Предельная форма вероятностной меры q-размерностей для групп Ли бесконечного ранга

Постановка задачи

Кососимметрическая двойственность Хау для пары групп (GL_n, GL_k)

$$\bigwedge(\mathbb{C}^n\otimes(\mathbb{C}^k)^*)\cong\bigoplus_{\lambda}V_{GL_n}(\lambda)\otimes V_{GL_k}(\bar{\lambda}').$$

Используя двойственное тождество Коши для характеров

$$\mu_{n,k}(\lambda|\,\{x_i\}_{i=1}^n,\{y_j\}_{j=1}^k)=\frac{s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_{\bar{\lambda}'}(y_1,\dots,y_k)}{\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k(x_i+y_j)}.$$

Нас интересует два случая специализации:

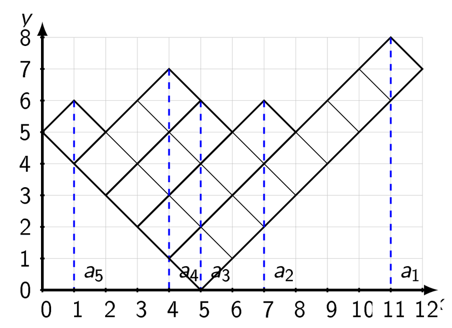
- $x_i=f(\frac{i}{n})=q^{i-1}$ и $y_j=g(\frac{j}{n})=q^{j-1}$,
- $x_i=f(\frac{i}{n})=q^{i-1}$ и $y_j=g(\frac{j}{n})=q^{1-j}$.

$$n,k\to\infty,\ \frac{k}{n}\to c,\ q=1-\frac{\gamma}{n}\approx e^{-\frac{\gamma}{n}}$$

$$f_n(x)=1+\int_0^x(1-2\rho_n(t))\mathrm{d}t$$

В первом случае мера имеет вид:

$$\mu_{n,k}(\lambda|q)=\frac{q^{\|\lambda\|}\dim_q(V_n(\lambda))\times q^{\|\bar{\lambda}'\|}\dim_q(V_k(\bar{\lambda}'))}{\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k(q^{i-1}+q^{j-1})}$$



$$\|\lambda\|=\sum_{i=1}^n(i-1)\lambda_i$$

$$\dim_q(\lambda)=\prod_{\alpha\in\Phi^+}\frac{[(\lambda+\rho,\alpha)]_q}{[(\rho,\alpha)]_q}$$

Ансамбль q-полиномов Кравчука

Меру можно переписать как

$$\mu_{n,k}(\{a_i\},q)=C_{n,k,q}\prod_{i<j}(q^{-a_i}-q^{-a_j})^2\prod_{i=1}^nW(a_i),$$

где

$$W(a_i)=q^{\binom{a_i}{2}+a_i(n-k)}\begin{bmatrix}k+n-1\\a_i\end{bmatrix}_q.$$

Детерминантный точечный ансамбль, то есть

$$\rho_{n,m}(x_1,\dots,x_m)=\det[\mathsf{K}_n(x_i,x_j)]_{1\le i,j\le m}.$$

Нас интересует

$$\rho_n(x)=\rho_{n,1}(x)=\mathsf{K}_n(x,x).$$

$$\mathsf{K}_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{W(x)W(y)}\;p_i(x)p_i(y),$$

где $\{p_i(x)\}$ – семейство ортогональных полиномов с весом $W(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{K}_n(x,y)=\mathsf{K}_\phi(x,y)=\frac{\sin(\phi(x-y))}{\pi(x-y)}$$

$$\frac{1-f'(x)}{2}=\rho(x)=\frac{\phi}{\pi}$$

ϕ можно найти с помощью q-разностного уравнения:

$$A(x,k,n,q)p_m(a)=B(a,k,n,q)p_m(a+1)+C(a,k,n,q)p_m(a-1).$$

Это уравнение нужно привести к виду:

$$p(x+1)+p(x-1)=S\times p(x),$$

где S – некоторый спектральный интервал. После преобразования Фурье в $L^2(S^1)$ можно найти ϕ.

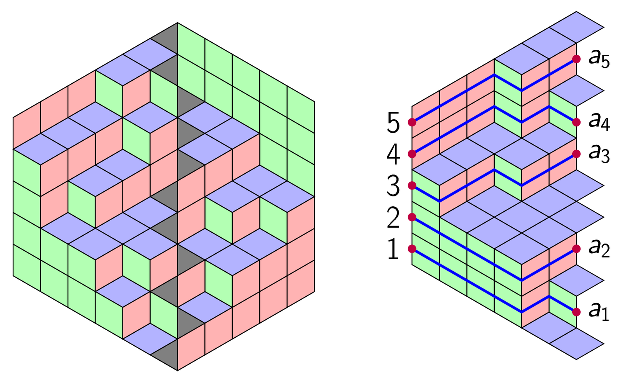
$$\rho(x)=\frac{1}{\pi}\arccos\left(\operatorname{sign}(-\gamma)\times\frac{e^{\gamma-\frac{\gamma x}{2}}}{2}\frac{1-e^{\gamma(c-1)}}{\sqrt{(1-e^{\gamma x})(1-e^{\gamma(c+1-x)})}}\right)$$

Немного про сходимость

- Переписать меру как $\mu_{n,k}(\{x_i\})=\frac{1}{Z_n}\exp(-n^2J[\rho_n]+\mathcal{O}(n\ln n))$
- Показать, что $J[\rho_n]$ выпуклый и положительно определённый с точностью до константы
- Ограничить супремум норму нормой, порождённой $J[\rho_n]$
- Оценить общее число диаграмм Юнга с помощью формулы Харди–Рамануджана

Пока получилось сделать только первые два шага для $\gamma>0$.

Немного про матричные модели

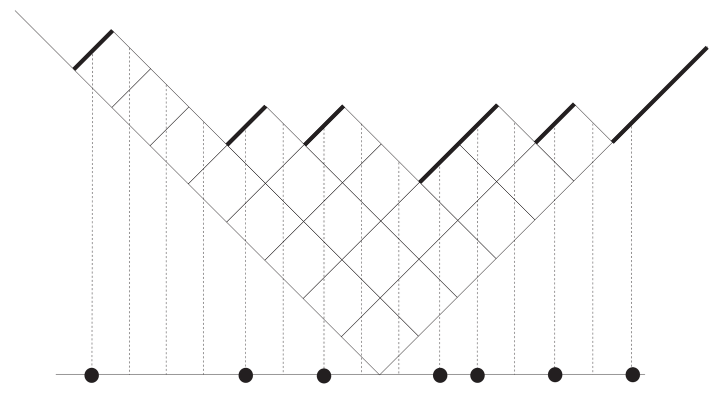


Ещё один способ понимать нашу меру
Каждый путь имеет вес $=q^{\#\text{кубиков под ним}}$

Свободные фермионы

Каждой таблице λ сопоставим множество

$$\mathfrak{S}(\lambda)=\left\{\lambda_i-i+\frac{1}{2}\right\}.$$



• маркирует координаты $\lambda_i-i+\frac12$, нумерация идёт слева направо.
Векторное пространство $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$, порождаемое векторами:

$$v_S=\underline{s_1}\wedge\underline{s_2}\wedge\underline{s_3}\wedge\dots.$$

Нас интересуют вектора вида $v_\lambda=v_{\mathfrak{S}(\lambda)}$ и вакуумный вектор

$$v_\emptyset=\underline{-\frac{1}{2}}\wedge\underline{-\frac{3}{2}}\wedge\underline{-\frac{5}{2}}\wedge\dots.$$

Используя операторы рождения и уничтожения ψ_k и ψ_k^* определим операторы

$$\Gamma_-(t)v_\emptyset=\sum_\lambda s_\lambda(x)v_\lambda,\qquad\Gamma'_-(t)v_\emptyset=\sum_\lambda s_{\lambda'}(x)v_\lambda$$

$$\rho(X)=\frac{1}{Z}\sum_{\mathfrak{S}(\lambda)\supset X}s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y)=\frac{1}{Z}\left(\Gamma_+(t)\left(\prod_{x\in X}\psi_x\psi_x^*\right)\Gamma'_-(t')v_\emptyset,v_\emptyset\right)$$

Утверждается, что

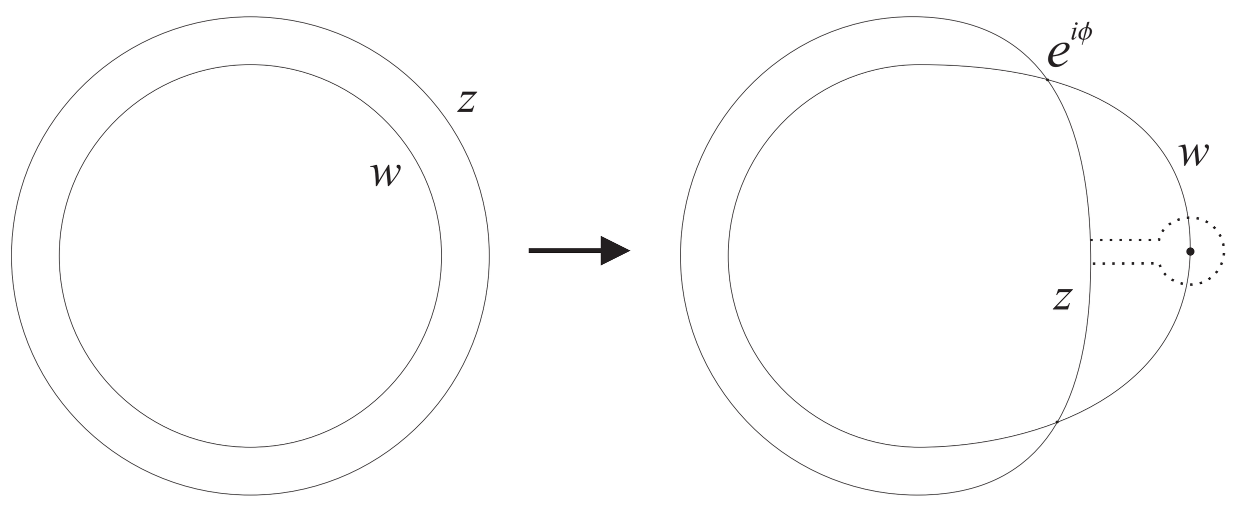
$$\rho(x)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\oint_{|w|<|z|}\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w}{\sqrt{zw}}e^{n(S(z)-S(w))}\frac{1}{z-w},$$

где $S(z)$ имеет интегральное представление

$$S(z)\approx-\int_0^1\mathrm{d}s\ln(1-f(s)z)-c\int_0^1\mathrm{d}s\ln(1+g(s)/z)-x\ln z.$$

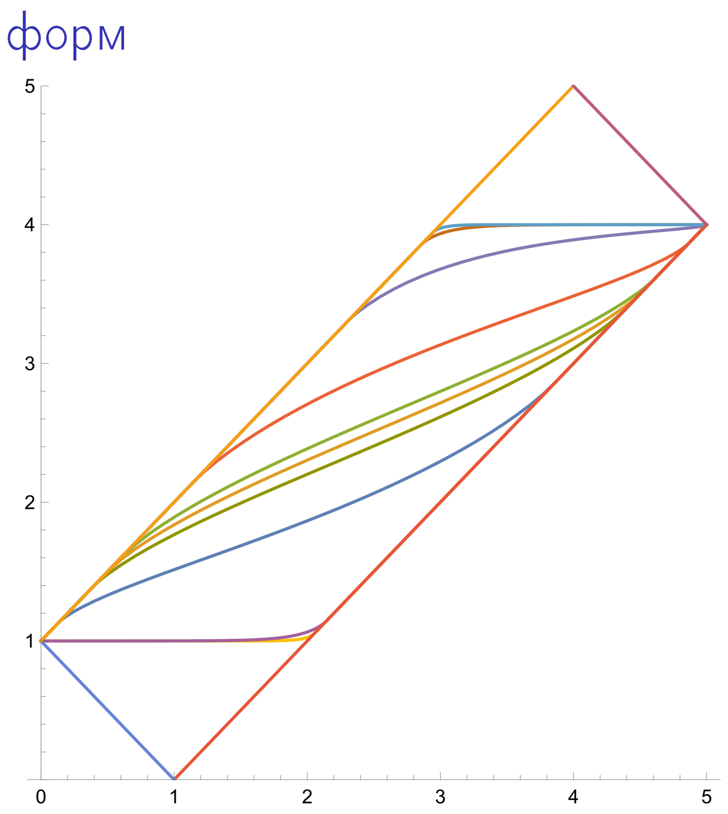
В соответствие с методом перевала, нас интересуют точки, в которых первая производная от $S(z)$ равна 0:

$$z\partial_zS(z)=\int_0^1\mathrm{d}s\frac{f(s)z}{1-f(s)z}-c\int_0^1\mathrm{d}s\frac{z}{z+g(s)}-(x-c)=0$$



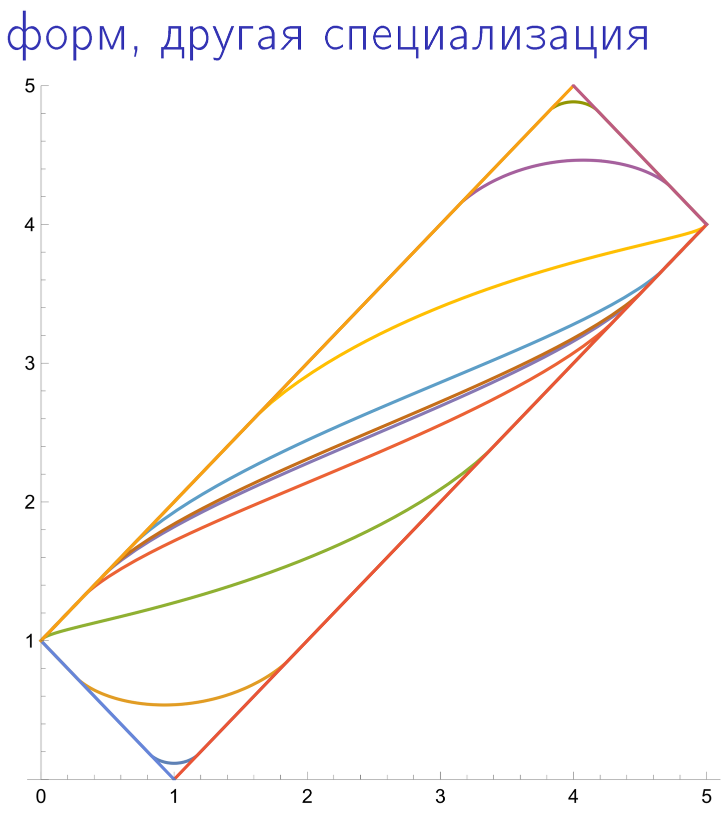
В итоговый ответ войдёт вклад от дуги, который считается по вычетам.

Примеры предельных форм



Предельная форма для $c=4$ и $\gamma=-25,-10,-0.5,-0.1,0.01,0.1,0.5,10,25$.
При $\gamma=\pm\infty$, $q=1\pm\mathrm{const}$ получим горизонтальные линии.

Примеры предельных форм, другая специализация



Примеры предельной формы диаграмм Юнга при значении параметров $c=4$, $\gamma=-10,-2,-0.5,-0.1,-0.01,0.01,0.1,0.5,2,10$