Горизиевы графы преобразований узлов

Узлы и зацепления

- Зацеплением называется кусочно-гладкое вложение несвязного объединения конечного числа окружностей в S^3 и образ вложения с точностью до объемлемой изотопии.
- Узел — однокомпонентное зацепление.
  L – множество всех зацеплений,
  K – множество всех узлов.

Локальные преобразования

- Тэнгл на n нитях — пара $B_A=(B,A)$; B – трёхмерный шар, A – n дизъюнктных вложенных в B дуг, таких что сфера ∂B пересекается с каждой дугой в концевых точках и только в них;
- Нити тэнгла B_A – компоненты связности A.
- Шаблон локального преобразования — пара n-ниточных тэнглов (B_A, B_C), где B – шар в S^3 и $\partial A=\partial C$;
- Пусть L_1 и L_2 – два зацепления в S^3, B – шар в S^3, δ – шаблон; Тогда L_2 получается из L_1 с помощью δ-преобразования, если существуют зацепления L_1' и L_2' в S^3, что
  - L_1' объемлемо изотопно L_1;
  - L_2' объемлемо изотопно L_2;
  - L_1' и L_2' совпадают вне B;
  - пара $((B,B\cap L_1'),(B,B\cap L_2'))$ совпадает с шаблоном δ;

Горизиев граф

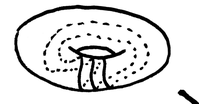
Горизиев граф преобразования δ на множестве зацеплений $\mathcal{H}$ – это граф, вершинами которого являются зацепления из множества $\mathcal{H}$ и две вершины соединены ребром, если одно из зацеплений получается из другого с помощью δ за одно применение. На этом графе есть естественная метрика – число рёбер в кратчайшем пути; Обозначим через $G(\delta,\mathcal{H})$ Горзиев граф δ на множестве $\mathcal{H}$;

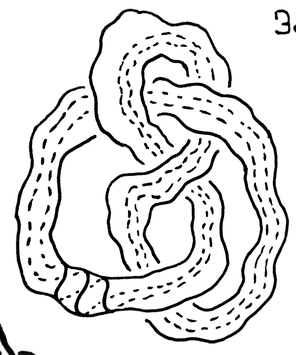
Преобразования

Под преобразованием зацеплений подразумевают некоторую геометрическую процедуру, проводимую над вложенным в S^3 зацеплением;

Результаты

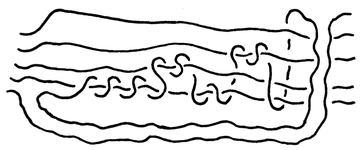
Теорема: У любого узла в графе $G(H(2),K)$ есть смежный кабелированный узел.





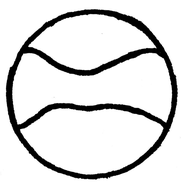
Пример кабелирования

Теорема: У любой вершины соответствующей узлу в графе $G(H(2),L)$ есть смежная соответствующая Бруннову зацеплению.



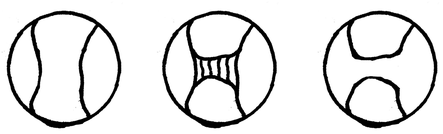
Эскиз к доказательству

Теорема: Дополнение любого метрического шара в $G(H(2),K)$ имеет только одну бесконечную компоненту связности;

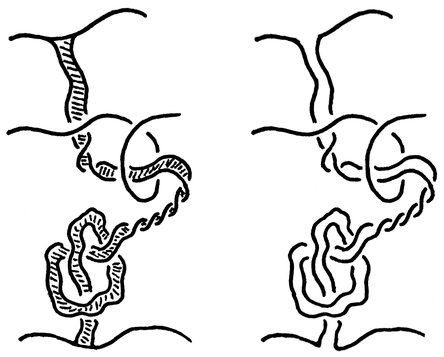


Визуализация H(2)

Локальное преобразование H(2) и преобразование ленточная хирургия имеют один и тот же Горзиев граф. То есть фактически это одно и тоже преобразование с точностью до изотопии (см. картинки). Естественная визуальность ленточной хирургии нередко играет существенную роль в исследовании свойств H(2)-Горзиева графа и позволяет получать удивительные результаты. Не любое локальное преобразование имеет такую изящную визуализацию.



Реализация H(2) с помощью ленточной хирургии и наоборот.



ленточная хирургия

Гипотезы – шаблоны

Горзиевы графы – удобный инструмент для работы с преобразованиями узлов. Можно задавать вопросы о структуре графа не фиксируя преобразования.

Примеры таких вопросов-шаблонов:

- У любого узла есть смежный гиперболический?
- Если два узла смежны, то всегда ли найдётся третий узел, смежный им обоим?
- Гиперболичен ли граф?
- Наибольшее n, что произвольная вершина содержится в полном подграфе на n вершинах?

Факты

- Горзиевы графы $G(\Delta,K)$, $G(X,K)$ и $G(H(n),K)$ связны;
- В графе $G(\Delta,K)$ нет треугольников.
- Все узлы, смежные тривиальному в $G(X,K)$ просты;
- В графе $G(X,K)$ для любой вершины и любого $n>0$ существует полный подграф на n вершинах, содержащий заданную вершину
- Горзиев граф каждого локального преобразования имеет бесконечный диаметр.

Литература

- Hoste J., Nakanishi Y., Taniyama K., Unknotting operations involving trivial tangles, Osaka J. Math. 27 (1990), N3, 555–566.
- Murakami H., Nakanishi Y., On a certain move generating link-homology, Math. Ann. (1989) 284, N1, 75–89;
- Kanenobu T., Miyazawa Y., H(2)-unknotting number of a knot, Commun. Math. Res. 25 (2009), N5, 433–460.
- Scharlemann M.G., Unknotting number one knots are prime, Invent. Math. 82 (1985), N1, 37–55;

Автор

Алексей Юрьевич

ПГГПЦ им. Л. Эйлера

miller.m2@mail.ru

Бэтэл Оэисуб