КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ К ЗАКОНУ ДИКМАНА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Ксения Трегубова
студентка 4 курса Физ.-Мат. факультета СмолГУ
Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук, доцент
Хартов Алексей Андреевич

Конференция малых исследовательских групп
Международный математический институт им. Леонарда Эйлера
23–27 июня 2022 г.
г. Санкт-Петербург

Функция Дикмана определяется как решение дифференциального уравнения с запаздыванием:

$$x\rho'(x) + \rho(x-1) = 0, \quad x \geqslant 1,$$

где $\rho(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$, $\rho(x) \equiv 1$ при $x \in [0,1]$. Можно вычислить, что $\rho(x) = 1 - \ln x$ при $x \in [1,2]$, $\rho(x) = (1-\ln 2) + \int_2^x \frac{\ln(y-1)-1}{y}\,dy$ при $x \in [2,3]$ и т.д. Известно, что $\int_0^\infty \rho(x)dx = e^\gamma$, где γ — константа Эйлера. Функция Дикмана известна своими приложениями в теории чисел и дискретной математике.

Закон Дикмана — это вероятностный закон с плотностью $\rho_1(x) = e^{-\gamma}\rho(x), x \in \mathbb{R}$. Существует целый класс так называемых ***обобщенных законов Дикмана*** с плотностями ρ_α, $\alpha > 0$, которые удовлетворяют уравнению $-u^\alpha \rho'_\alpha(x) = \alpha(u-1)^{\alpha-1}\rho_\alpha(x)$, $x > 1$, с начальными условиями: $\rho_\alpha(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, и $\rho_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$ при $x \in (0,1]$. Определим соответствующие функции распределения:

$$D_\alpha(x) = \int_0^x \rho_\alpha(u)du, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.$$

Характеристические функции имеют следующий вид:

$$f_{D_\alpha}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\rho_\alpha(x)dx = \exp\left\{\alpha \int_0^1 \frac{e^{ist}-1}{x}dx\right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.$$

Отсюда видно, что обобщенные законы Дикмана безгранично делимы и саморазложимы.

Пусть даны независимые неотрицательные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$. Рассматриваются функции распределения:

$$G_n(x) := \mathbb{P}\left(\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n X_k \leqslant x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, — заданная нормирующая последовательность. Интересует вопрос о критериях сходимости:

$$G_n(x) \to D_\alpha(x), \quad n \to \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Известны общие предельные теоремы о сходимости к заданному безгранично делимому закону. Однако, они слишком сложны для применения, и поэтому представляет интерес получение более простого критерия.

Теорема 1 *Пусть для X_k, $k \in \mathbb{N}$, выполнено условие бесконечной малости:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}\big(X_k > \varepsilon b_n\big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда для сходимости $G_n(x) \to D_\alpha(x)$, $n \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. *$(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ была относительно компактной;*
2. *$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k \mathbb{1}(X_k \leqslant \tau b_n) \to \alpha \min\{\tau, 1\}$, $n \to \infty$, $\tau > 0$.*

Последовательность функций распределения $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется ***относительно компактной***, если любая ее подпоследовательность содержит свою подпоследовательность, которая сходится к некоторой функции распределения.

Пусть каждая X_k имеет конечное математическое ожидание $\mathbb{E}X_k$, $k \in \mathbb{N}$. При этом предположении получен следующий результат.

Теорема 2 *Пусть для случайных величин $X_k, k \in \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$\frac{\max\limits_{k=1,\ldots,n} \mathbb{E}X_k}{\mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда для сходимости $G_n(x) \to D_\alpha(x)$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k \mathbb{1}(X_k \leqslant \tau b_n)}{\mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n} \to \alpha \min\{\tau, 1\}, \quad n \to \infty, \quad \tau > 0,$$

где $b_n = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n$, $n \in \mathbb{N}$.