Analysis Days in Sirius

Program

Time	Monday, 16.10	Tuesday, 17.10
10.00-10.50	Peller	Dubtsov
11.00-11.50	Borodin	Vodopyanov
11.50-12.10	Coffee-break	Coffee-break
12.10-12.45	Romanov	Osipov
12.55-13.30	Lukashov	Komarov
13.30-15.00	Lunch	Lunch
15.00-15.35	Semenov	Baranov
15.45-16.20	Mkrtchyan	Kuznetsov
16.20-16.40	Coffee-break	Coffee-break
16.40-17.40	Skopina 3	Bessonov 2
17.50-18.50	Skopina 4	Bessonov 3

Time	Wednesday, 18.10
16.00-19.00	Open Problem Session: Mozolyako, Belov, Bessonov, Dobronravov, Dobronravov Batenev, Shemyakov, Khasyanov, Prokofiev, Fedorovskiy Bochkov, Egorov, Zavolokin, Borovikov, Borisov Oleynik, Posadskiy, Nikitin, Matveev, Gorbunov

Time	Thursday, 19.10
10.00-10.50	Vinogradov
11.00-11.50	Melentievich
11.50-12.10	Coffee-break
12.10-12.45	Lysov
12.55-13.30	Isaev
13.20-15.00	Lunch
15.00-15.35	Dyachenko
15.45-16.20	Komlov
16.20-16.40	Coffee-break
16.40-17.15	Bagapsh
17.25-18.00	Lopatin

Time	Friday, 20.10
10.00-10.50	Nasyrov
11.00-11.50	Beloshapka
11.50-12.10	Coffee-break
12.10-13.00	Bufetov
13.10-14.00	Malamud
14.00-15.00	Lunch

Abstracts

А. Багапш (ФИЦ ИУ РАН)
О методах построения функции Грина для сильно эллиптических систем в областях на плоскости

Обсуждаются методы построения функции Грина и получения интегральных представлений для решений сильно эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами в областях на плоскости. Рассматриваемые системы с помощью аффиных замен переменных и искомых функций приводятся к каноническому виду с двумя параметрами τ, $\sigma \in [0, 1)$. Когда $\tau = \sigma = 0$, имеем систему уравнений Лапласа. Если же $\sigma = 0$, но $\tau \neq 0$, то получаем так называемую кососимметрическую систему. Ее решения представляются в виде суммы двух голоморфных функций от переменных $z_\tau = z - \tau\overline{z}$ и $\overline{z}$. В некоторых областях удается построить функцию Грина для кососимметрической системы с помощью функции Шварца, выражающей на границе области z_τ через $\overline{z}$. Хотя для разных участков границы могут возникать разные функции Шварца, однако в случае таких областей, как, например, полоса или угол, можно подобрать функции, инвариантные относительно замены одной функции Шварца на другую. С помощью таких функций строится функция Грина. Общий случай двухпараметрической системы изучается с помощью рассмотрения ее как возмущения кососимметрической системы по параметру σ.

А. Д. Баранов (СПбГУ)
Факторизация многочленов и аналитических функций с оценками

В 2004 году А.Л. Вольберг поставил следующий вопрос. Верно ли, что для любого аналитического многочлена p степени $2n$ существует факторизация $p = p_1 p_2$, где p_1, p_2 – многочлены степени, для которых имеет место “обратное неравенство Гельдера”

$$\|p_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \|p_2\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \|p\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

с некоторой абсолютной (не зависящей от p и n) константы C? Здесь $\mathbb{T}$ – единичная окружность в комплексной плоскости.

Ответ на вопрос Вольберга неизвестен. В докладе мы обсудим ряд близких задач и открытых вопросов.

В. К. Белошапка (МГУ)

О сложности аналитических функций двух переменных

В результате исследований последних лет по вопросам сложности аналитических функций сформировался определенный подход к таким задачам (теория аналитической сложности). Этот подход тесно связан с комплексным анализом, дифференциальной и коммутативной алгеброй, дифференциальной геометрией, функциональным анализом, логикой и теорией чисел. При этом этот подход органично включает использование систем компьютерной алгебры. В рамках этого подхода был получен ряд конкретных результатов. Получена теорема о классификации функций по типам стабилизатора в калибровочной группе, дано описание алгебраических функций сложности один, а также многих других.

Автор планирует дать описание этого подхода, сформулировать некоторые недавние результаты и имеющиеся проблемы.

П. А. Бородин (МГУ)

Задача о платке

Доклад посвящен следующей нерешенной задаче, возникшей в теории квантованных приближений: верно ли, что разносторонний липшицев образ квадрата в гильбертовом пространстве порождает плотную аддитивную полугруппу? Приводятся результаты о положительном ответе на этот вопрос в различных частных случаях, из которых выводится известная теорема Кореваара: для всякой ограниченной односвязной области D комплексной плоскости наипростейшие дроби с полюсами на границе D плотны в пространстве $A(D)$ функций, голоморфных в D.

А. И. Буфетов (МИАН, СПбГУ, ИППИ)

Мультипликативный хаос

Главный результат доклада – сходимость случайных целых функций, сопоставляемых реализациям синус-процеса, к гауссову мультипликативному хаосу. Результат устанавливается как в субкритическом, так и в критическом режиме.

О. Л. Виноградов (СПбГУ)

Приближение тригонометрическими многочленами и целыми функциями конечной степени в банаховых идеальных пространствах

Доклад посвящен приближению функций, заданных на вещественной оси, в пространствах, не инвариантных относительно сдвига. Рассматривается класс банаховых идеальных пространств, в которых операторы усреднения по Стеклову равномерно ограничены. Доказывается, что операторы свертки с ядрами, имеющими суммируемую горбатую мажоранту, ограничены в этих пространствах. С помощью сверточных операторов устанавливаются прямые и обратные теоремы теории приближения тригонометрическими многочленами и целыми функциями конечной степени. В качестве структурных характеристик используются степени отклонений средних Стеклова, в том числе нецелые. Теоремы для периодических и непериодических функций получаются единым методом. Как частные случаи получаются известные теоремы о приближении в весовых пространствах, пространствах Лебега с переменным показателем и других конкретных пространствах.

С. К. Водопьянов (Sobolev Institute RAS)

Новые результаты квазиконформного анализа

Теория квазиконформных отображений в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, начало которой положено в работах 60-ых годов прошлого века, стимулировала различные обобщения, каждое из которых имеет свою область применения и специфические методы доказательств. Мы рассмотрим основные этапы развития квазиконформного анализа: от классической теории функций до ее современного состояния. Основная цель — сформулировать новую обобщающую концепцию, содержащую в качестве частного случая большинство исследуемых в литературе классов отображений.

Будем говорить, что гомеоморфизм $\psi : D \to D'$ областей D, D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, принадлежит классу $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$, где $\omega : D' \to (0,\infty)$ — весовая функция, если для любого кубического кольца $U = Q(x,R) \setminus \overline{Q(x,r)} \subset D'$ с прообразом $\psi^{-1}(U) = \psi^{-1}(Q(x,R)) \setminus \psi^{-1}(\overline{Q(x,r)})$ в D верно неравенство

$$(1) \quad \operatorname{cap}_q^{\frac{1}{q}}(\psi^{-1}(U); L_q^1(D)) \leq \begin{cases} K_p \operatorname{cap}_p^{\frac{1}{p}}(U; L_p^1(D';\omega)), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi_{q,p}^{\frac{1}{\sigma}}(U) \operatorname{cap}_p^{\frac{1}{p}}(U; L_p^1(D';\omega)), & 1 < q < p < \infty, \end{cases}$$

где $K_p \in (0,\infty)$ — некоторая константа, а $\Psi_{q,p}$ — некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества на системе $\mathcal{O}_c(D)$ открытых множеств, а σ определяется из $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 < q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $1 < q < p < \infty$.

Оказывается [1, Теорема 18], что *гомеоморфизм $\psi : D \to D'$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$ тогда и только тогда, когда выполняется любое из двух условий.*

(1) *$\psi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ имеет конечное искажение: $D\psi(x) = 0$ почти всюду на $Z = \{x \in D \mid \det D\psi(x) = 0\}$, и операторная функция искажения*

$$(2) \qquad D \ni x \to K_{q,p}(x,\psi) = \begin{cases} \frac{|D\psi(x)|}{|\det D\psi(x)|^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{p}}(\psi(x))}, & \textit{если} \ \det D\psi(x) \neq 0, \\ 0, & \textit{если} \ \det D\psi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$.

(2) *Оператор композиции $\psi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \to L^1_q(D)$ ограничен, $1 < q \leq p < \infty$. Здесь $\psi^*(f) = f \circ \psi$ для $f \in L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D')$.*

Заметим, что гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{n,n;1}$ суть квазиконформные отображения; гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{q,p;1}$ совпадают с классами отображений работы Водопьянова С. К. и Ухлова А. Д. [2], а гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{n,n;\omega}$ — с классами отображений монографии [3].

Гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$ при $\theta \equiv 1$ и $n-1 \leq q < p = n$ можно рассматривать как семейства допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости [4].

Для гомеоморфизмов класса $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$ установлены новые результаты, не имеющие аналогов в классической теории, например, независимость класса отображений от применения модульного или емкостного определений [5], а также совпадение всех функций множества, возникающих либо при функциональном определении, либо алгебраическом или геометрическом определениях [6].

Список литературы

[1] Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов, *Сиб. мат. журн.*, **61**, nr. 6, 1257–1299 (2020).

[2] Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Классы Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения, *Сиб. мат. журн.*, **39**, nr. 4, 776–795 (1998).

[3] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory — New York: Springer, 2008.

[4] Molchanova A., Vodopyanov S. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity, *Calc. Var.*, **59**, nr. 17 (2020).

[5] Водопьянов С. К. Об эквивалентности двух подходов к задачам квазиконформного анализа, *Сиб. мат. журн.*, **62**, nr. 6, 1252–1270 (2021).

[6] Водопьянов С. К. О совпадении функций множества в квазиконформном анализе, *Математический сборник*, **213**, nr. 9, 3–33 (2022).

Е. С. Дубцов (ПОМИ РАН)

Носители плюригармонических мер на торе и сфере

Пусть $\mathcal{D}$ обозначает полидиск $\mathbb{D}^n$ или открытый единичный шар B_n из $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Мера μ, заданная на границе Шилова $\partial\mathcal{D}$, называется плюригармонической, если интеграл Пуассона $P[\mu]$ является плюригармонической функцией в области $\mathcal{D}$. В силу общего принципа неопределенности плюригармоническая мера μ не может быть сконцентрирована на слишком малом множестве, так как определение накладывает на спектр меры μ весьма сильное ограничение. В докладе обсуждаются конкретные условия, которым удовлетворяют носители плюригармонических мер. В частности, получено точное ограничение на хаусдорфову размерность носителя для плюригармонической меры, заданной на торе $\partial\mathbb{D}^n$ при $n \geq 2$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда №23-11-00171, https://rscf.ru/project/23-11-00171/.

Alexander Dyachenko (Keldysh Insitute RAS)

Revisiting a theorem by Katkova and Vishnyakova on total positivity

In [1], Katkova and Vishnyakova gave a sufficient condition for a matrix to be totally positive (i.e. all its minors are positive). Namely, they proved that a matrix $(a_{i,j})_{i,j=0}^{n}$ is totally positive if

$$a_{i,j}a_{i+1,j+1} > Ca_{i+1,j}a_{i,j+1} \quad \text{with} \quad C = 4\cos^2\frac{\pi}{n}$$

for all $i, j = 0, \ldots, n-1$. Moreover, the constant C is shown to be sharp. Our aim will be to somewhat extend this striking result by improving certain steps it its proof. We also give an application of the result in combinatorics.

Список литературы

[1] Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova. On sufficient conditions for the total positivity and for the multiple positivity of matrices, *Linear Algebra Appl.* **416** (2006), no. 2–3, 1083–1097.

К. П. Исаев (БГУ)

Целые функции типа синуса для выпуклых бесконечноугольников

Нами определяется класс выпуклых бесконечноугольников D на комплексной плоскости, для которых существует целая функция L, обладающая свойствами порождающей функции базисов из экспонент в гильбертовых пространствах функций, аналитических в области D.

М. А. Комаров (ВлГУ)

О приближениях наипростейшими дробями, полюсы которых лежат на единичной окружности

Наипростейшими дробями (НД) порядка n по предложению Е.П. Долженко принято называть рациональные функции, представляющиеся в виде логарифмических производных алгебраических полиномов степени n. Начиная с 60-х годов в научной школе Я. Кореваара исследовались аппроксимации такими дробями, все полюсы которых z_k располагаются на том или ином предписанном множестве в $\mathbb{C}$. Так, из результатов Кореваара следует, что любую аналитическую в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функцию f на любом компакте $K \subset D$ можно сколь угодно точно равномерно приблизить наипростейшими дробями с полюсами, лежащими на единичной окружности:

$$(3) \qquad g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad |z_1| = \cdots = |z_n| = 1, \quad |z| < 1; \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В интегральных пространствах такие аппроксимации стали изучаться по инициативе Ч. Чуи, который в 1971 году сформулировал задачу о существовании абсолютной константы $C > 0$ такой, что для любой НД вида (3) интеграл по площади круга (интерпретируемый как средняя напряжённость гравитационного поля, создаваемого внутри круга n точечными массами, расположенными в точках z_k) допускает оценку $\iint_{|z|<1} |g_n(z)|\, dxdy > C > 0$ $(z = x + iy)$. Решение задачи Чуи с константой $C = \pi/18$ было получено Д. Ньюманом (1972). Отсюда и из результатов Чуи (1973) вытекает критерий плотности дробей вида (3) в классических весовых пространствах Бергмана $\mathbf{A}^1_\alpha$: *дроби* g_n *плотны в* $\mathbf{A}^1_\alpha$*, если и только если* $\alpha > 0$.

Приближения наипростейшими дробями с полюсами на окружности рассматриваются и в интегральных пространствах на диаметрах круга. Внимание на такие приближения впервые обратил С.Р. Насыров (2014), сформулировавший вопрос о том, плотны ли дроби g_n в пространстве $L_2[-1, 1]$ (отрицательное решение этой задачи получено автором в 2019 году).

В докладе обсуждаются недавние результаты, связанные с задачами Чуи и Насырова и их обобщениями.

А. В. Комлов (МИАН)

Аппроксимации Эрмита-Паде и построение трехлистной поверхности Наттолла

Пусть f — многозначная аналитическая функция в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$, где $a_j \in \mathbb{C}$, и f_∞ — фиксированный росток в ∞ функции f. Аппроксимация Паде порядка n ростка f_∞ — это наилучшая рациональная аппроксимация степени n для f_∞ в ∞. Классическая теорема Шталя (1986) утверждает, что аппроксимации Паде, построенные по ростку f_∞ в ∞, сходятся к (однозначному) продолжению ростка f_∞ в область $\widehat{\mathbb{C}} \setminus S$, где S — так называемый компакт Шталя.

В докладе мы рассмотрим такие обобщения полиномов Паде, как полиномы Эрмита–Паде типов I и II. К сожалению, в общем случае для этих полиномов аналог теоремы Шталя неизвестен. В то же время еще в 1984 году Дж. Наттолл не в полной общности и Е. М. Чирка, С. П. Суетин, Р.В. Пальвелев и А. В. Комлов в 2017 году в общем случае описали асимптотическое поведение указанных полиномов Эрмита–Паде в простейшей ситуации, когда f — трехзначная алгебраическая функция. В этом случае ответ дается в терминах римановой поверхности f. Со времен Наттолла существует его общая “программа”, которая говорит, что и для любой рассматриваемой нами многозначной аналитической функции должна существовать трехлистная поверхность (так называемая поверхность Наттолла), которая отвечает за асимптотическое поведение полиномов Эрмита–Паде, построенных по этой функции. В докладе мы обсудим построение поверхности Наттолла, основанное на использовании аналога классического S-свойства для компакта Шталя.

Если позволит время, мы также рассмотрим прикладную задачу из молекулярной физики, в которой для вычислений используются полиномы Эрмита–Паде без всякого теоретического обоснования, и поясним на примере простейшего случая — трехзначной алгебраической функции, почему эти вычисления приводят к успеху.

Alexander Kuznetsov (SPbU)

Approximation of a given function by exponential functions with a low frequency set density

Let $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Then we can approximate f by linear combinations of functions $e^{i\lambda n}, n \in \mathbb{Z}$. We try to choose a set Λ with density less than $1 - c$ (for some absolute constant $c > 0$) such that f can be approximated by linear combinations $\{e^{i\lambda t}, t \in \Lambda\}$.

И. А. Лопатин (МИАН)

О локализации свободных нулей одной проблемы обращения Якоби

В 2021 году докладчиком было предложено [1] обобщение нового подхода [2] к описанию слабой асимптотики нулей полиномов Эрмита-Паде для модельной $\mathcal{GN}$ системы. В рамках этого подхода соответствующие предельные меры описываются в терминах решения скалярной теоретико-потенциальной задачи равновесия с внешним гармоническим полем на компактной римановой поверхности. Постановка этой задачи осуществляется, в частности, с помощью техники восстановления мероморфной функции на компактной римановой поверхности по её дивизору. При этом, если род поверхности положителен (как в случае [1]), то этот дивизор должен удовлетворять условию теоремы Абеля; следовательно, часть точек (нулей), входящих в дивизор, должна удовлетворять некоторой системе соотношений, записанной в терминах абелевых интегралов. В докладе я расскажу о локализации этих нулей на римановой поверхности, а также об ограничениях на применение GRS-метода, обусловленных этой проблемой.

Список литературы

[1] И. А. Лопатин, Об обобщении нового подхода к описанию слабой асимптотики нулей полиномов Эрмита-Паде для системы Никишина, *Математический сборник,* в печати.

[2] С. П. Суетин, О новом подходе к задаче о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде для системы Никишина, *Комплексный анализ, математическая физика и приложения,* Сборник статей, Тр. МИАН, 301, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018, 259–275.

А. Л. Лукашов (МФТИ)

Об одной гипотезе В.Н. Русака

В начале 60-х годов прошлого века Валентин Николаевич Русак (1936-2022) ввел интерполяционные процессы из рациональных функций с фиксированными знаменателями, а также высказал интересную гипотезу, с ними связанную.

Эти интерполяционные процессы в дальнейшем применялись при решении ряда задач теории приближений, но гипотеза оказалась незамеченной.

В докладе будет дан обзор результатов, относящихся к оценкам соответствующих констант Лебега.

В. Г. Лысов (ИПМ РАН)

О некоторых свойствах струны Стилтьеса третьего порядка

Доклад посвящен следующей спектральной задаче:

$$-y'''(x) = \lambda\sigma(x)y(x), \quad x \in (0,1)$$

с граничными условиями $y(0) = y'(0) = y(1) = 0$ и дискретной мерой σ:

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\delta(x - x_j), \qquad a_j > 0, \quad x_j \in (0,1).$$

Мы обсудим основные свойства этой задачи, ее связь с биортогональными многочленами и непрерывными дробями. Также остановимся на некоторых современных приложениях.

Mark Malamud (RUDN)

The Birman problem for symmetric Schrödinger operators with compact inverse

In early 2000s M.S. Birman posed the following problem:

Problem. *Let A be a closed non-negative symmetric densely defined operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$ and let $\mathfrak{H}_1 := ran(A + I)$. Assume that the inverse operator $(A + I)^{-1} : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}$ is compact. Is it true that the resolvent of the Friedrichs' extension A_F of A is also compact?*

First we discuss a complete solution to this problem in abstract setting by showing that the Friedrichs' extension A_F might have arbitrary non-negative spectrum, for instance, it might be purely absolutely continuous while $(A+I)^{-1}$ is compact.

The second part of the talk will be devoted to a solution to the Birman problem regarding the Schrödinger operators $H(q) = -\Delta + q \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$. Namely, we give an explicit construction of appropriate subsets $Y \subset \mathbb{R}^n$ of zero Lebesgue measure that determine symmetric Dirichlet type restrictions $A = H_Y(q) \geq 0$ of $H(q)$ to the domain dom$A = \mathrm{dom}(H_Y(q))$ that consist of functions from the Sobolev space $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ vanishing on Y. These restrictions meet the following properties:

1. The inverse operator $(A + I)^{-1}$ is compact;

2. Under the additional assumption that Y has zero $(1,2)$-capacity and a certain assumption on a potential q, the Friedrichs extension A_F of A has continuous (sometimes absolutely continuous) spectrum filling the whole semiaxes $\mathbb{R}_+$.

As a byproduct of the above construction of the operators $A = H_Y(q)$ gives surprising explicit examples of symmetric second order elliptic operators whose squares A^2 are densely defined nonnegative symmetric operators that meet the following properties:

(i) The Friedrichs' extension $(A^2)_F$ of the operator A^2 is A^*A and its spectrum is discrete, i.e. the inverse operator $((A^2)_F)^{-1}$ is compact;

(ii) The operator $(A_F)^2$ is not discrete. Moreover, its spectrum is

$$\sigma((A_F)^2) = \sigma_{\mathrm{ess}}((A_F)^2) = [0, \infty).$$

For certain potentials q (including $q = 0$) decreasing at infinity the non-negative spectrum $\sigma((A_F)^2) \cap \mathbb{R}_+$ of $(A_F)^2$ is purely absolutely continuous.

The main results of the talk are announced in [1], [2].

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the state task (project number FSSF-2023-0016).

1. M. M.Malamud, To Birman–Krein–Vishik Theory, Doklady Mathematics, Vol. 107, No. 1 (2023), p. 44–48.

2. M. M.Malamud, On the Birman problem in the theory of nonnegative symmetric operators with compact inverse, Func. Anal. Appl., V.57, No 2 (2023), p. 111–116.

Petar Melentijević

L^p norm of truncated Riesz transform and an improved dimension-free L^p estimate for maximal Riesz transform

We prove that the $L^p(\mathbb{R}^d)$ norm of the maximal truncated Riesz transform in terms of the $L^p(\mathbb{R}^d)$ norm of Riesz transform is dimension-free for any $2 \le p < \infty$, using integration by parts formula for radial Fourier multipliers. Moreover, we show that

$$\|R_j^* f\|_{L^p} \le \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{p}} \|R_j f\|_{L^p}, \quad \text{for} \quad p \ge 2, \quad d \ge 2.$$

As by products of our calculations, we infer the L^p norm contractivity of the truncated Riesz transforms R_j^t in terms of R_j, and their accurate L^p norms. More precisely, we prove:

$$\|R_j^t f\|_{L^p} \le \|R_j f\|_{L^p}$$

and

$$\|R_j^t\|_{L^p} = \|R_j\|_{L^p},$$

for all $1 < p < +\infty$, $j \in \{1, \dots, d\}$ and $t > 0$. Along with proved results, we will discuss possible extenstions and generalizations.

А. Д. Мкртчян (СФУ)

Analytic continuability of multiple power series into a sectorial domain

We consider the problem of continuability into a sectorial domain for multiple power series in approach when the coeffcients of power series interpolates by values of an entire or a meromorphic functions at the natural numbers. The growth of the interpolating function describes the sectorial set to which the series sum extends.

We obtain the multivariate version of Le Roy, Lindelof's theorem, i.e. establish a connection between the growth of the interpolating function of the coefficients on the imaginary subspace and the multivariate sectoral domain where the multiple series is analytically extends.

This work was performed at the Saint Petersburg Leonhard Euler International Mathematical Institute
and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075–15–2022–287).

С. Р. Насыров (КГУ)

Однопараметрические семейства однолистных и многолистных отображений и их применение

Мы рассматриваем гладкие однопараметрические семейства аналитических или мероморфных функций и выводим дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют, в случае, когда эти функции задаются интегральными представлениями.
В частности рассматриваются интегралы Кристоффеля–Шварца в односвязном и двусвязном случае, а также рациональные и эллиптические функции.

Для входящих в интегральные представления параметров найдены системы дифференциальных уравнений, которые позволяют достаточно точно находить приближенные значения этих параметров.

Н. Н. Осипов (СПбГУ, ПОМИ РАН)

Аксиомы рациональности фон Неймана–Моргенштерна и неравенства в анализе

Меняющееся благосостояние агента, делающего ставки на результаты бросков честной монеты, является классическим примером случайного процесса с мартингальным свойством. В такой игре не существует стратегии, которая бы давала положительное математическое ожидание прибыли. Однако задача о том, можно ли рационально выбрать стратегию, отличную от бездействия, остается осмысленной и нетривиальной: оказывается, что есть некоторый "зазор"между полным отказом от игры и полностью нерациональным экономическим поведением, при котором нарушаются базовые аксиомы рациональности фон Неймана–Моргенштерна. Решая задачу об описании этого "зазора"и поиске в рамках него оптимальных стратегий, мы придем к функциям Беллмана, которые ранее возникали в решении полностью абстрактных задач о поиске точных констант в неравенствах из анализа. Тем самым мы получим естественную экономическую интерпретацию для этих неравенств и связанных с ними функций Беллмана.

В. В. Пеллер (СПбГУ)

Поведение треугольного проектора в классах Шаттена - фон Неймана S_p, $p \leq 1$, при приближении числа p к 1

В докладе речь идёт о совместных результатах с А.Б. Александровым. Рассматривается треугольный проектор в пространстве матриц размера $n \times n$. Изучается поведение норм таких проекторов, когда n стремится к бесконечности, а число p отделено он нуля. Получены точные оценки равномерно по n и p, из которых, в частности вытекает, что при $p = 1$ нормы таких проекторов растут логарифмическим образом.

Р. В. Романов (СПбГУ)

Functional description of a class of quasi-invariant determinantal processes

We give a characterization of a class of quasi-invariant determinantal point processes governed by a projection kernel in terms of de Branges spaces of entire functions.

А. В. Семенов (СПбГУ)

Фреймы Габора на нерегулярных решетках

Одной из главных тем частотно-временного анализа является поиск представления произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ как суммы хорошо локализованных функций в частотно-временной плоскости. Для $g \in L^2(\mathbb{R})$ рассмотрим набор

$$\mathcal{G}(g;\Lambda) = \{\pi_{\mu,\nu} g\}_{(\mu,\nu)\in\Lambda},$$

где $\pi_{x,\omega} g(t) = e^{2\pi i \omega t} g(t-x)$, а $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ — некоторая свободная абелева группа. Такой набор называется системой Габора функции $g(t)$ по решетке Λ. Если вдобавок выполнено

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{m,n} |(f, \pi_{\mu,\nu} g)|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{4}$$

то этот набор называется *фреймом Габора*, а множество

$$\mathcal{F}_g = \{\Lambda \mid \mathcal{G}(g;\Lambda) \text{ система Габора}\}$$

называется *фрейм-множеством* функции $g(t)$.

Полное описание фрейм-множеств $\mathcal{F}_g$ даже для классического случая решеток $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$ известно только для очень узкого класса функций: гауссиана e^{-x^2} (см. [8, 9, 10]), односторонней экспоненты $\chi_{x>0}e^{-x}$, симметричной экспоненты $e^{-|x|}$ (см. [5, 6]) и гиперболического секанса $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ (см. [7]). Недавно Белов с соавторами описали фрейм-множество для *рациональных функций герглотцевского типа* (см. [1]). В 2023 году автор и Белов описали фрейм-множество сдвинутой sinc-функции и (бесокнечных) сумм спектральных сдвигов ядер Коши (см. [3]).

Логично задать вопрос — что происходит в нерегулярном случае? В 2021 году Белов с соавторами дали ответ для ядра Коши в случае «правильной» решетки $\Lambda = M \times N$ (см. [2]). Ранее в [4] был разобран случай $\Lambda \times \beta\mathbb{Z}$ для тотально положительных функций конечного типа — к этой же статье мы отсылаем для изучения истории вопроса. Несмотря на довольно большое количество попыток, очень мало информации известно в данный момент. Возможно ли обобщить эти результаты для полностью нерегулярного случая произвольной решетки Λ даже для таких естественных для изучения функций, как ядро Коши?

Доклад построен на кратком изложении результатов работы «Frame set for shifted sinc-function» (см. [3]) с дальнейшим обсуждением (полностью) нерегулярного случая для ядра Коши. Работа поддержана грантом 075-15-2022-287 министерства образования РФ. Также докладчик является победителем премии «Молодая математика России» и благодарен ее жюри и спонсорам.

Список литературы

[1] Y. Belov, A. Kulikov, Y. Lyubarskii, *Gabor frames for rational functions*, Inventiones Mathematique, 231:431–466 (2023).

[2] Y. Belov, A. Kulikov, Y. Lyubarskii, *Irregular Gabor frames of Cauchy kernels*, preprint https://browse.arxiv.org/pdf/2104.01121.pdf

[3] Y. Belov and Andrei V. Semenov, *Frame set for shifted sinc-function*, preprint, https://browse.arxiv.org/pdf/2309.05969.pdf

[4] K. Gr¨ochenig, J.L. Romero, J. St¨ockler, *Sampling theorems for shift-invariant spaces, Gabor frames, and totally positive functions.* Invent. Math. 211 (2018), no. 3, 1119- 1148.

[5] A. J. E. M. Janssen, *Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations,* Indag. Math., 7:165–182, (1996).

[6] A. J. E. M. Janssen, *On generating tight Gabor frames at critical density,* J. Fourier Anal. Appl., 9(2):175–214, (2003).

[7] A. Janssen, T. Strohmer, *Hyperbolic secants yield Gabor frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal., 12, 259–267, (2002).

[8] Yu. Lyubarskii, *Frames in the Bargmann space of entire functions,* in: Entire and Subharmonic Functions, Adv. Soviet Math., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167–180.

[9] K. Seip, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space. I,* J. Reine Angew. Math. **429** (1992) 91–106.

[10] K. Seip, R. Wallstén, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space. II,* J. Reine Angew. Math. **429** (1992) 107–113.

OPEN PROBLEM SESSION

Т. Г. Батенев (СПбГУ), Ю. С. Белов (СПбГУ), Р. В. Бессонов (СПбГУ), Н. С. Борисов (МГУ), М. А. Боровиков (МГУ), И. А. Бочков (СПбГУ), Л. П. Горбунов (СПбГУ), Н. П. Добронравов (СПбГУ), Е. П. Добронравов (СПбГУ), В. М. Егоров (МГУ), И. И. Заволокин (МГУ), М. А. Матвеев (СПбГУ), П. А. Мозоляко (СПбГУ), И. А. Никитин (МГУ), Р. Д. Олейник (МФТИ), А. Ф. Посадский (МФТИ), М. А. Прокофьев (СПбГУ), К. Ю. Федоровский (МГУ), Р. Ш. Хасянов (СПбГУ), В. В. Шемяков (СПбГУ)