Предел слабого гравитационного поля для уравнений теории вложения

Купцов Станислав[1], Пастон Сергей[2]

[1]ПОМИ РАН, [2]СПбГУ

Аннотация

Уравнения теории вложения мы линеаризуем на фоне, который является прямым произведением прямой на плоское вложение 3 в 9. Из полученных уравнений мы определяем первую поправку к метрике, однако гравитационный потенциал при этом остаётся произвольной функцией. Чтобы иметь возможность сравнивать линеаризованную таким образом теорию с наблюдениями, мы накладываем дополнительные физические ограничения статичности на задачу и из них выводим уравнение на потенциал. Затем записываем его в сферически симметричном случае и предъявляем конкретное сферически симметричное фоновое вложение, которое преобразуется по представлению 1+3+5 группы вращений. Мы численно доказываем, что на фоне этого вложения гравитационный потенциал в области гало галактики ведёт себя согласованно с наблюдаемыми кривыми вращения. Это можно считать очередным обоснованием для использования теории вложения в попытках объяснить природу тёмной материи.

Теория вложения это теория гравитации, в которой наше пространство-время понимается как четырёхмерная поверхность в десятимерном плоском пространстве, задаваемая функцией $y^a(x^\mu)$. Уравнения теории (уравнения Редже-Тейтельбойма) имеют вид:

$$\left(G^{\mu\nu} - \varkappa T^{\mu\nu}\right) b^a_{\mu\nu} = 0$$

где $b^a_{\mu\nu}$ это вторая основная форма поверхности. Введём обозначение $\tau^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} - \varkappa T^{\mu\nu}$. Мы называем этот тензор вкладом дополнительной материи. Отличие его от нуля можно интерпретировать как присутствие тёмной материи или тёмной энергии.

Будем развивать теорию возмущений на фоне, который имеет следующий вид:

$$\bar{y}^a = \begin{pmatrix} x^0 \\ \bar{y}^I\left(x^i\right) \end{pmatrix}, \quad \partial_\mu \bar{y}^a \partial_\nu \bar{y}_a = \eta_{\mu\nu}.$$

Линеаризованные уравнения оказываются эквивалентными шести из десяти уравнений Эйнштейна $\overset{(1)}{\tau}{}_{ij} = 0.$ По аналогии с ОТО, добавляем 4 условия калибровки гармонических координат и требуем статичности первой поправки к метрике. В её терминах уравнения решаются:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\varphi & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{01} & 2\varphi & 0 & 0 \\ h_{02} & 0 & 2\varphi & 0 \\ h_{03} & 0 & 0 & 2\varphi \end{pmatrix}$$

Оказывается, что уравнения в первом порядке никак не ограничивают гравитационный потенциал φ. Остальные компоненты метрики связаны условием $\partial_j h_{j0} = 0$.

Рассмотрим физически интересный случай, соответствующий галактике в состоянии покоя. Потребуем в частности, чтобы величины второго порядка не завесили от времени. Пользуясь уравнениями и тождествами Бьянки, часть этих величин, а значит и часть требований статичности, выражаются через низшие порядки. В итоге получаем для них 9 дополнительных ограничений:

$$\partial_0 \overset{(2)}{\tau}{}^{ij} = \overset{(1)}{\tau}{}^{0k} \left(\partial_k \left(\alpha^{lmI} \partial_l \partial_m \varphi \right) \alpha^{ij}_I + \frac{1}{2} \left(\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li} \right) \partial_l \varphi \right) = 0$$

$$\partial_0 \overset{(2)}{\tau}{}^{0k} = \partial_j \left(\overset{(1)}{\tau}{}^{00} \partial_0 \partial_0 \overset{(1)}{y}{}^I + 2 \overset{(1)}{\tau}{}^{l0} \partial_l \partial_0 \overset{(1)}{y}{}^I \right) \alpha^{jk}_I - \partial_\mu \partial_0 \overset{(1)}{y}{}^a \partial^\mu \bar{y}_a \overset{(1)}{\tau}{}^{0k} -$$
$$- \partial_0 \partial_0 \overset{(1)}{y}{}^a \partial^k \bar{y}_a \overset{(1)}{\tau}{}^{00} - 2 \partial_j \partial_0 \overset{(1)}{y}{}^a \partial^k \bar{y}_a \overset{(1)}{\tau}{}^{j0} = 0$$

Здесь α^{lm}_I это величина, обратная к фоновой b^I_{ij}.

Низшие порядки включают 3 независимые функции, параметризующие фон, и 3 функции от решения $h_{\mu\nu}$. Следовательно, 9 условий статичности в общем случае неразрешимы. Выделяется частный случай: положим $h_{0k} = 0$, и как следствие $\overset{(1)}{\tau}{}_{0k} = \frac{1}{2}\partial_j \partial_j h_{0k} = 0.$ Эти условия означают нерелятивистский характер движения дополнительной материи. При этом 6 уравнений оказываются удовлетворены, и остаётся только 3 уравнения на 4 оставшиеся неизвестные функции, одна из которых это гравитационный потенциал:

$$\partial_j \left(\left(2\partial_i \partial_i \varphi + \varkappa\rho \right) \partial_l \partial_m \varphi \, \alpha^{lmI} \alpha^j{}_{kI} \right) + \left(2\partial_i \partial_i \varphi + \varkappa\rho \right) \partial_k \varphi = 0$$

Воспользуемся теперь сферической симметрией задачи, благодаря которой уравнения имеют только радиальную компоненту. Фон входит в уравнения только через величину $A^{lm,j}{}_k = \alpha^{lmI} \alpha^j{}_{kI}$, а для неё сферическая симметрия эквивалентна следующему представлению:

$$A^{lm,j}{}_k = f_1(r) \delta^{lm} \delta^{jk} + \frac{1}{2} f_2(r) \left(\delta^{lj} \delta^{mk} + \delta^{lk} \delta^{mj} \right) + \frac{1}{2r^2} f_3(r) \left(\delta^{lm} x^j x^k + \delta^{jk} x^l x^m \right) +$$
$$+ \frac{1}{4r^2} f_4(r) \left(\delta^{lj} x^m x^k + \delta^{lk} x^m x^j + \delta^{jm} x^k x^l + \delta^{mk} x^j x^l \right) + \frac{1}{r^4} f_5(r) x^l x^m x^j x^k.$$

Итоговое уравнение тогда можно представить в виде:

$$\left(\left(\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' + \frac{1}{2}\varkappa\rho \right) \left(\varphi'' F_1 + \frac{1}{r}\varphi' F_2 \right) \right)' + \left(\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' + \frac{1}{2}\varkappa\rho \right) \left(\frac{2}{r}\varphi'' F_3 + \frac{2}{r^2}\varphi' F_4 \right) = 0$$

Где $F_{1..4}$ это алгебраические комбинации $f_{1..5}$, которые в свою очередь определяются конкретным выбором фона.

Построим конкретное сферически симметричное фоновое вложение, компоненты которого разделим на три блока:

$$\bar{y}^{tr} = h(r), \; \bar{y}^A = g(r) \lambda^A_{lm} \frac{x^l x^m}{r^2}, \; \bar{y}^i = f(r) \frac{x^i}{r}.$$

Здесь λ^A_{lm} это базис бесследовых симметричных матриц. Внутри каждого из блоков действует своё представление $SO(3)$, в целом же фон преобразуется по представлению 1+3+5. Коэффициенты перед блоками в общем случае независимые функции радиуса, но мы должны учесть условия на то, что метрика плоская. При этом два коэффициента начинают зависеть от третьего:

$$f^2 + 2g^2 = r^2, \; f'^2 + h'^2 = 1.$$

Если теперь вычислить $A^{lm,j}{}_k$ для данного фона и выразить всё через *f*, то получается достаточно громоздкое дифференциальное уравнение третьей степени как по φ, так и по *f*. С его помощью можно для любого заданного *f* определить гравитационный потенциал.

Поставим обратную задачу: определим, существует ли такой выбор *f*, который отвечал бы наблюдаемым кривым вращения галактик. Известно, что в области гало галактики гравитационный потенциал растёт логарифмически. Подставим $\varphi = \ln r$ в уравнение и численно определим из него *f*. Для разных начальных данных удаётся найти решения, типичный вид которых представлен на рисунке. Тем самым мы доказываем существование фоновой функции вложения, для которой статичное в первом и втором порядке решение воспроизводит наблюдаемые кривые вращения галактик.