Графы Горески-Коттвица-Макферсона и кольцо Чжоу оросферических многообразий с числом Пикара один

Определение

Пусть G — редуктивная группа и $B \subset G$ — борелевская подгруппа. $G-$многообразие X будем называть сферическим, если в X есть плотная $B-$орбита.

Определение

Пусть X — $G-$сферическое мнообразие и пусть H — стабилизатор точки из плотной $G-$орбиты в X. Тогда многообразие X — оросферическое, если H содержит подгруппу, сопряженную с U, где U — максимальная унипотентная подгруппа G, содержащаяся в борелевской подгруппе B.

Теорема

Пусть X — гладкое проективное $G-$оросферическое многообразие с группой Пикара ранга 1 над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда либо X — однородное, либо X может быть однозначно построено из тройки $(Type(G), \omega_Y, \omega_Z)$ находящейся в следующем списке

(1) $(B_n, \omega_{n-1}, \omega_n)$ с $n \geq 3$

(2) $(B_3, \omega_1, \omega_3)$

(3) $(C_n, \omega_m, \omega_{m-1})$, с $n \geq 2$ и $2 \leq m \leq n$

(4) $(F_4, \omega_2, \omega_3)$

(5) $(G_2, \omega_1, \omega_2)$

где $Type(G)$ — полупростой тип Ли группы G, а ω_Y, ω_Z — фундаментальные веса.

GKM-графы

Вершины - неподвижные точки. Ребра - инвариантные прямые. Метка на ребре - характер. Подсчет ориентации: пусть x на прямой и пусть $p = \lim\limits_{t\to 0}(tx)$ и $q = \lim\limits_{t\to\infty}(tx)$. Такие две предельные точки будут неподвижными, тогда поставим ориентацию на ребрах от предела в 0 к пределу к ∞.

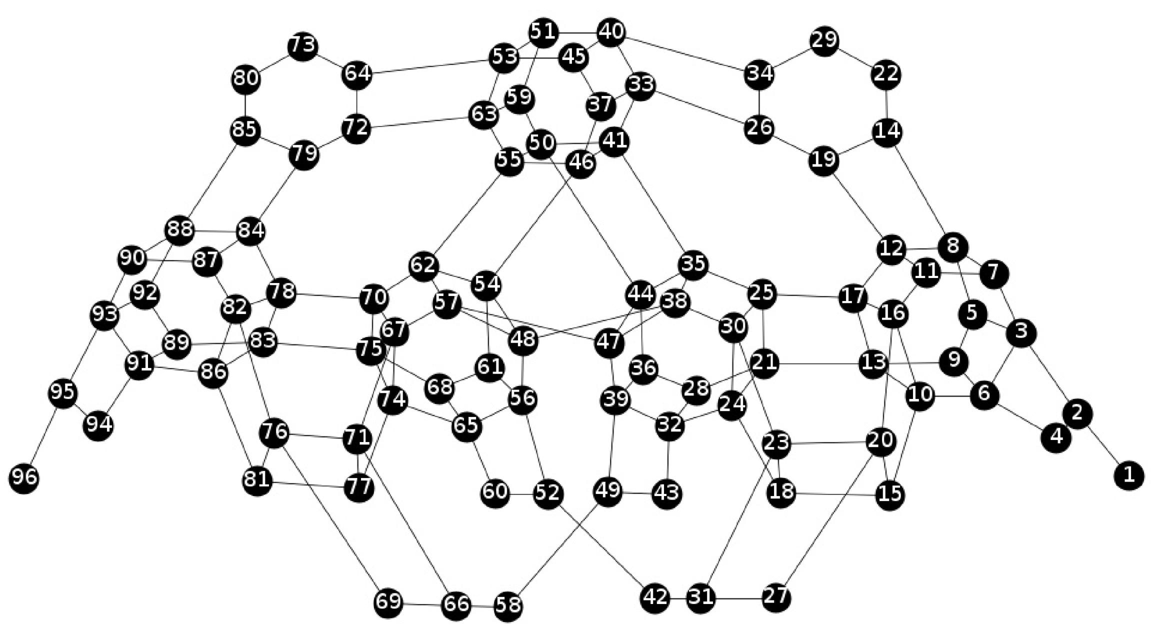
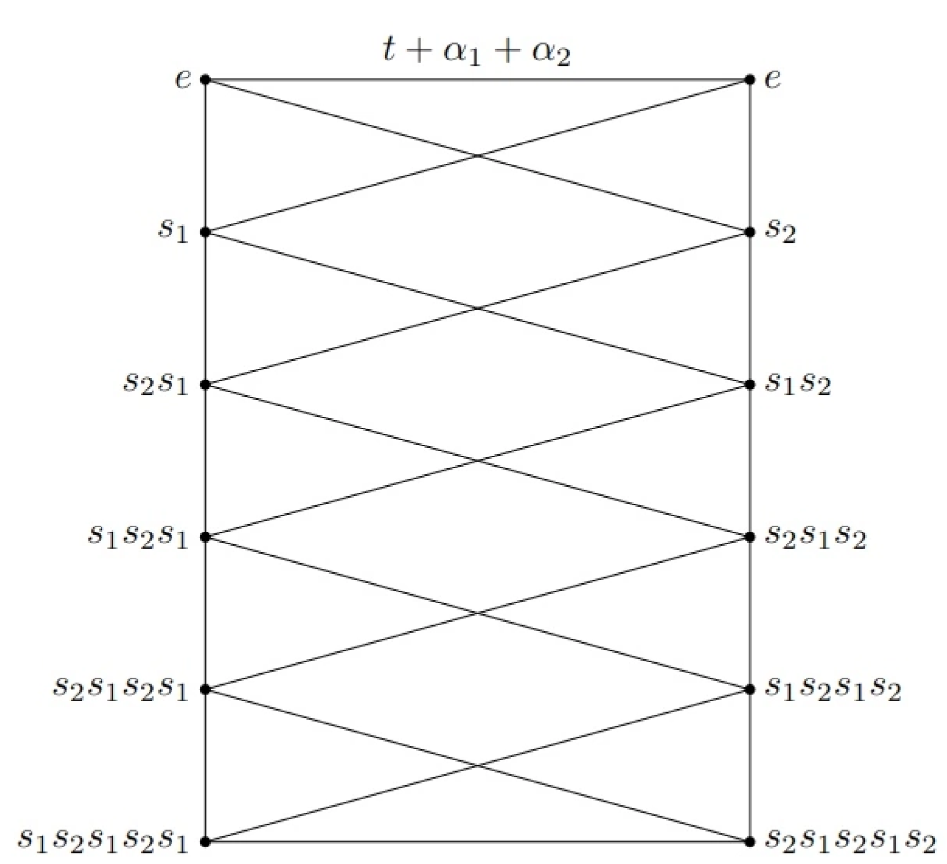


Рис.: Пример GKM-графа



Пусть $\{P_x\}$ - семейство многочленов, которые стоят в вершинах графа. Пусть на ребре xy стоит метка l_{xy}, тогда на этом ребре выполняется условие делимости, если $l_{xy}|(P_x - P_y)$. Расстановка будет называться правильной, если для каждого ребра выполняется условие делимости.

Теорема (M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson,1998)

$CH_T^*(X) = \{(p_v) \in \oplus_{v\in X^T} CH_T^*(v) : l_{uv}|(p_u - p_v)$, если u и v лежат на инвариантной прямой с характером l_{uv} $\}$.

Определение

Система правильных расстановок многочленов называется flow-up базисом, если

1. *Эта система расстановок — базис над $CH_T^*(pt)$.*
2. *Все многочлены, записанные в вершинах, - однородные и степени всех ненулевых многочленов во всех вершинах равны фиксированнной для данной расстановки константе.*
3. *$\forall w$ существует элемент системы расстановок такой, что в этой расстановке в вершине w стоит произведение меток ребер, выходящих из этой вершины, а ненулевые элементы могут стоять только в вершинах v с $v \geq w$.*

Теорема (J.S.Tymoczko, 2009)

Пусть Γ - GKM-граф проективного однородного многообразия. Тогда flow-up базис строится с помощью операторов дифференцирования.

Пусть $f : X \to Y$ - морфизм многообразий, тогда он индуцирует морфизм GKM-графов и можно определить следующие отображения правильных расстановок на них

Определение

Отображение пушфорвард $f_*(Q)_w = P_w = \sum Q_v \frac{h(w)}{h(v)}$, где сумма берется по всем прообразам вершины w, а $h(w)$ — произведение меток на ребрах входящих (они берутся со знаком -) и выходящих (они берутся со знаком +) из вершины w.

Определение

Отображение пулбэк $f^*(P)_w = Q_w = P_{f(w)}$, т.е. мы просто дублируем правильную расстановку из второго графа на первый.

X - оросферическое многообразие типа (1) - (5) из теоремы 1

Первую половину flow-up базиса мы получаем пушфорвардом flow-up базиса из G/P_Z в X.

ζ — первый эквивариантный класс Черна соответствующего расслоения $\mathcal{O}(1)$.

$p_1 : G/(P_Y \cap P_Z) \to G/P_Y$ и $p_2 : G/(P_Y \cap P_Z) \to G/P_Z$.

$\{\xi_i\}$ — flow-up базис для G/P_Y.

$Q = (p_2)_*(p_1^*(\xi_i\zeta^k))$ дополняет ξ_i до правильной расстановки на GKM-графе, соответствующем многообразию X.

По определению пушфорворда, получается следующая формула:

$$Q_u = \sum \frac{(\xi_i)_{[uw]} uw(\zeta^k)}{uw(\prod(\alpha_i))}$$

сумма берется по всем $w \in W(P_Y)/W(P_Y \cap P_Z)$, а произведение в знаменателе по всем $\alpha_i \in U(P_Y) \setminus U(P_Z)$.

$[uw]$ — класс элемента uw в $W(G)/W(P_Z)$.

Пример

Случай $G = G_2$

$$Q_w = \frac{(\xi_i)_{[w]} w(-\alpha_1 - t) - (\xi_i)_{[ws_2]} w(-\alpha_1 - \alpha_2 - t)}{w(\alpha_2)}$$

Пример

Случай $G = F_4$.

$$Q_w = \frac{(\xi_i)_{[w]} w(\zeta^2)}{w(\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4))} - \frac{(\xi_i)_{[ws_3]} ws_3(\zeta^2)}{w(\alpha_3\alpha_4)} + \frac{(\xi_i)_{[ws_4s_3]} ws_4s_3(\zeta^2)}{w((\alpha_3+\alpha_4)\alpha_4)}$$

В этом случае многочлен $\zeta = -\alpha_2 - t$

Теорема (А.С., 2022)

$CH_T^*((G_2, \omega_1, \omega_2)) = CH_T^*(pt)[h, flow_2, flow_3] \ / < R_i >_{i\in\{1,2,3,4\}}$, где h — образующая степени 1, $flow_2$ — образующая степени 2, $flow_3$ — образующая степени 3, а R_i — некоторые соотношения.

$R_1 : 2flow_3 + flow_2 \cdot (-3t + 4\alpha_2 + 6\alpha_1) - h \cdot \alpha_2(t - \alpha_2 - \alpha_1) - 4hflow_2 + h^2 \cdot (t - 2\alpha_2 - \alpha_1) + h^3 = 0$

Следствие

$CH^*(X) = CH_T^*(X) \otimes_{CH_T^*(pt)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[h, flow_2, flow_3]/ < R_i' >_{i\in I}$, где R_i' получаются из R_i "занулением" переменных t, α_1, α_2, т.е. в соотношениях остаются только мономы степени 0. А именно:

$R_1' : 2flow_3 - 4hflow_2 + h^3 = 0$

$R_2' : -3flow_2^2 + h^2 flow_2 = 0$

$R_3' : +flow_3^2 + 2hflow_2flow_3 + 4h^2flow_2^2 - 4h^3flow_3 = 0$

$R_4' : -flow_3^2 + 2hflow_2flow_3 + 2h^2flow_2^2 - 2h^3flow_3 = 0$