§ Класс Эйлера

$p: E \to X$ - векторное рассл.

$s: X \to E$ - нулевое сечение

$$p^*: A_p(X, K_*) \xrightarrow{\cong} A_{p+d}(E, K_{*-d})$$

<u>Опр</u> $e(E) := (p^*)^{-1} s_* : A_*(X, K_*) \to A_{*-d}(X, K_{*+d})$

<u>Зам</u> Изоморфные расслоения имеют одинаковые классы.

<u>Предл. 53.1</u> $0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0$

тогда $e(E) = e(E'') \circ e(E')$

Док

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "s''"] & E'' \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{\text{Предл. 49.20}} \quad g^* \circ s''_* = f_* \circ p'^*$$

$$\square \; e(E'') \circ e(E') = (p''^*)^{-1} \circ s''_* \circ (p'^*)^{-1} \circ s'_* =$$

$$= (p''^*)^{-1} \circ (g^*)^{-1} \circ f_* \circ s'_* = ((p'' \circ g)^*)^{-1} \circ (f \circ s')_* =$$

$$= (p^*)^{-1} \circ s_* = e(E)$$

<u>Следств 55.2</u> $\forall E, E'$: $e(E)\circ e(E') = e(E')\circ e(E)$

<u>Док</u> $E\oplus E' \cong E'\oplus E$ ◻

<u>Предл 55.3</u> $f: Y \to X$, E - вект. расс над X. $E' := f^*(E)$. Тогда
1) Если f - собств, то $e(E)\circ f_* = f_*\circ e(E')$
2) Если f - плоский, то $f^*\circ e(E) = e(E')\circ f^*$

<u>Док</u> $\left.\begin{array}{l} p: E \to X \\ q: E' \to \cancel{X} \end{array}\right\}$ - проекции $\quad \left.\begin{array}{l} i: X \to E \\ j: Y \to E' \end{array}\right\}$ - нулев. сеч

1)
$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ q\downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array} \overset{49.20}{\leadsto} p^* f_* = g_* \circ q^*$$

$\Rightarrow e(E)\circ f_* = (p^*)^{-1}\circ i_*\circ f_* = (p^*)^{-1}\circ g_*\circ j_* =$
$= f_*\circ (q^*)^{-1}\circ j_* = f_*\circ e(E')$

2) $$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "i"] \\ E' \arrow[r, "g"'] & E \end{tikzcd} \quad \overset{(1).20}{\Longrightarrow} \quad g^* \circ i_* = j_* \circ f^*$$

$$\Rightarrow f^* \circ e(E) = f^* \circ (p^*)^{-1} \circ i_* = (q^*)^{-1} \circ g^* \circ i_* =$$

$$= (q^*)^{-1} \circ j_* \circ f^* = e(E') \circ f^*$$

$\square$

<u>Предл 53.4</u> $p: E \to X$; $p': E' \to X'$ – рассл.

Тогда $e(E \times E')(\alpha \times \alpha') = e(E)(\alpha) \times e(E')(\alpha')$

$\forall\, \alpha \in A_*(X, K_X)$, $\alpha' \in A_*(X', K_{X'})$.

<u>Док</u> $s: X \to E$, $s': X' \to E'$ – нулев. сеч.

$$e(E \times E')(\alpha \times \alpha') = (p \times p')^{*-1} \circ (s \times s')_*(\alpha \times \alpha') =$$

$$\underset{50.4}{=} (p \times p')^{*-1}(s(\alpha) \times s'(\alpha')) \underset{50.5}{=}$$

$$= p^{*-1}(s(\alpha)) \times p'^{*-1}(s'(\alpha')) = e(E)(\alpha) \times e(E')(\alpha')$$

$\square$

Предл 5.3.5 $e(\mathbb{1}) = 0$

Док $s: X \longrightarrow \mathbb{A}^1 \times X$. Док-м, что $s_* = 0$

t - координата на $\mathbb{A}^1$, $t \in F[\mathbb{A}^1]$;

$\{t\} \in C_1(\mathbb{A}^1) = K_1(F(\mathbb{A}^1))$

$d_{\mathbb{A}^1}(\{t\}) = \operatorname{div}(t) = [0]$

$\alpha \in A_*(X, K_*)$

$s_*(\alpha) = [0] \times \alpha = d_{\mathbb{A}^1}(\{t\}) \times \alpha = d_{\mathbb{A}^1 \times X}(\{t\} \times \alpha) =$

5.0.3

$d_{X \times Y}(\alpha \times \beta) = d_X(\alpha) \times \beta + (-1)^{\cdot\cdot}\, \alpha \times d_Y(\beta)$

$= 0$

в $A^*(\mathbb{A}^1 \times X, K_*)$

§ K-гомологии проективного пр-ва

$V/_k$ $\dim V = d+1$; $X := \mathbb{P}_F(V)$.

$V_p \subseteq V$ $\dim V_p = p+1$, $p = 0, \dots, d$

$\mathbb{P}(V_p) \hookrightarrow X$, $x_p \in X$ — общая точка $\mathbb{P}(V_p)$

$1_p \in K_0(F(x_p)) = \mathbb{Z}$, $1_p \in C_{p,-p}(X)$

l_p = класс $1_p \in A_p(X, K_{-p})$

<u>Утв</u> l_p не зависит от V_p

<u>Док</u> 1° $p = d$ — тривиально

2° $p < d$; V_p, V_p'. Достаточно рассмотреть случай $V_p, V_p' \subseteq W \subseteq V$, $\dim W = p+2$ (в общем случае соединим цепочкой таких)

$h, h' \in W^*$; $V_p = \ker h$, $V_p' = \ker h'$

$f := \frac{h}{h'} \in F(\mathbb{P}_F(W))$

$\operatorname{div} f = 1_p - 1_{p'} \to V$

Пусть X — схема над F

$\mathbb{P}^d_X i = \mathbb{P}^d_F \times X$; $i = 0, \dots, d$

Рассмотрим

$$A_{*-i}(X, K_{*+i}) \to A_*(\mathbb{P}^d_X, K_*)$$

$$\alpha \longmapsto l_i \times \alpha$$

Предл. 5.3.6

$$\bigsqcup_{i=0}^{d} A_{*-i}(X, K_{*+i}) \xrightarrow{\sim} A_*(\mathbb{P}^d_X, K_*)$$

$$\sum \alpha_i \longmapsto \sum l_i \times \alpha_i$$

Док. База $d=0$ — тривиально.

Переход $d-1 \to d$. $\mathbb{P}^{d-1}_X \xhookrightarrow{f} \mathbb{P}^d_X \xleftarrow{g} \mathbb{A}^d_X$

$$\cancel{0 \to \bigsqcup_{i=0}^{d} A_{*-i}(X, K_{*+i}) \to \bigsqcup_{i=0}^{d} A_{*-i}(X)}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigsqcup_{i=0}^{d-1} A_{*-i}(X, K_{*+i}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigsqcup_{i=0}^{d} A_{*-i}(X, K_{*+i}) \arrow[r] \arrow[d] & A_{*-d}(X, K_{*+d}) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"'] & 0 \\
\arrow[r, "\delta"] & A_*(\mathbb{P}^{d-1}_X, K_*) \arrow[r, "f_*"] & A_*(\mathbb{P}^d_X, K_*) \arrow[r, "g^*"] & A_*(\mathbb{A}^d_X, K_*) \arrow[r, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}$$

$h: \mathbb{A}^d_X \to X$ — проекция

Коммутативность диаграммы:

Пр. 50.4 $\Rightarrow$ $(f\times g)_*(\alpha\times\beta) = f_*(\alpha)\times g_*(\beta)$

пр. 50.5 $(f\times g)^*(\alpha\times\beta) = f^*(\alpha)\times g^*(\beta)$

$$f = [\mathbb{P}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^d]\times id_X$$

$\Rightarrow$ ✓

$$g = [\mathbb{A}^d \hookrightarrow \mathbb{P}^d]\times id_X$$

$q: \mathbb{P}^d_X \to X$ — проекция; $h = q\circ g \Rightarrow h^* = g^*\circ q^*$

h^* — изо (гомотопны) $\Rightarrow$ g^* — сюръ. $\Rightarrow$ $\delta = 0$

(и δ слева — тоже, там то же самое)

5-лемма $\Rightarrow$ ✓

Следств. 53.7

$$A_p(\mathbb{P}^d_F, K_q) = \begin{cases} K_{p+q}(F)\cdot c_p & 0\le p\le d \\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Пример 53.8 L - каноничн. лин. рассл. над $X = \mathbb{P}^d_F$. Тогда $c(L)(\ell_p) = \ell_{p-1}$ $\forall p = 1, \dots, d$.

Док. 1^0 $p = d$. $L = \mathbb{P}^{d+1} \setminus \{O\}$ $(O = [0, \dots, 0, 1])$

$$f : L \to \mathbb{P}^d$$

$$[s_0 : \dots : s_n : s_{n+1}] \mapsto [s_0 : \dots : s_n]$$

Нулевое сечение: $s : X \to Z$

$$[s_0 : \dots : s_n] \mapsto [s_0 : \dots : s_n : 0]$$

$Z = \operatorname{Im} s = \{s_{n+1} = 0\}$, $H := \{s_0 = 0\}$

$$\operatorname{div}\left(\frac{s_{n+1}}{s_0}\right) = [Z] - [f^{-1}(H)]$$

$$c(L)(\ell_d) = (f^*)^{-1}(s_*([X])) = (f^*)^{-1}([Z]) =$$

$$= (f^*)^{-1}(f^{-1}(H)) = [H] = \ell_{d-1}$$

2^0 - общий случай $g : \mathbb{P}^p_F \hookrightarrow \mathbb{P}^d_F$ - лин. влож.

$L' := g^*(L)$ - канон. на $\mathbb{P}^p_F$

$$c(L)(\ell_p) \overset{\text{сл. 53.3 (1)}}{=} c(L)(g_*(\ell_p)) = g_*(c(L')(\ell_p)) =$$

$$= g_*(\ell_{p-1}) = \ell_{p-1}$$

Пример 53.9 L' — тавтологич. на $X = \mathbb{P}^d_F$

Тогда $e(L')(\ell_p) = -\ell_{p-1}$ $p = 1, \dots, d$

Аналогично.

$L' = \mathrm{Proj}\,[\underbrace{S_0, \dots, S_n}_{\deg = 1}, \underbrace{S_{n+1}}_{\deg = -1}] \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$

---

§ Теорема о проективном расслоении

$E \to X$ — вект. расс $\mathrm{rk} = r$.

$q: \mathbb{P}(E) \to X$ — проективизация

плоский отн. разм $r-1$

$L \to \mathbb{P}(E)$ — канон. либо тавт. рассл.

$e = e(L): A_*(\mathbb{P}(E), K_*) \to A_{*-1}(\mathbb{P}(E), K_{*+1})$

<u>Th</u> 53.10 (Теорема о проективном рассл.)

$\varphi(E) := \coprod_{i=1}^{r} e^{r-i} \circ q^*: \coprod_{i=1}^{r} A_{*-i+1}(X, K_{*+i-1}) \longrightarrow$

$\longrightarrow A_*(\mathbb{P}(E), K_*)$ — изом-м.

Док L - конст. (для L - Тавт - аналогично)

1° E - трив., $\mathbb{P}(E) = X \times \mathbb{P}^{n-1}_F$

$L' \to \mathbb{P}^{n-1}_F$ - конст.

$e(L)^{n-i}(q^*(\alpha)) = e(L)^{n-1}(\ell_{n-1} \times \alpha) =$

$= e(L')(\ell_{n-1}) \times \alpha = \ell_{i-1} \times \alpha$

$\Rightarrow \varphi(E)$ совпадает с тем, что в предл. 53.6

2° Общий случай. Индукция по $d = \dim X$.

База $d=0$ $\to$ рассм. трив-но

Переход $d>0$. $\exists\, U \subset X$ т.ч. $E|_U$ - трив

и $\dim \underbrace{X \setminus U}_{Z} < \dim X$

$$
\begin{tikzcd}
\to \coprod_{i=1}^{n} A_{x-i+1}(Z, K_{x+i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(E|_Z)"] & \coprod_{i=1}^{n} A_{x-i+1}(X, K_{x+i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(E)"] & \coprod_{i=1}^{n} A_{x-i+1}(U, K_{x+i-1}) \arrow[d, "\varphi(E|_U)"] \\
\to A_x(\mathbb{P}(E|_Z), K_x) \arrow[r] & A_x(\mathbb{P}(E), K_x) \arrow[r] & A_x(\mathbb{P}(E|_U), K_x)
\end{tikzcd}
$$

5-лемма $\to$ ✓

<u>Зам</u> $\varphi(E)$ уважает пушфорварды вдоль собств-х и пулбэки вдоль плоских морфизмов.

<u>Следств 53.12</u>

$$\varphi^*: A_{x-r+1}(X, K_{x+r-1}) \to A_x(\mathbb{P}(E), K_x)$$

— расщепимая инъекция

<u>Предл. 53.13.</u> Принцип расщепления.

$E \to X$ – вект., Тогда $\exists$ плоский

$f: Y \to X$ относ. разм d т.ч.

1) $f^*: A_*(X, K_*) \to A_{*+d}(Y, K_{*-d})$ – инъ

2) $f^*(E)$ имеет фильтрацию с

линейными факторами.

<u>Док.</u> $q: \mathbb{P}(E) \to X$, $L \leq q^*(E)$

берем $q^*(E)/L$ – продолжаем.

§ Классы Черна

$E \to X$ — вект. мн-я r, Тавт.

$q: \mathbb{P}(E) \to X$ — проектив-я; $e = e(L)$

$\alpha \in A_*(X, K_*)$. Т.к. $\varphi(E)$ — изо,

$\exists!\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \quad \alpha_i \in A_{*-i}(X, K_{*+i})$

$$-e^r(q^*(\alpha)) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^i e^{r-i}(q^*(\alpha_i))$$

$$\cap \quad A_*(\mathbb{P}(E), K_*)$$

$$\alpha_0 := \alpha \Rightarrow \sum_{i=0}^{r} (-1)^i e^{r-i}(q^*(\alpha_i)) = 0$$

$$c_i(E): A_*(X, K_*) \to A_{*-i}(X, K_{*+i})$$

$$\alpha \longmapsto \alpha_i$$

— класс Черна

$c_0(E) = id$

$c_i(E) \stackrel{def}{=} 0$, если $i > r$ или $i < 0$

$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \ldots + c_r(E)$ — тотальный класс Черна

Для $i=0$ $c_0(E) \overset{def}{=} 1$

$c_i(E) \overset{def}{=} 0$ $i \neq 0$

<u>Предл 54.3</u> Если E - лин., то $c_1(E) = e(E)$

<u>Док</u> $\mathbb{P}(E) = X$, $L = E$; $\alpha_0 = c_0(E)(\alpha) = \alpha$

$\alpha_1 = c_1(E)(\alpha)$

$e(q^*(\alpha_0)) - q^*(\alpha_1) = 0$ $q = id$

$e(\alpha_0) - \alpha_1 = 0$

$c_1(E)(\alpha) = \alpha_1 = e(\alpha_0) = e(E)(\alpha)$ ∎

<u>Пример 54.4</u> L - лин. рассл $\Rightarrow$

$c(L) = 1 + e(L)$ в ч-ти $c(\mathbb{1}) = 1$

<u>Предл 54.5</u> $f: Y \to X$, E - рассл на X

$E' = f^*(E)$. Тогда

1) если f - собств, то $c(E) \circ f_* = f_* \circ c(E')$

2) Если f - плоск, то $f^* \circ c(E) = c(E') \circ f^*$

Док-во: $rk\, E = r$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E') & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

e, e' – классы тавт. рассл. L и L' на $\mathbb{P}(E)$ и $\mathbb{P}(E')$

$L' = h^*(L)$

1) $h_* \circ (q')^* = q^* \circ f_*$ (т.к. пулбек)

$\alpha' \in A_*(Y, \kappa_*)$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{r} (-1)^i (e')^{r-i} (q'^*(\alpha_i'))}= 0$$

h_*: $0 = h_*(\ldots) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (h_* q'^*(\alpha_i')) =$

$= \sum (-1)^i e^{r-i} (q^* f_*(\alpha_i'))$

$\Rightarrow c_i(E)(f_*(\alpha')) = f_*(\alpha_i') = f_* c_i(E')(\alpha')$

2) Аналогично, используя

$h^* q^* = q'^* f^*$

Предл 54.6 E-рассл над X, $\exists$ фильтрация с лин. факторами $L_1, \dots, L_n$. Тогда $\forall i = 1, \dots, n$

$$c_i(E) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{симм. функция}}}{\sigma_i}(e(L_1), \dots, e(L_n))$$

т.е. $c(E) = \prod_{i=1}^{n} (1 + e(L_i)) = \prod_{i=1}^{n} c(L_i)$

Док $q: \mathbb{P}(E) \to X$, L - тавт., $\ell = e(L)$

Нужно д-ть

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \ell^{n-i} \left(q^*(\sigma_i(e(L_1), \dots e(L_n))(\alpha)) \right) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \ell^{n-i} \sigma_i(e(q^*L_1), \dots e(q^*L_n))(q^*\alpha) =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} (\ell - e(q^*L_i)) \right)(q^*\alpha)$$

Достаточно доказать, что

$$\prod_{i=1}^{n} (\ell - e(q^*L_i)) = 0$$

Индукция по n

База $n=1 \Rightarrow L = L_1 \rightarrow$ ✓

Переход $E' \leq E$, E' имеет фильтр-ю $L_1 \dots L_{n-1}$, $E/E' = L_n$; $U := \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(E')$

$f : U \to \mathbb{P}(L_n)$ – ест-й морфизм

$$\begin{matrix} \mathbb{P}(L_n) \\ \| \\ X \end{matrix}$$

L_n – тавт на $\mathbb{P}(L_n) \Rightarrow f^*(L_n) = L|_U$

$\Rightarrow L|_U = f^*(L_n) = q^*(L_n)|_U$

$\Rightarrow e(L|_U) = e(q^*(L_n)|_U)$.

$\alpha \in A_*(\mathbb{P}(E), \mathbb{K}_*) \rightarrow$

$$(e - e(q^* L_n))(\alpha)|_U = \left(e(L|_U) - e(q^*(L_n)|_U)\right)(\alpha|_U) = 0$$

$\xrightarrow[\text{п-ть локал-и}]{\text{точн-я}} \exists \beta \in A_*(\mathbb{P}(E'), \mathbb{K}_*)$ т.ч.

$i_*(\beta) = (e - e(q^* L_n))(\alpha)$

$i: \mathbb{P}(E') \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$

L' – тавт на $\mathbb{P}(E')$; $q': \mathbb{P}(E') \to X$

$q' = q \circ i$

$$\prod_{i=1}^{r} (e - e(q^* L_i))(\alpha) = \prod_{i=1}^{r-1} (\ldots)(i_* \beta) =$$

$$= i_* \left(\prod_{i=1}^{r-1} (e(L') - e(i^* q^* L_i))(\beta) \right) =$$

$$= i_* \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{r-1} (e(L') - e(q'^* L_i))(\beta)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \right) = 0$$

Предл 54.7 (формула суммы Уитни)

$$0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0 \Rightarrow c(E) = c(E') \circ c(E'')$$

Док Предыдущ-е предл-е + принцип расщепления.

Следств 54.8 $\forall E, E'$ над X

$$c(E) \circ c(E') = c(E') \circ c(E)$$

Следств 54.я $c(E \oplus \underline{V}) = c(E)$

В частности E-тривв $\Rightarrow c(E) = 1$

$c_i(E)$ – нильпотентны при $i > 0$

(т.к. понижают степени)

$\Rightarrow c(E) \in Aut(A_x(x, K_x)) \longrightarrow$

$c: K_0(X) \longrightarrow Aut(A_x(x, K_x))$