Конференция «Алгебраические группы: сезон белых ночей»

Сборник тезисов

Содержание

Корневые подгруппы на орисферических многообразиях

Роман Авдеев

НИУ ВШЭ

suselr@yandex.ru

Аннотация

Известно, что группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} X$ полного рационального алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики является линейной алгебраической группой. Если X снабжено эффективным регулярным действием связной редуктивной группы G, то G естественным образом вкладывается в $\operatorname{Aut} X$ и алгебра Ли $\operatorname{Lie}(\operatorname{Aut} X)$ допускает разложение в прямую сумму G-модулей $\operatorname{Lie}(\operatorname{Aut} X) = \mathfrak{g} \oplus \bigoplus\limits_{i \in I} V_i$, где $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ и все V_i — простые G-модули. В ситуации, когда X является сферическим G-многообразием, то есть борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет в X открытую орбиту, старший вектор каждого G-модуля V_i соответствует аддитивной однопараметрической подгруппе в $\operatorname{Aut} X$, называемой B-корневой подгруппой. Зная множество всех B-корневых подгрупп в X и их веса, можно восстановить G-модульную структуру в $\operatorname{Lie}(\operatorname{Aut} X)$ и тем самым определить размерность группы $\operatorname{Aut} X$. Зная дополнительно коммутационные соотношения между G-модулями V_i, можно восстановить структуру алгебры Ли в $\operatorname{Lie}(\operatorname{Aut} X)$ и тем самым определить связную компоненту единицы в группе $\operatorname{Aut} X$.

Если $G = B = T$ — алгебраический тор, то условие сферичности для X равносильно тому, что X обладает открытой T-орбитой, и в этом случае X называется торическим T-многообразием. Для полных торических T-многообразий описанная выше стратегия реализована в знаменитой работе Демазюра [1], где вычислено множество всех T-корневых подгрупп, а также определена полная группа автоморфизмов для всех таких многообразий.

В докладе планируется обсудить задачу нахождения всех B-корневых подгрупп для орисферических многообразий — это класс сферических многообразий, наиболее близкий по многим свойствам к торическим многообразиям. В случае, когда G является прямым произведением группы SL_2 и тора, для произвольных полных орисферических G-многообразий X удаётся описать все B-корневые подгруппы и вычислить связную компоненту единицы группы $\operatorname{Aut} X$ в соответствии со стратегией выше.

Доклад основан на совместной работе с Владимиром Жгуном [1].

Ключевые слова — торическое многообразие, сферическое многообразие, корень Демазюра, корневая подгруппа.

Список литературы

[1] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **3** (1970), no. 4, 507–588

[2] R. Avdeev, V. Zhgoon, *Root subgroups on horospherical varieties*, preprint, see arXiv:2312.03377 [math.AG]

Сопряженность аддитивных действий в аффинной группе Кремоны

Иван Аржанцев

ФКН НИУ ВШЭ

arjantsev@hse.ru

Аннотация

Хорошо известно, что на произвольном торическом многообразии действие тора с открытой орбитой единственно с точностью до сопряженности в группе автоморфизмов многообразия. Напомним, что аддитивным действием на алгебраическом многообразии X называется эффективное действие векторной группы $\mathbb{G}_a^n$ на X с открытой орбитой. В отличие от торического случая, на данном многообразии X могут быть несопряженные аддитивные действия. Например, известное соответствие Хассетта-Чинкеля устанавливает биекцию между классами сопряженности аддитивных действий на проективных пространствах и конечномерными локальными алгебрами. Мы покажем, что аддитивные действия на проективном пространстве сопряжены в аффинной группе Кремоны и сопрягающий элемент определяется так называемым базисным подпространством в алгебре многочленов.

Ключевые слова — проективное пространство, векторная группа, действие с открытой орбитой

Список литературы

[1] И.В.Аржанцев и Ю.И.Зайцева. Эквивариантные пополнения аффинных пространств. Успехи математических наук 77:4 (466) (2022), 3-90

[2] Ivan Arzhantsev. On conjugacy of additive actions in the affine Cremona group. Quaest. Math. (2024), to appear; arxiv.org/abs/2308.12096

[3] Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Not. IMRN 1999 (1999), no. 22, 1211-1230

Модули Демазюра уровня 1 и векторные расслоения на проективной прямой

Бельдиев Иван Сергеевич

НИУ ВШЭ, ФКН, факультет математики

ivbeldiev@gmail.com

Аннотация

Мы работаем над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В работе [1, Глава 6] приведена конструкция, позволяющая по любому конечномерному представлению V «положительной половины» Vir_+ алгебры Вирасоро Vir, на котором оператор L_0 действует полупросто с целыми собственными значениями, построить алгебраическое векторное расслоение на произвольной гладкой алгебраической кривой X. Мы исследуем эту конструкцию явно в случае, когда $X = \mathbb{CP}^1$ — проективная прямая.

Мы доказываем, что в этом случае векторное расслоение полностью определяется действием операторов L_0 и L_1 и показываем, как можно найти разложение этого расслоения в прямую сумму линейных, зная разложение пространства V на жордановы подпространства относительно оператора L_1.

Дальнейшая часть работы посвящена явному вычислению указанного векторного расслоения для двух семейств представлений алгебры Vir_+. Первый случай — представления Vir_+ на так называемых модулях Фока $V_{n,k}$. Каждый такой модуль Фока $V_{n,k}$ является подпространством в пространстве полубесконечных мономов $\mathcal{F}$ (см. [2, Глава 14]) и получается применением «неотрицательной половины» алгебры Гейзенберга к полубесконечному моному

$$v_{n,k} = \psi_{-n} \wedge \psi_{-n+1} \wedge \ldots \wedge \psi_{-n+k} \wedge \psi_{k+1} \wedge \psi_{k+2} \wedge \ldots$$

Оказывается, что искомое расслоение на $\mathbb{P}^1$ изоморфно прямой сумме

$$\bigoplus_{r=0}^{k+1} \mathcal{O}(r(n+k+1))^{\binom{n}{r}\binom{k+1}{k-r+1}}.$$

Второй и основной случай — представление Vir_+ на модулях Демазюра уровня 1, соответствующих аффинной алгебре Каца-Муди $\widehat{\mathfrak{sl}}(n,\mathbb{C})$. Пусть L_n и L_n' — решётки корней и весов алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ соответственно. Тогда для любого $\gamma \in L_n'$ можно построить пространство

$$V_{L_n}^{\gamma} = \bigoplus_{\lambda\in\gamma+L} \pi_\lambda$$

(см. [1, Глава 5]). Модуль Демазюра уровня 1 W^γ определяется как подпространство в $V_{L_n}^{\gamma}$, полученное применением к вакуумному вектору $|\lambda\rangle \in \pi_\lambda$ всевозможных *бозонных вертексных операторов* $V_\mu[m]$, где $\mu \in L_n$, $m \geqslant 0$.

В случае $n = 2$ любой вес λ имеет вид $n\omega$, где ω — фундаментальный вес. Мы показываем, что расслоение на $\mathbb{P}^1$, отвечающее $n\omega$, изоморфно прямой сумме

$$\bigoplus_{r=0}^{n} \mathcal{O}(2N - nr)^{\oplus \binom{n+1}{2r+1}},$$

где N — произвольное целое число.

Для произвольного n мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда $\lambda = k\omega_1$, где ω_1 — первый фундаментальный вес. Соответствующее векторное расслоение на $\mathbb{P}^1$ оказывается изоморфно прямой сумме (предполагая $d_n = 0$, $r_0 = k$)

$$\bigoplus_{\substack{d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_{n-1} \geqslant 0 \\ r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} \geqslant 0}} \mathcal{O}(2N - kd_1)^{\oplus \prod_{i=1}^{n-1} \binom{r_i - d_{i+1}}{r_i - d_i} \binom{r_{i+1} - r_i + d_{i+1}}{d_i}}, \quad N \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Ключевые слова — алгебра Вирасоро, представление, алгебраическая кривая, проективная прямая, векторное расслоение, модуль Демазюра уровня 1.

Список литературы

[1] E. Frenkel and D. Ben-Zvi, Vertex Algebras and Algebraic Curves, Second Edition. Mathematical Surveys and Monographs, ISSN 0076-5376; v. 88, 2004

[2] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Third Edition. Cambridge University Press, 1990.

Взвешенные полные пересечения среди многообразий l-Фано

Викулова Анастасия Вадимовна

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,

119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений,

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,

119048, г.Москва, ул. Усачева, д. 6

vikulovaav@gmail.com

Аннотация

Гладкое проективное многообразие X называется многообразием Фано, если первый класс Чженя его касательного расслоения $c_1(X)$ обилен. Многообразия l-Фано, которые в некотором смысле обобщают определение многообразий Фано, были введены в статьях [1] и [4].

Определение 1. *Будем говорить, что характер Чженя $ch_i(X)$ гладкого проективного многообразия X положителен, если $ch_i(X) \cdot Z > 0$ для любого эффективного i-цикла Z.*

Определение 2. *Гладкое многообразие Фано X называется* многообразием l-Фано*, если характеры Чженя $ch_i(X)$ положительны для всех $2 \leqslant i \leqslant l$.*

Определение 2 мотивированно следующими наблюдениями. Известно (см. [3, Chapter 5, Theorem 1.6.1]), что через общую точку многообразия Фано проходит рациональная кривая. А для многообразий 2-Фано при некоторых незначительных дополнительных условиях было показано (см. [4]), что через общую точку проходит рациональная поверхность. В статье [2] было показано, что при некоторых других незначительных дополнительных условиях через общую точку многообразия 3-Фано проходит рациональное многообразие размерности 3. Иное свойство многообразий Фано имеется благодаря теореме Тзена. Она утверждает, что гладкая гиперповерхность Фано $X \subset \mathbb{P}^N_K$ степени $d < N + 1$ над полем K/k степени трансцендентности 1 над полем k всегда имеет K-точку. Подобным свойством обладают и многообразия l-Фано и восходить оно к теореме Тзена-Ленга. Эта теорема, в свою очередь, говорит, что гладкая гиперповерхность Фано $X \subset \mathbb{P}^N_K$ степени d с условием $d^l < N + 1$ над полем K/k степени трансцендентности l над полем k всегда имеет K-точку.

Имеется следующая гипотеза.

Гипотеза 1 ([1, Conjecture 1.7]). *Если X – многообразие l-Фано размерности n и*

$$l \geqslant \lceil \log_2(n+2) \rceil,$$

то $X \simeq \mathbb{P}^n$.

В докладе мы обсудим эту гипотезу примененную к взвешенным полным пересечениям и докажем, что для такого класса многообразий гипотеза верна. Более того, в классе таких многообразий мы обсудим усиление этой гипотезы.

Ключевые слова — многообразия Фано, взвешенные полные пересечения.

Список литературы

[1] C. Araujo, R. Beheshti, A.-M. Castravet, K. Jabbusch, S. Makarova, E. Mazzon, L. Taylor, N. Viswanathan *Higher Fano manifolds*, Rev. Un. Mat. Argentina **64** (2022), no. 1, 103–125.

[2] C. Araujo, A.-M. Castravet, *Polarized minimal families of rational curves and higher Fano manifolds*, Amer. J. Math. **134** (2012), no. 1, 87–107.

[3] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag (1996).

[4] A. J. de Jong, J. M. Starr, *Higher Fano manifolds and rational surfaces*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 1, 173–183.

Группы, градуированные системами корней

Е. Ю. Воронецкий

Лаборатория Чебышёва, СПбГУ

VoronetckiiEgor@yandex.ru

Аннотация

Группа G *градуирована* некристаллографической системой корней Φ, если в ней заданы *корневые подгруппы* $G_\alpha \leqslant G$ при $\alpha \in \Phi$ такие, что

- $[G_\alpha, G_\beta] \leqslant \langle G_\gamma \mid \gamma \in (\mathbb{R}_{>0}\alpha + \mathbb{R}_{>0}\beta) \cap \Phi \rangle$ при $\alpha \not\parallel \beta$;
- для каждого корня $\alpha \in \Phi$ существует *элемент Вейля* $n_\alpha \in G_\alpha G_{-\alpha} G_\alpha$, то есть обладающий свойством $G_\beta^{n_\alpha} = G_{s_\alpha(\beta)}$;
- для любой положительной системы корней $\Pi \subseteq \Phi$ существует линейный порядок на Π такой, что отображение $\prod_{\alpha \in \Pi} G_\alpha \to G$, $(g_\alpha) \mapsto \prod_\alpha g_\alpha$ из декартова произведения инъективно, где умножение делается в выбранном порядке.

В последнем условии оказывается, что инъективность всегда выполнена для некоторого класса линейных порядков, которые легко строить на практике, а образ этого отображения является подгруппой.

Например, группы Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, K)$ над коммутативными кольцами с единицей и полные линейные группы $\mathrm{GL}(n, R)$ над ассоциативными кольцами с единицей имеют градуировки системами корней Φ и A_{n-1} соответственно.

Естественно попытаться классифицировать с точностью до изогении все группы, градуированные неприводимыми системами корней ранга $\geqslant 3$ (в меньших рангах условий на корневые подгруппы недостаточно для интересной теории). В [1] это сделано для систем корней с простыми связями и чуть более сильного определения, а именно, с точностью до изогении такие группы — это в точности $\mathrm{GL}(\ell+1, R)$, $\mathrm{G}(\mathsf{D}_\ell, K)$ и $\mathrm{G}(\mathsf{E}_\ell, K)$. Для систем корней типа $\mathsf{B}_\ell = \mathsf{C}_\ell$, а также для F_4 при дополнительном предположении классификация дана в недавней диссертации [3] в терминах новых двусортных алгебраических структур, параметризующих корневые подгруппы для корней из разных орбит под действием группы Вейля. Наконец, в [2] мы сделали общий случай F_4 и доказали *теорему существования*: для каждой такой алгебраической структуры можно на самом деле построить соответствующую группу, градуированную системой корней.

В докладе будет рассказано, как устроены эти алгебраические структуры, а также упомянуты идеи доказательства. Работа была выполнена при поддержке программы социальных инвестиций «Родные города» ПАО «Газпром нефть».

Ключевые слова — системы корней, группы Шевалле.

Список литературы

[1] Z. Shi, *Groups graded by finite root systems*. — Tohoku Math. J. **45** (1993), 89–108.

[2] E. Voronetsky, *Root graded groups revisited*, arXiv:2406.03558.

[3] T. Wiedemann, *Root graded groups*, dissertation, Justus Liebig University Giessen, 2024.

Модифицированный инвариант Дерксена

Гайфуллин Сергей Александрович

Кафедра высшей алгебры мехмат МГУ/ лаборатория алгебраических групп преобразований ВШЭ

sgayf@yandex.ru

Аннотация

Доклад основан на совместной работе с И.А. Болдыревым и А.А. Шафаревичем.

Пусть X – аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики $\mathbb{K}$. Локально нильпотентным дифференцированием (ЛНД) на X будем называть линейный оператор $\delta: \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ на алгебре регулярных функций на X, удовлетворяющий правилу Лейбница $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$, и такой, что для каждой функции $f \in \mathbb{K}[X]$ существует натуральное $n = n(f)$ такое, что $\delta^n(f) = 0$. Экспоненциальное отображение задаёт биекцию между ЛНД и регулярными действиями аддитивной группы поля $(\mathbb{K}, +)$ на X.

В 1996 году Л. Макар-Лиманов [5] ввел новый инвариант аффинных алгебраических многообразий, определенный как подалгебра алгебры регулярных функций на X, равная пересечению ядер всех ненулевых ЛНД. Данный инвариант $\mathrm{ML}(X)$, в последствии названный инвариантом Макар-Лиманова, позволил доказать неизоморфность кубики Кораса-Расселла $\{x + x^2y + z^2 + w^3 = 0\}$ и аффинного трёхмерного пространства, что было завершающим шагом в доказательстве линеаризуемости действия одномерного тора на трёхмерном пространстве. Годом позже Х. Дерксен [3] представил альтернативный инвариант, основанный на ЛНД. Инвариант Дерксена $\mathrm{HD}(X)$ – это подалгебра в $\mathbb{K}[X]$, порожденная ядрами всех ненулевых ЛНД. Этот инвариант также различает кубику Кораса-Рассела и аффинное пространство. В 2003 году А. Крачиола и С. Маубах исследовали вопрос, различает ли один из этих двух инвариантов многообразия лучше, чем другой. Они приводят примеры с тривиальным одним инвариантом и нетривиальным другим.

Инварианты Макар-Лиманова и Дерксена стали важными инструментами для доказательства неизоморфности аффинных алгебраических многообразий. Однако есть актуальные проблемы изоморфности многообразий, в которых данные инварианты не могут различить многообразия. Одной из таких проблем является вопрос, изоморфно ли произведение кубики Кораса-Расселла на прямую четырёхмерному аффинному пространству. Логичным выходом из ситуации является попытка рассмотреть другие аналогичные инварианты. В 2006 г. Дж. Фройденбург предложил рассмотреть следующие модификации инвариантов Макара-Лиманова и Дерксена. Напомним, что элемент s из $\mathbb{K}[X]$ называется слайсом для локально нильпотентного дифференцирования δ, если $\delta(s) = 1$. Не все ЛНД имеют слайс. Известная теорема о слайсе утверждает, что если s является слайсом для δ, то $\mathbb{K}[X]$ изоморфно кольцу многочленов от одной переменной над ядром δ. Это ядро конечно порождено, и мы можем рассмотреть его спектр Z. Геометрически это означает, что X изоморфно прямому

произведению Z и аффинной прямой. Определим модифицированный инвариант Макар-Лиманова $\mathrm{ML}^*(X)$ многообразия X как пересечение ядер всех локально нильпотентных дифференцирований на X, допускающих слайс. Аналогично, определим модифицированный инвариант Дерксена $\mathrm{HD}^*(X)$ многообразия X как подалгебру в $\mathbb{K}[X]$, порожденную ядрами всех локально нильпотентных дифференцирований на X, допускающих слайс.

В 2021 году индийские математики Н.Дасгупта и Н.Гупта [2] получили характеризацию аффинного трехмерного пространства в терминах ML и ML^*. Они также задали вопрос, различает ли ML^* прямое произведение кубики Кораса-Расселла на аффинную прямую и четырехмерное аффинное пространство. Этот вопрос был решен С.Гайфуллиным и А.Шафаревичем [4] (данный результат докладывался на прошлогодней конференции). Более того, мы доказали, что если многообразие X допускает ЛНД со слайсом, то ML и ML^* совпадают. Итак, ML^* не дает нового инварианта и, в частности, не различает многообразия, которые нельзя отличить с помощью ML. Также мы доказали, что модифицированный инвариант Дерксена дает новый инвариант. Мы строим многообразие с тривиальными ML и HD (и, следовательно, с тривиальным ML^*), но нетривиальным HD^*.

В докладе будет рассказно о результатах совместной работы с И. Болдыревым и А.Шафаревичем [1], в которой мы проводим дальнейшее исследование модифицированного инварианта Дерксена. А именно, мы доказали, что если многообразие X допускает ЛНД со слайсом, т.е. X изоморфно прямому произведению многообразия Y и прямой, то возможны следующие три варианта для $\mathrm{HD}^*(X)$:

A) $\mathrm{HD}^*(Y \times \mathbb{A}^1) = \mathbb{K}[Y \times \mathbb{A}^1]$;

B) $\mathrm{HD}^*(Y \times \mathbb{A}^1)$ не конечно порождено;

C) $\mathrm{HD}^*(Y \times \mathbb{A}^1) = \mathbb{K}[Y]$.

Также будут рассказаны достаточные условия для того, чтобы для многообразия выполнялась одна из этих возможностей.

Ключевые слова — аффинное алгебраическое многообразие, локально нильпотентное дифференцирование, инвариант Макар-Лиманова, инвариант Дерксена.

Список литературы

[1] I. Boldyrev, S. Gaifullin, A. Shafarevich, *Modified Derksen invariant*, arXiv:2405.08108, 12 pages.

[2] N. Dasgupta and N. Gupta, *An algebraic characterization of the affine three space*. J. Commut. Algebra. **13**:3 (2021), 333-345.

[3] H. Derksen, *Constructive Invariant Theory and the Linearisation Problem*. (Ph.D. thesis, University of Basel, 1997).

[4] S. Gayfullin and A. Shafarevich, *Modified Makar-Limanov and Derksen invariants.* J. of Pure and Appl. Algebra, **228**:6 (2024), article 107616.

[5] L. Makar-Limanov, *On the hypersurface* $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ *in* $\mathbb{C}^4$ *or a* $\mathbb{C}^3$*-like threefold which is not* $\mathbb{C}^3$. Israel J. Math. **96** (1996), 419-429.

О нормальности проективных гиперповерхностей с аддитивным действием

Зайцева Юлия Ивановна
ФКН ВШЭ
yuliazaitseva@gmail.com

Аннотация

Мы изучаем проективные гиперповерхности, допускающие индуцированное аддитивное действие, то есть эффективное действие векторной группы с открытой орбитой, которое может быть продолжено до действия на объемлющем проективном пространстве. Дан критерий нормальности таких гиперповерхностей и доказано, что для любой проективной гиперповерхности Z существует гиперповерхность с индуцированным аддитивным действием, дополнение к открытой орбите в которой является проективным конусом над Z. Мы вводим конструкцию невырожденной гиперповерхности с индуцированным аддитивным действием по диаграмме Юнга и изучаем свойства таких гиперповерхностей. Доклад основан на работе [1], поддержанной грантом РНФ 23-21-00472.

Ключевые слова — аддитивное действие, проективная гиперповерхность, нормальность, диаграмма Юнга

Список литературы

[1] Ivan Arzhantsev, Ivan Beldiev, and Yulia Zaitseva. On normality of projective hypersurfaces with an additive action. https://arxiv.org/abs/2404.18484, 17 pages

Доказательство жёсткости алгебр с использованием ассоциированной градуированной алгебры

Вероника Владимировна Киктева
ФКН НИУ ВШЭ
VVKikteva@yandex.ru

Аннотация

Под алгебрами мы будем подразумевать ассоциативные коммутативные алгебры с единицей над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Алгебра называется *жёсткой*, если на ней не существует нетривиальных локально нильпотентных дифференцирований, см. [2]. По алгебре A с заданной фильтрацией можно построить ассоциированную с ней градуированную алгебру $\mathrm{Gr}(A)$. Оказывается, что некоторые свойства A можно восстановить по свойствам $\mathrm{Gr}(A)$. В частности, если A является конечно порождённой, и $\mathrm{Gr}(A)$ построена по весовой фильтрации, то из жёсткости $\mathrm{Gr}(A)$ следует жёсткость A, см. [1, 3].

Постерный доклад содержит следующие результаты.

(1) Описаны ассоциированные градуированные алгебры для алгебр с весовыми фильтрациями.
(2) Разработана техника, позволяющая сводить исследование жёсткости алгебр к изучению жёсткости градуированных алгебр.
(3) С помощью разработанной техники получены новые классы жёстких алгебр.

Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Ключевые слова — локально нильпотентное дифференцирование, ассоциированная градуированная алгебра, жёсткие алгебры

Список литературы

[1] Anthony Crachiola and Stefan Maubach. Rigid rings and Makar-Limanov techniques. Comm. Algebra 41 (2013), no. 11, 4248-4266

[2] Gene Freudenburg. *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*. Encyclopaedia Math. Sci. 136, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2017

[3] Shulim Kaliman, Leonid Makar-Limanov. AK-invariant of affine domains. Affine Algebraic Geometry, Osaka University Press, Osaka, (2007) 231–255

Многогранники Гельфанда–Цетлина, косые перестановки и пайп дримы

Валентина Кириченко

факультет математики НИУ ВШЭ

vkiritch@hse.ru

Аннотация

Топологические пайп дримы в типе A_n реализуют перестановки множества из $n + 1$ элемента и собираются из деталей одноимённой игры по простым правилам. В прошлом году Фуджита и Нишияма [FN] придумали элегантное обобщение пайп дримов в типе C_n — здесь пайп дримы реализуют косые перестановки на n элементах и собираются из тех же деталей, только теперь детали можно поворачивать. В обоих случаях поле для игры реализует таблицу Гельфанда–Цетлина в соответствующем типе, а пайп дримы естественным образом соответствуют граням многогранника Гельфанда–Цетлина, кодирующим полуторические вырождения многообразий Шуберта. Для типа D_n топологические пайп дримы пока не построены, однако можно описывать соответствующие им грани, исходя из геометрии многообразий Шуберта. В типе D_3 это недавно сделала Екатерина Преснова [P]. Заметим, что несмотря на исключительный изоморфизм $A_3 \simeq D_3$ уже в этом случае есть существенные комбинаторные различия между многогранниками Гельфанда–Цетлина. Мы обсудим конструкцию Фуджиты–Нишиямы, результат Пресновой и приложения комбинаторики пайп дримов в исчислении Шуберта, теории представлений и алгебраической геометрии. Все необходимые определения будут даны в докладе.

Ключевые слова — пайп дримы, многогранники Гельфанда–Цетлина, исчисление Шуберта.

Список литературы

[FN] Naoki Fujita, Yuta Nishiyama, *Combinatorics of semi-toric degenerations of Schubert varieties in type C*, preprint arXiv:2306.14485 [math.CO]

[P] Екатерина Преснова, *Многогранники Гельфанда–Цетлина типа D*, курсовая работа, магистратура факультета математики НИУ ВШЭ, 2024

Конечные абелевы подгруппы в группе Кремоны ранга 3

Константин Логинов
МИАН
loginov@mi-ras.ru

Аннотация

Конечные абелевы группы — один из простейших объектов, изучаемых в алгебре. В свою очередь, рациональные многообразия образуют достаточно простой класс многообразий, рассматриваемых в алгебраической геометрии. Однако вопрос о том, какие конечные абелевы группы могут действовать на рациональных (или рационально связных) многообразиях, является далеко не тривиальным. В размерности 2 ответ на этот вопрос дали A. Beauville [Beau07] и J. Blanc [Bl07]. Также известны результаты о действиях конечных абелевых p-групп на рационально связных многообразиях в размерности не выше 3 [Pr11, Pr14, Xu18, Kuz20, Lo22]. Совсем недавно этот результат был обобщен на случай произвольной размерности [KZh24]. В докладе я расскажу о том, как решать задачу о классификации конечных абелевых групп, действующих на рационально связных многообразиях размерности 3.

Ключевые слова — группа Кремоны, рациональные многообразия, абелевы группы.

Список литературы

[Beau07] A. Beauville. *p-Elementary subgroups of the Cremona group.* J. of Algebra, 314 (2), 553–564, 2007.

[Bl07] J. Blanc, *Finite Abelian subgroups of the Cremona group of the plane.* C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I 344, no. 1, 21–26, 2007.

[KZh24] J. Kollár, Z. Zhuang. *Essential dimension of isogenies*, arXiv:2402.15362, 2024.

[Kuz20] A. Kuznetsova. *Finite* 3*-Subgroups in the Cremona Group of Rank* 3. Math. Notes, 108:5, 697–715, 2020.

[Lo22] K. Loginov. *A note on 3-subgroups in the space Cremona group*. Comm. in Algebra, vol. 50 (9), 3704–3714, 2022.

[Pr11] Yu. Prokhorov. p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[Pr14] Yu. Prokhorov. 2-elementary subgroups of the space Cremona group. In *Automorphisms in birational and affine geometry*, volume 79 of *Springer Proc. Math. Stat.*, 215–229. Springer, Cham, 2014.

[Xu18] J. Xu. *Finite p-groups of birational automorphisms and characterizations of rational varieties*. arXiv 1809.09506, 2018.

О пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных группах

Н.В. Маслова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

butterson@mail.ru

Аннотация

Подгруппа H группы G пронормальна в G, если для любого элемента g из G подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$, ими порожденной.

Понятие пронормальной подгруппы было введено Ф. Холлом [2] и оказалось весьма полезным. В терминах пронормальности допускают описание, а иногда могут быть полностью решены некоторые важные вопросы теории групп, алгебраической комбинаторики и других областей математики. Так, классификация CI-групп получена посредством исследования пронормальности регулярных подгрупп в симметрических группах [1, 5]. Таким образом, представляет интерес вопрос описания семейств пронормальных подгрупп в конечных группах.

Ш. Прэгер [6] показала, что пронормальная подгруппа в конечной транзитивной группе подстановок степени n не может фиксировать более $(n-1)/2$ точек. Таким образом, надгруппы пронормальных подгрупп любой конечной группы удовлетворяют естественному необходимому условию пронормальности. Хорошо известными примерами пронормальных подгрупп в конечных группах являются нормальные подгруппы, максимальные подгруппы, силовские подгруппы, картеровы подгруппы, холловы подгруппы разрешимых групп и т. д.

В 2012 году Е. П. Вдовин и Д. О. Ревин [7] доказали, что холловы подгруппы пронормальны в конечных простых группах, и выдвинули гипотезу, что все подгруппы нечетных индексов (т. е. надгруппы силовских 2-подгрупп) пронормальны в конечных простых группах. Эта гипотеза была опровергнута А. С. Кондратьевым, докладчиком и Д. О. Ревиным [3]. Однако во многих конечных простых группах все подгруппы нечетных индексов пронормальны. Более того, вопрос о пронормальности подгруппы нечетного индекса в произвольной конечной группе можно частично свести к вопросам пронормальности некоторых подгрупп нечетных индексов в ее главных факторах [4, § 10].

В этом докладе мы обсуждаем новые результаты, полученные в направлении исследования пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных группах. Доклад частично основан на совместных результатах с В. Го, А.С. Кондратьевым и Д.О. Ревиным.

Ключевые слова — конечная группа, простая группа, пронормальная подгруппа, нечетный индекс

Список литературы

[1] Laszlo Babai, Isomorphism Problem for a Class of Point-Symmetric Structures, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 29 (1977), 329–336.

[2] Phillip Hall, Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6 / Cambridge: University of Cambridge, 1951–1967. URL: http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788 .

[3] Anatoly S. Kondrat'ev, Natalia V. Maslova, Danila O. Revin, A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 296:Suppl.1 (2017), S145–S150.

[4] Anatoly S. Kondrat'ev, Natalia V. Maslova, Danila O. Revin, On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups, in C. Campbell, C. Parker, M. Quick, E. Robertson, and C. Roney-Dougal (Eds.), Groups St Andrews 2017 in Birmingham (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 406-418). Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

[5] Peter P. Palfy, Isomorphism Problem for Relational Structures with a Cyclic Automorphism, Europ. J. Combinatorics. 8 (1987), 35–43.

[6] Cheryl E. Praeger, On Transitive Permutation Groups With a Subgroup Satisfying a Certain Conjugacy Condition, J. Austral. Math. Soc. 36:1 (1984), 69–86.

[7] Evgeny P. Vdovin, Danila O. Revin, Pronormality of Hall Subgroups in Finite Simple Groups, Siberian Math. J. 53:3 (2012), 419–430.

Структура связных исчерпаемых групп автоморфизмов

Александр Перепечко
НИУ ВШЭ
a@perep.ru

Аннотация

Исчерпаемая группа, или группа-матрёшка, — это возрастающее объединение алгебраических групп. Хорошо известно, что любая алгебраическая подгруппа группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ аффинного многообразия X замкнута относительно инд-топологии. Замкнутость связных исчерпаемых подгрупп в $\mathrm{Aut}(X)$ — открытый вопрос [1].

Мы отвечаем на этот вопрос положительно и изложим основные идеи доказательства [2]. А именно, мы опираемся на [3] и следующий вспомогательный факт: подгруппа всех автоморфизмов, сохраняющих степень регулярных функций на X — алгебраическая. Данный факт верен при некоторых естественных условиях на функцию степени.

Работа поддержана грантом РНФ №22-41-02019.

Ключевые слова — аффинное многообразие, группа автоморфизмов, алгебраическая группа, инд-топология.

Список литературы

[1] H. Kraft, M. Zaidenberg, *Algebraically generated groups and their Lie algebras*, J. London Math. Soc. **109**:e12866 (2024), no. 2, 1–39.

[2] A. Perepechko, *Structure of connected nested automorphism groups*, препринт, arXiv:2312.08359.

[3] А.А. Скутин, *Максимальные алгебры Ли среди локально нильпотентных дифференцирований*, Мат. Сб. **212** (2021), №2, 138–146.

Стабильный инвариант Макар-Лиманова триномиальных многообразий

Петров М.В.

НИУ ВШЭ, МГУ

m.v.petrov@hse.ru

Аннотация

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Триномиальной гиперповерхностью называется аффинное многообразие, которое задаётся одним уравнением вида

$$T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} = 0, \quad n_0 \geqslant 0,\ n_1, n_2 \geqslant 1.$$

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{K}$ с алгеброй регулярных функций $\mathbb{K}[X]$. Дифференцированием на X называется линейное отображение $\delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, удовлетворяющее правилу Лейбница: для всех $f, g \in \mathbb{K}[X]$ выполнено $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$. Дифференцирование δ называется локально-нильпотентным (ЛНД), если для любого элемента $f \in \mathbb{K}[X]$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta^n(f) = 0$. Инвариантом Макар-Лиманова называется подалгебра в $\mathbb{K}[X]$, равная пересечению ядер всех ЛНД на X. Стабильным инвариантом Макар-Лиманова называется инвариант Макар-Лиманова произведения аффинного многообразия и аффинного пространства достаточно большой размерности. В докладе будет рассказано о триномиальных гиперповерхностях с нетривиальным инвариантом Макар-Лиманова, но тривиальным стабильным инвариантом Макар-Лиманова. Также будет рассказано об используемой для доказательства технике.

Ключевые слова — алгебраическое многообразие, триномиальное многообразие, локально нильпотентное дифференцирование, инвариант Макар-Лиманова.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev. On rigidity of factorial trinomial hypersurfaces. Int. J. Algebra Comput. 26 (2016) no. 5, 1061-1070.

[2] S. Gaifullin. *On Rigidity of Trinomial Hypersurfaces and Factorial Trinomial Varieties*. arXiv:1902.06136.

[3] G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Encyclopaedia Math. Sci., vol. 136, Springer, Berlin, 2006.

Лица ограниченной порождаемости

Е.Плоткин

Университет Бар Илан, Израиль

plotkin.evgeny@gmail.com

Аннотация

Этот доклад посвящен памяти Николая Александровича Вавилова, замечательного Ученого, выдающегося Учителя и близкого Друга. В его основе лежат три недавние статьи Н.А.Вавилова, Б.Кунявского, А.Лавренова, Е.Плоткина [1], [2], [3].

Несмотря на то, что формально в докладе рассматривается проблема ограниченной порождаемости, я, прежде всего, хочу обратить внимание на вопросы теории моделей алгебраических групп и их близких родственников. В частности на мальцевском вопросе, какие алгебраические группы образуют элементарный класс групп. Условие ограниченной порождаемости играет при этом важную роль.

Основной результат в этой связи:

Пусть Φ приведенная неприводимая система корней ранга $l \geqslant 2$. Тогда существует константа $L = L(\Phi)$, зависящая только от Φ, такая что для любого Дедекиндова кольца арифметического типа R, каждый элемент g в $G_{sc}(\Phi, R)$ есть произведение не более L элементарных корневых унипотентов.

Ключевые слова — ограниченная порождаемость, алгебраическая группа, теория моделей

Список литературы

[1] B.Kunyavskii, E.Plotkin, N.Vavilov, Bounded generation and commutator width of Chevalley groups:function case, arXiv:2204.10951 [math.GR] (2022), 54pp. European Journal of Mathematics 9, 53 (2023). https://doi.org/10.1007/s40879-023-00627-y

[2] B.Kunyavskii, E.Plotkin, N.Vavilov, Uniform bounded elementary generation of Chevalley groups, arXiv: 2307. 15756v1 [math.GR], (2023) 30pp.

[3] B.Kunyavskii, A. Lavrenov, E.Plotkin, N.Vavilov, Bounded generation of Steinberg groups over Dedekind rings of arithmetic type, arXiv:2307.05526v1 [math.KT], (2023), 23pp

Многогранники Гельфанда–Цетлина типа D

Преснова Екатерина Денисовна
НИУ ВШЭ
epresnova@hse.ru

Аннотация

Рассмотрим полупростую группу Ли G и зафиксируем в ней борелевскую подгруппу B и максимальный тор $T \subset B \subset G$. Пусть $w \in W$ - элемент группы Вейля, тогда $X_w = \overline{BwB/B} \subset G/B$ называется *многообразием Шуберта*. В работе [PS] определено понятие λ-степени многообразия Шубрета. В работах [PS] и [KST] возникают *многочлены степени* $\mathfrak{D}_w = \frac{1}{\ell(w)!}\deg_\lambda(X_w)$, которые являются линейной комбинацией целочисленных объемов граней соответствующего многогранника Гельфанда–Цетлина.

В случае простой алгебры типа A в работе [KST] явно описано соответствие некоторых граней многогранника Гельфанда–Цетлина элементам группы Вейля, т.е. элементам группы перестановок. Диаграммы *когановских* граней были описаны в терминах пайп дримов (pipe dreams). В недавней работе [FN] подобное описание было реализовано для типа C. В случае четной ортогональной алгебры $\mathfrak{so}_{2n}$, соответствующей типу D, вопрос все еще остается открытым. На данный момент существует явное описание соответствия граней многогранника Гельфанда–Цетлина типа D элементам группы Вейля для малых размерностей.

Список литературы

[FN] N. Fujita, Y.Nishiyama, combinatirics of semi-toric degenerations of shubert varieties in type C, https://arxiv.org/pdf/2306.14485

[KST] V. A. Kirichenko, E. Yu. Smirnov, and V. A. Timorin, Schubert calculus and Gelfand-Zetlin polytopes, Uspekhi Mat. Nauk 67 (2012), no. 4(406), 89–128. MR 3013846

[PL] P. Littelemann, Cones, crystals and patterns, Volume 3, pages 145–179, (1998)

[PS] A. Postnikov, R. P. Stanley, “Chains in the Bruhat order”, J. Algebraic Combin., 29:2 (2009), 133–174.

Однородные локально нильпотентные дифференцирования на триномиальных многообразиях

Кирилл Рассолов

ФКН НИУ ВШЭ

kira.my.chanle@gmail.com

Аннотация

Каждому нормальному алгебраическому многообразию X со свободной группой классов дивизоров над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 можно сопоставить его тотальное координатное кольцо $R(X)$, или кольцо Кокса (см. [1]). Известно, что для торических многообразий кольцо Кокса является кольцом многочленов от нескольких переменных, то есть координатным кольцом аффинного пространства. Несколько отступив от торических многообразий, можно потребовать, чтобы коразмерность типичной орбиты при действии на многообразии X алгебраическим тором равнялась единице. В работе [3] было доказано, что кольцо Кокса такого многообразия при некоторых естественных условиях является координатным кольцом аффинного многообразия, идеал которого порождён специальным образом согласованными триномами. Такие многообразия (и их алгебры регулярных функций) называются триномиальными. По виду соответствующих триномов различают два типа триномиальных многообразий.

Как известно, существует биекция между алгебраическими действиями аддитивной группы поля $\mathbb{K}$ на аффинном неприводимом многообразии X и локально нильпотентными дифференцированиями (ЛНД) на $\mathbb{K}[X]$. Особый интерес представляет наиболее тонкая в некотором смысле градуировка на триномиальной алгебре. Она замечательна тем, что однордные относительно неё ЛНД также однородны относительно некоторого широкого класса градуировок. В работе [2] был получен явный вид однородных относительно наиболее тонкой градуировки ЛНД на триномиальных гиперповерхностях одного из двух типов. Мы обобщили этот результат на произвольные триномиальные многообразия.

Ключевые слова — локально нильпотентные дифференцирования, триномиальные многообразия.

Список литературы

[1] И. В. Аржанцев, С. А. Гайфуллин. *Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий*. Матем. сб., 201:1 (2010), 3–24.

[2] Sergey Gaifullin and Yulia Zaitseva. *On homogeneous locally nilpotent derivations of trinomial algebras*. J. Algebra Appl. 18 (2019), no. 10, 1950196:1-19.

[3] Jürgen Hausen and Milena Wrobel. *Non-complete rational T-varieties of complexity one.* Math. Nachrichten 290 (2017), no. 5-6, 815-826.

Комбинаторика неприводимых характеров для супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m, n)$

А.Н. Сергеев

Саратовский Государственный Университет

sergeevan@info.sgu.ru

Аннотация

В докладе приводится новая формула для характеров конечномерных неприводимых представлений для супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m, n)$. Мы следуем схеме доказательства Су и Жанга [2] со следующими нововведениями. Во первых дается новое доказательство и новая формулировка гипотезы Ван Дер Югта, Ходжеса, Кинга и Терри-Мег. Далее используются весовые диаграммы и кэп диаграммы введенные Дж. Брандоном и К. Строппел. Затем определяется полиэдр связанный с весовой диаграммой. Характер неприводимого представления интерпретируется как производящая функция целых точек содержащихся в полиэдре. Для вычисления этой функции используется теорема Бриона.

Список литературы

[1] A.N. Sergeev.: Combinatorics of irreducible characters for Lie superalgebra gl(m,n). arXiv:2401.12534 (2024)

[2] Yucai Su, R.B. Zhang.: Character and dimension formulae for general linear superalgebra. Adv. in Math. **211** (2007)

Плоскостные свойства и модели однородных пространств в теории алгебр Хопфа

С.М. Скрябин

Казанский (Приволжский) федеральный университет

serge.skryabin@kpfu.ru

Аннотация

Конструкция факторов групповых схем конечного типа по групповым подсхемам тесно связана с плоскостностью орбитных морфизмов. Это свойство в случае аффинной группы и квазиаффинного однородного пространства означает, что алгебра функций на группе является плоским модулем над своими коидеальными подалгебрами. Для некоммутативной алгебры Хопфа плоскостность над коидеальными подалгебрами и даже над подалгебрами Хопфа выполняется не всегда. Имеется ряд положительных результатов при различных предположениях, но исчерпывающий ответ на вопрос о том, когда это свойство сохраняется, не был получен.

Хороший класс алгебр Хопфа, в котором подтверждаются обобщения нескольких фундаментальных фактов из теории алгебраических групп, выделяется двумя условиями. Одно из них заключается в существовании артиновых классических колец частных, заменяющих поле рациональных функций на группе, а другое условие требует финитной аппроксимируемости, т.е. разделения элементов алгебры конечномерными представлениями. В этом классе алгебр Хопфа можно исследовать обобщение соответствия между подгруппами и однородными пространствами. Аналоги подгрупп должны интерпретироваться посредством факторкоалгебр, наследующих также структуру модуля над алгеброй Хопфа. Аналоги квазиаффинных однородных пространств даются коидеальными подалгебрами, которые нужно рассматривать с точностью до некоторого отношения эквивалентности. Более общие однородные пространства также допускают некоторую интерпретацию.

Список литературы

[1] S. Skryabin, Models of quasiprojective homogeneous spaces for Hopf algebras, J. Reine Angew. Math. 643 (2010) 201-236.

[2] S. Skryabin, Flatness of Noetherian Hopf algebras over coideal subalgebras, Algebr. Represent. Theory 24 (2021) 851-875.

Flow-up базис на сферических многообразиях

Сонина Александра

ПОМИ РАН

sasha-sonina@mail.ru

Аннотация

По многообразию с действием редуктивной группы можно построить GKM-граф: вершины будут неподвижными точками под действитем макситального тора редуктивной группы G, ребра будут получатся из инвариантных кривых (на самом деле все эти кривые будут изоморфны $\mathbb{P}^1$). Вместе с каждой инвариантной кривой у нас также будет появляться характер — его будем звписывать как метку на ребре. Также на каждом ребре будет задаваться ориентация, вместе с которой появится частичный порядок на вершинах графа.

В вершинах графа будем записывать многочлены от характеров тора. Такая расстановка правильная если разность двух многочленов в вершинах делится на характер на ребре, а также выполняются некоторые квадратичные соотношения.

Будем называть систему правильных расстановок многочленов *flow-up базисом*, если

1 Эта система расстановок — базис (те эта система линейно независима и любая правильная расстановка является линейной комбинацией данных с коэффициентами полиномами от корней системы Φ)

2 Все многочлены, записанные в вершинах, — однородные и степени всех ненулевых многочленов во всех вершинах равны фиксированнной для данной расстановки константе.

3 Для всех вершин w существует элемент системы расстановок такой, что в этой расстановке в вершине w стоит произведение меток ребер, выходящих из этой вершины, а ненулевые элементы могут стоять только в вершинах v с $v \geqslant w$.

Благодаря локализации Ботта можно построить инъективное отображение из $CH_T^*(X)$ в множество всех правильных расстановок.

Пусть G — редуктивная группа и $B \subset G$ — Борелевская подгруппа. $G-$многообразие X будем называть *сферическим*, если в X есть плотная $B-$орбита.

В нашей работе мы показали, что у любого сферического многообразия существует flow-up базис, в частности отображение из $CH_T^*(X) \otimes \mathbb{Q}$ в правильные расстановки над $\mathbb{Q}$ это изоморфизм

Ключевые слова — сферические многообразия, кольца Чжоу, GKM-метод.

Список литературы

[1] M. Brion. *Equivariant Chow groups for torus actions.* Transformation Groups, Vol. 2, No. 3, 1997, pp. 225-267.

[2] Henry July *Algebraic cobodism of spherical varieties*

[3] P.Brosnan *On motivic decompositions arising from the method of Bialynitslii-Birula*

[4] V.Guillemin and C.Zara *One-skeleta betti numbers and equivarient cohomology*

Группы Шевалле над кольцами многочленов

Анастасия Ставрова

Аннотация

Пусть D — дедекиндово кольцо (например, кольцо целых чисел). Хорошо известно, что для любых $N > 2$ и $n > 0$ имеет место равенство $SL_N(D[x_1, ..., x_n]) = SL_N(D)E_N(D[x_1, ..., x_n])$, где $E_N(D[x_1, ..., x_n])$ — элементарная подгруппа группы $SL_N(D[x_1, ..., x_n])$, т.е. подгруппа, порожденная матрицами элементарных преобразований первого рода (А. Суслин, 1977). Мы обсудим обобщение этого результата на все группы Шевалле и неразветвленные регулярные кольца D.

Представления алгебр Ли и модули Ли-Йордана

Стасенко Роман Олегович
НИУ ВШЭ,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
theromestasenko@yandex.ru

Аннотация

Пусть S — произвольная редуктивная алгебраическая группа. Назовем S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ гомоморфизм $\Phi : S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. S-структуры ранее излучались различными авторами, в том числе Э.Б. Винбергом.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовем короткой, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. Если рассматривать неприводимые представления размерностей только 1 и 3, то получится известная конструкция Титса-Кантора-Кехера, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли определенного вида.

Аналогично теореме Титса–Кантора–Кехера в случае коротких SL_2-структур можно установить взаимно-однозначное соответствие между простыми алгебрами Ли с такой структурой и так называемыми простыми симплектическими структурами Ли-Йордана.

Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана SL_2-структура и отображение $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(U)$ — линейное представление. Гомомофизм $\Psi : S \to GL(U)$ называется SL_2-структурой на лиевском $\mathfrak{g}$-модуле U, если

$$\Psi(s)\rho(\xi)u = \rho(\Phi(s)\xi)\Psi(s)u, \quad \forall s \in S, \xi \in \mathfrak{g}, u \in U.$$

Подобная конструкция имеет интересные приложения к теории представлений йордановых алгебр, о которых будет рассказано в докладе. Также в докладе будет представлена полная классификация неприводимых коротких $\mathfrak{g}$-модулей для простых алгебр Ли.

Ключевые слова — йордановы алгебры, специальные представления, модули Ли-Йордана.

Пространства модулей параболических расслоений на проективной прямой

Антон Фонарёв

Аннотация

Мы расскажем о том, что известно про производные категорий пространств модулей параболических расслоений на проективной прямой с нечетным числом отмеченных точек.

Многообразия с действием тора сложности 1, имеющие конечное число орбит группы автоморфизмов

Чунаев Д.А.
НИУ ВШЭ
dchunaev@hse.ru

Аннотация

Доклад основан на совместной работе автора с С. Гайфуллиным [1].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда *триномиальной гиперповерхностью* мы называем аффинную гиперповерхность в $\mathbb{A}^n$, заданную уравнением

$$T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} = 0,$$

где $l_i = (l_{i1}, \dots l_{in_i})$, все $l_{ij} > 0$ и $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}$, $n_0 \geqslant 0$ (если $n_0 = 0$, то первый моном считаем равным единице), $n_1, n_2 > 0,\ n_0 + n_1 + n_2 = n$.

Триномиальные гиперповерхности являются частным случаем более общего класса *триномиальных многообразий* — таких аффинных многообразий, которые можно задать системами уравнений $\{g_i = 0\}$, где g_i имеют следующий вид:

Тип 1.

$$g_i = T_i^{l_i} - T_{i+1}^{l_{i+1}} + a_i - a_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r - 1,$$

где a_i — попарно различные числа.

Тип 2.

$$g_i = \det \begin{pmatrix} T_i^{l_i} & T_{i+1}^{l_{i+1}} & T_{i+2}^{l_{i+2}} \\ a_{0i} & a_{0i+1} & a_{0i+2} \\ a_{1i} & a_{1i+1} & a_{1i+2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant i \leqslant r - 2,$$

где a_{ij} — такие числа, что у следующей матрицы столбцы попарно независимы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0r} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1r} \end{pmatrix}$$

Триномиальные многообразия являются примерами многообразий, допускающих действие тора сложности 1, то есть эффективное действие тора размерности на 1 меньшей, чем у многообразия. Кроме того, как доказано в [2], у произвольного нормального рационального неприводимого многообразия без непостоянных обратимых функций, которое допускает действие тора сложности 1, тотальное координатное пространство, полученное с помощью конструкции Кокса, будет триномиальным многообразием.

Будем называть аффинное многообразие X *жестким*, если оно не допускает нетривиальных $\mathbb{G}_a$ - действий. Критерий жесткости для триномиальных многообразий был получен в [3]. В работе [4] было доказано, что у нежесткой триномиальной гиперповерхности X число орбит группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ конечно. При этом из [5] известно, что у жестких триномиальных гиперповерхностей число орбит группы автоморфизмов бесконечно.

В докладе мы рассмотрим результаты работы [1], обобщающие результаты работы [4]: будет рассказано про то, что у нежесткого триномиального многообразия конечное число орбит группы автоморфизмов, а также про обобщения этого результата, полученные с использованием конструкции Кокса, на некоторые многообразия с действием тора сложности 1.

Ключевые слова — алгебраическое многообразие, триномиальное многообразие, группа автоморфизмов, кольцо Кокса.

Список литературы

[1] С.А. Гайфуллин и Д.А. Чунаев, Многообразия с действием тора сложности 1, имеющие конечное число орбит группы автоморфизмов. https://arxiv.org/abs/2311.02481, (2023).

[2] Jürgen Hausen and Milena Wrobel. Non-complete rational T-varieties of complexity one. Math. Nachr. 290 (2017), no. 5-6, 815-826

[3] P. Evdokimova, S. Gaifullin and A. Shafarevich. *Rigid trinomial varieties*, arXiv:2307.06672, (2023).

[4] S. Gaifullin. and G. Shirinkin *Orbits of automorphism group of trinomial hypersurfaces* arXiv:2205.02513, (2022).

[5] Ivan Arzhantsev and Sergey Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachr. 290 (2017), no. 5-6, 662-671

Аддитивные действия с конечным числом орбит

Шафаревич Антон Андреевич

МГУ/НИУ ВШЭ

shafarevich.a@gmail.com

Аннотация

Аддитивным действием на алгебраическом многообразии X называется действие векторной группы на X с открытой орбитой. Хассеттом и Чинкелем было получено, что на проектином пространстве $\mathbb{P}^6$ существует бесконечно много неэквивалентных аддитивных действий. При этом для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{P}^n$ существует ровно одно аддитивное действие с конечным числом орбит. Поэтому аддитивные действия с конечным числом орбит представляют отдельный интерес.

При некоторых дополнительных условиях полные многообразия, допускающие аддитивные с конечным числом, были описаны C. Crowley. Такие многообразия называются многообразиями матроидов, и они позволяют описывать некоторые комбинаторные характеристики линейных матроидов.

В своем докладе я расскажу о примерах полных многообразиях, на которых существует аддитивное действие с конечным числом орбит. В частности, я расскажу про то какие гиперповерхности и торические поверхности допускают аддитивные действия с конечным числом орбит, а также какие из этих многообразий являются многообразиями матроидов.

Работа поддержана грантом РНФ 23-71-01100.

Полные торические многообразия с большой открытой орбитой группы автоморфизмов

К. В. Шахматов

НИУ ВШЭ

kshahmatov@hse.ru

Аннотация

Алгебраические многообразия будем рассматривать над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Пусть X – полное торическое многообразие с действующим тором T. Обозначим через N решётку однопараметрических подгрупп и через M решётку характеров тора T. Пусть Σ – веер в N, соответствующий многообразию X. Обозначим через $v_1, \dots, v_r$ примитивные векторы на лучах веера Σ.

Мы будем рассматривать многообразия X с большой открытой орбитой действия группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. В работе [3] Демазюром было введено понятие *корня* для веера Σ, которое было позже использовано в работе [2]. Одним из следствий результатов, полученных в этих работах, является введение структуры алгебраической группы на $\mathrm{Aut}(X)$ и описание этой группы в терминах корневых $\mathbb{G}_a$-подгрупп относительно тора T. Не вдаваясь в подробности этого описания, запишем условия на векторы v_i, которые эквивалентны наличию большой открытой орбиты группы $\mathrm{Aut}(X)$:

$$\begin{gathered}\text{для каждого } i = 1, \dots, r \text{ найдётся вектор } u_i \in M \text{ такой, что} \\ \langle u_i, v_i \rangle = -1 \text{ и } \langle u_i, v_j \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } j \neq i.\end{gathered} \tag{2}$$

При этом полноте X соответствует условие

$$\mathrm{Cone}(v_1, \dots, v_r) = N_{\mathbb{Q}}, \tag{$**$}$$

где $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$.

Наша цель – описание полных торических многообразий с большой открытой орбитой группы автоморфизмов. Как мы видели, эта задача эквивалентна описанию наборов векторов $v_1, \dots, v_r$ в решётке N, удовлетворяющих условиям (**??**) и ($**$). Конструкция целочисленной двойственности Гейла (см., например, [1]) позволяет переформулировать эту задачу в несколько других терминах.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon\ \mathbb{Z}^r \to N \ \text{ такой, что } \ \varphi(e_i) = v_i,\ i = 1, \dots, r,$$

где $e_1, \dots, e_r$ – это стандартный базис $\mathbb{Z}^r$. Рассмотрим базис $e_1^*, \dots, e_r^*$ решётки $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$, двойственный к базису $e_1, \dots, e_r$, отождествляя $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$. Пусть $\varphi^*\colon\ M \to \mathbb{Z}^r$ – гомоморфизм, двойственный к φ. Получаем короткую точную последовательность

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{\ \psi\ } \mathbb{Z}^r \xleftarrow{\ \varphi^*\ } M \longleftarrow 0\ ,$$

где $A = \mathbb{Z}^r/\varphi^*(M)$ и ψ – это естественный гомоморфизм. Обозначим $w_i = \psi(e_i^*)$, $i = 1, \dots, r$. При этом $\mathrm{rk} A = r - n$ и $A \cong \mathrm{Cl}(X)$. Условия на мультимножество $w_1, \dots, w_r$ в конечно порождённой абелевой группе A ранга $r - n$, соответствующие условиям (**??**) и (**), можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned}&\text{набор } w_1, \dots, w_r \text{ порождает } A \text{ и для любого } i = 1, \dots, r\\ &\text{элемент } w_i \text{ содержится в полугруппе, порождённой набором } w_1, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_r;\end{aligned} \tag{$\circ$}$$

$$\text{если } \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r = 0 \text{ для некоторых } \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \text{ то } \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0. \tag{$\circ\circ$}$$

В докладе планируется классифицировать трёхмерные полные торические многообразия с большой открытой орбитой группы автоморфизмов в сформулированных выше терминах. Доклад основан на совместной работе с И. В. Аржанцевым.

Ключевые слова — торические многообразия, действия групп на многообразиях, трёхмерные многообразия.

Список литературы

[1] Ivan Arzhantsev. Gale duality and homogeneous toric varieties. Comm. Algebra 46 (2018), no. 8, 3539–3552

[2] David Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Algebraic Geom. 4 (1995), no. 1, 17–50

[3] Michel Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. École Norm. Sup. 3 (1970), no. 4, 507–588

Двойственность Пясецкого для некоторых представлений классических групп

Шунин Даниил Алексеевич
НИУ ВШЭ/МГУ
dshunin@hse.ru

Аннотация

В статье [1] В.С.Пясецкого описана конструкция, позволяющая установить взаимно однозначное соответствие между орбитами линейного представления связной комплексной группы Ли и соответствующего двойственного представления при условии, что множество орбит конечно.

Конструкция этой двойственности такова: в пространстве $V \times V^*$ рассматривается объединение конормальных расслоений ко всем орбитам в пространстве V, или, что то же самое, в пространстве V^*. Это замкнутое подмногообразие, чьими неприводимыми компонентами выступают замыкания конормальных расслоений различных орбит. *Двойственными* по Пясецкому называются такие орбиты $\mathcal{O} \subset V$ и $\mathcal{Q} \subset V^*$, для которых замыкания N^*O и N^*Q в $V \times V^*$ совпадают.

В число представлений с конечным множеством орбит входят сферические G-модули для связных редуктивных алгебраических групп. В [2] Ф. Кноп выделяет класс сферических модулей, к перечислению которых с точки зрения теории представлений сводится описание всех остальных.

В докладе будут описаны орбиты и двойственность Пясецкого для серий представлений групп $\mathrm{SO}_n \times \mathrm{GL}_m$ и $\mathrm{Sp}_n \times \mathrm{GL}_m$ в пространстве $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, некоторые из которых являются сферическими и появляются в списке [2]. Затем будут приведены диаграммы примыканий и двойственности для орбит всех неприводимых сферических линейных представлений из списка Ф. Кнопа.

Ключевые слова — двойственность Пясецкого, сферический модуль, примыкание орбит.

Список литературы

[1] В. С. Пясецкий, “Линейные группы Ли, действующие с конечным числом орбит”, Функц. анализ и его прил., 9:4 (1975), 85–86; Funct. Anal. Appl., 9:4 (1975), 351–353.

[2] Knop, F. (1998). Some remarks on multiplicity free spaces. In: Broer, A., Daigneault, A., Sabidussi, G. (eds) Representation Theories and Algebraic Geometry. Nato ASI Series, vol 514. Springer, Dordrecht.