О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ДИСКРЕТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

И. Харченков
студент СмолГУ 3 курса физико-математического факультета (МиИ19)
Научный руководитель: доцент, канд. физ.-мат. наук
Хартов Алексей Андреевич

Conference of Small Research Groups
23 июня 2022 г.
г. Санкт-Петербург

Числа x_1, x_2, ..., x_n называются **линейно зависимыми**, если существует такие целые коэффициенты l_1, l_2,..., l_n, одновременно не равные нулю, что выполняется равенство

$$l_1x_1 + l_2x_2 + ... + l_nx_n = 0.$$

В противном случае, числа x_1, x_2, ..., x_n называются **линейно независимыми**.

Рассмотрим множество Θ_p, определенное следующим образом:

$$\Theta_p = \{(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) :\ p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k e^{i\theta_k} = 0\},\ \theta_k \in (-\pi, \pi]\,.$$

Известно, что при $p_0 \leqslant \frac{1}{2}$, $p_0 = \max(p_0, p_1, ..., p_n)$ это множество не пусто.

Характеристической функцией (*х.ф.*) случайной величины X называется функция вида:

$$f(t) := \mathbb{E}e^{itX},\ t \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{E}$ - математическое ожидание случайной величины.
Х.ф. дискретной случайной величины имеет вид:

$$f(t) = p_{x_1}e^{itx_1} + p_{x_2}e^{itx_2} + \ldots + p_{x_k}e^{itx_k} + \ldots,\ t \in \mathbb{R},$$

где x_1, x_2, ..., x_k — значения случайной величины, а $p_{x_1}, p_{x_2}, \ldots, p_{x_k}$ — вероятности этих значений.

Х.ф. является отделимой от нуля, т.е. $\inf_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = 0$, если

$$\exists c > 0 \quad |f(t)| \geqslant c > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Отделимость х.ф. является необходимым и достаточным условием квази-безграничной делимости дискретного закона. Изучаются критерии отделимости х.ф., сформулированные в терминах x_k и p_{x_k}. Были получены результаты, отвечающие на вопрос об отделимости от нуля х.ф. случайной величины с конечным числом значений вида:

$$f(t) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_{x_k} e^{itx_k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В случае $p_0 > \frac{1}{2}$ функция f является отделимой от нуля. Больший интерес представляет случай $p_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Не умаляя общности, полагаем $p_0 = \max\{p_0, p_{x_1}, \ldots, p_{x_n}\}$.

Теорема 1 *Если коэффициенты x_k линейно независимы, то функция f не отделена от нуля.*

Пусть теперь существуют числа $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ такие, что $x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ раскладываются следующим образом: $x_j = a_{j,1}b_1 + a_{j,2}b_2 + \ldots + a_{j,m}b_m$.
Тогда матрицу коэффициентов такого разложения всех чисел $x_j\ \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ можно записать так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим соответствующее матрице линейное отображение $v \mapsto Av,\ v \in \mathbb{Z}^n,\ Av \in \mathbb{Z}^m$. Ядро этого отображения будет иметь размерность $n - m$. Следовательно, базис ядра будет содержать $n - m$ элементов:

$$C^1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ \ldots \\ c_{1,n} \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ \ldots \\ c_{2,n} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad C^{n-m} = \begin{pmatrix} c_{n-m,1} \\ c_{n-m,2} \\ \ldots \\ c_{n-m,n} \end{pmatrix}$$

Теорема 2 *Если система уравнений:*

$$\begin{cases} c_{1,1}\theta_1 + c_{1,2}\theta_2 + \ldots + c_{1,n}\theta_n = 2\pi k_1 \\ c_{2,1}\theta_1 + c_{2,2}\theta_2 + \ldots + c_{2,n}\theta_n = 2\pi k_2 \\ \ldots \\ c_{n-m,1}\theta_1 + c_{n-m,2}\theta_2 + \ldots + c_{n-m,n}\theta_n = 2\pi k_{n-m} \end{cases}$$

где k_i - некоторые целые числа, имеет решения в Θ_p, то х.ф. не отделена от нуля.