y из $\mathbb{R}^n$, то величина $|x - y|$ называется *расстоянием между векторами* x и y. Пусть $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$. Множества

$$U_\delta(\widehat{x}; \mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \widehat{x}| < \delta\}$$

и

$$B_\delta(\widehat{x}; \mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \widehat{x}| \leqslant \delta\}$$

называются соответственно *открытым* и *замкнутым шаром с центром в точке* $\widehat{x}$ *радиуса* δ. Множество в $\mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если с каждой своей точкой оно содержит и некоторый шар с центром в этой точке. Любое открытое множество, содержащее данную точку, называется *окрестностью* этой точки.

Все введенные понятия без изменений переносятся на пространство $(\mathbb{R}^n)'$.

Пусть M — подмножество $\mathbb{R}^n$ и $f\colon M \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f *непрерывна в точке* $\widehat{x} \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки $\widehat{x}$, что $|f(x) - f(\widehat{x})| < \varepsilon$ для всех $x \in M \cap U$. Если функция f непрерывна в каждой точке множества M, то говорят, что f *непрерывна на* M.

Пусть теперь задано отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^m$. Это равносильно тому, что на M задано m функций. Действительно, координаты вектора $F(x)$ суть m функций на M. С другой стороны, если на M заданы функции $f_1, \ldots, f_m$, то они определяют отображение F по правилу:

$$x \to F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T, \quad x \in M.$$

В этом смысле все вопросы, связанные с отображениями, можно свести к соответствующим вопросам для функций. Однако часто удобно (и полезно, имея в виду обобщения на бесконечномерный случай) иметь дело именно с отображениями.

Говорят, что отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно в точке* $\widehat{x} \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки $\widehat{x}$, что

$$|F(x) - F(\widehat{x})| < \varepsilon$$

для всех $x \in M \cap U$. Если отображение F непрерывно в каждой точке множества M, то говорят, что F *непрерывно на* M. Легко проверить, что это эквивалентно тому, что все функции, задающие F, непрерывны в точке $\widehat{x} \in M$ (на M).

Теорема П 1.1. (о непрерывности суперпозиции отображений). *Пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, $M_2 \subset \mathbb{R}^m$, $F_1\colon M_1 \to \mathbb{R}^m$, $F_2\colon M_2 \to \mathbb{R}^s$ и $F_1(M_1) \subset M_2$. Если отображение F_1 непрерывно в точке $\widehat{x} \in M_1$, а отображение F_2 непрерывно в точке $F_1(\widehat{x}) \in M_2$, то суперпозиция отображений $F_2 \circ F_1\colon M_1 \to \mathbb{R}^s$ непрерывна в точке $\widehat{x}$.*

Доказательство этой теоремы следует фактически из определений и поэтому мы его не приводим.

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $\widehat{x}$, если существует такой линейный функционал на $\mathbb{R}^n$, т. е. вектор $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)'$, что для всех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых $\widehat{x} + h \in U$, справедливо представление

$$f(\widehat{x} + h) = f(\widehat{x}) + a \cdot h + r(h),$$

где $r(h)/|h| \to 0$ при $h \to 0$, т. е. $r(h) = o(h)$. Вектор a, определяемый этим представлением однозначно, называется *производной функции f в точке $\widehat{x}$* и обозначается $f'(\widehat{x})$. Из определения легко следует (беря в качестве h векторы $(h_1, 0, \ldots \ldots, 0)^T, \ldots, (0, \ldots, 0, h_n)^T$), что a_i есть частная производная функции f по x_i в точке $\widehat{x}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, $f'(\widehat{x}) = (\partial f(\widehat{x})/\partial x_1, \ldots, \partial f(\widehat{x})/\partial x_n)$.

Существование частных производных функции f в точке $\widehat{x}$ не гарантирует, как показывают простые примеры,[1] дифференцируемости (и даже непрерывности) f в данной точке. Однако, если *все частные производные функции f непрерывны в $\widehat{x}$, то f дифференцируема в этой точке.*

Если функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке $\widehat{x}$ и α_1, α_2 — любые числа, то легко видеть, что $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)'(\widehat{x}) = \alpha_1 f_1'(\widehat{x}) + \alpha_2 f_2'(\widehat{x})$.

Если функция f дифференцируема в точке $\widehat{x}$, то она, очевидно, непрерывна в данной точке.

Пусть A — симметричная матрица размера $n \times n$, $b \in (\mathbb{R}^n)'$, $c \in \mathbb{R}$ и $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — квадратичная функция, определяемая по правилу

$$f(x) = x^T \cdot Ax + b \cdot x + c.$$

Тогда простая выкладка показывает, что

$$f'(x) = 2x^T A + b$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

[1] Например, функция, которая на плоскости равна нулю всюду, кроме множества $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = \sqrt{x_1},\ x_1 > 0\}$, а на самом этом множестве тождественно равна единице.

Если f дифференцируема в каждой точке множества U, то говорят, что f дифференцируема на U.

Пусть $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор. Мы будем отождествлять Λ с его матрицей в стандартных базисах в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, так что Λx — произведение матрицы Λ на вектор x.

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $\widehat{x}$, если существует такой линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т. е матрица Λ размера $m \times n$, что для каждого $h \in \mathbb{R}^n$, для которого $\widehat{x} + h \in U$, справедливо представление

$$F(\widehat{x} + h) = F(\widehat{x}) + \Lambda h + \rho(h),$$

где $|\rho(h)|/|h| \to 0$ при $h \to 0$, т. е. $\rho(h) = o(h)$. Матрица Λ, а она определяется этим представлением однозначно, называется *производной отображения F в точке $\widehat{x}$* и обозначается $F'(\widehat{x})$.

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и $f_i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$, — функции, задающие отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^m$. Условие дифференцируемости F в точке $\widehat{x}$ эквивалентным образом записывается так:

$$f_i(\widehat{x} + h) = f_i(\widehat{x}) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j + \rho_i(h), \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$ и $\rho_i(h)/|h| \to 0$ при $h \to 0$, $i = 1, \ldots, m$. Это означает, что функции $f_i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, дифференцируемы в точке $\widehat{x}$ и $a_{ij} = \partial f_i(\widehat{x})/\partial x_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, $F'(\widehat{x}) = (\partial f_i(\widehat{x})/\partial x_j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Эту матрицу называют также *матрицей Якоби отображения F в точке $\widehat{x}$*. Легко видеть, что верно и обратное: если функции f_i, $i = 1, \ldots, m$, дифференцируемы в данной точке, то задаваемое ими отображение также дифференцируемо в этой точке.

Если отображение F дифференцируемо в каждой точке U, то говорят, что F дифференцируемо на U.

Пусть функция f дифференцируема на $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда определено отображение $f'\colon U \to (\mathbb{R}^n)'$, сопоставляющее $x \in U$ вектор

$f'(x)$. Если это отображение непрерывно в точке $\widehat{x}$ (на U), то говорят, что функция f *непрерывно дифференцируема в* $\widehat{x}$ (на U). Последнее равносильно тому, что *все частные производные функции f непрерывны на U.*

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ совокупность линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ или, что то же (при указанном выше отождествлении), совокупность всех матриц A размера $m \times n$. В этом векторном пространстве (с обычным поэлементным сложением матриц и умножением их на числа) введем норму

$$\|A\| = \max_{|x| \leqslant 1} |Ax|.$$

Простая проверка показывает, что норма удовлетворяет следующим условиям: $\|A\| \geqslant 0$ и $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$; $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; $\|A_1 + A_2\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$ для любых $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Расстояние между матрицами A_1 и A_1 определяется как $\|A_1 - A_2\|$. Теперь, аналогично тому, как это было сделано в $\mathbb{R}^n$, мы можем ввести в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ понятия открытого и замкнутого шара, открытого множества и окрестности точки.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^k$. Отображение $F\colon M \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *непрерывно в точке* $\widehat{x} \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки $\widehat{x}$, что $\|F(x) - F(\widehat{x})\| < \varepsilon$ для всех $x \in M \cap U$. Если отображение F непрерывно в каждой точке множества M, то говорят, что F *непрерывно на* M.

Ясно, что задание отображения $F\colon M \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ равносильно заданию mn функций $x \to a_{ij}(x)$ на M, где $a_{ij}(x)$ — элементы матрицы $F(x)$, и нетрудно проверить, что непрерывность F в $\widehat{x}$ (на M) равносильна непрерывности всех этих функций в $\widehat{x}$ (на M).

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо на U. Тогда определено отображение F' из U в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, сопоставляющее $x \in U$ матрицу $F'(x)$. Если это отображение непрерывно в $\widehat{x}$ (на U), то говорят, что отображение F *непрерывно дифференцируемо в* $\widehat{x}$ *(на* U*)*. Непрерывная дифференцируемость F на U равносильна тому, что *все* *частные производные функций, задающих это отображение, непрерывны на U.*

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, M — подмножество $\mathbb{R}^k$, $\widehat{y} \in M$ и $F\colon U \times M \to \mathbb{R}^m$. Если отображение $x \to F(x,\widehat{y})$ дифференцируемо в точке $\widehat{x}$, то соответствующую производную называют *частной производной отображения F в точке $(\widehat{x},\widehat{y})$* и обозначают $F_x(\widehat{x},\widehat{y})$. Естественно, можно говорить о непрерывности этой производной в $\widehat{x}$ (на U).

Следующие две теоремы нам понадобятся при выводе необходимых условий экстремума.

Теорема П1.2. (о производной суперпозиции отображений). *Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и отображение $F_1\colon U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо (непрерывно дифференцируемо) в $\widehat{x}$. Пусть, далее, V — окрестность точки $\widehat{y} = F_1(\widehat{x})$ и отображение $F_2\colon V \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемо (непрерывно дифференцируемо) в $\widehat{y}$.*

Тогда суперпозиция отображений $F = F_2 \circ F_1\colon U \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема (непрерывно дифференцируема) в точке $\widehat{x}$ и $F'(\widehat{x}) = F_2'(\widehat{y})F_1'(\widehat{x})$.

Доказательство этой теоремы практически не отличается от доказательства ее одномерного варианта (см., например, [Зор1], стр. 443).

Теорема П1.3. (о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра). *Пусть*

$$\Pi = \{(t,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1\},$$

функция $f\colon \Pi \to \mathbb{R}$ и ее частная производная f_α непрерывны на Π, функции $\xi,\eta\colon [\alpha_0,\alpha_1] \to [t_0,t_1]$ непрерывно дифференцируемы.

Тогда функция

$$g\colon \alpha \to \int\limits_{\xi(\alpha)}^{\eta(\alpha)} f(t,\alpha)\,dt$$

непрерывно дифференцируема на $[\alpha_0, \alpha_1]$ *и для любого* $\alpha \in$ $\in [\alpha_0, \alpha_1]$ *справедлива формула*

$$g'(\alpha) = f(\eta(\alpha), \alpha)\eta'(\alpha) - f(\xi(\alpha), \alpha)\xi'(\alpha) + \int\limits_{\xi(\alpha)}^{\eta(\alpha)} f_\alpha(t, \alpha)dt.$$

Доказательство см., например, в [Зор2], стр. 402.

Теорема Ферма и правило множителей Лагранжа

Теорема П 1.4 (Ферма). *Пусть функция f определена в окрестности точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и дифференцируема в этой точке.*

Тогда если $\widehat{x}$ — локальный экстремум f, то

$$f'(\widehat{x}) = 0 \iff \frac{\partial f(\widehat{x})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(\widehat{x})}{\partial x_n} = 0.$$

Точки $\widehat{x}$, где $f'(\widehat{x}) = 0$, называются *стационарными точками функции* f.

Доказательство. Пусть для определенности $\widehat{x}$ — локальный минимум. Допустим, что $f'(\widehat{x}) \neq 0$. Тогда найдется такое $h \in \mathbb{R}^n$, что $f'(\widehat{x}) \cdot h \neq 0$. Следовательно, для всех достаточно малых $\alpha \neq 0$, знак которых противоположен знаку $f'(\widehat{x}) \cdot h$, будем иметь $f(\widehat{x} + \alpha h) = f(\widehat{x}) + \alpha(f'(\widehat{x}) \cdot h + r(\alpha)/\alpha) < f(\widehat{x})$ в противоречии с тем, что $\widehat{x}$ — локальный минимум. □

Теорема П 1.5 (правило множителей Лагранжа для задач с равенствами). *Пусть функции f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$. Если $\widehat{x}$ — локальный экстремум задачи*

$$f_0(x) \to \text{extr}, \quad f_i(x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

то существует такой набор множителей Лагранжа

$$\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m),$$

не равных одновременно нулю, что $\widehat{x}$ является стационарной точкой функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ данной задачи:

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0.$$

Доказательство этой классической теоремы можно найти во многих учебниках и монографиях. В Приложении II она выводится в качестве следствия более общих результатов (см. следствие 3 из теоремы П 2.2).

Сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений

При доказательстве части (b) теоремы 1 используются два факта из теории дифференциальных уравнений: частный случай теоремы о дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от параметров (лемма П 1.6) и теорема существования и единственности решения линейной системы (теорема П 1.7).

Лемма П 1.6. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, $u_i(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, $\overline{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_N(\cdot))$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $u_{\overline{\alpha}}(\cdot, \overline{u}(\cdot)) = \widehat{u}(\cdot) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(\cdot)$ и выполнены условия части (b) теоремы 1. Тогда найдется такая окрестность нуля V в $\mathbb{R}^N$, что для любого $\overline{\alpha} \in V$ существует решение $x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \overline{u}(\cdot))$ задачи Коши*

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_{\overline{\alpha}}(t; \overline{u}(\cdot))), \quad x(t_0) = x_0, \tag{$*$}$$

определенное на всем отрезке $[t_0, t_1]$. Кроме того, $x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \overline{u}(\cdot)) \to \widehat{x}(\cdot)$ при $\overline{\alpha} \to 0$ равномерно на $[t_0, t_1]$, для каждого $t \in [t_0, t_1]$ отображение $\overline{\alpha} \to x_{\overline{\alpha}}(t; \overline{u}(\cdot))$ непрерывно дифференцируемо на V и его частные производные в нуле на $[t_0, t_1]$ удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{y} = \widehat{\varphi}_x(t) y + \widehat{\varphi}_u(t) u_i(t), \quad y(t_0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{$**$}$$

Пусть задано отображение (матричная функция) $A\colon [t_0, t_1] \to \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, сопоставляющее каждому t матрицу $A(t)$ размера $n \times n$. Мы говорим, что эта функция суммируема на $[t_0, t_1]$, если на этом отрезке суммируемы все элементы данной матрицы.

Теорема П1.7. (существования и единственности для линейной системы). *Пусть матричная функция* $A\colon [t_0, t_1] \to \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *и вектор-функция* $b\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ *суммируемы. Тогда для любых* $\tau \in [t_0, t_1]$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *решение задачи Коши*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(\tau) = \xi$$

существует на всем отрезке $[t_0, t_1]$ *и единственно. Более того, это решение дается формулой*

$$x(t) = \Phi(t)\left(x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — *фундаментальная матрица, т.е.* $\Phi(\cdot)$ — *решение матричного уравнения*

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0) = \mathrm{Id},$$

а Id — *единичная матрица.*

Замечание. Линейную систему $\dot{p} = -pA(t) + c(t)$, где A — то же, что и выше, а $c\colon [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)'$, называют системой, сопряженной к $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Для нее, при тех же предположениях на A и c, справедлива аналогичная теорема существования и единственности и формула для решения.

В конце этого приложения сформулируем одно утверждение топологического характера.

Пусть $\{A_i\}$ — некоторое семейство подмножеств $\mathbb{R}^k$. Говорят, что это семейство образует *центрированную систему*, Лебега если пересечение любого конечного числа членов этой системы не пусто.

Лемма П1.8. (о центрированной системе). *Множество* $M \subset \subset \mathbb{R}^k$ *компактно (т. е. ограничено и замкнуто) тогда и только тогда, когда любая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство см, например, в [КФ], стр. 99.

Приложение II

Это приложение представляет самостоятельный интерес. Здесь доказывается конечномерный вариант обобщенной теоремы о неявной функции при минимальных предположениях, обсуждаются вопросы непрерывности, дифференцируемости и единственности неявной функции. На основе этой теоремы выводятся необходимые условия экстремума в конечномерной задаче с ограничениями типа равенств, неравенств и включений. Здесь также доказывается одна теорема существования в задаче оптимального управления. Кроме того, в этом приложении приведены некоторые результаты, связанные с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, и некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства принципа максимума как в упрощенной, так и в общей задачах оптимального управления.

Мы начинаем с некоторого обобщения понятия дифференцируемости отображения, данного в Приложении I, и пользуемся обозначениями, которые там были введены.

Напомним, что $U_\delta(x;\mathbb{R}^n)$ и $B_\delta(x;\mathbb{R}^n)$ обозначают, соответственно, открытый и замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x радиуса δ.

Пусть M — непустое подмножество $\mathbb{R}^n$ и задана точка $\widehat{x} \in M$. Будем говорить, что отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^s$ *дифференцируемо в $\widehat{x}$ относительно множества M*, если найдется такой оператор $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ (т. е. матрица размера $m \times s$), что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_\delta(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap M$ выполняется неравенство

$$|F(x) - F(\widehat{x}) - \Lambda(x - \widehat{x})| \leqslant \varepsilon |x - \widehat{x}|.$$

Легко видеть, что если $\widehat{x}$ — внутренняя точка M, то это определение совпадает с тем, которое было дано раньше.

Оператор Λ будем обозначать $F'(\widehat{x})$ и называть *производной отображения F в точке $\widehat{x}$* (относительно множества M). В частности, если $s = 1$, т. е. если задана функция $f\colon M \to \mathbb{R}$, то говорим о дифференцируемости f в $\widehat{x}$ (относительно

M) и соответствующий линейный функционал (элемент $(\mathbb{R}^n)'$) обозначаем $f'(\widehat{x})$.

Производная определяется, вообще говоря, неоднозначно, но нетрудно показать, что если, например, M — выпуклое множество с непустой внутренностью, то производная единственна.

Ниже из контекста всегда будет ясно, относительно какого множества берется производная, и поэтому слова «относительно множества...» иногда будем опускать.

Если M_1 и M_2 — подмножества $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$, $\widehat{x} \in M_1, \widehat{y} \in M_2$ и $F\colon M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}^s$, то через $F_x(\widehat{x}, \widehat{y})$ и $F_y(\widehat{x}, \widehat{y})$ обозначаем частные производные, т. е. производные отображений $x \to F(x, \widehat{y})$ и $y \to F(\widehat{x}, y)$ относительно множеств M_1 и M_2 в точках $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ соответственно.

Обобщенная теорема о неявной функции и следствия из нее

Доказательство обобщенной теоремы о неявной функции опирается на следующий результат

Теорема (Брауэра о неподвижной точке). *Пусть M — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$ и $F\colon M \to M$ — непрерывное отображение. Тогда существует такая точка $\widehat{x} \in M$, что $F(\widehat{x}) = \widehat{x}$.*

Теорема П 2.1. (Обобщенная теорема о неявной функции). *Пусть M — произвольное подмножество $\mathbb{R}^k$, A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, имеющее непустую внутренность*[1]*, $\widehat{x} \in M$, $\widehat{y} \in A$ и $F\colon M \times A \to \mathbb{R}^s$. Пусть выполнены условия:*

1) $F(\widehat{x}, \widehat{y}) = 0$;

2) *отображение F непрерывно;*

3) *существует частная производная $F_y(\widehat{x}, \widehat{y})$ (относительно множества A) и при этом для каждого $\varepsilon > 0$*

[1] Непустота внутренности A нужна для единственности производной, о которой речь ниже.

найдутся такие $\delta_1(\varepsilon) > 0$ *и* $\delta_2(\varepsilon) > 0$, *что для всех* $x \in U_{\delta_1}(\widehat{x}; \mathbb{R}^k) \cap M$ *и* $y \in U_{\delta_2}(\widehat{y}; \mathbb{R}^n) \cap A$ *справедливо соотношение*

$$|F(x,y) - F(x,\widehat{y}) - F_y(\widehat{x},\widehat{y})(y-\widehat{y})| \leqslant \varepsilon |y-\widehat{y}|;$$

4) $F_y(\widehat{x},\widehat{y})\widehat{y} \in \operatorname{int} F_y(\widehat{x},\widehat{y})(A)$.

Тогда существует окрестность U *точки* $\widehat{x}$, *отображение (неявная функция)* $\varphi\colon U \cap M \to A$ *и константа* $K > 0$ *такие, что* $F(x, \varphi(x)) = 0$ *и* $|\varphi(x) - \widehat{y}| \leqslant K|F(x,\widehat{y})|$ *для всех* $x \in U \cap M$.

Доказательство. Условие 4) равносильно тому, что

$$0 \in \operatorname{int} F_y(\widehat{x},\widehat{y})(A - \widehat{y}).$$

Покажем, что найдутся такие: шар

$$B_r(0; \mathbb{R}^s) \subset \operatorname{int} F_y(\widehat{x},\widehat{y})(A-\widehat{y}), \quad r > 0,$$

непрерывное отображение

$$R\colon B_r(0;\mathbb{R}^s) \to A - \widehat{y}$$

и константа $\gamma > 0$, что

$$F_y(\widehat{x},\widehat{y})(R(z)) = z \quad \text{и} \quad |R(z)| \leqslant \gamma |z|$$

для всех $z \in B_r(0;\mathbb{R}^s)$. Действительно, так как $F_y(\widehat{x},\widehat{y})(A-\widehat{y})$ — выпуклое множество и нуль принадлежит его внутренности, то это множество содержит s-мерный симплекс S и $0 \in \operatorname{int} S$ (см. [МИТ]). Тогда и $B_r(0;\mathbb{R}^s) \subset \operatorname{int} S$ для некоторого $r > 0$. Пусть $e_1, \ldots, e_{s+1}$ — вершины S. Любая точка $z \in S$ единственным образом представляется в виде

$$z = \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i(z) e_i,$$

где

$$\lambda_i(z) \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s+1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i(z) = 1.$$

По условию существуют такие $f_i \in A - \widehat{y}$, что

$$F_y(\widehat{x}, \widehat{y}) f_i = e_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant s+1.$$

Определим отображение

$$R\colon B_r(0; \mathbb{R}^s) \to \mathbb{R}^n,$$

полагая $R(0) = 0$ и $R(z) = r^{-1}|z| \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i(r|z|^{-1}z) f_i$, если $z \neq$ $\neq 0$. Поскольку $\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i(r|z|^{-1}z) f_i \in A - \widehat{y}$ (в силу выпуклости $A - \widehat{y}$), $0 \leqslant r^{-1}|z| \leqslant 1$ (так как $z \in B_r(0; \mathbb{R}^s)$) и по условию $0 \in A - \widehat{y}$, то (снова в силу выпуклости $A - \widehat{y}$) $R(z) \in A - \widehat{y}$. Далее,

$$F_y(\widehat{x}, \widehat{y}) R(z) = r^{-1}|z| \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i(r|z|^{-1}z) e_i r^{-1}|z| r|z|^{-1} z = z$$

и

$$|R(z)| \leqslant r^{-1}|z| \max_{1 \leqslant i \leqslant s+1} |f_i| \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i(r|z|^{-1}z) = \gamma |z|,$$

где $\gamma = r^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant s+1} |f_i|$. Из определения R и последнего неравенства следует, что R непрерывно и, таким образом, отображение с нужными свойствами построено.

Пусть в условии 3) теоремы $\varepsilon = 1/2\gamma$ и соответствующие ему $\delta_1 = \delta_1(\gamma)$ и $\delta_2 = \delta_2(\gamma)$. Будем предполагать (уменьшая, если необходимо, $\delta_2 > 0$), что $\delta_2/\gamma \leqslant r$.

В силу 2) можно считать (уменьшая, если необходимо, $\delta_1 >$ > 0), что $F(x, \widehat{y}) \in U_{\delta_2/2\gamma}(0; \mathbb{R}^s)$ для всех $x \in U_{\delta_1}(\widehat{x}; \mathbb{R}^k) \cap M$.

Положим $U = U_{\delta_1}(\widehat{x}; \mathbb{R}^k)$ и пусть $x \in U \cap M$. Если $F(x, \widehat{y}) =$ $= 0$, то полагаем $\varphi(x) = \widehat{y}$, и тогда утверждения теоремы выполняются очевидным образом (для любого $K > 0$). Пусть

$F(x,\widehat{y}) \neq 0$. Обозначим $\alpha = |F(x,\widehat{y})|$ и рассмотрим отображение $G_x\colon B_{2\alpha}(0;\mathbb{R}^s) \to \mathbb{R}^s$, определенное формулой

$$G_x(z) = z - F(x, R(z) + \widehat{y}).$$

Проверим, что G_x корректно определено, непрерывно и переводит шар $B_{2\alpha}(0;\mathbb{R}^s)$ в себя. В самом деле, пусть $z \in B_{2\alpha}(0;\mathbb{R}^s)$. Тогда, во-первых,

$$B_{2\alpha}(0;\mathbb{R}^s) \subset B_r(0;\mathbb{R}^s),$$

так как $2\alpha \leqslant \frac{2\delta_2}{2\gamma} \leqslant r$. Во-вторых,

$$|R(z)| \leqslant \gamma|z| \leqslant \gamma 2\alpha \leqslant \delta_2,$$

т. е.

$$R(z) + \widehat{y} \in U_{\delta_2}(\widehat{y};\mathbb{R}^n) \cap A.$$

Таким образом (в силу условия 2) теоремы и непрерывности R), отображение $z \to F(x, R(z) + \widehat{y})$ определено и непрерывно на $B_{2\alpha}(0;\mathbb{R}^s)$, а значит, таково и отображение G_x. Далее, записывая $G_x(z)$ в виде

$$G_x(z) = -F(x,\widehat{y}) - (F(x, R(z) + \widehat{y}) - F(x,\widehat{y}) - F_y(\widehat{x},\widehat{y})(R(z))),$$

будем иметь (учитывая условие 3) теоремы с $\varepsilon = 1/2\gamma$):

$$|G_x(z)| \leqslant |F(x,\widehat{y})| + (2\gamma)^{-1}|R(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha + (2\gamma)^{-1}\gamma|z| \leqslant \alpha + (2\gamma)^{-1}\gamma 2\alpha = 2\alpha,$$

т. е. G_x непрерывно отображает шар $B_{2\alpha}(0;\mathbb{R}^s)$ в себя. По теореме Брауэра о неподвижной точке существует такая точка $\overline{z} = \overline{z}(x) \in B_{2\alpha}(0;\mathbb{R}^s)$, что $G_x(\overline{z}) = \overline{z}$ или, что то же самое, $F(x, R(\overline{z}) + \widehat{y}) = 0$.

Обозначим $\varphi(x) = R(\overline{z}) + \widehat{y}$. Из определения φ следует, что $F(x,\varphi(x)) = 0$ и, кроме того,

$$|\varphi(x) - \widehat{y}| = |R(\overline{z})| \leqslant \gamma 2\alpha = 2\gamma|F(x,\widehat{y})| = K|F(x,\widehat{y})|$$

при $K = 2\gamma$. □

Следствие 1. (Обобщенная теорема об обратной функции). *Пусть A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, имеющее непустую внутренность, $\widehat{y} \in A$, отображение $\Phi\colon A \to \mathbb{R}^s$ непрерывно и дифференцируемо в точке $\widehat{y}$ относительно множества A и $\Phi'(\widehat{y})\widehat{y} \in \operatorname{int} \Phi'(\widehat{y})(A)$.*

Тогда существуют окрестность U точки $\Phi(\widehat{y})$, отображение (обратная функция) $\varphi\colon U \to A$ и константа $K > 0$ такие, что $\Phi(\varphi(x)) = x$ и $|\varphi(x) - \widehat{y}| \leqslant K|x - \Phi(\widehat{y})|$ для всех $x \in U$.

Доказательство. Пусть в теореме П2.1 $M = \mathbb{R}^s$, $\widehat{x} = \Phi(\widehat{y})$ и $F(x, y) = \Phi(y) - x$. Тогда все условия этой теоремы выполнены и мы сразу получаем утверждение следствия. □

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости неявной (обратной) функции. Следующий пример показывает, что если $A \neq \mathbb{R}^n$, то дифференцируемости, вообще говоря, может не быть даже при сколь угодно гладком исходном отображении. Покажем это для обратной функции. Пусть $A = [0, 1]^2$, $\Phi\colon A \to \mathbb{R}$, $\Phi(y) = y_1 - y_2$ $(y = (y_1, y_2)^T)$ и пусть $\widehat{y} = 0$. Ясно, что $\Phi'(0) = (1, -1)$ и поэтому $F'(0)(A) = [-1, 1]$. Условия следствия 1 выполнены. Поэтому найдутся окрестность нуля U и отображение $\varphi\colon U \to A$ $(\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T)$ такие, что $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = x$ для всех $x \in U$. Поскольку $\varphi_i(x) \geqslant 0$ и $\varphi_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, то, если бы отображение φ было дифференцируемо в нуле, то по теореме Ферма необходимо выполнялись бы равенства $\varphi_i'(0) = 0$, $i = 1, 2$. Но тогда, дифференцируя тождество $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = x$ в нуле, мы приходим к противоречию.

Если $A = \mathbb{R}^n$, то незначительное (и совершенно естественное) усиление условий теоремы П2.1 приводит к дифференцируемости неявной функции в точке $\widehat{x}$, а для обратной функции условия следствия 1 при $A = \mathbb{R}^n$ уже гарантируют дифференцируемость обратной функции в соответствующей точке.

Следствие 2. (Дифференцируемость неявной функции). *Пусть в теореме* П2.1 *$A = \mathbb{R}^n$, $s = n$ и существует производная $F_x(\widehat{x}, \widehat{y})$.*

Тогда неявная функция φ дифференцируема в точке $\widehat{x}$ относительно множества M и

$$\varphi'(\widehat{x}) = -F_y^{-1}(\widehat{x},\widehat{y})F_x(\widehat{x},\widehat{y}).$$

Доказательство. Пусть U — окрестность точки $\widehat{x}$ из теоремы П 2.1. Существование производной $F_x(\widehat{x},\widehat{y})$ означает, что для всех $x \in M$ справедливо представление

$$F(x,\widehat{y}) = F_x(\widehat{x},\widehat{y})(x-\widehat{x}) + o(|x-\widehat{x}|). \tag{i}$$

Уменьшая, если необходимо окрестность U, можно считать, что

$$|o(|x-\widehat{x}|)| \leqslant |x-\widehat{x}|,$$

и тогда из оценки для неявной функции при $x \in U$, получаем

$$|\varphi(x)-\widehat{y}| \leqslant K|F(x,\widehat{y})| \leqslant K(\|F_x(\widehat{x},\widehat{y})\|+1)|x-\widehat{x}| = \\ = K_1|x-\widehat{x}|. \tag{ii}$$

Теперь воспользуемся условием 3) теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$ и ему соответствует δ_1 и δ_2. Снова уменьшая U, можно считать, что $U \subset U_{\delta_1}(\widehat{x};\mathbb{R}^n)$ и (в силу (ii)) $|\varphi(x)-\widehat{y}| < \delta_2$ для всех $x \in U \cap M$. Тогда из 3) (учитывая, что $F(x,\varphi(x)) = 0$) и (ii) получаем:

$$|F(x,\widehat{y}) + F_y(x,\widehat{y})(\varphi(x)-\widehat{y})| \leqslant \varepsilon|\varphi(x)-\widehat{y}| \leqslant \varepsilon K_1|x-\widehat{x}|,$$

т. е.

$$F(x,\widehat{y}) + F_y(x,\widehat{y})(\varphi(x)-\widehat{y}) = o(|x-\widehat{x}|).$$

Объединяя это с (i), приходим к соотношению

$$F_y(x,\widehat{y})(\varphi(x)-\widehat{y}) = -F_x(\widehat{x},\widehat{y})(x-\widehat{x}) + o(|x-\widehat{x}|).$$

Условие 4) теоремы означает, что матрица $F_y(\widehat{x},\widehat{y})$ обратима. Поэтому, применяя к обеим частям последнего равенства оператор $F_y^{-1}(\widehat{x},\widehat{y})$ и учитывая, что $\widehat{y} = \varphi(\widehat{x})$, будем иметь

$$\varphi(x) = \varphi(\widehat{x}) - F_y^{-1}(\widehat{x},\widehat{y})F_x(\widehat{x},\widehat{y})(x-\widehat{x}) + o(|x-\widehat{x}|)$$

для всех $x \in U \cap M$, что доказывает следствие 2. □

Следствие 3. (Дифференцируемость обратной функции). *Пусть в следствии* 1 $A = \mathbb{R}^n$ *и* $s = n$.

Тогда обратная функция φ *дифференцируема в точке* $\Phi(\widehat{y})$ *и* $\varphi'(\Phi(\widehat{y})) = (\Phi'(\widehat{y}))^{-1}$.

Доказательство. Рассуждения здесь аналогичны тем, которые были в предыдущем следствии. Из дифференцируемости Φ в точке $\widehat{y}$ и оценки для обратной функции следует, что

$$x = \Phi(\varphi(x)) = \Phi(\widehat{y}) + \Phi'(\widehat{y})(\varphi(x) - \widehat{y}) + o(|x - \Phi(\widehat{y})|).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $(\Phi'(\widehat{y}))^{-1}$, получаем, что

$$\varphi(x) = \varphi(\Phi(\widehat{y})) + (\Phi'(\widehat{y}))^{-1}(x - \Phi(\widehat{y})) + o(|x - \Phi(\widehat{y})|)$$

и тем самым утверждение доказано. □

Рассмотрим теперь вопрос о единственности и непрерывности неявной (обратной) функции. Предположения следствия 1 (тем более теоремы П 2.1) не гарантируют ни единственности, ни непрерывности какой-либо из неявных (обратных) функций в какой-нибудь окрестности точки $\widehat{x}$.

Начнем с единственности и покажем это на примере обратной функции. Рассмотрим функцию $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную формулой:

$$\Phi(y) = y + y^2 \sin(1/y),$$

если $y \neq 0$ и $\Phi(0) = 0$. Пусть $\widehat{y} = 0$. Ясно, что функция Φ непрерывна, дифференцируема в нуле, $\Phi'(0) = 1$ и тем самым $\Phi'(0)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Условия следствия 1 выполнены, но обратная функция не единственна. Действительно, рассмотрим последовательность $y_k = 1/2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$. Элементарно проверяется, что $\Phi'(y_k) = 0$ и $\Phi''(y_k) < 0$, т. е. в точках y_k у функции Φ строгие локальные максимумы. Поскольку $\Phi(y_k) = y_k$, то для каждого k и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение $\Phi(y) = y_k - \varepsilon$ имеет по крайней мере два решения. Так как $y_k \to 0$ при $k \to \infty$, то тем самым в любой окрестности нуля существует такая точка x, что уравнение $\Phi(y) = x$ имеет по крайней мере два решения.

Теперь рассмотрим вопрос о непрерывности обратной функции. Воспользуемся этим же примером. Пусть φ — обратная функция. Предположим, что она непрерывна в некоторой окрестности нуля U. Так как, очевидно, $\varphi'(0) = 1$, то φ на U принимает все значения из некоторой окрестности нуля V. Пусть $k \in \mathbb{N}$ столь большое, что $y_k = 1/2\pi k \in V$ и $x_k \in U$ таково, что $\varphi(x_k) = y_k$. Как показано выше, в точке y_k функция Φ имеет строгий локальный максимум, и поэтому для всех $x \in U$, достаточно близких к x_k, имеем

$$\Phi(\varphi(x)) \leqslant \Phi(\varphi(x_k)) = \Phi(y_k).$$

Для этих же x, согласно следствию 1, $\Phi(\varphi(x)) = x$, что приводит к противоречию: $x \leqslant x_k$ в окрестности x_k!

Предположения следствий, приводимых ниже, гарантируют и непрерывность неявной (обратной) функции. Однако на доказательстве этого останавливаться не будем.

Следствие 4. (Единственность неявной функции). *Пусть в теореме* П 2.1 $A = \mathbb{R}^n$, $s = n$ *и условие* 3) *заменено следующим*:

3′) *существует производная* $F_y(\widehat{x}, \widehat{y})$ *и при этом для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $\delta_1(\varepsilon) > 0$ *и* $\delta_2(\varepsilon) > 0$, *что для всех* $x \in U_{\delta_1}(\widehat{x}; \mathbb{R}^k) \cap M$ *и* $y_i \in U_{\delta_2}(\widehat{y}; \mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, *справедливо соотношение*[1]

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2) - F_y(\widehat{x}, \widehat{y})(y_1 - y_2)| \leqslant \varepsilon |y_1 - y_2|.$$

Тогда существуют окрестности U *и* V *точек* $\widehat{x}$ *и* $\widehat{y}$ *соответственно, неявная функция* $\varphi\colon U \cap M \to V$ *и константа* $K > 0$ *такие, что*

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

и

$$|\varphi(x) - \widehat{y}| \leqslant K |F(x, \widehat{y})|$$

[1] Если отображение F не зависит от переменной x, то условие 3′) известно как условие строгой дифференцируемости отображения F в точке $\widehat{y}$ (см., например, [АТФ])

для всех $x \in U \cap M$, *и при этом если* $(x, y) \in (U \cap M) \times V$ *и* $F(x, y) = 0$, *то* $y = \varphi(x)$.

Доказательство. Очевидно, что условие 3$'$) влечет условие 3) теоремы П2.1. Пусть U — окрестность точки $\widehat{x}$, отображение φ и константа $K > 0$ из этой теоремы. Из 4) следует, что матрица $F_y(\widehat{x}, \widehat{y})$ обратима. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}\|F_y^{-1}(\widehat{x}, \widehat{y})\|^{-1}$ и возьмем $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, отвечающие этому ε в силу условия 3$'$). Уменьшая окрестность U, будем считать, что $U \subset \subset U_{\delta_1}(\widehat{x}; \mathbb{R}^k)$ и $|\varphi(x) - \widehat{y}| \leqslant \delta_2/2$ для любого $x \in U \cap M$. Положим $V = U_{\delta_2/2}(\widehat{y}; \mathbb{R}^n)$. Тогда $|\varphi(x) - y| \leqslant \delta_2$ для любых $x \in U \cap M$ и $y \in V$.

Теперь докажем единственность. Пусть $(x, y) \in (U \cap M) \times V$ и $F(x, y) = 0$. Тогда имеем:

$$
\begin{aligned}
|y - \varphi(x)| &= |F_y^{-1}(\widehat{x}, \widehat{y}) F_y(\widehat{x}, \widehat{y})(y - \varphi(x))| \leqslant \\
&\leqslant \|F_y^{-1}(\widehat{x}, \widehat{y})\| |F_y(\widehat{x}, \widehat{y})(y - \varphi(x))| = \\
= \|F_y^{-1}(\widehat{x}, \widehat{y})\| \; &|F(x, y) - F(x, \varphi(x)) - F_y(\widehat{x}, \widehat{y})(y - \varphi(x))| \leqslant \\
&\leqslant \|F_y^{-1}(\widehat{x}, \widehat{y})\| \; \frac{1}{2}\|F_y^{-1}(\widehat{x}, \widehat{y})\|^{-1} \; |y - \varphi(x)| = \\
&= \frac{1}{2}|y - \varphi(x)|,
\end{aligned}
$$

т. е. $y = \varphi(x)$. □

Следствие 5. (Единственность обратной функции). *Пусть отображение* $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *дифференцируемо в точке* $\widehat{y}$, *матрица* $\Phi'(\widehat{y})$ *обратима и отображение* Φ *строго дифференцируемо в точке* $\widehat{y}$, *т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $y_i \in U_\delta(\widehat{y}; \mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, *справедливо соотношение*

$$
|\Phi(y_1) - \Phi(y_2) - \Phi'(\widehat{y})(y_1 - y_2)| \leqslant \varepsilon |y_1 - y_2|. \qquad (*)
$$

Тогда существует окрестности U *и* V *точек* $\Phi(\widehat{y})$ *и* $\widehat{y}$ *соответственно, обратная функция* $\varphi\colon U \to V$ *и константа* $K > 0$ *такие, что*

$$
\Phi(\varphi(x)) = x \quad \text{и} \quad |\varphi(x) - \widehat{y}| \leqslant K|x - \Phi(\widehat{y})|
$$

для всех $x \in U$, *и при этом если* $(x, y) \in U \times V$ *и* $\Phi(y) = x$, *то* $y = \varphi(x)$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что соотношение $(*)$ гарантирует непрерывность Φ в некоторой окрестности точки $\widehat{y}$. Поэтому все условия следствия 1 для $A = \mathbb{R}^n$ и $s = n$, выполнены. Остальные рассуждения такие же, как при доказательстве следствия 4. □

Необходимые условия экстремума в конечномерных задачах

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$f_0(x) \to \text{extr}, \quad x \in A, \tag{1}$$
$$f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m', \quad f_i(x) = 0,\ i = m' + 1, \ldots, m.$$

Здесь функции f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, определены на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, имеющем непустую внутренность.

Свяжем с задачей (1) функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа.

Теорема П 2.2. (Необходимые условия экстремума в задаче (1)). *Пусть в задаче* (1) *функции*

$$f_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant m,$$

непрерывны на A *и дифференцируемы в точке* $\widehat{x}$ *относительно множества* A.

Тогда если $\widehat{x}$ — *локальный экстремум в* (1), *то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа*

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

такой, что $\lambda_0 \geqslant 0$ $(\lambda_0 \leqslant 0)$, *если задача на минимум (максимум), и при этом*

(a) $\lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m'$;

(b) $\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m'$;

(c) $\min\limits_{x \in A} \mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda) \cdot x = \mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda) \cdot \widehat{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \min\limits_{x \in A} \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) \cdot x = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) \cdot \widehat{x}.$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}$ — локальный экстремум в задаче (1). Можно считать, что

$$f_i(\widehat{x}) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m' + 1.$$

Действительно, отбросим те ограничения, для которых $f_i(\widehat{x}) < 0$. Легко понять, что $\widehat{x}$ — локальный экстремум и в новой задаче. Если для нее будут доказаны условия (a) и (c), то (b) будет выполняется автоматически. Дополнив найденный набор множителей Лагранжа нулевыми компонентами, соответствующими тем номерам, где $f_i(\widehat{x}) < 0$, получим утверждения (a), (b), (c) для исходной задачи.

Пусть, для определенности, $\widehat{x}$ — локальный минимум. Рассмотрим отображение

$$\Phi \colon A \times \mathbb{R}_+^{m'+1} \to \mathbb{R}^{m+1},$$

определенное по правилу

$$\Phi(x, u) =$$
$$= (f_0(x) + u_0, f_1(x) + u_1, \ldots, f_{m'}(x) + u_{m'}, f_{m'+1}(x), \ldots, f_m(x))^T.$$

Ясно, что $\Phi(\widehat{x}, 0) = (f_0(\widehat{x}), 0)$. Из дифференцируемости функций f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, в точке $\widehat{x}$ следует дифференцируемость отображения Φ в точке $(\widehat{x}, 0)$ относительно множества A ($\Phi'(\widehat{x}, 0)$ — матрица, строки которой суть $(f_0'(\widehat{x}), 1, 0, \ldots, 0)$, $(f_1'(\widehat{x}), 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(f_{m'}'(\widehat{x}), 0, \ldots, 0, 1)$, $(f_{m'+1}'(\widehat{x}), 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(f_m'(\widehat{x}), 0, \ldots, 0)$), а из непрерывности функций f_i на множестве A следует непрерывность отображения Φ на множестве $A \times \mathbb{R}_+^{m'+1}$.

Покажем, что

$$\Phi'(\widehat{x},0)[(\widehat{x},0)] \notin \operatorname{int}\Phi'(\widehat{x},0)(A\times\mathbb{R}_+^{m'+1}).$$

Если это не так, то согласно следствию 1 (условия которого, очевидно, выполнены и где роли $\widehat{y}$ и A играют соответственно $(\widehat{x},0)$ и $A\times\mathbb{R}_+^{m'+1}$) найдутся окрестность U точки $(f_0(\widehat{x}),0)$, отображение $\varphi\colon U\to A\times\mathbb{R}_+^{m'+1}$ и константа $K>0$ такие, что $|\varphi(y)-(\widehat{x},0)|\leqslant K|y-(f_0(\widehat{x}),0)|$ для всех $y\in U$. В частности, для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ вектор $y_\varepsilon=(f_0(\widehat{x})-\varepsilon,0)$ принадлежит U и $|\varphi(y_\varepsilon)-(\widehat{x},0)|\leqslant K\varepsilon$. Отсюда следует, что какова бы ни была окрестность W точки $\widehat{x}$, найдутся такие $x_\varepsilon\in W\cap A$ и $u_\varepsilon=(u_{0\varepsilon},\dots,u_{m'\varepsilon})^T\in\mathbb{R}_+^{m'+1}$, что $f_0(x_\varepsilon)+u_{0\varepsilon}=f_0(\widehat{x})-\varepsilon$, $f_1(x_\varepsilon)+u_{1\varepsilon}=0,\dots,f_{m'}(x_\varepsilon)+u_{m'\varepsilon}=0$, $f_{m'+1}(x_\varepsilon)=0,\dots,f_m(x_\varepsilon)=0$, т. е. точка x_ε допустима в задаче (1), но $f_0(x_\varepsilon)\leqslant f_0(x_\varepsilon)+u_{0\varepsilon}=f_0(\widehat{x})-\varepsilon<f_0(\widehat{x})$ в противоречии с тем, что $\widehat{x}$ — локальный минимум. Таким образом,

$$\Phi'(\widehat{x},0)[(\widehat{x},0)] \notin \operatorname{int}\Phi'(\widehat{x},0)(A\times\mathbb{R}_+^{m'+1}).$$

Множество $Q=\Phi'(\widehat{x},0)(A\times\mathbb{R}_+^{m'+1})$ выпукло, поэтому выпукло и множество $\operatorname{int}Q$. Пусть сначала $\operatorname{int}Q\neq\varnothing$. По доказанному $\Phi'(\widehat{x},0)[(\widehat{x},0)]\notin\operatorname{int}Q$. Следовательно, по теореме отделимости для выпуклых множеств (см., например, [КФ], [МИТ]) существует такой ненулевой вектор $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, что для всех $y\in\operatorname{int}Q$ справедливо неравенство $\lambda\cdot y\geqslant\lambda\cdot\Phi'(\widehat{x},0)[(\widehat{x},0)]$, которое, очевидно, справедливо и для всех $y\in Q$. Но так как $y=(f_0'(\widehat{x})\cdot x+u_0, f_1'(\widehat{x})\cdot x+u_1,\dots,f_{m'}'(\widehat{x})\cdot x+u_{m'}, f_{m'+1}(\widehat{x})\times x,\dots,f_m'(\widehat{x})\cdot x)^T$, то это неравенство означает, что

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i'(\widehat{x})\cdot x+\sum_{i=0}^{m'}\lambda_i u_i\geqslant\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i'(\widehat{x})\cdot\widehat{x},\quad\forall\,(x,u)\in A\times\mathbb{R}_+^{m'+1},\tag{i}$$

где $u=(u_0,u_1,\dots,u_{m'})^T$.

Полагая в (i) $x=\widehat{x}$, находим, что $\lambda_i\geqslant0$, $0\leqslant i\leqslant m'$, т. е. получаем утверждение (a) теоремы, а полагая $u=0$, получаем утверждение (c). Если $\widehat{x}$ — локальный максимум, то в качестве первой компоненты $\Phi(x, u)$ надо взять $f_0(x) - u_0$. Все рассуждения остаются прежними, но из (i) будет следовать, что $\lambda_0 \leqslant 0$.

Пусть теперь $\operatorname{int} Q = \varnothing$. В этом случае Q лежит в некоторой гиперплоскости, т. е. существует такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, что справедливо (i), но со знаком равенства. Из этого равенства при $x = \widehat{x}$ следует, что $\lambda_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant m'$ и, очевидным образом, выполняется утверждение (c) теоремы. □

Сформулируем теперь наиболее важные следствия этого результата.

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции

$$f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

определены на множестве $U \cap (\widehat{x} + \mathbb{R}^n_+)$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered} f_0(x) \to \operatorname{extr}, \quad x \in U \cap (\widehat{x} + \mathbb{R}^n_+), \\ f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m', \quad f_i(x) = 0,\ i = m'+1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{2}$$

Следствие 1. *Пусть в задаче* (2) *функции* f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *непрерывны на* $U \cap (\widehat{x} + \mathbb{R}^n_+)$ *и дифференцируемы в точке* $\widehat{x}$ (*относительно множества* $(\widehat{x} + \mathbb{R}^n_+)$).

Тогда если $\widehat{x}$ — *локальный экстремум в* (2), *то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *такой, что* $\lambda_0 \geqslant 0$ $(\lambda_0 \leqslant 0)$, *если задача на минимум* (*максимум*), *и*

(a) $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m'$;

(b) $\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m'$;

(c) $\mathcal{L}_x(\widehat{x} + 0, \lambda) \geqslant 0 \iff \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\widehat{x} + 0) \geqslant 0$,

где $f_i'(\widehat{x} + 0)$ — *производная справа функции* f_i *в точке* $\widehat{x}$, $0 \leqslant i \leqslant m$.

Доказательство. Легко видеть, что в данном случае

$$f_i'(\widehat{x}) = f_i'(\widehat{x} + 0), \quad 0 \leqslant i \leqslant m,$$

и утверждение (c) теоремы равносильно тому, что

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}+0) \cdot x \geqslant 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$, что, в свою очередь, равносильно последнему утверждению следствия. □

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции

$$f_i, \quad i = 0, 1 \ldots, m,$$

определены на U. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} &f_0(x) \to \mathrm{extr}, \\ &f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m', \quad f_i(x) = 0,\ i = m'+1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3}$$

Следствие 2. *Пусть в задаче* (3) *функции f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, непрерывны на U и дифференцируемы в $\widehat{x}$.*

Тогда если $\widehat{x}$ — локальный экстремум в (3), *то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_m)$ такой, что $\lambda_0 \geqslant 0$ ($\lambda_0 \leqslant 0$), если задача на минимум (максимум), и при этом*

(a) $\lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m'$;

(b) $\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m'$;

(c) $\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0 \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0$.

Доказательство. Здесь $A = \mathbb{R}^n$ и поэтому соотношение (c) теоремы возможно лишь в том случае, когда

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0. \qquad \square$$

Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции

$$f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

определены на U. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Следствие 3. (Правило множителей Лагранжа). *Пусть в задаче* (4) *функции* f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *непрерывны на* U *и дифференцируемы в точке* $\widehat{x}$.

Тогда если $\widehat{x}$ — *локальный экстремум в* (4), *то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *такой, что*

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0 \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0.$$

Правило множителей Лагранжа, приведенное в Приложении I, сформулировано в классических предположениях непрерывной дифференцируемости функций f_i в окрестности данной точки. Оно, конечно, является следствием этого результата. Несмотря на то, что в формулировках всех утверждений данного пункта фигурируют лишь производные этих функций в точке, отказаться от непрерывности функций в окрестности экстремальной точки, как показывает следующий пример, нельзя.

Пусть D — функция Дирихле (равная 1 в рациональных точках и 0 — в иррациональных), $f_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1$, где

$$f_0(x) = x_1,$$
$$f_1(x) = \begin{cases} x_1^2 x_2 + x_2, & \text{если } x_2 \neq 0, \\ x_1^2(D(x_1) + 1), & \text{если } x_2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \operatorname{extr}, \quad f_1(x) = 0.$$

Единственная допустимая точка — это нуль, и поэтому она является решением данной задачи. Ясно, что $f_0'(0) = (1, 0)$ и нетрудно проверить, что функция f_1 дифференцируема в нуле и $f_1'(0) = (0, 1)$. Кроме того, f_1 имеет разрывы в любой окрестности нуля. Если бы было справедливо заключение следствия 3, то это означало бы, что векторы $f_0'(0)$ и $f_1'(0)$ линейно зависимы, что, очевидно, не так.

Сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений

При доказательстве части (c) теоремы 1 §1 мы будем опираться на следующее утверждение о дифференцируемой зависимости от параметров решения дифференциального уравнения в случае, когда правая часть уравнения кусочно непрерывная функция.

Лемма П 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 §1, $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}$ — *совокупность пар* $(\tau_i, v_i) \in [t_0, t_1] \times U$, $1 \leqslant i \leqslant N$, *где* $t_0 < \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_N < t_1$ *и точки* τ_i *принадлежат* T — *множеству точек непрерывности* $\widehat{u}(\cdot)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N_+$, *причем* α_i *столь малы, что отрезки*

$$\Delta_i = \Delta_i(\overline{\alpha}) = [\tau_i + i\sum_{j=1}^{N} \alpha_j, \tau_i + i\sum_{j=1}^{N} \alpha_j + \alpha_i], \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

не пересекаются и принадлежат T. *Пусть, наконец,*

$$u_{\overline{\alpha}}(t; \mathcal{N}) = \begin{cases} \widehat{u}(t), & \textit{если } t \in [t_0, t_1] \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i, \\ v_i, & \textit{если } t \in \Delta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N. \end{cases}$$

Тогда найдется такая окрестность нуля V *в* $\mathbb{R}^N$, *что для любого* $\overline{\alpha} \in V \cap \mathbb{R}^N_+$ *существует решение* $x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ *задачи Коши*

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_{\overline{\alpha}}(t; \mathcal{N})), \quad x(t_0) = x_0, \qquad (*)$$

определенное на всем отрезке $[t_0, t_1]$. *Кроме того,* $x_{\overline{\alpha}}(\cdot, \mathcal{N}) \to \widehat{x}(\cdot)$ *при* $\overline{\alpha} \to 0$ *равномерно на* $[t_0, t_1]$, *для каждого* $t \in [t_0, t_1]$ *отображение* $\overline{\alpha} \to x_{\overline{\alpha}}(t; \mathcal{N})$ *непрерывно дифференцируемо на* $V \cap \mathbb{R}^N_+$ (*если в точке* $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N_+$ *i-ая координата* $\alpha_i = 0$, *то соответствующая частная производная понимается как производная справа*) *и его частные производные в нуле на* $[t_0, t_1]$ *удовлетворяют уравнениям*:

$$\dot{y} = \widehat{\varphi}_x(t) y, \quad y(\tau_i) = \Delta_{\tau_i v_i} \varphi, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad (**)$$

где $\Delta_{\tau_i v_i} \varphi = \varphi(\tau_i, \widehat{x}(\tau_i), v_i) - \varphi(\tau_i, \widehat{x}(\tau_i), \widehat{u}(\tau_i))$.

Доказательство этого утверждения может быть получено, опираясь лишь на стандартные теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений и их дифференцируемой зависимости от параметров. Для случая, когда $N = 1$ это доказано в [АТФ]. Для произвольного N лемма П 2.3 доказана там же как следствие более общих утверждений.

Следствие. *Существует такая окрестность нуля V_0 в $\mathbb{R}^N$, что функция*

$$\overline{\alpha} \to g_0(\overline{\alpha}; \mathcal{N}) = J(x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), u_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}))$$

непрерывно дифференцируема на $V_0 \cap \mathbb{R}^n_+$ и при этом

$$\frac{\partial g_0}{\partial \alpha_i}(0+0; \mathcal{N}) = \Delta_{\tau_i v_i} f + \int\limits_{\tau_i}^{t_1} \widehat{f}_x(t) \cdot y_{\tau_i v_i}(t)\, dt, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad (***)$$

где

$$\Delta_{\tau_i v_i} f = f(\tau_i, \widehat{x}(\tau_i), v_i) - f(\tau_i, \widehat{x}(\tau_i), \widehat{u}(\tau_i))$$

и $y_{\tau_i v_i}(\cdot)$ — решение уравнения $(**)$ из леммы П 2.3.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши:

$$\dot{z} = \psi(t, z, u_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})), \quad z(t_0) = z_0, \tag{i}$$

где

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad z(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(t, z, u) = \begin{pmatrix} \varphi(t, x, u) \\ f(t, x, u) \end{pmatrix}.$$

По лемме П 2.3 для всех достаточно малых $\overline{\alpha} \geqslant 0$ существует решение

$$\widetilde{z}_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) = (\widetilde{x}_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), \widetilde{y}_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}))^T$$

задачи (i), которое при каждом $t \in [t_0, t_1]$ непрерывно дифференцируемо по $\overline{\alpha}$. Далее, ясно, что $\widetilde{x}_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) = x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ и так как

$$y_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\bigl(t, x_{\overline{\alpha}}(t; \mathcal{N}), u_{\overline{\alpha}}(t; \mathcal{N})\bigr) dt = J\bigl(x_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), u_{\overline{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})\bigr),$$

то первая часть следствия доказана.

Обозначим $\overline{\alpha}_i = (0,\dots,0,\alpha_i,0\dots,0)^T$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Тогда легко видеть, что $u_{\overline{\alpha}_i}(t;\mathcal{N}) = \widehat{u}(t)$, если $t \notin [\tau_i + i\alpha_i, \tau_i + (i+1)\alpha_i]$, и $u_{\overline{\alpha}_i}(t;\mathcal{N}) = v_i$, если $t \in [\tau_i + i\alpha_i, \tau_i + (i+1)\alpha_i]$. По определению (не отмечая для краткости зависимость фазовой переменной и управления от $\mathcal{N}$) имеем:

$$\frac{\partial g_0}{\partial \alpha_i}(0+0;\mathcal{N}) = \lim_{\alpha_i \downarrow 0} \frac{g_0(\overline{\alpha}_i) - g_0(0)}{\alpha_i} =$$

$$= \lim_{\alpha_i \downarrow 0} \frac{1}{\alpha_i} \int\limits_{\tau_i + i\alpha_i}^{\tau_i+(i+1)\alpha_i} \big(f(t, x_{\overline{\alpha}_i}(t), v_i) - f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))\big)\, dt +$$

$$+ \lim_{\alpha_i \downarrow 0} \frac{1}{\alpha_i} \int\limits_{\tau_i+(i+1)\alpha_i}^{t_1} \big(f(t, x_{\overline{\alpha}_i}(t), \widehat{u}(t)) - f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))\big)\, dt.$$

Второе слагаемое справа — это производная в нуле интеграла по параметру, к которому применима теорема П 1.3, так как функция $x_{\overline{\alpha}_i}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по α_i, а отрезок $[\tau_i, t_1]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых функция $\widehat{u}(\cdot)$ непрерывна. К первому интегралу применим теорему о среднем для интегралов и тогда в итоге получим:

$$\frac{\partial g_0}{\partial \alpha_i}(0+0;\mathcal{N}) =$$

$$= \lim_{\alpha_i \downarrow 0}\big(f(\xi, x_{\overline{\alpha}_i}(\xi), v_i) - f(\xi, \widehat{x}(\xi), \widehat{u}(\xi)\big) + \int\limits_{\tau_i}^{t_1} \widehat{f}_x(t) \cdot y_{\tau_i v_i}(t)\, dt,$$

где $\xi \in [\tau_i + i\alpha_i, \tau_i + (i+1)\alpha_i]$. Когда $\alpha_i \to 0$, то, очевидно, $\xi \to \tau_i$, $x_{\overline{\alpha}_i} \to \widehat{x}(\tau_i)$ по лемме П 2.3 и $\widehat{u}(\xi) \to \widehat{u}(\tau_i)$, так как $\widehat{u}(\cdot)$ непрерывна в точке τ_i. Второе утверждение следствия доказано. $\square$

Теорема существования

Пусть $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$ и $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — функция переменных $t, x, \dot{x}$. Рассмотрим задачу

$$
\begin{gathered}
J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min, \\
|\dot{x}(t)| \leqslant A \ \text{для п. в.}\, t, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1
\end{gathered} \tag{P_{0A}}
$$

на пространстве $W^1_\infty([t_0, t_1])$ функций, удовлетворяющих условию Липшица, т. е. таких функций $x(\cdot)$, для которых существует число $L = L(x(\cdot)) > 0$ (константа Липшица), что $|x(t+h) - x(t)| \leqslant L|h|$ для любых $t \in [t_0, t_1]$ и h таких, что $t+h \in [t_0, t_1]$. Функция, удовлетворяющая условию Липшица на $[t_0, t_1]$, абсолютно непрерывна на этом отрезке и тем самым почти всюду дифференцируема на нем.

Теорема (существования). *Пусть в задаче* (P_{0A}) *функция* L *непрерывна на* $\mathbb{R}^3$ *вместе со своей частной производной по* $\dot{x}$ *и для каждых* t *и* x *функция* $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$ *выпукла.*

Тогда в задаче (P_{0A}) *существует решение, принадлежащее* $W^1_\infty([t_0, t_1])$.

Доказательство. Пусть $\{x_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — минимизирующая последовательность в (P_{0A}). Поскольку ясно, что у допустимых в (P_{0A}) функций константа Липшица равна A, то все члены последовательности ограничены числом $|x_0| + A(t_1 - t_0)$ и сама последовательность равностепенно непрерывна. По теореме Арцела (см. [КФ] стр. 128–130) из $\{x_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной функции $\widehat{x}(\cdot)$. Будем считать, что сама последовательность сходится к этой функции. Очевидно, что $\widehat{x}(\cdot)$ — липшицева с той же константой A, $\widehat{x}(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$, и тем самым допустима в задаче (P_{0A}). Понятно, что последовательность $\{\dot{\widehat{x}}(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в $L_2([t_0, t_1])$ и поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции $z(\cdot) \in L_2([t_0, t_1])$. Будем считать, что сама последовательность сходится к этой функции. Тогда, переходя к пределу в равенстве $x_n(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}_n(\tau)d\tau$, получаем, что $\widehat{x}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и значит, $\dot{\widehat{x}}(t) = z(t)$ для п. в. $t \in [t_0, t_1]$.

Покажем, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ является решением задачи (P_{0A}). В выкладках ниже мы используем тот элементарно проверяемый факт, что если функция $y(\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}$ и дифференцируема в точке τ, то для любого $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $y(\xi) - y(\tau) \geqslant \dot{y}(\tau)(\xi - \tau)$. Итак, имеем:

$$J(x_n(\cdot)) - J(\widehat{x}(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (L(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)) - L(t, x_n(t), \dot{\widehat{x}}(t)))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} (L(t, x_n(t), \dot{\widehat{x}}(t)) - L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)))\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} (\dot{x}_n(t) - \dot{\widehat{x}}(t)) L_{\dot{x}}(t, x_n(t), \dot{\widehat{x}}(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} (L(t, x_n(t), \dot{\widehat{x}}(t)) - L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)))\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} (\dot{x}_n(t) - \dot{\widehat{x}}(t))(L_{\dot{x}}(t, x_n(t), \dot{\widehat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} (\dot{x}_n(t) - \dot{\widehat{x}}(t)) L_{\dot{x}}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} (L(t, x_n(t), \dot{\widehat{x}}(t)) - L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)))\, dt.$$

Первый интеграл в правой части выписанных соотношений стремится к нулю при $n \to \infty$, так как первый сомножитель в подынтегральной функции по модулю не превосходит $2A$, а второй — равномерно стремится к нулю в силу непрерывности функции $L_{\dot{x}}$ и равномерной сходимости $x_n(\cdot)$ к $\widehat{x}(\cdot)$. Второй интеграл справа стремится к нулю вследствие того, что $\dot{x}_n(\cdot)$ слабо сходится к $\dot{\widehat{x}}(\cdot)$. Третий интеграл стремится к нулю по тем же соображениям, что и первый. Тогда, обозначая через S значение задачи (P_{0A}) и переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношениях выше, получаем, что $S - J(\widehat{x}(\cdot)) \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\widehat{x}(\cdot)$ — решение задачи (P_{0A}). □

Замечание. Утверждение теоремы существования, очевидно, справедливо и для задачи со свободным правым концом.

Некоторые леммы

Функция $f\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ переменных (t, x) называется *функцией типа Каратеодори*, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $t \to f(t, x)$ измерима на $[t_0, t_1]$ и для п. в. $t \in [t_0, t_1]$ функция $x \to f(t, x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Лемма П2.4. *Пусть $f\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция типа Каратеодори и $u\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — измеримое отображение.*

Тогда функция $t \to f(t, u(t))$ измерима на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Как и раньше, $U_r(x)$ обозначает открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x. Пусть $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{R}^n$ (например, совокупность всех векторов с рациональными координатами). Для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим отображение $u_i\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ по правилу: $u_i(t) = x_j$, где j — минимальный из тех номеров, для которых $u(t) \in U_{1/i}(x_j)$. Отображения $u_i(\cdot)$ измеримы. Действительно, если обозначить через D_{ij} прообраз $U_{1/i}(x_j)$ при отображении $u(\cdot)$, то $u_i(t) = x_j$ тогда и только тогда, когда t принадлежит измеримому множеству $D_{ij} \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} D_{ik}$, если $j \geqslant 2$, и D_{i1}, если $j = 1$, и поэтому прообраз открытого множества при отображении $u_i(\cdot)$ есть не более чем счетное объединение таких множеств. Из определений $u_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, сразу следует, что $u_i(t) \to u(t)$ при $i \to \infty$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Функции $t \to f(t, u_i(t))$, $i \in \mathbb{N}$, измеримы как суперпозиции измеримых функций с непрерывными (см. [КФ]) и, следовательно, измерима функция $t \to f(t, u(t)) = \lim_{i\to\infty} f(t, u_i(t))$ как предел измеримых функций [КФ]. $\square$

Лемма П 2.5. *Пусть $f\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция типа Каратеодори и, более того, f локально липшицева по x равномерно по t, т. е. для каждого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ найдется такая константа $L(A)$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L(A)|x_1 - x_2|$ для всех $x_1, x_2 \in A$ и $t \in [t_0, t_1]$ и, кроме того, функция $t \to f(t, x)$ измерима на $[t_0, t_1]$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $M \subset [t_0, t_1]$, что $(t_1 - t_0) - \operatorname{mes} M < \varepsilon$ и функция $(t, x) \to f(t, x)$ непрерывна на $M \times \mathbb{R}^n$

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{R}^n$. По условию для каждого $i \in \mathbb{N}$ функция $t \to f(t, x_i)$ измерима, и тогда согласно теореме Лузина найдется такое замкнутое множество $M_i \subset [t_0, t_i]$, что $(t_1 - t_0) - \operatorname{mes} M_i < 2^{-i}\varepsilon$ и функция $f(\cdot, x_i)$ непрерывна на M_i. Положим $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$. Тогда ясно, что M замкнуто и $(t_1 - t_0) - \operatorname{mes} M < \varepsilon$. Покажем, что это множество искомое. Сначала проверим, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $t \to f(t, x)$ непрерывна на M. Действительно, пусть $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — подпоследовательность $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к x. Функции $f(\cdot, x_{i_k})$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывны на M и, если A — ограниченное множество, которому принадлежит последовательность $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, то мы имеем

$$|f(t, x_{i_k}) - f(t, x)| \leqslant L(A)|x_{i_k} - x|$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$. Это означает, что $f(\cdot, x_{i_k})$ сходится равномерно к $f(\cdot, x)$ на M и тем самым функция $f(\cdot, x)$ непрерывна на M.

Пусть теперь $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in M \times \mathbb{R}^n$ и $(t_j, x_j) \to (\widehat{t}, \widehat{x})$ при $j \to \infty$, $t_j \in M$, и A — ограниченное множество, которому принадлежит последовательность $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда

$$|f(t_j, x_j) - f(\widehat{t}, \widehat{x})| \leqslant |f(t_j, x_j) - f(t_j, \widehat{x})| + |f(t_j, \widehat{x}) - f(\widehat{t}, \widehat{x})| \leqslant \\ \leqslant L(A)|x_j - \widehat{x}| + |f(t_j, \widehat{x}) - f(\widehat{t}, \widehat{x})|,$$

откуда сразу следует нужное утверждение. □

Пусть отображение $\varphi\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ измеримо по t при каждом x, непрерывно дифференцируемо по x для почти всех t и вместе с φ_x ограничено на любом ограниченном множестве в $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу Коши на $[t_0, t_1]$

$$\dot{x} = \varphi(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

и пусть $x_0(\cdot)$ — ее решение. Пусть, далее, числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \neq 0$, и последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ и $\lim_{k\to\infty} \eta_k = \eta$.

Лемма П 2.6. *При больших k существует решение $x_k(\cdot)$ на $[t_0, t_1]$ задачи Коши*

$$\dot{x} = \varphi(t, x), \quad x_k(t_0) = x_0 + \varepsilon_k \eta_k,$$

причем

$$\varepsilon_k^{-1}(x_k(t) - x_0(t)) \to z(t) \ \textit{равномерно на}\ [t_0, t_1],$$

где $z(\cdot)$ — решение уравнения в вариациях на $[t_0, t_1]$

$$\dot{z} = \varphi_x(t, x_0(t))z, \quad z(t_0) = \eta.$$

Доказательство опирается на стандартные утверждения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и поэтому мы его не приводим.

Задачи

Здесь представлено 40 задач для самостоятельного решения. Ко всем задачам даны ответы, а к некоторым — указания к решению.

1. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t))\, dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = 0.$

2. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t))\, dt \to \min, \quad x(0) = 0.$

3. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t))\, dt \to \min, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant 1, \quad x(0) = 0.$

4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t))\, dt \to \min,$
$|\dot{x}(t)| \leqslant 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = 0.$

5. $\int\limits_1^{2} t^2\dot{x}^2(t)\, dt \to \min, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 1.$

6. $\int\limits_0^{1} t^2\dot{x}^2(t)\, dt \to \min, \ x(0) = 0, \quad x(1) = 1$ (пример Вейерштрасса).

7. $\int\limits_0^{1} t^{2/3}\dot{x}^2(t)\, dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$ (пример Гильберта).

8. $\int\limits_0^{1} (\dot{x}^2(t) - x(t))\, dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$

9. $\int\limits_1^{2} (t\dot{x}^2(t) - x(t))\, dt \to \min, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 1.$

10. $\int\limits_0^{1} (\dot{x}^2(t) + x(t)\dot{x}(t) + 12tx(t))\, dt \to \min, \ x(0) = 1, \ x(1) = 4.$

11. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) - 4x(t)t)\,dt + 2x^2(1) - 2x(0) \to \min.$

12. $\int\limits_0^2 (\dot{x}^2(t) + x(t)(t^2-2))\,dt + x^2(0) + 2x(2) \to \min.$

13. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x^2(t))\,dt \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi.$

14. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x^2(t))\,dt \to \min,$
$|\dot{x}(t)| \leqslant 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi.$

15. $\int\limits_0^1 (\frac{\dot{x}^2(t)+x^2(t)}{2} + |\dot{x}(t)|)\,dt \to \min, \quad x(1) = \xi.$

16. $\int\limits_{-1}^1 ((|\dot{x}(t)| - 1)_+^2 + x^2(t))\,dt \to \min,\ x(-1) = \xi,\ x(1) = \xi.$

17. $\int\limits_0^{T_0} \dot{x}^2(t)\,dt - \alpha x^2(T_0) \to \min, \quad x(0) = 0.$

18. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt \to \min, \quad \int\limits_0^1 x(t)\,dt = 3, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 6.$

19. $\int\limits_0^{T_0} \dot{x}^2(t)\,dt \to \max, \quad \int\limits_0^{T_0} x^2(t)\,dt \leqslant 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = 0.$

20. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + 6tx(t))\,dt \to \min, \quad \int\limits_0^1 x(t)\,dt = 0, \quad x(0) = 0,$
$x(1) = 1.$

21. $\int\limits_0^{\pi} \dot{x}^2(t)\,dt \to \min, \quad \int\limits_0^{\pi} x(t)\sin t\,dt = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$

22. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt \to \min, \quad \int\limits_0^1 x(t)\,dt = -1.5, \quad \int\limits_0^1 tx(t)\,dt = -2,$
$x(0) = 2, \quad x(1) = -14.$

23. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt \to \min, \quad \int\limits_0^1 tx(t)\,dt = 0, \quad x(0) = -4, \quad x(1) = 4.$

24. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2(t)\,dt \to \min, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1.$

25. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2(t)\,dt \to \min, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

26. $\int\limits_0^2 x(t)\,dt \to \min,\ -4 \leqslant \ddot{x}(t) \leqslant 2,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(2) = -2.$

27. $\int\limits_0^{T_0} x(t)\,dt \to \min, \quad |\ddot{x}(t)| \leqslant 1, \quad x(0) = x(T_0) = 0.$

28. $\int\limits_0^{T_0} x(t)\,dt \to \min, \quad |\ddot{x}(t)| \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = 0.$

29. $\int\limits_0^{T_0} x(t)\,dt \to \min, \quad |\ddot{x}(t)| \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0.$

30. $\int\limits_0^1 x(t)\,dt \to \min, \quad \int\limits_0^1 \ddot{x}^2(t)\,dt = 144/5, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -4.$

31. $x(2) \to \max, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant 2, \quad x(0) = 0, \quad \int\limits_0^2 \dot{x}^2(t)\,dt = 2.$

32. $T \to \min,\ -1 \leqslant \ddot{x}(t) \leqslant 3,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0,\ x(T) = -1.$

33. $T \to \min, \quad |\ddot{x}(t)| \leqslant 1, \quad x(0) = \xi_1, \quad \dot{x}(0) = \xi_2, \quad x(T) = 0.$

34. $T \to \min,\ \int\limits_0^T \ddot{x}^2(t)\,dt = 4,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(T) = -1.$

35. $T \to \min,\ |\ddot{x}(t)| \leqslant 2,\ x(-1) = -1,\ \dot{x}(-1) = 0,\ x(T) = 1,\ \dot{x}(T) = 0.$

36. $\int\limits_0^T \dot x^2(t)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0, \quad T+x(T)+1=0.$

37. $\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt \to \max, \quad |\dot x(t)| \leqslant 1, \quad x(0)=0$ (найти все экстремали).

38. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot x^2(t)+x^2(t))\,dt \to \min, \quad x(0)=\dot x(0)=0, \quad x(T_0)=\xi_1,$ $\dot x(T_0)=\xi_2.$

39. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot x^2(t)-x^2(t))\,dt \to \min, \quad x(0)=\dot x(0)=x(T_0)=\dot x(T_0)=$ $=0.$

40. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot x^2(t)-x^2(t))\,dt \to \min, \quad x(0)=\dot x(0)=0, \quad x(T_0)=\xi_1,$ $\dot x(T_0)=\xi_2.$

Ответы и указания к решениям

1. $\widehat x(t)=(t^2-T_0t)/4$ — абсолютный минимум.
2. $\widehat x(t)=(t^2-2T_0t)/4$ — абсолютный минимум.
3. Если $T_0 \leqslant 2$, то $\widehat x(t)=(t^2-2T_0t)/4$; если $T_0>2$, то

$$\widehat x(t)=\begin{cases} -t & \text{для } 0\leqslant t\leqslant T_0-2;\\ t(t-2T_0)/4+(T_0-2)^2/4 & \text{для } T_0-2\leqslant t\leqslant T_0.\end{cases}$$

Во всех случаях $\widehat x(\cdot)$ — абсолютный минимум.

4. Если $T_0 \leqslant 4$, то $\widehat x(t)=(t^2-T_0t)/4$; если $T_0>4$, то

$$\widehat x(t)=\begin{cases} -t & \text{для } 0\leqslant t\leqslant \frac{T_0-4}{2};\\ \frac{t(t-T_0)}{4}+\frac{(T_0-4)^2}{16} & \text{для } \frac{T_0-4}{2}\leqslant t\leqslant \frac{T_0+4}{2};\\ t-T_0 & \text{для } \frac{T_0+4}{2}\leqslant t\leqslant T_0.\end{cases}$$

Во всех случаях $\widehat{x}(\cdot)$ — абсолютный минимум.

Указание к задачам 1–4. Надо воспользоваться принципом Лагранжа и найти единственную экстремаль $\widehat{x}(\cdot)$. Тот факт, что это абсолютный минимум проверяется непосредственно. В задачах 3 и 4 можно воспользоваться теоремой существования из Приложения II (экстремаль единственна и решение существует, так что эта экстремаль и есть решение).

5. $\widehat{x}(t) = 4/t - 1$.

6. Значение задачи равно нулю и решение не существует. *Указание*: рассмотрите минимизирующую последовательность $\{x_n(\cdot)\}$, где $x_n(t) = nt$ для $0 \leqslant t \leqslant 1/n$ и $x_n(t) = 1$ для $1/n \leqslant t \leqslant 1$.

7. $\widehat{x}(t) = t^{1/3}$. Отметим, что решение не является непрерывно дифференцируемой функцией.

8. $\widehat{x}(t) = -t^2/4 + 5t/4$ — абсолютный минимум.

9. $\widehat{x}(t) = -t/2 + 3\ln t/(2\ln 2) + 1/2$ — абсолютный минимум.

10. $\widehat{x}(t) = t^3 + 2t + 1$ — абсолютный минимум.

Указание к задачам 8–10. Надо решить соответствующее уравнение Эйлера.

11. $\widehat{x}(t) = -t^3/3 - t + 7/3$ — абсолютный минимум.

12. $\widehat{x}(t) = t^4/24 - t^2/2 - t/3 - 1/3$ — абсолютный минимум.

13. $\widehat{x}(t,\xi) = \xi \sinh t / \sinh T_0$ — абсолютный минимум.

14. Если $|\xi| \cosh T_0 \leqslant 1$, то $\widehat{x}(t,\xi) = \xi \sinh t / \sinh T_0$; если $|\xi| \cosh T_0 > 1$, то

$$\widehat{x}(t,\xi) = \begin{cases} \pm \sinh t / \cosh \tau & \text{для } 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ \pm(\tanh \tau + (t - \tau)) & \text{для } \tau \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$$

где τ — решение уравнения $T_0 - \xi = \tau - \tanh\tau$. Во всех случаях $\widehat{x}(\cdot)$ — абсолютный минимум.

15. Если $|\xi| \leqslant 1$, то $\widehat{x}(t,\xi) = \xi$; если $|\xi| > 1$, то

$$\widehat{x}(t,\xi) = \begin{cases} \eta & \text{для } 0 \leqslant t \leqslant |\eta|^{-1}; \\ \eta\cosh(t - |\eta|^{-1}) & \text{для } |\eta|^{-1} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где η — решение уравнения $\eta\cosh(1 - |\eta|^{-1}) = \xi$. Во всех случаях $\widehat{x}(\cdot)$ — абсолютный минимум.

16. $\widehat{x}(t,\xi) = e^{|t|} + (\xi - e)\cosh t/\cosh 1$.

17. $\widehat{x} \equiv 0$ — абсолютный минимум, если $\alpha < T_0^{-1}$; если $\alpha = T_0^{-1}$, то $\widehat{x}(t) = ct$ — абсолютный минимум (c — произвольная константа), а значение задачи равно нулю; значение задачи равно $-\infty$, если $\alpha > T_0^{-1}$.

18. $\widehat{x}(t) = 3t^2 + 2t + 1$.

19. Функции $x_k(t) = (2/T_0)^{1/2}\sin(kt\pi/T_0)$, $k = 1, 2, \ldots$ — стационарные точки задачи. Абсолютный максимум доставляет функция $\widehat{x}(t) = x_1(t) = (2/T_0)^{1/2}\sin(\pi t/T_0)$.

20. $\widehat{x}(t) = t^3/2 + 9t^2/4 - 7t/4$ — абсолютный минимум.

21. $\widehat{x}(t) = 2\sin t/\pi$ — абсолютный минимум.

22. $\widehat{x}(t) = -10t^3 - 12t^2 + 6t + 2$ — абсолютный минимум.

23. $\widehat{x}(t) = 5t^3 + 3t - 4$ — абсолютный минимум.

24. $\widehat{x}(t) = (-t^3 + 3t^2)/2$ — абсолютный минимум.

Указание к задачам 20–24. То, что данные функции доставляют абсолютный минимум, проверяется непосредственно.

25. $\widehat{x}(t) \equiv 1$ (это можно заметить сразу, без вычислений, но можно решить задачу используя стандартные методы).

26. $\widehat{x}(t) = -2t^2 + 1$, если $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\widehat{x}(t) = t^2 - 6t + 4$, если $1 \leqslant t \leqslant 2$.

27. $\widehat{x}(t) = t(t - T_0)/2$.

28.
$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} -t^2/2, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ t^2/2 - 2\tau t + \tau^2, & \text{если } \tau \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$$

где $\tau = T_0(1 - 1/\sqrt{2})$.

29.
$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} -t^2/2, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant T_0/4; \\ t^2/2 - tT_0/2 + T_0^2/16, & \text{если } T_0/4 \leqslant t \leqslant 3T_0/4; \\ -(t - T_0)^2/2, & \text{если } 3T_0/4 \leqslant t \leqslant T_0. \end{cases}$$

30. Здесь имеются две экстремали: $-t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 4t + 1$ и $(t - 1)^4$.

31. $\widehat{x}(t) = t$ — абсолютный минимум.

Указание. То обстоятельство, что эта функция доставляет абсолютный минимум, следует из неравенства

$$x(2) = \int_0^2 \dot{x}(t)dt \leqslant \sqrt{2} \left(\int_0^2 \dot{x}^2(t)dt \right)^{1/2} = 2.$$

В последующих задачах, как правило, мы указываем только стационарные точки. Проверка того, что это действительно решение, оставляется читателю

32.
$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} -t^2/2 + 1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}; \\ (\sqrt{3}t - 4)^2/2 - 1, & \text{если } \sqrt{3} \leqslant t \leqslant \widehat{T}, \end{cases}$$

где $\widehat{T} = 4/\sqrt{3}$.

33. $\widehat{u}(t) \equiv 1$ или $\widehat{u}(t) \equiv -1$.

34. $\widehat{T} = 1$; $\widehat{x}(t) = t - t^2$.

35. $\widehat{T} = 1$;

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} (t+1)^2 - 1, \text{если } -1 \leqslant t \leqslant 0; \\ 1 - (t-1)^2, \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

36. $\widehat{x}(t) = -2t$.

37. Экстремали: $x_k(t) = \int\limits_0^t \operatorname{sign} \sin(2k+1)\frac{\pi\tau}{2}\, d\tau$, $k = 0, \pm 1, \ldots$; $\widehat{x}(t) = \pm t$.

38. $\widehat{x}(t) = \widehat{C}_1 \sinh(t/\sqrt{2}) \sin(t/\sqrt{2}) + \widehat{C}_2(\cosh(t/\sqrt{2}) \sin(t/\sqrt{2}) - \sinh(t/\sqrt{2}) \cos(t/\sqrt{2}))$, где $\widehat{C}_1$ и $\widehat{C}_2$ находятся из условий: $\widehat{x}(T_0) = \xi_1$, $\dot{\widehat{x}}(T_0) = \xi_2$.

39. $\widehat{x}(t) \equiv 0$, если $T_0 \leqslant \widehat{T}$, где $\widehat{T}$ — первый нуль уравнения $\cos T \cosh T = 1$; если $T_0 > \widehat{T}$, то значение задачи равно $-\infty$.

40. $\widehat{x}(t) = \widehat{C}_1(\cosh t - \cos t) + \widehat{C}_2(\sinh t - \sin T)$, если $T_0 \leqslant \widehat{T}$, где $\widehat{T}$ — то же, что и в предыдущей задаче, $\widehat{C}_1$ и $\widehat{C}_2$ находятся из условий: $\widehat{x}(T_0) = \xi_1$, $\dot{\widehat{x}}(T_0) = \xi_2$; значение задачи равно нулю, если $T_0 = \widehat{T}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ и равно $-\infty$, если $T_0 > \widehat{T}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Ар1] *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал, 1997.

[Ар2] *Арутюнов А.В.* Принцип максимума Понтрягина и достаточные условия оптимальности для нелинейных задач//Дифф. уравнения, т. 39, № 12, 2003, с. 1587–1595.

[АТФ] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

[БЗ] *Борисов В.Ф., Зеликин М.И.* (Borisov V.F., Zelikin M.I) Theory of chattering control. — Boston: Berkhäuser, 1994.

[Бол] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.

[Вар] *Варга Д.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Мир, 1977.

[ДМ] *Дубовицкий А.Я, Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ, т. 5, № 3, 1965, с. 395–453.

[Зор1] *Зорич В.А.* Математический анализ, часть I. — М.: Наука, 1981.

[Зор2] *Зорич В.А.* Математический анализ, часть II. — М.: Наука, 1984.

[ИТ] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.

[Кл] *Кларк Ф.* (Frank H. Clarke) Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.

[КФ] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976 (4-ое изд.)

[Мил] *Милютин А. А.* Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. — М.: Физматлит, 2001.

[МИТ] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. — М.: УРСС, 2003 (2-ое изд.)

[Нат] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.

[ПБГМ] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматлит, 1961.

[Фул] *Фуллер А. Т.* (Fuller A. T.) Relay Control Systems Optimized for Various Perfomance Criteria//Proc. First World Congress IFAC, Moscow. Vol. 1; London, 1960, p. 510–519.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. — М.: Наука, 1984.

[2] *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. — М.: Высшая школа, 2001.

[3] *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.

[4] *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002.

[5] *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1977.

[6] *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М., Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961.

[7] *Гирсанов И. В.* Математическая теория экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1970.

[8] *Дикусар В. В., Милютин А. А.* Качественные и численные методы в принципе максимума. — М.: Наука, 1989.

[9] *Зеликин М. И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

[10] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

[11] *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — Наука, М.: 1972.

[12] *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. — М.: Наука, 1977.

[13] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М., Наука, Главная ред. физико-математической литературы, 1969.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Арутюнов Арам Владимирович, родился в 1956 году, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой нелинейного анализа и оптимизации РУДН, профессор кафедры системного анализа ВМК МГУ.

Автор более 100 научных работ и двух монографий.

Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич, родился в 1944 году, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ.

Автор более 100 научных работ и трех монографий.

Тихомиров Владимир Михайлович, родился в 1934 году, доктор физико-математических наук, Почетный профессор МГУ, зав. кафедрой общих проблем управления механико-математического факультета МГУ.

Автор более 200 научных работ и более 20 монографий и учебников.

Принцип максимума Понтрягина лежит в основе теории оптимального управления и является одним из самых ярких достижений теории экстремума. Книга, которую читатель держит в руках, написана известными специалистами в этой области математики. В ней приведены простые и ясные доказательства принципа максимума и необходимых условий экстремума в задачах вариационного исчисления. Применение этих результатов демонстрируется на большом числе примеров. Кроме того, в книге много полезного дополнительного материала и исторических комментариев. Думаю, что она будет с интересом воспринята самыми разными категориями читателей, от студентов до специалистов в области теории экстремальных задач.

Академик РАН *Е. Ф. Мищенко*

9 785886 880823

ISBN 5-88688-082-8

ФАКТОРИАЛ ПРЕСС