ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛЕВИ-ХИНЧИНА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Е. А. Воробьева
студентка 4 курса Физ.-Мат. Факультета СмолГУ
Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент Хартов Алексей Андреевич

«Conference of Small Research Groups»
23–27 June 2022 г.
St Petersburg

В данной работе изучаются специальные спектральные представления для характеристических функций вероятностных законов.

Определение 1 *Характеристическая функция f называется безгранично делимой, если для любого целого положительного числа n функция f является n-ой степенью некоторой характеристической функции f_n, т.е.*

$$f(t) = (f_n(t))^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Безгранично делимые характеристические функции допускают следующее каноническое представление.

Теорема 1 (Представление Леви–Хинчина) *Для того, чтобы характеристическая функция f была безгранично делимой необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$f(t) = \exp\left\{it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) d\Lambda(x)\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

для некоторых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$ и с некоторой функцией Λ, которая не убывает на каждом интервале $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to-\infty} \Lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \Lambda(x) = 0 \quad \text{и} \int\limits_{0<|x|<\delta} x^2\, d\Lambda(x) < \infty \quad \text{для любого} \quad \delta > 0.$$

Оказывается, существуют вероятностные законы, называемые *квази-безгранично делимыми*, чьи характеристические функции (которые так же и называются) допускают представление Леви–Хинчина, но, вообще говоря, с немонотонной функцией Λ. При этом Λ имеет конечную вариацию на каждом интервале $(-\infty, r]$ и $[r, +\infty)$ при любом $r > 0$. Очевидно, что любая безгранично делимая характеристическая функция является также и квази-безгранично делимой с неубывающей Λ на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. В настоящее время квази-безгранично делимые законы активно изучаются и применяются в других областях математики (см. [1], [2] и ссылки в них).

Было замечено, что существуют вероятностные законы, которые подобно квази-безгранично делимым допускают интегральное представление для логарифма своей характеристической функции, но с функцией Λ, имеющей неограниченную вариацию в окрестности бесконечности.

Рассмотрим функцию распределения следующего вида:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\mathbb{1}(x \geqslant 0) + \tfrac{1}{2}F_1(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где F_1 — это некоторая функция распределения. Характеристическая функция F имеет вид $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где f_1 — это характеристическая функция F_1. Обозначим $a := \inf S(F_1)$ и $b := \sup S(F_1)$, где $S(F_1)$ — множество всех точек роста закона F_1, называемое *спектром* F_1. Напомним, что точка x называется *точкой роста* функции распределения F_1, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $F_1(x+\varepsilon) - F_1(x-\varepsilon) > 0$.

Теорема 2 *Пусть для функции распределения F_1 выполнено $0 < a \leqslant b < \infty$. Пусть $f_1(t) \neq 0$ при $t \in (-R, R)$, где $0 < R \leqslant \infty$. Тогда справедливо представление*

$$\operatorname{Ln} f(t) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left(e^{itx} - 1\right) d\Lambda(x), \quad t \in (-R, R),$$

где функция Λ может быть определена по формуле $\Lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} F_1^{*k}(x)$ либо по формуле $\Lambda(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (1 - F_1^{*k}(x))$ для $x > 0$. Здесь F_1^{*k} обозначает k-кратную свертку F_1.

Можно показать, что функция Λ имеет ограниченную вариацию на любом конечном отрезке вещественной прямой. При этом на всей прямой функция Λ может иметь неограниченную вариацию. Например, последнее будет иметь место, если F_1 дискретна и имеет лишь два скачка в точках a и b (или один скачок в случае $a = b$).

Список литературы

[1] I. A. Alexeev, A. A. Khartov, *Spectral representations of characteristic functions of discrete probability laws*, (2021), arXiv:2101.06038. (will appear in Bernoulli)

[2] A. Lindner, L. Pan, K. Sato, *On quasi-infinitely divisible distributions*, Trans. Amer. Math. Soc., **370** (2018), 8483–8520.