Зимняя математическая школа СПбГУ — ВШЭ

Tuesday 30 January 2024 - Saturday 03 February 2024

Scientific Programme

К. Г. Куюмжиян. Системы корней

Системы корней — это конечные наборы векторов в евклидовом пространстве, обладающие определёнными свойствами. При помощи систем корней и связанных с ними групп Вейля даются ответы на самые разные алгебраические и геометрические вопросы: классификация полупростых алгебр Ли, классификация особенностей алгебраических многообразий, описание всех колчанов, имеющих конечное число попарно неизоморфных неразложимых представлений. Основные комбинаторные свойства систем корней выводятся из аксиоматического задания. Далее мы изучим строение полупростых алгебр Ли в терминах систем корней. Также мы обсудим геометрию действия групп Вейля и, более общо, групп отражений.

В. С. Болбачан. Введение в теорию модулярных форм

Пусть H — верхняя полуплоскость, Г — какая-нибудь подгруппа в группе PSL_2(**R**). Группа Г действует на H дробно линейными преобразованиями, и можно рассматривать голоморфные функции на H, которые понятным образом преобразуются относительно Г. Такие функции называются модулярными формами. Несмотря на то что их определение является довольно аналитическим, они оказываются сильно связанными с теорией чисел. В качестве примера мы докажем формулу о представлении числа в виде суммы четырех квадратов. План:

1) Определение модулярных форм. Примеры: ряды Эйзенштейна, j-инвариант. Классификация в случае PSL_2(**Z**).

2) Тэта-функция квадратичной формы. Формула для количества представлений числа в виде суммы четырёх квадратов.

3) Операторы Гекке. Мультипликативность тау-функции Рамануджана.

4) (Если хватит времени) Алгебраичность значения j-инварианта в мнимых квадратичных точках.

В. О. Медведев. Минимальные подмногообразия: методы их изучения и приложения

Представим себе что Вы — космический путешественник, пытающийся понять, какова геометрия той области пространства, куда Вы случайно забрели. Какие средства у Вас для этого есть? Покинуть наше пространство Вы, конечно, не в состоянии, поэтому анализировать его геометрию Вам придётся изнутри. Подобного рода вопросы (хотя и сформулированные менее научно-фантастически) часто возникают в дифференциальной геометрии. Современным средством, позволяющим отвечать на эти вопросы, является геометрический анализ, как его понимал его создатель Яу Шинтун: это анализ геометрии и топологии риманова многообразия посредством изучения его достаточно «хороших» подмногообразий. Опытным путём математики пришли к тому, что на роль таких «хороших» подмногообразий идеально подходят минимальные подмногообразия, то есть критические точки функционала объёма. Именно им и посвящён мини-курс. Мы увидим как геометрия минимальных подмногообразий и их свойства устойчивости (то есть насколько данная критическая точка далека от точки локального минимума) создают препятствия к геометрии и топологии объемлющего многообразия. Само же изучение геометрии минимальных подмногообразий представляет собой сложную, но увлекательную математическую задачу. Я расскажу о некоторых способах изучения их геометрии от явного описания и до общих теорем существования и единственности. Также мы поговорим о связи теории минимальных подмногообразий с другими популярными объектами современной дифференциальной геометрии.

В. Л. Селиванов. Вычисления с бесконечными данными

Цель данного мини-курса – дать первое представление о двух больших разделах
теории вычислений с бесконечными данными. Оба раздела активно развиваются, имеют богатую теорию и опыт практической реализации. Первый раздел изучает поведение автоматов на бесконечных словах и является теоретической основой верификации систем. Второй раздел, известный как вычислимый анализ, изучает вычисления на действительных числах и других объектах математического анализа (которые являются бесконечными) и задуман как теоретическое обоснование надежных численных методов. При изучении языков программирования (включающих типы данных integer и real) складывается впечатление, что работа с этими типами совершенно аналогична. Однако на самом деле надежные численные методы (гарантирующие вычисление выходных данных с любой наперед заданной точностью) основаны на тонких идеях теории вычислений, восходящих к Тьюрингу.

Примерная программа курса.

1. Конечные автоматы на бесконечных словах.
2. Автоматы и логика.
3. Автоматы и бесконечные игры.
4. Представление о вычислимом анализе.

E. Mortenson. An introduction to partitions and current topics of research

Partitions is a branch of number theory initiated by Leonard Euler. A partition of a positive integer n is a weakly decreasing sequence of positive integers whose sum is n. If we let p(n) denote the number of partitions of n, we see that p(4)=5 where the five partitions of four are 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1. There are many properties, generalizations, and variations of the partition function. After Euler, the subject has been developed by many mathematicians such as Gauss, Jacobi, Schur, MacMahon, Hardy, Ramanujan, Andrews, etc. The study of partitions is a natural lead-in to the Rogers-Ramanujan identities, modular forms, mock modular forms, etc. We will give an introduction to partitions and q-series, and then we will discuss current areas of research such as MacMahon's partition analysis, the Kanade-Russell conjectures, and cylindrical partitions. A preliminary program is:

0) Introduction to Partitions and q-series

1) MacMahon's Partition Analysis

2) Kanade-Russell conjectures

3) Involution principle

М. В. Платонова. Ветвящиеся процессы

Ветвящиеся процессы -- это случайные процессы, описывающие явления, связанные с размножением и превращением каких-либо объектов. В настоящее время теория ветвящихся процессов является мощным инструментом исследования в различных областях математики: теории алгоритмов, теории массового обслуживания, теории просачивания, а также во многих разделах других наук, в число которых входят физика, химия и биология.

В мини-курсе будут изложены базовые понятия и принципы теории ветвящихся процессов. Мы докажем предельные теоремы для ветвящихся процессов, а также обсудим некоторые их применения.

Р. В. Романов. Несамосопряженные операторы

Для симметричной матрицы $n\times n$ можно построить базис из собственных векторов (просто). Для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве можно сделать нечто подобное -- найти унитарное преобразование, приводящее его в оператор умножения (потруднее). Для несамосопряженного оператора в общей ситуации ничего подобного сделать нельзя: вольтерров оператор интегрирования имеет спектр, состоящий из одной точки 0. Как быть? В курсе обсуждаются возможные замены понятия спектрального разложения (базисы, методы суммирования, функциональное исчисление etc), пригодные для разных классов несамосопряженных (и ненормальных) операторов.

Ма Тяньюй. Introduction to basic notions in Cartan geometry

Cartan geometry allows us to establish a relationship between the properties of rigid geometric structures and the symmetries (e.g. infinitesimal automorphism) of these geometries. It incorporates representation theory into the study of classical problems on differential geometry and PDEs of finite type. In this mini-series of lectures, I plan to give a short introduction to the basic terminologies of Cartan geometry and some applications. If there is sufficient time, some notions on parabolic Cartan geometry will also be presented. The topics that can be covered are tentatively listed as follows.

1. Principal and vector bundles, Ehresmann connections, and curvatures.
2. Lie groups and Lie algebras, Maurer-Cartan form and structural equation.
3. Klein geometry and model spaces of Cartan geometry.
4. Notions in Cartan geometry: Cartan connection, curvature, exponential map and normal coordinates, gauges, tractors, etc.
5. Basic examples in Cartan geometry: Riemannian, projective, Lagrangian contact, CR, etc.
6. Basic setup of parabolic (Cartan) geometry.