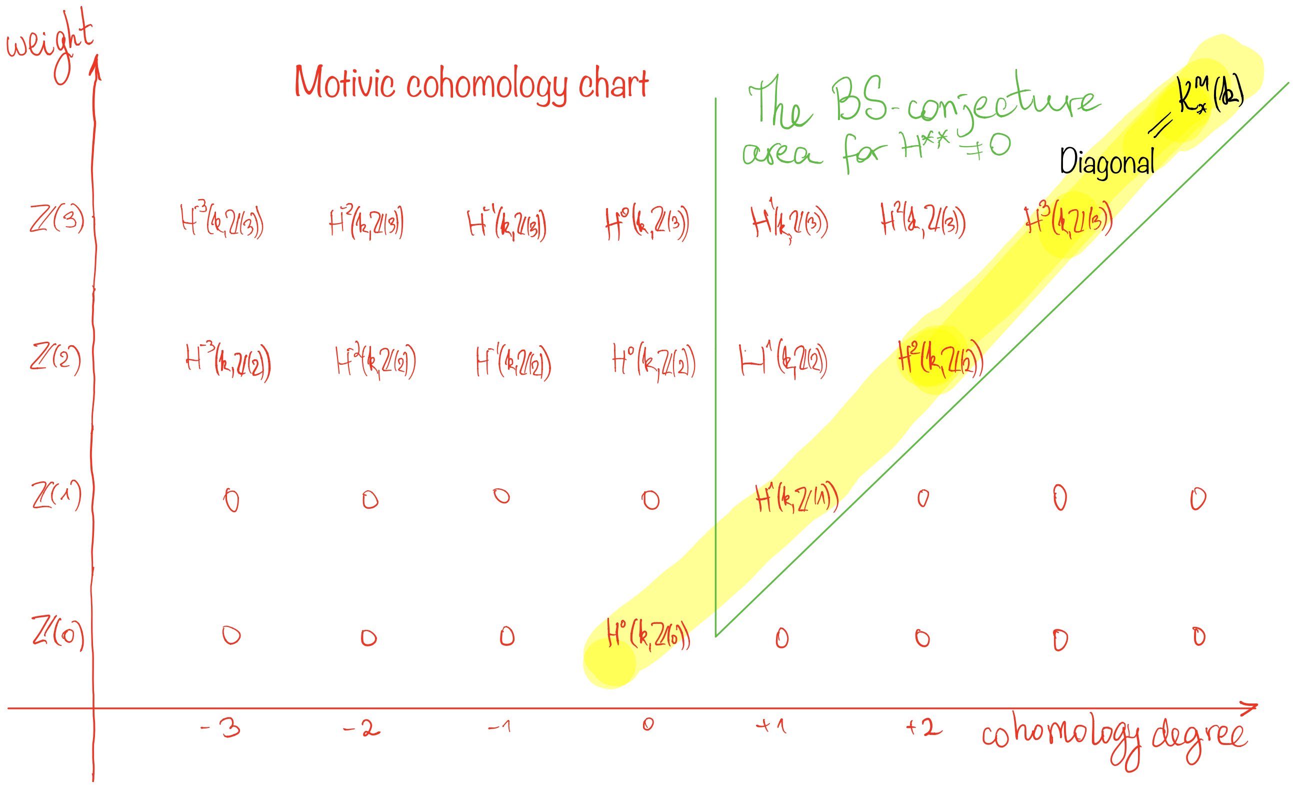
Semilocal Milnor K-theory (Grigory Garkusha)



Motivic cohomology groups outside the diagonal are unknown except $H^1(k,\mathbb{Z}(2)) = K_3^{ind}(k)$

The Beilinson-Soulé Vanishing Conjecture states $H^{\leq 0}(k,\mathbb{Z}(n)) = 0$

In positive characteristic p > 0 the Beilinson Conjecture states $K^M_*(k)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cong} K_*(k)_{\mathbb{Q}}$

Теорема: $\mathrm{char}(k) = p > 0 \Rightarrow K^M_*(k)$ не имеют p-кручения (87) (Изхболдин)

Теорема: $\hat{K}^M_{*,*}(k)$ суть p-однозначно делимые $\Rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-модули
$\hat{K}^M_{*,*}(k) = \hat{K}^M_{*,*}(k(x))$

Определение: $\mathcal{F} : Sm/k \to Ab$ предпучок, то
$$\tilde{C}_1(\mathcal{F})(X) = \operatorname*{colim}_{X \times \{0,1\} \subset U \subset X \times \mathbb{A}^1} \mathcal{F}(U)$$

Есть стрелка $\mathcal{F} \to \tilde{C}_1(\mathcal{F})$. Говорим, что $\mathcal{F}$ раз. стягиваемым, если $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \tilde{C}_1(\mathcal{F}) \underset{i_1^*}{\overset{i_0^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}$ $\quad i_0^* \varphi = 1_{\mathcal{F}} \quad i_1^* \varphi = 0$

Примеры: $\mathbb{Z}(\underline{Hom}(-, \mathbb{G}_m^{\wedge n}))$, $K_0^{\oplus}(-, \mathbb{G}_m^{\wedge n})$, $\mathbb{Z}_{tr}(-, \mathbb{G}_m^{\wedge n})$
$\mathbb{Z}F(-, \mathbb{G}_m^{\wedge n})$, etc.

Предложение: (Суслин). Выполнены след. утверждения:

(1) Если $\mathcal{F}$ - рац. стяг. предпучок $\Rightarrow$ $\underline{Hom}(\Delta^n, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(\Delta^n_{\times -})$ тоже рац. стяг.

(2) — " — " — " — " ——"— $\Rightarrow$ комплекс $\mathcal{F}(\hat{\Delta}^\bullet) = C_*\mathcal{F}$ является стягиваемым комплексом аб. групп.

Если $\mathcal{F}^*$ - коцепной комплекс $\tau_{\leq 0}(\mathcal{F}^*)$ — комплекс, когом. сосредоточенный в отриц. степенях.

Теорема: Пусть $\mathcal{F}^\bullet$ — коцепной комплекс предпучков

$$\dots \xrightarrow{d^{-3}} \mathcal{F}^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} \mathcal{F}^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \mathcal{F}^0 \to 0, \qquad (\mathcal{F}[-2])_n = \mathcal{F}_{n-2}$$

где каждый $\mathcal{F}^i$ - рац. стягиваемый предпучок.
$\mathcal{K}^{-n}$: $\operatorname{Ker} d^{-n}$, $n>0$, and $\mathcal{L} := \operatorname{Coker} d^{-1}$. Тогда цепной комплекс аб. групп $\mathcal{L}(\hat{\Delta}^\bullet_k)$ квазиизоморфен $\mathcal{K}^{-1}(\hat{\Delta}^\bullet_k)[-1]$.
Также имеется башня в произв. кат. $D(Ab)$ аб. групп

$$\dots \longrightarrow \mathcal{K}^{-3}(\hat{\Delta}^\bullet_k)[-2] \longrightarrow \mathcal{K}^{-2}(\hat{\Delta}^\bullet_k)[-1] \to \mathcal{K}^{-1}(\hat{\Delta}^\bullet)$$

У этой башни "конуса" $\mathcal{H}^{-1-q}(\hat{\Delta}^\bullet_k)[-q]$, где
Эта башня индуцирует строго сход. сп. посл.:

$$E^2_{pq} = H_p(\mathcal{H}^{-1-q}(\hat{\Delta}^\bullet_k)) := H_p((\mathcal{H}^{-1-q}(\tau_{\leq 0}\mathcal{F}^\bullet))(\hat{\Delta}^\bullet_k)) \Rightarrow H_{p+q+2}(\mathcal{L}(\hat{\Delta}_k))$$

$\square$ $0 \to \operatorname{Im} d^{-1} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{L} \to 0 \Rightarrow$

$$0 \to \operatorname{colim}_{U \ni v_0, v_1, \dots, v_n} (\operatorname{Im} d^{-1})(U) \to \operatorname{colim}_U \mathcal{F}(U) \to \operatorname{colim}_U \mathcal{L}(U) \to 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to (\operatorname{Im} d^{-1})(\hat{\Delta}) \to \mathcal{F}(\hat{\Delta})^{\sim 0} \to \mathcal{L}(\hat{\Delta}) \to 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\hat{\Delta}) = (\operatorname{Im} d^{-1})(\hat{\Delta})[-1]$$

$\mathcal{K}^{-1} \to \mathcal{F}^{-1} \twoheadrightarrow \operatorname{Im} d^{-1} \Rightarrow$

$$\mathcal{K}^{-1}(\hat\Delta) \hookrightarrow \underset{\simeq 0}{\mathcal{F}^{-1}(\hat\Delta)} \twoheadrightarrow (\mathrm{Im}\, d^{-1})(\hat\Delta) \Rightarrow \mathcal{K}^{-1}(\hat\Delta)\underset{[-1]}{=}(\mathrm{Im}\, d^{-1})(\hat\Delta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\hat\Delta) = \mathcal{K}^{-1}(\hat\Delta)[-2]$$

$$\mathcal{K}^{-n} \hookrightarrow \mathcal{F}^{-n} \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\, d^{-n} \Rightarrow \mathcal{K}^{-n}(\hat\Delta)[-1] = (\mathrm{Im}\, d^{-n})(\hat\Delta)$$

$$0 \to \mathrm{Im}\, d^{-n-1} \hookrightarrow \mathcal{K}^{-n} \twoheadrightarrow \mathcal{H}^{-n} \to 0$$

$$(\mathrm{Im}\, d^{-n-1})(\hat\Delta) \hookrightarrow \mathcal{K}^{-n}(\hat\Delta) \twoheadrightarrow \mathcal{H}^{-n}(\hat\Delta^\cdot)$$

$\cong$ в $D(Ab)$

$\mathcal{K}^{-n}(\hat\Delta)[-1]$ в $D(Ab)$

$$\mathcal{K}^{-n-1}(\hat\Delta)[-1] \to \mathcal{K}^{-n}(\hat\Delta) \to \mathcal{H}^{-n}(\hat\Delta) \xrightarrow{+}$$

треугольник в $D(Ab)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}^{-3}(\hat\Delta)[-2] \arrow[r] & \mathcal{K}^{-2}(\hat\Delta)[-1] \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \mathcal{K}^{-1}(\hat\Delta) \arrow[d, dotted] \\
& \mathcal{H}^{-2}(\hat\Delta) & \mathcal{H}^{-1}(\hat\Delta)
\end{tikzcd}$$

Если $\mathcal{F}$ предпучок с "хорошими" трансферами

$\mathcal{F}(W) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}_{Zar}(W)$, W – полулок. схема

<u>Следствие</u>! $\mathcal{F}^*$ как и выше но все когомол суть пучки Зарисского с хорошими тр-ми

Все $\mathcal{L}, \mathcal{H}^{-q}$ суть $\mathbb{A}^1$-инв. предпучки $\Rightarrow$

$(\mathcal{L}_{Zar})(\hat\Delta^\cdot) \underset{qis}{\sim} \mathcal{K}^{-1}(\hat\Delta^\cdot)[-2]$ +

$$E^2_{pq} = H_p\left((\mathcal{H}^{-1-q}_{Zar})(\hat\Delta^\cdot_k)\right) \Rightarrow H_{p+q+2}(\mathcal{L}_{Zar}(\hat\Delta^\cdot))$$

<u>Def</u>: K-т. Милнора б. называть гомологии комплекса аб. групп

$$\ldots \to K^M_n(k) \xrightarrow{1} K^M_n(k) \xrightarrow{0} K^M_n(k) \to 0$$

$K^M_{n,m}(k)$. Для $m>0$ $K^M_{n,m}(k)=0 \Rightarrow$ оставляю $K^M_n(k)$

Полулок. K-теория Милнора

$$\cdots \to K^M_n(\hat\Delta^2) \xrightarrow{\partial_2-\partial_1+\partial_0} K^M_n(\hat\Delta^1) \xrightarrow{\partial_1-\partial_0} K^M_n(k) \to 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Этот комплекс есть : пучок Милнора $\mathbb{Z}_{tr}(\hat\Delta^1, \mathbb{G}_m^{\wedge n}) \to \mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{G}_m^{\wedge n})$ $\downarrow$ $(\mathrm{Coker})_{zar}$

$\Downarrow$

$K^M_n(\hat\Delta^\bullet)$

$\hat{K}_{n,m}(k) \overset{def}{=} H_m(K^M_n(\hat\Delta^\bullet))$ — полулок K-группы Милнора

$\hat{K}^M_{n,m}(k, A)$, $\hat{K}_{n,m}(k, \mathbb{Q}) = K_{n,m}(k)_{\mathbb{Q}}$

<u>Теорема</u>: $\forall n \geq 1$, $\hat{K}^M_{n,0}(k)$, $\hat{K}_{n,1}(k) = 0$

$\forall n \geq 1$, $E^2_{pq} = H_p\left(\mathcal{H}^{n-1-q}_{zar}(\tau_{<n}\mathbb{Z}(n))(\hat\Delta^\bullet)\right) \Rightarrow \hat{K}^M_{n,p+q+2}(k)$

$n=2$ $H^p_{zar}(k, \mathbb{Z}(2)) = \hat{K}^M_{2,3-p}(k)$, $p \leq 1$

$H^1_{zar}(k, \mathbb{Z}(2)) = \hat{K}^M_{2,2}(k) = K_3^{ind}(k)$

$\hat{K}^{MW}_{n,q}(k) \xrightarrow{\cong} \hat{K}^M_{n,q}(k)$ $\forall n > 0$ $\tau_{\leq n}(\tilde{\mathbb{Z}}(n))$ $\|$ $\tau_{<n}(\mathbb{Z}(n))$

$H^{p\leq 1}_{zar}(X, \mathbb{Z}(2)) = \hat{K}^M_{2,3-p}(k(X))$

$K_3(k)_{\mathbb{Q}} = K^M_3(k)_{\mathbb{Q}} \oplus \hat{K}^M_{2,2}(k)_{\mathbb{Q}}$

<u>Теорема</u>: Гипотеза Бейлинсона для полей хар. $p>0$ эквивалентна $\hat{K}^M_{*,*}(k)_{\mathbb{Q}} = 0$

$H^{<n,n}_{zar}(k, \mathbb{Q}(n)) = 0$

<u>Гипотеза Паршина</u>: X — гл. проект. над кон. полем

$\Rightarrow K_i(X)_{\mathbb{Q}} = 0$, $i > 0$

Теорема: Если k - поле хар. $p>0$ и гипотеза Паршина верна $\Rightarrow \hat{K}^M_{*,*}(k)_{\mathbb{Q}} = 0$

Теорема: Пусть k - алг. з. поле. Тогда

$$K_4(k) \cong K^M_4(k) \oplus \hat{K}_{3,2}(k)_{\mathbb{Q}} \oplus \hat{K}_{2,3}(k)_{\mathbb{Q}} \oplus F$$

где F - это прямое слагаемое $\bigoplus_{k^\times \setminus \{1\}} \hat{K}^M_{2,2}(k)_{\mathbb{Q}}$

$$K^M_3 \hookrightarrow K_3 \twoheadrightarrow K^{ind}_3$$

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_2 \hookrightarrow K^{ind}_3 \twoheadrightarrow B(k) \qquad B(k) = \mathrm{Ker}\left(\mathcal{P}(k) \xrightarrow{d} \Lambda^2 k^\times\right)$$