Saint Petersburg State University

Probability Techniques in Analysis & Approximation Theory 2024

Book of abstracts

November 25-30, 2024
Saint Petersburg

Санкт-Петербургский
государственный
университет

НАЦИОНАЛЬНЫЕ
ПРОЕКТЫ
РОССИИ

НАУКА
И УНИВЕРСИТЕТЫ

Preface

This brochure is a collection of abstracts of the talks presented at the conference "Probability Techniques in Analysis & Approximation Theory 2024".

The conference is held with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of a scientific project under agreement No 075-15-2024-631 by St. Petersburg State University as part of the national project “Science and Universities” in 2024.

Conference website: https://indico.eimi.ru/event/1671/overview

Participants

1. Aleksandr Beznosikov (Moscow Institute of Physics and Technology)
2. Aleksandr Dyachenko (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow)
3. Aleksandr Komlov (Steklov Institute RAS)
4. Aleksandr Litvak (University of Alberta)
5. Alex Mkrtchyan (SFU & Institute of Mathematics NAS RA)
6. Alexander Aptekarev (Keldysh Institute RAS)
7. Alexander Bufetov (MI RAS, St. Petersburg University)
8. Alexander Gasnikov (Innopolis University and HSE)
9. Alexander Gnusov (St. Petersburg State University)
10. Alexander Kuznetsov (St. Petersburg State University)
11. Alexander Shklyaev (Lomonosov Moscow State University)
12. Alexei Lukashov (Moscow Institute of Physics and Technology)
13. Alexey Alimov (Lomonosov Moscow State University and SPbU)
14. Alexey Klimenko (Steklov Institute RAS and SPbU)
15. Alexey Lvov (St. Petersburg State University)
16. Alexey Miller (St. Petersburg State University)
17. Alexey Solodov (Lomonosov Moscow State University and SPbU)
18. Alisa Volkova (St. Petersburg State University)
19. Almasri Ahmad (Southern Federal University)
20. Andras Kroo (Alfréd Rényi Instute of Mathematics), online
21. Andrei Semenov (St. Petersburg State University)
22. Anokhina Mariia (Lomonosov Moscow State University)
23. Anton Baranov (SPbU)
24. Armen Sergeev (Steklov Institute RAS and SPbU)
25. Barysheva Kseniia (St. Petersburg State University)
26. Belyaeva Julia (RUDN University)
27. Bolotin Artyom (MIPT)
28. Borovikov Mikhail (Lomonosov Moscow State University)
29. Bulat Khabibullin (Institute of Mathematics with CC of UFSC RAS)
30. Chernyshenko Ekaterina (Lomonosov Moscow State University)
31. Chiniaev Boris (Lomonosov Moscow State University)
32. Daniil Panov (St. Petersburg State University)
33. Daria Kuznetsova (St. Petersburg State University)

34. Degtiarev Dmitrii (Adyghe State University)
35. Denis Kolesnikov (St. Petersburg State University)
36. Dmitriy Gorbachev (TulSU)
37. Dmitriy Stolyarov (St. Petersburg State University)
38. Dmitriy Zaporozhets (St. Petersburg State University)
39. Egor Dobronravov (St. Petersburg State University)
40. Elena Yarovaya (Lomonosov Moscow State University)
41. Elijah Lopatin (Steklov Institute RAS)
42. Elizaveta Pribytkova (St. Petersburg State University)
43. Evgeny Tyrtyshnikov (Lomonosov Moscow State University and Marchuk Institute RAS)
44. Faddeeva Nina (St. Petersburg University)
45. Faizo Shamoyan (Saratov State University)
46. Feng Dai (University of Alberta), online
47. Filichkina Elena (Lomonosov Moscow State University)
48. Gabbdola Akishev (MSU @ Astana and INSM UrFU)
49. Germanskov Mikhail (PDMI RAS)
50. Gleb Yudin (St. Petersburg State University)
51. Gorbunov Sergei (MIPT)
52. Grigor Karagulyan (Institute of Mathematics NAS RA)
53. Gurtovaia Olga (Southern Federal University)
54. Gusarov Aleksandr (Lomonosov Moscow State University)
55. Haakan Hedenmalm (KTH and St. Petersburg State University)
56. Ievlev Roman (Lomonosov Moscow State University)
57. Il'dar Musin (Institute of Mathematics with CC of UFSC RAS)
58. Irina Antipova (SFU)
59. Iushkova Olga (Lomonosov Moscow State University)
60. Ivan Alexeev (PDMI RAS)
61. Ivan Bochkov (St. Petersburg State University)
62. Ivan Oseledets (Skoltech and Marchuk Institute RAS)
63. Ivlev Oleg (Lomonosov Moscow State University)
64. Khamzin Viktor (Euler International Mathematical Institute)
65. Kokhanov Pavel (Southern Federal University)
66. Konstantin Fedorovskiy (Lomonosov Moscow State University)
67. Konstantin Ryutin (Lomonosov Moscow State University)

68. Korshunov Ivan (Lomonosov Moscow State University)
69. Krotov Mikhail (Lomonosov Moscow State University)
70. Leonid Danilevich (St. Petersburg State University)
71. Leonid Mikhailov (St. Petersburg State University)
72. Lialinov Ivan (St. Petersburg State University)
73. Maksim Kukushkin (St. Petersburg State University)
74. Malinovskiy Georgiy (Lomonosov Moscow State University)
75. Mariia Platonova (PDMI RAS, St. Petersburg University)
76. Mario Ullrich (Johannes Kepler University, Linz), online
77. Mark Malamud (St. Petersburg State University)
78. Mauricio Romo (Shanghai Institute for Mathematics and Interdisciplinary Sciences (SIMIS) and Fudan University)
79. Mikhail Ivanov (St. Petersburg State University)
80. Mikhail Komarov (VSU)
81. Mishulovich Arseniy (St. Petersburg State University)
82. Mishura Petr (St. Petersburg State University)
83. Moskalenko Timofey (St. Petersburg State University)
84. Natal'ya Abuzyarova (Institute of Mathematics with CC of UFSC RAS)
85. Natalia Obukhova (St. Petersburg Electrotechnical University and SPbU)
86. Nataliia Smorodina (PDMI RAS, St. Petersburg University)
87. Nikita Dobronravov (St. Petersburg State University)
88. Nikolai Antonov (IMM UB RAS)
89. Novgorodov Egor (Lomonosov Moscow State University)
90. Oksogoeva Irina (RUDN University)
91. Olga Kudryavtseva (Lomonosov Moscow State University and VSTU)
92. Pavel Mozolyako (SPbU)
93. Pavel Terekhin (Lomonosov Moscow State University)
94. Pinchuk Nikita (Adyghe State University)
95. Ponomar Anastasia (Lomonosov Moscow State University)
96. Prokopenko Evgeny (Sobolev Institute of Mathematics)
97. Roman Romanov (St. Petersburg State University)
98. Safronov Igor (St. Petersburg State University)
99. Senko Pavel (Lomonosov Moscow State University)
100. Sergey Astashkin (SSAU)
101. Shabalin Danila (Lomonosov Moscow State University)

102. Shkliaev Alexander (Lomonosov Moscow State University)
103. Simona Myslivets (SFU)
104. Sokolov Igor (MIPT)
105. Stepan Konenkov (St. Petersburg State University)
106. Tarasenko Aleksandr (Novosibirsk State University)
107. Tatsiana Mardvilko (Belarusian State University, Minsk)
108. Terekhov Ivan (Lomonosov Moscow State University)
109. Timur Akkaya (St. Petersburg State University)
110. Timur Batenev (St. Petersburg State University)
111. Toropov Victor (St. Petersburg State University)
112. Vasilev Ivan (Lomonosov Moscow State University)
113. Vasiliy Ionin (St. Petersburg State University)
114. Vladimir Kapustin (PDMI RAS)
115. Vladimir Lysov (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow)
116. Vladimir Shchavelev (St. Petersburg State University)
117. Vladimir Sherstyukov (Lomonosov Moscow State University)
118. Vladimir Temlyakov (MSU and SPbU)
119. Vorontsov Mikhail (Lomonosov Moscow State University)
120. Wang Shanwen (Lomonosov Moscow State University)
121. Yakusheva Alexandra (Lomonosov Moscow State University)
122. Yurii Belov (SPbU)
123. Yurii Malykhin (Steklov Institute RAS and MSU)
124. Yuval Peres (BIMSA), online
125. Zhiyanov Anton (Lomonosov Moscow State University)
126. Амосова Евгения Андреевна (ФГБОУ ВО СамГМУ)
127. Анопова Анна Дмитриевна (НЦМУ «Центр персонализированной медицины»)
128. Белевитин Александр Борисович (ГБУЗ ГКДЦ №1)
129. Беляева Екатерина Николаевна (ГБУЗ РК «Городская поликлиника №2»)
130. Бородулина Елена Александровна (ФГБОУ ВО СамГМУ)
131. Вавилова Татьяна Владимировна (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
132. Васюкова Елена Андреевна (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
133. Вдовушкина Елизавета Сергеевна (ФГБОУ ВО СамГМУ)
134. Власов Владимир Сергеевич (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
135. Говоров Игорь Евгеньевич (НМИЦ им. В.А. Алмазова)

136. Гуткин Михаил Григорьевич (СПб ГБУЗ МПППТД №3)
137. Диникина Юлия Валерьевна (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
138. Дышлюк Максим Валерьевич (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
139. Захаров Никита Максимович (ООО Лаборатория «Акросс-Инжиниринг»)
140. Кульпина Анастасия Ярославовна (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
141. Курапеев Дмитрий Ильич (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
142. Куценко Владимир Александрович (НМИЦ терапии и профилактической медицины)
143. Мулюха Владимир Александрович (Политехнический университет Петра Великого)
144. Овчинникова Марина Александровна (ГБУЗ ГКДЦ №1)
145. Осипов Николай Николаевич (ПОМИ РАН)
146. Пищулов Константин Анатольевич (НЦМУ «Центр персонализированной медицины»)
147. Подивилов Андрей Евгеньевич (Huawei)
148. Рубинштейн Артем Аркадьевич (ФГБНУ Институт экспериментальной медицины)
149. Спельников Дмитрий Михайлович (ФГБОУ ВО СПбГУ)
150. Старшинова Анна Андреевна (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
151. Ушаков Дмитрий Игоревич (НМИЦ им. В.А. Алмазова)
152. Эриванцева Татьяна Николаевна (АО «Алтайвитамины»)

Probability Techniques in Analysis and Approximation Theory

Saint Petersburg State University, 25–30 November 2024

ABSTRACTS

Differentiation-invariant subspaces of Ω-ultradifferentiable functions for which weak spectral synthesis fails

Natalia Abuzyarova (Institute of Mathematics with Computing Centre of RAS, Ufa)

We consider a spectral synthesis problem for differentiation-invariant subspaces in a general space $\mathcal{E}_\Omega(a;b)$ of Ω-ultradifferentiable functions, where $(a;b) \subseteq \mathbb{R}$ and $\Omega = \{\omega_n\}$ is a sequence of nonquasianalytic weights subjected some standard restrictions of Ω-ultradifferentiable functions theory. Do there exist differentiation-invariant subspaces $W \subset \mathcal{E}_\Omega(a;b)$ for which weak spectral synthesis fails? Alexandru Aleman, Anton Baranov and Yurii Belov constructed the first example of differentiation-invariant subspace in $C^\infty(a;b)$ which does not admit weak spectral synthesis (2015). We answer the above question using a dual scheme. Namely, we consider a topological module $P = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_\Omega(a;b))$, where $\mathcal{F}$ denotes the Fourier-Laplace transform, and find *unlocalisable* primary submodules $J \subset P$. Then, the differentiation-invariant subspaces in $\mathcal{E}_\Omega(a;b)$ which dual submodules are J do not admit the weak spectral synthesis.

****

On embedding theorems for function spaces with mixed logarithmic smoothness

Gabdolla Akishev (Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, Astana)

The talk discusses the Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, 2π periodic functions of many variables and $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$, $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$ — spaces with mixed logarithmic smoothness, equivalent norms of spaces with mixed logarithmic smoothness, necessary and sufficient conditions for the embedding of spaces $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$, $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$ into each other.

****

Stability of min- and max-approximation

Alexey Alimov (Lomonosov Moscow State University)

Approximative compactness type properties in min- and max-approximation are studied. Problems of this kind lead in a natural way to "special points" of approximation theory, viz., the spaces characterized in terms of approximative compactness for various problems of approximation. On this way, there appear CLUR-spaces, Day–Oshman spaces, Anderson–Megginson spaces, and CMLUR- and AT-spaces.

****

Residue techniques in the study of Euler–Mellin integrals

Irina Antipova (Siberian Federal University, Krasnoyarsk)

The main objects of the theory of multidimensional residues are integrals of rational n-forms over n-dimensional cycles lying in the complement of a polar hypersurface in affine, projective, and toric spaces. Developing ideas of F. Griffiths, V. Batyrev proved (1993) that all periods are A-hypergeometric functions in the sense of I. Gelfand, M. Kapranov and A. Zelevinsky (1990) if the differential form is considered by varying all parameters. The Batyrev class can be significantly expanded by moving from integer parameters to complex ones, and instead of compact homology in integration, we can consider cycles with closed (unbounded) supports. Such a generalization can be achieved by considering Mellin transforms in the class of branching integrals (Euler–Mellin integrals). In the last decade, particular interest has arisen in the study of such integrals in connection with the study of Feynman integrals in quantum field theory and string amplitudes in superstring theory. In Bayesian statistics, such integrals appear as marginal likelihood integrals.

The convergence of the Euler–Mellin integral is ensured by the property of quasi-ellipticity of the integrand denominator, first introduced by T. Ermolaeva and A. Tsikh (1996). In the talk we are going to discuss representations of the Euler–Mellin integrals associated with facets of the Newton polytope of the denominator, and their treatments in the context of the theory of Feynman integrals.

****

On integrability of majorants of Fourier sums

Nikolai Antonov (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg)

Let $\varphi\colon\ [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ be a nondecreasing function, ω be an arbitrary modulus of continuity. Denote by $\varphi(L)$ the set of all 2π-periodic Lebesgue measurable functions f such that $\varphi(|f|)$ is summable on $[0,2\pi)$, and by H_1^ω the set of all $f\in L$ whose L^1-modulus of continuity $\omega(f,\delta)_1$ satisfies the condition $\omega(f,\delta)_1=O(\omega(\delta))$.

Suppose that $f\in L(\mathbb{T})$, denote by $S_n(f,x)$ the nth partial sum of the trigonometric Fourier series (nth Fourier sum) of f, and by

$$M(f,x)=\sup_{n\geq 1}|S_n(f,x)|$$

the majorant of the Fourier sums of f. We consider the problems of conditions for the almost everywhere convergence of the Fourier series and the integrability of the majorant of the Fourier sums of f in terms of the belonging of this function to classes $\varphi(L)$ and H_1^ω. We propose to discuss multidimensional analogs of these problems for the case of rectangular partial sums of multiple trigonometric Fourier series.

****

Normal random matrices and recurrence relations for multiple orthogonal polynomials

Alexander Aptekarev (Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS)

Our main attention will be devoted to the normal matrices ensembles, which have many interesting applications (Laplacian growth, Diffusion limited aggregation). An important feature of the orthogonal polynomials ensembles of random matrices is that the joint probability density of their eigenvalues is represented by means of the determinants composed by Christoffel–Darboux (CD) kernels of orthogonal polynomials or their generalizations. For the normal matrices ensembles the corresponded CD kernel is taken for polynomials orthogonal with respect to an area measure. We show that for some special cases of the normal random matrices (related with discrete Painlevé equation) these polynomials are the multiple orthogonal polynomials. This fact makes their asymptotical analysis much easier.

****

Random unconditional convergence of Rademacher chaos in L_∞ and its applications to graph theory

Sergei Astashkin (Samara National Research University),
Konstantin Lykov (Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus)

According a recent result due to the authors of this talk, both multiple Rademacher system and Rademacher chaos possess the property of random unconditional convergence in L_∞. This fact combined with some novel connections between L_∞-norms of linear combinations of elements of these systems and some special norms of matrices of their coefficients allows us to establish sharp two-sided estimates for the discrepancy of weighted graphs and hypergraphs. Some of these results extend the classical theorems proved by Erdös and Spencer for the unweighted case.

****

On distributed optimization problems under similarity: optimal algorithms and fast extensions

Aleksandr Beznosikov (Moscow Institute of Physics and Technology),
Alexander Gasnikov (Innopolis University and Steklov Mathematical Institute, Moscow)

In this talk, we consider distributed methods for solving optimization problems. In the distributed formulation, the target function is divided into parts, and each of these parts can be accessed only by a local agent/worker. We deal with the case where the local functions are “similar” to each other in some sense. Due to the “similarity” it is possible to achieve a significant acceleration of the theoretical guarantees of convergence of methods in terms of estimates on communication complexity. Besides the issue of convergence of algorithms and obtaining upper bounds, we touch upon lower complexity bounds and verify the optimality of the proposed methods. In the remaining time, we try to discuss the question of how we can "break through" the lower estimates and construct an even faster method, in particular, we additionally introduce the possibility of compressing the transmitted information, modify the proposed algorithms and obtain upper and lower bounds in a new formulation.

****

Random sampling discretization of integral norms in finite-dimensional spaces

Feng Dai (University of Alberta, Edmonton, Canada)

In this talk, I will present recent advancements in the Marcinkiewicz discretization problem using random sampling in finite-dimensional spaces. The goal is to establish two-sided estimates for the integral norm of functions in the space via a finite sum of function values evaluated at randomly selected points that are independent of the individual functions in the space. The main challenge is to determine the "nearly" optimal number of random points required for the Marcinkiewicz discretization inequalities to hold with high probability.

****

Coefficientwise total positivity of some matrices defined by linear recurrences

Aleksandr Dyachenko (Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow)

A matrix of polynomials is called coefficientwise totally positive (CTP) if all its minors are polynomials with positive coefficients. We verify this property for a few families of infinite lower-triangular matrices. During the talk we will, in particular, touch upon CTP triangular matrices stemming from orthogonal and multiple orthogonal polynomials.

It is also intriguing to consider triangles generated by other types of recurrence relations. Almost 30 years ago Brenti conjectured that the Eulerian triangle (the lower-triangular matrix of Eulerian numbers, A008292 in OEIS) is totally positive. The Eulerian numbers appear in polylogarithms of negative integer orders and count the number of permutations of $1, 2, ..., n+1$ with k excedances. We introduce a more general family of matrices that experimentally appear to be CTP. Then we prove that its special subfamily including the reversed Stirling subset triangle (A008278) is indeed CTP. This result is new and required a more delicate approach, than total positivity in the non-reversed case (cf. A008277 in OEIS).

****

Approximation by simplest fractions and simplest bianalytic sums

Konstantin Fedorovskiy (Lomonosov Moscow State University and Saint Petersburg State University)

We will discuss the question on approximation by simplest fractions (i.e., sums of Cauchy kernels with unit coefficients) and by simplest bianalytic sums (i.e., sums of fundamental solutions to the Bitsadze equation with unit coefficients). We will start with Chui's conjecture and its version for weighted (Hilbert) Bergman spaces. For a wide class of weights, it will be shown that for every N, the simplest fractions with N poles on the unit circle have minimal norm if and only if the poles are equidistributed on the circle. Next, we describe the closure of the simplest fractions in weighted Bergman spaces under consideration. These results were obtained at 2021 in the joint work by the speaker with E. Abakumov (Univ. Gustave Eiffel, Paris, France) and A. Borichev (AixвЂ"Marseille University, France). Finally, we discuss the problem on approximation of functions by simplest bianalytic fractions,and several new effects and phenomena that appeared in this connection. This part is based on the joint work in progress by the speaker with P. Borodin (Lomonosov Moscow State University).

****

The method for solving the Delsarte problem for designs on homogeneous spaces

Dmitry Gorbachev (Tula State University)

We study the problem of finding lower bounds for the cardinality of weighted designs on compact rank-1 spaces. To solve this problem, P. Delsarte, J. Goethals, and J. Seidel introduced what is known as the linear programming bound, based on a two-point distribution of the design. This bound is based on solving an extremal problem known as the Delsarte problem for Jacobi–Fourier series. Earlier, V.V. Arestov, A.G. Babenko, and their students proposed a solution scheme for a similar problem in the case of spherical codes, based on the primal-dual problem. We adapt this scheme to the case of designs. The scheme is based on convex analysis and consists of several steps, including: formulating the dual problem for the Stieltjes measure, proving the existence of an extremal function and measure, deriving duality relations, characterizing extremal functions and measures based on these relations, reducing the problem to a polynomial system of equations in specific cases, proving the existence of an analytical solution to the system through its certification or by using a special Gröbner basis, and applying the uniform Stieltjes–Bernstein estimate. The described method has been used to solve several new Delsarte problems. These results are useful in the problem of integral norm discretization when estimating the number of nodes in discrete norms.

****

Hyperbolic Fourier series and the Klein–Gordon equation

Haakan Hedenmalm (Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, and Saint Petersburg State University)

The Klein–Gordon equation in 1+1 dimensions is one of the truly basic second order PDEs with constant coefficients. It models the time evolution of a one-dimensional relativistic boson with spin 0. Since it is relativisitic, the temporal relation between points is felt, and a given pair of points is either time-like or space-like. If the pair of points is space-like, we cannot say that one or the other event happens before or after the other. If we study a space-like cone, and place equidistributed points on the edges, do we get a uniqueness set for Klein–Gordon solutions? The answer turns out to depend on the density of points, and the shape of the solution.

As a consequence, we are led to study hyperbolic Fourier series, a topic which is natural but is a recent discovery only. The first installment is a paper with A. Montes-Rodriguez (Annals of Mathematics, 2011). The second only exists as a 2024 preprint, but it builds on insights in the work of Radchenko and Viazovska (2019).

****

Maximal operators on spaces BMO and BLO

Grigor Karagulyan (Yerevan State University and Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of RA)

We consider maximal kernel-operators on measure spaces (X,μ) equipped with a ball-basis. We prove that under certain asymptotic condition on the kernels those operators maps boundedly $\mathrm{BMO}(X)$ into $\mathrm{BLO}(X)$, generalizing the well-known results of Bennett–DeVore–Sharpley and Bennett for the Hardy–Littlewood maximal function. As a particular case of such an operator one can consider the maximal function

$$\mathcal{M}_\varphi f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \varphi\left(\frac{x-t}{r}\right) dt, \tag{1}$$

and its non-tangential version, where $\varphi(x) \geq 0$ is a bounded, integrable spherical function on $\mathbb{R}^d$, decreasing with respect to $|x|$. We prove that $\mathcal{M}_\varphi$ is bounded from $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ to $\mathrm{BLO}(\mathbb{R}^d)$ if and only if

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \log(2+|x|) dx < \infty.$$

Our main result is an inequality, providing an estimation of certain local oscillation of the maximal function $\mathcal{M}(f)$ by a local sharp function of f.

****

Uniqueness theorems for holomorphic functions in the unit disk and completeness of various systems of functions

Bulat Khabibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre of RAS, Ufa)

We present new uniqueness theorems for holomorphic functions in the unit disk with given subharmonic majorants for the logarithms of the modules of these holomorphic functions. The results are formulated in terms of zero distributions of these holomorphic functions and Riesz mass distributions of these subharmonic majorants. They take into account the distributions of zeros and masses both by radius and by argument. We also present applications of these uniqueness theorems to questions of completeness of various systems of holomorphic functions in weight spaces of holomorphic functions. The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 24-21-00002.

****

On reverse Markov–Nikol'skii inequalities for polynomials with zeros on a segment

Mikhail Komarov (Vladimir State University)

Let Π_n be the class of algebraic polynomials P of degree n, all of whose zeros lie on the segment $[-1,1]$. In 1995, S. P. Zhou has proved the following Turán type reverse Markov–Nikol'skii inequality: $\|P'\|_{L_p[-1,1]} > c\,(\sqrt{n})^{1-1/p+1/q}\,\|P\|_{L_q[-1,1]}$, $P \in \Pi_n$, where $0 < p \leq q \leq \infty$, $1-1/p+1/q \geq 0$ ($c > 0$ is a constant independent of P and n). We show that Zhou's estimate remains true in the case $p = \infty$, $q > 1$. Some of related Turán type inequalities are also discussed.

****

Constructive recovery of values of an algebraic function via Hermite–Padé polynomials

Aleksandr Komlov (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow)

Let f be an algebraic function of degree $m+1$ and f_∞ be its holomorphic germ at the point ∞. Hermite–Padé polynomials of type I for the tuple $[1, f_\infty, f_\infty^2, \ldots, f_\infty^m]$ of order n at ∞ are $m+1$ polynomials $Q_{n,j}$, $j = 0, \ldots, m$, such that $\deg Q_{n,j} \leq n$ and

$$Q_{n,0}(z) + Q_{n,1}(z) f_\infty(z) + Q_{n,2}(z) f_\infty^2(z) + \cdots + Q_{n,m}(z) f_\infty^m(z) = O(z^{-m(n+1)})$$

as $z \to \infty$.

In 1984 J. Nuttall (not in general case and not with full proofs) and in 2017 E. Chirka, R. Palvelev, S. Suetin and A. Komlov (in general case and with full proofs) showed that $Q_{n,m-1}/Q_{n,m}$ asymptotically recover the sum of the values of f on first m sheets of Nuttall partition of the Riemann surface of f. So, this ratio recovers sum of m values of $(m+1)$-valued function f.

In 2021 the polynomial Hermite–Padé m-system was introduced. With the help of this system we show that for generic function f the ratio of some minors of size $m+1-k$ of the $(m+1) \times (m+1)$ matrix consisting of Hermite–Padé polynomials of order $n, n-1, \ldots, n-m$ asymptotically recover the sum of the values of f on first k sheets of Nuttall partition of the Riemann surface of f for each $k = 1, \ldots, m$. Hence we constructivelly recover m values of $(m+1)$-valued algebraic function f.

****

Density of homogeneous polynomials

András Kroó (Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest)

In this talk we will consider the following central problem on the uniform approximation by **homogeneous polynomials**:

For which 0-symmetric star like domains $K \subset \mathbb{R}^d$ and which $f \in C(\partial K)$ there exist homogeneous polynomials h_n, h_{n+1} of degree n and $n+1$, respectively, so that uniformly on ∂K

$$f = \lim_{n\to\infty} (h_n + h_{n+1})?$$

This is the analogue of the classical Weierstrass approximation problem with polynomials of total degree being replaced by homogeneous polynomials. The answer to the above problem has an intrinsic connection to the geometry of the underlying domain. We will give a survey of various results related to the above question and will also list some important open problems.

****

Holomorphic self-maps of a disc with fixed points

Olga Kudryavtseva (Lomonosov Moscow State University),
Aleksei Solodov (Lomonosov Moscow State University)

Fixed points of a holomorphic self-map of the unit disc have a decisive influence on its geometric and analytic properties. In the talk, we give an overview of known and new results on classes of such functions. The presentation focuses on approaches to solving extremal problems on classes of functions with several fixed points.

****

Fekete lemma in Banach spaces

Aleksei Kulikov (University of Copenhagen, Denmark)

The classical Fekete lemma says that if the sequence of real numbers a_n satisfies the inequality $a_{n+m} \le a_n + a_m$ for all $n, m \in \mathbb{N}$ then the limit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ exists. In this talk we will discuss what happens when a_n are the elements of some Banach space. The main result that we will discuss is the following theorem.

Theorem. *Let X be a uniformly convex Banach space and let a_n be a sequence of vectors in X such that $||a_{n+m}|| \le ||a_n + a_m||$ for all $n, m \in \mathbb{N}$. Then the limit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ exists.*

Interestingly, the condition of uniform convexity is essential – if X is not convex (that is, if the unit sphere of X contains an interval) then it is not hard to see that the Fekete lemma fails, but even for convex, but not uniformly convex spaces there might be a counterexample.

The talk is based on a joint work with Feng Shao.

****

Singularity of random Bernoulli matrices

Alexander Litvak (University of Alberta, Edmonton, Canada)

We discuss recent progress on singularity of random matrices with i.i.d. $0/1$ Bernoulli entries. This talk is partially based on a joint work with K. Tikhomirov.

****

Automorphisms of Hopf manifolds of dimension $n \geq 2$

Elijah Lopatin (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow)

Describing the group of automorphisms $\mathrm{Aut}(X)$ of a compact complex manifold X is among the classical issues of complex geometry. According to the Bochner–Montgomery [1] theorem, such groups are complex Lie groups and it is almost everything we can a priori say about them: for a majority of X, it is extremely complicated (or nearly impossible) to find the generating set of $\mathrm{Aut}(X)$ or some other explicit characterisation.

Therefore it is natural to investigate classification properties, i.e. such properties that the group $\mathrm{Aut}(X)$ possesses one when X is a complex manifold, and does not for other X. It seems the Jordan property [8] to be the most promising.

Let G be a group. We say that G is *Jordan* (or has the *Jordan property*) if there is a constant $J = J(G) \in \mathbb{N}$ such that for any finite subgroup $H \subset G$ there is a normal abelian subgroup $A \trianglelefteq H$ of index at most $J(G)$.

It is known that automorphism groups of complex projective varieties [5] and, more generally, compact KΓ¤hler manifolds [7] are Jordan. For non-KΓ¤hler compact complex manifolds there are only a few known results on the Jordan property for automorphism groups: for compact complex manifolds in Fujiki's class $\mathcal{C}$ [6], for compact complex surfaces [9] and for some examples [3,4] of non-KΓ¤hler holomorphically symplectic manifolds [2].

Hopf manifold H_n, i.e. a compact complex manifold of dimension $n \geq 2$ such that its universal cover is isomorphic to $\mathbb{C}^n \setminus 0$, is a natural example of non-KΓ¤hler complex manifold for studying structural properties of its automorphism group. H_n is realized as a quotient of $\mathbb{C}^n \setminus 0$ by a free action of a group isomorphic to $\mathbb{Z}$, which acts on $\mathbb{C}^n \setminus 0$ via biholomorphic contractions $\mathbb{C}^n \setminus 0 \to \mathbb{C}^n \setminus 0$. Recently it was shown [10] that $\mathrm{Aut}(\mathsf{H}_n)$ is Jordan. We expand on the results of [10] proving that the group $\mathrm{Aut}(\mathsf{H}_n)/\mathrm{Aut}^0(\mathsf{H}_n)$ is finite; here $\mathrm{Aut}^0(\mathsf{H}_n)$ is the connected component of unity in $\mathrm{Aut}(\mathsf{H}_n)$. We also provide the explicit structure of mentioned biholomorphic contractions.

This is a joint research with Constantin Shramov, Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow.

References

1. Bochner, S. and Montgomery, D. *Groups on analytic manifolds,* Annals of Mathematics **48**, (1947), 659–669.

2. Bogomolov, F., Kurnosov, N., Kuznetsova, A. and Yasinsky, E. *Geometry and automorphisms of non-KΓ¤hler holomorphic symplectic manifolds,* Int. Math. Res. Notices IMRN 2022:6, 12302–12341.

3. Guan, D. *Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which are not KГ¤hlerian. II,* Inventiones Mathematicae **121**:1, (1995), 135–145.

4. Guan, D. *Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which are not KГ¤hlerian. II,* Internat. J. Math. **6**:5, (1995), 709–718.

5. Meng, S. and Zhang, D.-Q. *Jordan property for nonlinear algebraic groups and projective varieties,* Amer. J. Math. **140**:4, (2018), 1133–1145.

6. Meng, S., Perroni, F. and Zhang, D.-Q. *Jordan property for automorphism groups of compact spaces in FujikiвЂ™s class $\mathcal{C}$,* J. Topol. **15**:2, (2022), 806–814.

7. Kim, J. H. *Jordan property and automorphism groups of normal compact KГ¤hler varieties,* Commun. Contemp. Math. **20**:3, (2018), 1750024.

8. Popov, V. L. *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties*, in: *Affine Algebraic Geometry: The Russell Festschrift,* CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 54, Amer. Math. Soc., 2011, pp. 289–311.

9. Prokhorov, Yu. and Shramov, C. *Automorphism groups of compact complex surfaces,* Int. Math. Res. Notices **2021**:14, (2021), 10490–10520.

10. Savelyeva, A. *Automorphisms of Hopf manifolds,* Journal of Algebra **638**, (2024), 670–681.

****

Generalizations of Bernstein and Videnskii operators

Alexey Lukashov (Moscow Institute of Physics and Technology)

Bernstein operators are associated with Bernoulli scheme as follows:

$$B_n(f,x) = \mathbb{E}\left(f \circ Z(n,x)\right),$$

where $Z(n,x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y(i,x)$, $Y(i,x)$ is the sequence of independent Bernoulli random variables with parameters $P\{Y(i,x)=1\} = x$ and $P\{Y(i,x)=0\} = 1-x$. V.S. Videnskii in a series of papers studied generalizations of Bernstein operators to the case of rational functions. They can be written in the form

$$V_n(f,x) = \mathbb{E}\left(f \circ (\mathbb{E}Z(n,x))^{-1} \circ Z(n,x)\right),$$

where $Y(i,n)$ has now parameters $p_{in}(x) = \frac{\rho_{in}x}{1+\rho_{in}-x}$, $\rho_{i,n} > 0$, instead of x.

We give a survey of results to compare approximation properties of Bernstein and Videnskii type generalizations for one or several intervals, and for the semi-axis.

****

Extremal measures and asymptotics of orthogonal polynomials of a discrete variable

Vladimir Lysov (Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow)

In the series of works of the 1980s, A.A. Gonchar and E.A. Rakhmanov developed a method for studying the asymptotic behavior of polynomials orthogonal with respect to varying (i.e., depending on the degree of the polynomial) weight. Orthogonality was considered both on real intervals and on curves with special symmetry (S-property). We extend these results in two directions. First, we consider multiple orthogonality, and second, discrete orthogonality measures. During the talk we formulate some general results and provide specific examples of their use.

****

To Birman–Krein–Vishik theory of nonnegative symmetric operators with compact preresolvent

Mark Malamud (Saint Petersburg State University)

Let $A \geq 0$ be a closed densely defined non-negative symmetric operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$, let $\mathfrak{H}_1 := \operatorname{ran}(A+I)$, and let P_1 be the orthoprojection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_1$. Let also A_F and A_K be, respectively, the maximal (Friedrichs') and minimal (Krein's) non-negative selfadjoint extensions of A.

Next, assuming A to be positive definite, $A \geq m_A > 0$, Krein characterized the extension A_K as follows: $\operatorname{dom}A_K = \operatorname{dom}A \dotplus \mathfrak{N}_0$ where $\mathfrak{N}_0 := \ker A^*$. Therefore Krein's extension A_K admits the following representation: $A_K = A'_K \oplus (\mathbb{O} \upharpoonright \mathfrak{N}_0)$ where $A'_K := A_K \upharpoonright \mathfrak{M}_0$, and $\mathfrak{M}_0 := \mathfrak{N}_0^\perp = \operatorname{ran}A$.

The operator A'_K is called the reduced Krein extension.

We will discuss relations between certain spectral properties of the operators A_F, A'_K, and A **assuming the operator** $(A+I)^{-1} : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}$ **to be compact.**

First we discuss the validity of the following equivalence:

$$P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_1) \quad \Longleftrightarrow \quad (I_{\mathfrak{M}_0} + A'_K)^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_0), \tag{2}$$

which improves and complements the known Krein's result. Here $\mathfrak{S}$ is arbitrary symmetrically normed ideal $\mathfrak{S}$ including Neumann-Schatten ideals $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_p$, $p \in (0,\infty]$, as well as ideals Σ_p (a compact operator T is put in the class $\Sigma_p(\mathfrak{H})$, if $s_n(T)) = O(n^{-1/p})$, $p \in (0,\infty)$).

Secondary we will discuss the improvement of equivalence (2) for $\mathfrak{S} = \Sigma_p$. It happens that the inclusion $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \Sigma_p(\mathfrak{H}_1)$ for some $p \in (0,\infty)$, does not ensure coincidence of the eigenvalues asymptotics of operators in (2), i.e. the following equivalence with some $a \geq 0$:

$$\lambda_n\big(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}\big) = an^{-1/p}\,(1+o(1)) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_n\big((I_{\mathfrak{M}_0} + \widehat{A}'_K)^{-1}\big) = an^{-1/p}\,(1+o(1))\,. \tag{3}$$

In fact, it will be explained that the validity of (3) as $n \to \infty$ depends on A_F.

We will also discuss the abstract Alonso-Simon problem [1] on the eigenvalues asymptotics of A_F and A'_K, and the explicit solution to the Birman problem.

Besides, we discuss improvement of Birman's and Grubb's results (see [2], [3]) regarding equivalence of semiboundedness properties of an extension $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ of A and the corresponding boundary operator.

A part of results of the talk are announced in [4] and published in [5].

1. A. Alonso, B. Simon, The Birman-Kreĭn-Vishik theory of self-adjoint extensions of semibounded operators, J. Operator Theory, **4** (1980), 251–270.

2. M. S. Birman, On the self-adjoint extensions of positive definite operators, Mat. Sb., **38**, 431–450 (1956).

3. G. Grubb, A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **22** (1968), 425–513.

4. M.M. Malamud, To Birman–Krein–Vishik theory, Doklady Mathematics, **107**, No.1 (2023), 44–48.

5. M.M. Malamud, Explicit solution to the Birman problem for the $2D$-Laplace operator, Russian Journal of Mathematical Physics, **31**, No. 3 (2024), 495–503.

****

Average Kolmogorov width and its applications

Yuri Malykhin (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow)

The classical notion of Kolmogorov width of a set in a normed space measures the error of approximation of this set by n-dimensional linear subspaces. Here we consider the "worst-case" error of approximation.

If we take the "average-case" error instead, we arrive to the notion of average Kolmogorov width. We will discuss some new bounds for the average widths and some applications for the classical Kolmogorov widths.

****

Inequalities for quasinorms of rational functions in a domain and on its boundary

Tatsiana Mardvilko (Belarusian State University, Minsk)

Previously (in 2011), the author together with A.A. Pekarski obtained an inequality connecting the quasinorms of rational functions with respect to the linear measure on $\mathbb{R}$ and the planar measure in the half-plane $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. In this context, the rational functions belonged to the weighted Lebesgue space in Π, where the quasinorm is defined as follows

$$\|f\|_{L_{p,\mu}(\Pi)} = \left(\int_{\Pi} (\Im z)^{p\mu-1} |f(z)|^p \, dm_2(z)\right)^{1/p}, \quad p > 0, \quad \mu > 0.$$

Here m_2 is the planar Lebesgue measure in $\mathbb{C}$.

The report will discuss some applications of the noted inequality. Furthermore, a generalization of this inequality for a domain whose boundary is a Lavrent'ev curve will be presented.

****

Analytic extension of simple and multiple power series by means of coefficients interpolation

Aleksandr Mkrtchyan (Siberian Federal University, Krasnoyarsk, and Institute of Mathematics NAS RA)

One of the methods of studying the problem of analytical continuation of power series is interpolation of the coefficients of the series. With this approach Le Roy and Lindelöf obtained conditions under which a series analytically extends into a sector. Note that the theorem, gave a connection between the sector and the growth of the interpolation function. More precisely, the type of interpolation function must be less than π on the closed half-plane $Rez \geq 0$.

We weakened the condition of less than π on the fact that the sum of the indicator (growth) on directions $\frac{\pi}{2}$ and $-\frac{\pi}{2}$ is less than 2π. Also we obtain the multivariate version of this theorem, i.e. establish a connection between the growth of the interpolating function of the coefficients on the imaginary subspace and the multivariate sectoral domain where the multiple series is analytically extends.

****

On the wavelet transform of periodic ultradifferentiable functions

Ildar Musin (Institute of Mathematics with Computing Centre of RAS, Ufa)

The main part of the talk is devoted to wavelet transform on the space of periodic ultradifferentiable functions of Roumieu type. It is based on recent results on Gelfand–Shilov spaces and description of periodic ultradifferentiable functions of Roumieu type in terms of decay of their Fourier coefficients.

****

Integral potential type operator for infinitely differentiable and real analytic functions

Simona Myslivets (Siberian Federal University, Krasnoyarsk)

We prove the infinite differentiability of an integral operator of the potential type for an infinitely differentiable function defined on the boundary of the domain in $\mathbb{C}^n$ with the boundary of the class $\mathcal{C}^\infty$, up to the boundary of the domain on both sides.

We also prove the real analyticity of the Bochner–Martinelli integral for a real analytic function given at the boundary of the domain.

The author was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2020-1534/1).

****

Color transformations for medical video images

Natalia Obukhova (Saint Petersburg Electrotechnical University B«LETIB»)

The existing methods of color transformations synthesizing for medical video systems are discussed. The main problems of their application are identified. It is shown that the existing approaches, solving private problems, lead to the general inconsistency of color transformations in the medical video systems. A new quality criterion for the color transformations synthesis taking into account both the accuracy of color rendering and the transmission of local color contrast is proposed. Examples of synthesis of color transformations for target tasks of endoscopic image processing using the proposed criterion are considered

****

Effective approximation of high-dimensional probability distributions

Ivan Oseledets (Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow)

In this talk, I will discuss recent advances and challenges in the approximation of high-dimensional probability distributions, knowing only its samples $x_1, \ldots, x_n$. Such problems appear in many applications. I will discuss techniques such as normalising flows, diffusion models and flow matching.

****

The length conjecture for hyperbolic knot complements

Mauricio Romo (Shanghai Institute for Mathematics and Interdisciplinary Sciences (SIMIS) and Fudan University)

I will explain a conjecture that relates the asymptotics of the colored Jones polynomials for links with the geodesic length of certain loops inside hyperbolic knot complements. If time allows I will give a physics motivation for this conjecture based on SL(2,C) Chern–Simons theory.

****

Approximation of locally-constant functions by algebraic polynomials and some applications

Konstantin Ryutin (Lomonosov Moscow State University and Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics),
Yuri Malykhin (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow)

We plan to talk about explicit explicit easily implementable polynomial approximations of sufficiently high accuracy for locally constant functions on the union of disjoint segments and some more general disjoint sets.

This problem has important applications in several areas of numerical analysis, complexity theory, quantum algorithms, etc. The one, most relevant for us, is the amplification of approximation method: it allows to construct approximations of higher degree M and better accuracy from the approximations of degree m. Such constructions are used in linear algebra, computer science (communication complexity).

****

K-theory of graded C^*-algebras in the tight-binding model of solid state theory

Armen Sergeev (Steklov Mathematical Institute, Moscow)

After the discovery of quantum Hall effect and its topological explanation the mathematical methods based on the theory of C^*-algebras and their K-theory enter firmly into the arsenal of solid state physics.

A key role in the theory of solid states is played by their symmetry groups. It was Kitaev who has pointed out the relation between the symmetries of solid bodies and Clifford algebras.

In this talk we pay main attention to the class of solid bodies called the topological insulators. They are characterized by having a broad energy gap stable under small deformations. The algebras of observables of such solid bodies belong to the class of graded C^*-algebras for which there is a variant of K-theory proposed by Van Daele. It makes possible to define the topological invariants of insulators in K-theory terms.

****

Factorization representation and properties of zero sets of some weighted classes of analytic functions in the unit disk

Faizo Shamoyan (Saratov State University)

In the talk we consider the problem the factorization of certain classes of analytic functions in the unit disk, for which the logarithm of modulus belongs to the weighted L^p classes.

****

Generalization of the Rossovskii problem on the limit of a special product of sines

Vladimir Sherstyukov (Lomonosov Moscow State University)

Some time ago, in the theory of functional differential equations with affine transformations, the problem of calculating the spectral radius for a certain parametric family of operators arose. The question comes down to finding the limit of the special product of sines with arguments generated by a given geometric progression. The report plans to discuss a more general problem in which an arbitrary infinitely large sequence is taken as the generating sequence.

****

Discrete models for differentially constrained spaces

Dmitriy Stolyarov (Saint Petersburg State University and St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics)

I will speak about a mysterious correspondence between inequalities for special discrete time martingales and solutions to certain PDEs. Usually these inequalities involve the L_1 norms of functions and martingales and, thus, have applications to geometric measure theory. The said correspondence also works for questions in geometric measure theory (quantifying singularities of martingales and singularities of PDE solutions). It seems that there are much more questions than answers here.

****

Multishifts on Hilbert spaces

Pavel Terekhin (Lomonosov Moscow State University)

We consider a multishift structure on a Hilbert space. This structure is a noncommutative analog of the classical (simple one-sided) shift operator. Subspaces invariant under the multishift are described. A theorem on the factorization into an inner and an outer factor is established for operators commuting with the multishift. We study connections between multishifts and affine Haar-type and Walsh-type systems of functions.

****

Low-rank approximation analysis

Eugene Tyrtyshnikov (Marchuk Institute of Numerical Mathematics of RAS, Moscow)

Tensor decompositions become a very popular tool for modelling data in many application problems. However, a better understanding of why they are so efficient is still a hot issue with a machinery based on some relevant probability models for data. We discuss some open questions and new developments of cross-approximation approach to optimization problems with the tensor-train model.

References

1. *E. Tyrtyshnikov*, Tensor decompositions and rank increment conjecture, Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 25 (4), 239–246 (2020).
2. *D. Zheltkov, E. Tyrtyshnikov*, Global optimization based on TT-decomposition, Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 25 (4), 247–261 (2020).

****

On the power of adaption, randomization and non-linear measurements

Mario Ullrich (Johannes Kepler University, Linz, Austria)

We show that the maximal gain of adaption and randomization is limited when considering approximation of functions from convex sets based on arbitrary linear measurements in a worst-case setting. We also discuss the situation when arbitrary non-linear, Lipschitz-continuous measurements are allowed, where some (surprising) improvements hold.

****

Математическое моделирование и персонализированная медицина в современной клинической практике

Tatyana Vavilova (Almazov National Medical Research Centre)

****

Infinite-dimensional conic Steiner formula

Dmitry Zaporozhets (St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics)

The classical Steiner formula expresses the volume of the neighborhood of a convex compact set in $\mathbb{R}^d$ as a polynomial in the radius of the neighborhood. In the work of Tsirelson (1985), this result was extended to the infinite-dimensional case. A spherical analogue of the Steiner formula for convex subsets of $\mathbb{S}^{d-1}$ is also well-known. Using Tsirelson's idea of applying the theory of Gaussian processes, we obtain an infinite-dimensional version of this spherical analogue.

The talk is based on a joint work with Maria Dospolova.

St. Petersburg Youth Meeting on Probability and Mathematical Physics

Санкт-Петербургский государственный университет, 25–28 ноября 2024

АННОТАЦИИ

Мультистабильность в трехвидовой трофической системе

Алмасри Ахмад
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
ahmal6398@gmail.com

В математических моделях динамики популяций появление континуума решений является редкой ситуацией. Проводится анализ трофической цепи, построенной на основе модели А.Н. Колмогорова и состоящей из жертвы $x(t)$, потребляющего её хищника $y(t)$ и питающегося обоими видами суперхищника $z(t)$. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правой частью $[x(\mu_0+\mu_1 x)(1-x)-(y+z); \quad -\lambda_1 y+\alpha_1 xy+\beta_1 x^2 y-\delta_1 zy; \quad -\lambda_2 z+\alpha_2 xz+\beta_2 x^2 z+\delta_2 zy]$ с положительными коэффициентами μ_0, μ_1 ,λ_j, δ_j, α_j, β_j $(j=1,2)$. Данная модель относится к классу косимметричных динамических систем [1] при дополнительных условиях на параметры: $\lambda_2=(\lambda_1/\delta_1+\mu_0)\delta_2$, $\alpha_2=(\alpha_1/\delta_1+\mu_0-\mu_1)\delta_2$, $\beta_2=(\beta_1/\delta_1+\mu_1)\delta_2$. В этом случае возникает однопараметрическое семейство равновесий с индивидуальным спектром устойчивости аналогично [2]. Построены бассейны для семейства, состоящего из устойчивых равновесий. Определены условия на параметры, при которых в результате бифуркации Хопфа от равновесий ответвляются периодические решения. Рассчитаны периоды и мультипликаторы возникающих циклов, установлена их принадлежность однопараметрическому семейству. Изучена динамика системы при нарушении условий косимметрии, для этого применяется аппарат теории косимметрии В.И. Юдовича, включающий вычисление и анализ косимметрических дефектов и селективных функций.

Автор выражает благодарность В.Г. Цибулину за внимание к работе.

[1] В.И. Юдович, *Бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию*, Докл. РАН, 398(1), 57–61, 2004.

[2] А. Алмасри, В.Г. Цибулин, *Анализ динамической системы жертва-хищник-суперхищник: семейство равновесий и его разрушение*, Компьютерные исследования и моделирование, 15 (2023), 1603–1617.

Предельное распределение момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня, принадлежащего области малых уклонений

Анохина Мария
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
`anokhina.mary1@gmail.com`

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в.) с $\mathbf{E}X_1 = 0$. Для этого блуждания хорошо известен закон арксинуса (см. [1]):

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x\right) \to \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \quad n \to \infty, \quad x \in [0,1],$$

где τ_M — момент первого достижения максимума блужданием S_n. Нас интересуют такие же результаты, но для

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x \,\middle|\, M_n = k\right), \quad x \in [0,1],$$

где $M_n = S_{\tau_M}$. В работе [2] автором был получен результат, касающийся области умеренных уклонений. В данном докладе будет получено асимптотическое поведение данной вероятности для арифметического случайного блуждания в случае $k \sim n^\alpha$, $n \to \infty$, при $0 < \alpha < 1/2$ для случая конечной дисперсии, а также будет получена локальная предельная теорема.

[1] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, М., Мир, 1 (1984), 80–103.

[2] М. А. Анохина, *Предельная теорема для момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня, лежащего в зоне умеренно больших уклонений*, Матем. заметки, 115(4), 502-520, 2024.

Задача Сильвестра–Радона

Барышева Ксения
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
`baryshevaxenia@gmail.com`

Задача Сильвестра–Радона

Задача Сильвестра состоит в нахождении вероятности того, что $d+2$ случайные точки в $\mathbb{R}^d$ находятся в выпуклом положении. В докладе мы обсудим ее следующее обобщение. Теорема Радона утверждает, что если $d+2$ точки в $\mathbb{R}^d$ находятся в общем положении, то их можно единственным образом разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются. Если точки случайные, то естественно поинтересоваться, какова вероятность того, что в меньшей группе находится k точек. Данный вопрос сводится к задаче Сильвестра при $k = 1$.

Об инвариантной граничной задаче для волнового уравнения в цилиндре над шаром

Беляева Юлия
Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва,
Институт прикладной математики и механики, г. Донецк
yilia-b@yandex.ru,belyaeva-yuo@rudn.ru

Рассматривается волновое уравнение в цилиндре над единичным шаром с начальными условиями и граничным условием на сфере. Граничное условие имеет вид суммы сверток неизвестной функции и ее нормальной производной с заданными на сфере функциями. Такая задача относится к классу инвариантных задач, которые ранее изучались в монографии [1]. Исследована разрешимость описанной выше смешанной задачи. При определенных условиях на коэффициенты Фурье функций из граничного условия, доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи.

[1] В.П. Бурский, *Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений*, Киев, Наук. думка, 315, 2002.

Геометрические характеристики выпуклых оболочек плоских случайных процессов

Болотин Артём
Московский физико-технический институт, г. Москва
bolotin2003@yandex.ru

Пусть $K_1, K_2, ...K_s$ - выпуклые тела в $\mathbb{R}^d$. Минковский доказал, что d-мерный объём $\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_1 + ... + \lambda_s K_s)$ при $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \geq 0$ является однородным многочленом степени d:

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_1 + ... + \lambda_s K_s) = \sum_{i_1=1}^{s} ... \sum_{i_d=1}^{s} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_s} \widetilde{V}_d(K_{i_1}, ..., K_{i_d}),$$

где функции $\widetilde{V}_d(K_{i_1}, ..., K_{i_d})$ считаются симметричными и называются смешанным объёмом $K_{i_1}, ..., K_{i_d}$.

Рассматриваются выпуклые оболочки плоских случайных процессов (броуновское движение, броуновский мост, случайные блуждания) и при некоторых дополнительных предположениях вычисляются их смешанный объём, площадь и длина границы.

Предельные теоремы для пфаффианных процессов

Боровиков Михаил
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
misha.borovikov@gmail.com

Пфаффианные процессы естественным образом возникают в различных задачах из разных областей математики, к примеру, они описывают плотность собственных значений кругового симплектического ансамбля, а так же плотность комплексных и вещественных корней ряда, коэффициентами которого являются независимые гауссовские величины. В докладе предлагается обсудить предельные теоремы для пфаффианных процессов.

Выбор признаков на основе теории информации

Ван Шаньвэнь
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
shanven.van@math.msu.ru

В докладе представлена единая структура для определенных статистик для отбора признаков на основе теории информации. В частности, в основном рассматриваются две обобщенные оценки условной взаимной информации: условная информация о взаимодействии и взвешенное короткое расширение условной взаимной информации. При различных предположениях даны их предельные распределения: нормальное распределение или взвешенное распределение хи-квадрат с определенными степенями свободы. Оказывается, что в рамках нашей структуры охватываются многие статистики в теории информации для отбора признаков.

[1] J. Mielniczuk, P. Teisseyre, *Stopping rules for mutual information-based feature selection*, Neurocomputing, 358 (2019), 255-274.

[2] J. Mielniczuk, *Information Theoretic Methods for Variable Selection — A Review*, Entropy. 24(8), 2022.

Электрический алгоритм классификации и его состоятельность

Васильев Иван
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
vanya71161@gmail.com

В докладе рассматривается модель бинарной классификации, основанная на электрической теории цепей Маркова и введенная в работе [1]. Как и всегда, у нас есть какое-то множество точек X мощности r, которым присвоены некоторые метки, для определенности, нули и единицы. Также есть другое множество Y, называемое тестовым, мощности t, для элементов которого мы эти метки хотим предсказать. Иначе говоря, хотим каждому элементу y_i этого тестового множества присвоить значение p_i из отрезка $[0, 1]$, соответствующее вероятности отнесения его к классу с меткой 1.

Для решения этой задачи предлагается объединить точки обоих множеств в один граф, например, на основе метода k-ближайших соседей, и запустить по нему из каждой тестовой точки y_i случайное блуждание, которое рано или поздно придет в точку 0 или 1. Тогда вероятность того, что блуждание поглотится в точке с меткой 1, и будет нашей искомой вероятностью p_i.

Отметим несколько полезных свойств данного классификатора: во-первых, достаточно просто понять, как бинарная классификация обобщается на многоклассовую, во-вторых, в обучающую выборку помимо размеченных данных можно также добавлять и неразмеченные — они просто будут задавать дополнительную геометрию точек, а при подсчете финальных вероятностей мы будем их игнорировать.

Основным результатом работы является доказательство состоятельности данного классификатора для линейно разделимых данных. Иначе говоря, показано, что при устремлении мощности тренировочного множества к бесконечности, вероятность верной классификации устремится к единице, при условии, что данные возможно линейно разделить. Кроме того, будет приведена асимптотическая оценка вероятности неверной классификации.

[1] Mrinmaya Sachan, Dirk Hovy, Eduard Hovy, *A Solving Electrical Networks to incorporate Supervision in Random Walks*, Proceedings of the 22nd international conference on World Wide Web companion, 2013.

Среднеквадратичный риск FDR-метода в задаче выявления значимых элементов разреженного массива слабо зависимых данных

Воронцов Михаил
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
m.vtsov@mail.ru

В докладе рассматривается модель данных

$$x_i = \mu_i + z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где μ — неизвестный вектор истинных данных, являющийся разреженным (μ_i равно или близко к нулю для большинства индексов i), а z — вектор шума с $z_i \sim N(0, \sigma^2)$. В данной модели возникает задача выявления значимых элементов массива, заключающаяся в построении оценки $\hat{\mu}(x)$ вектора μ, у которой большинство компонент равны нулю. Данная задача эквивалентна задаче множественной проверки гипотез.

В работе [1] для решения задачи множественной проверки гипотез был предложен метод (алгоритм Бенжамини-Хохберга), основанный на идее контроля ожидаемой доли ложных отклонений (false discovery rate, FDR) гипотез. В работе [2], в предположении разреженности вектора данных и независимости его компонент, для данного метода было проведено исследование асимптотики среднеквадратичного риска. В то же время в ряде приложений вектор данных может иметь зависимые компоненты.

В настоящем докладе приводятся асимптотические результаты для среднеквадратичного риска и оценки среднеквадратичного риска FDR-метода в случае, когда вектор μ принадлежит одному из классов разреженности L_0 или L_p, а вектор z имеет слабо зависимые компоненты.

[1] Y. Benjamini, Y. Hochberg, *Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing*, Journal Of The Royal Statistical Society Series, 57(1), 289-300, 1995.

[2] F. Abramovich, Y. Benjamini, D. Donoho, I. Johnstone, *Adapting to Unknown Sparsity by controlling the False Discovery Rate*, The Annals of Statistics, 34(2), 584-653, 2006.

О группах, порождённых инволюциями таблиц Юнга

Германсков Михаил
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург
mgermanskov@gmail.com

Пусть дана диаграмма Юнга λ. Можно рассмотреть множество стандартных таблиц Юнга формы λ, то есть монотонных по строкам и столбцам заполнений клеток диаграммы последовательными натуральными числами. На множестве таблиц заводятся элементарные инволюции: инволюция с номером i меняет местами i и $i+1$ во всех таблицах, в которых после такой замены сохраняется монотонность по строкам и столбцам. Итак, каждой диаграмме Юнга λ сопоставляется группу G_λ, порождённую всеми такими элементарными операциями. Я расскажу о некоторых свойствах таких групп в случае, когда у диаграммы λ не более трех строк.

Сходимость аддитивных функционалов в детерминантном точечном процессе с ядром Куммера

Горбунов Сергей
Московский физико-технический институт, г. Москва
gorbunov.sm@phystech.edu

Скейлинговые пределы матричных ансамблей с устремлением размеров матриц к бесконечности — одна из естественных конструкций для получения точечных процессов с бесконечным числом частиц. Однако точечные процессы можно получать и из мер на полубесконечных эрмитовах матрицах. В случае конечных матриц переход к мере на собственных числах означает разложение меры в эргодические компоненты. Бородин, Ольшанский и Вершик использовали эту интерпретацию для полубесконечных матриц и показали, что эргодические меры относительно сопряжения конечными унитарными матрицами в этом случае также параметризуются наборами действительных чисел, но уже счётным их числом. А разложение мер Хуа-Пикрелла — проективного предела некоторых конечномерных матричных ансамблей — в эргодические компоненты в смысле Теоремы Шоке даёт меру на счётных подмножествах действительной оси, оказывающуюся детерминантной. Ядро даного процесса связано с гипергеометрическими функциями. В докладе пойдёт речь об аддитивных функционалах данного процесса — суммах значений некоторой функции в точках случайного подмножества. Будет рассмотрен предел их распределений при сжатии частиц. Также будет рассказано о связи этого процесса с Тёплицевыми определителями с сингулярными генераторами и об устройстве ядра этого процесса.

Об аппроксимации решения периодической одномерной квадратичной задачи вариационного исчисления в режиме онлайн с неизвестным внешним воздействием

Гуртовая Ольга
Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону

imedashvili@sfedu.ru

Рассматривается одномерная квадратичная вариационная задача с периодическими граничными условиями и неизвестным внешним воздействием. Задача решается последовательно: игрок выбирает траекторию, после чего получает информацию о внешнем воздействии. Цель состоит в минимизации квадратичного функционала в смысле статического или динамического сожаления по отношению к некоторой последовательности сравнения. Решение аппроксимируется отрезками ряда Фурье. На основе оценок ошибки аппроксимации, а также констант Липшица и гладкости аппроксимирующей функции показано, что задача оценки сожаления сводится к стандартной конечномерной ситуации. Проведены численные эксперименты для некоторых алгоритмов минимизации статического и динамического сожалений.

Модель накопления частиц в нуле при блуждании по целочисленным точкам полупрямой

Гусаров Александр
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
naik67.67@gmail.com

Рассматривается случайное блуждание по целочисленным точкам неотрицательной полупрямой. Время предполагается дискретным. В начальный момент времени распределение частиц задаётся следующим образом: в каждой точке, независимо от других точек, находится одна частица с вероятностью $0 < p \leq 1$ или отсутствует с вероятностью $q = 1 - p$. Затем каждая из частиц, независимо от эволюций других частиц, в каждый момент времени совершает скачок влево с вероятностью $0 \leq p_- \leq 1$ или вправо с вероятностью $p_+ = 1 - p_-$. Достигнув нуля, частица не может продолжить блуждание, и происходит процесс накопления частиц в нуле. Изучено асимптотическое поведение математического ожидания численности частиц в нуле. Доказана предельная теорема для численности частиц в нуле для случая $p_- \geq p_+$. Также найдено среднее время достижения частицей нуля в случае $p_- > p_+$.

Теоретико-групповой анализ уравнения типа Ван-дер-Поля

Дегтярев Дмитрий
Адыгейский Государственный Университет, г. Майкоп
degtyarev.diamat@gmail.com

Получен вид точечных групп преобразований для обобщённого уравнения типа Ван дер Поля. Получены условия существования нетривиальной группы, а также достаточные условия интегрируемости уравнения с помощью группового метода.

Как оценить случайность линейного классификатора?

Жиянов Антон
Высшая школа экономики, г. Москва
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

zhiyanovap@gmail.com

Классификаторы широко используются в биомедицинских приложениях для выявления закономерностей, позволяющих отличать различные группы образцов между собой (например, рак и норму) [1-3]. Построение классификатора можно разделить на два основных этапа: выбор метода классификации и метрики, определяющей качество классификатора [4]. Существует множество методов классификации и метрик, удовлетворяющих тем или иным естественным условиям [5], однако линейные классификаторы и метрика «accuracy» (доля правильно предсказанных классов) считаются самыми интерпретируемыми и простыми.

Обычно качество классификатора измеряется на тестовой выборке. Однако, даже при низком качестве классификации, важно ответить на следующий вопрос: действительно ли классы, которые мы пытаемся разделить, различаются между собой?

Формально, пусть $Y = (Y_i, i \leq k)$, $Z = (Z_i, i \leq l)$ – две независимые выборки в $\mathbb{R}^d$, взятых из распределений $\mathcal{F}_Y$ и $\mathcal{F}_Z$ соответственно. Предположим, что множества $\{Y_i, i \leq k\}$ и $\{Z_i, i \leq l\}$ почти линейно разделимы. В этом случае естественно считать, что $\mathcal{F}_Y \neq \mathcal{F}_Z$. Однако, какова вероятность события AU_m, что две выборки почти линейно разделимы с не более чем m ошибками, если их распределения предполагаются равными?

Ранее полная линейная разделимость (AU_0) нормы и рака по данным экспрессии генов изучалась в работе [6]. Авторы разработали алгоритм, проверяющий это свойство для любых пар генов в среднем за константное время. Также они показали, что количество линейно разделимых пар значительно превышает ожидаемое.

В теоретической части работы мы устанавливаем более строгие верхние оценки условной $CPAU_m\ (Y,Z) = SU$ и безусловной $PPAU_m$ вероятностей почти линейной разделимости. На их основе мы строим несколько статистических тестов, которые применяем к классификатору, обнаруживающему рецидив рака молочной железы у пациентов с ER-положительным статусом [7]. В результате мы подтверждаем роль пары генов IGFBP6 и ELOVL5 в дифференциации рецидива.

[1] Joseph A. Cruz and David S. Wishart, *Applications of machine learning in cancer prediction and prognosis*, Cancer Informatics, 2 (2006).

[2] Konstantina Kourou and etc., *Machine learning applications in cancer prognosis and prediction*, Computational and Structural Biotechnology Journal, 13 (2015).

[3] Le Kang and etc., *Linear combination methods to improve diagnostic/prognostic accuracy on future observations*, Statistical Methods in Medical Research, 25 (2016).

[4] Kevin P Murphy, *Machine learning: a probabilistic perspective*, The MIT Press, 2012.

[5] Martijn Gösgens and etc., *Good Classification Measures and How to Find Them*, Advances in Neural Information Processing Systems, 21, 17136-17147, 2021.

[6] Giora Unger and Benny Chor, *Linear separability of gene expression data sets*, IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics, 7 (2010).

[7] V. V. Galatenko and etc, *Highly informative marker sets consisting of genes with low individual degree of differential expression*, Scientific Reports, 5 (2015).

Эффекты случайной поглощающей среды в симметричных ветвящихся случайных блужданиях по одномерной решетке

Ивлев Олег
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
olivlegerr@gmail.com

Как правило, ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) рассматривают в однородной ветвящейся случайной среде, см., напр., [1]. Цель работы — изучение простого симметричного ВСБ по одномерной решетке в неоднородной случайной поглощающей среде с непрерывным временем. Представленные результаты будут обобщать теоремы из [2] в двух направлениях. Проведена оценка сверху для вероятности возникновения экспоненциального роста среднего числа частиц для случайной среды, имеющей единственный центр размножения частиц, расположенный в нуле, и четыре источника гибели частиц, симметрично расположенных относительно нуля, где интенсивность поглощения частиц задается разнораспределенными случайными величинами. Подобный результат получен и для случайной среды, имеющей $2n$ источников гибели частиц, симметрично расположенных относительно нуля, но в которых поглощение частиц задается одинаково распределенными случайными величинами.

[1] S. Molchanov, *Lectures on random media Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, Springer, Berlin, 1581 (1994), 242–411.

[2] V. Kutsenko, S. Molchanov, E. Yarovaya, *Branching Random Walks in a Random Killing Environment with a Single Reproduction Source*, Mathematics, 12 (2024), 550. https://doi.org/10.3390/math12040550

Уточнение асимптотики среднего времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки

Иевлев Роман
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
roman.ievlev@math.msu.ru

В работе исследуется модель симметричного, однородного, неприводимого случайного блуждания с конечной дисперсией скачков на решетке $\mathbf{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Время предполагается непрерывным. Особое внимание уделяется изучению случайной величины ξ_t, которая описывает время пребывания блуждания в нуле до момента времени t. Основной целью исследования является уточнение асимптотических разложений для ряда вероятностных характеристик, связанных с ξ_t, таких как переходные вероятности и среднее время пребывания в нуле. Для этого были установлены необходимые условия, при которых возможно уточнить разложение указанных функций. В ходе работы удалось получить явные формы этих разложений. Полученные результаты могут быть применимы в анализе аналогичных моделей, а также получении скоростей сходимости в предельных теоремах, связанных с подобными процессами.

Об асимптотике вероятностей невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде с замораживаниями

Коршунов Иван
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
IDKorshunov@mail.ru

Известно, что ветвящийся процесс в случайной среде хорошо описывается соответствующим случайным блужданием

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k — производящая функция числа потомков и случайная среда. В докладе будет рассмотрен вопрос вырождения ветвящегося процесса в случайной среде с заморозками при $\mathsf{E}\xi_1 = 0$, отличающегося от обычного ВПСС тем, что каждая среда устанавливается на несколько поколений. Оказывается, что данный вопрос так же тесно связан со случайным блужданием

$$S_n = \tau_1\xi_1 + \ldots + \tau_n\xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k — производящая функция числа потомков и случайная среда, а τ_k — длительность k-й заморозки.

В докладе будет показано, что, если число потомков любой частицы имеет геометрическое распределение, а также при определенных условиях на моменты ξ и на замораживания $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ вероятность выживания всего процесса удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\mathsf{P}\left(Z_{s_n} > 0\right) \sim \frac{c}{\sqrt{\tau_1^2 + \ldots + \tau_n^2}},\ n \to \infty$$

для некоторой положительной константы c, где $s_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$.

Мультистабильные решения задачи фильтрационной конвекции в круговой области

Коханов Павел
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
kohanov@sfedu.ru

Нетривиальное ответвление множественных стационарных режимов обнаружено для плоской задачи фильтрационной конвекции Дарси в случае слоя, прямоугольника и кольцевых областей. Для односвязной области В.И. Юдовичем [1] на основе теории косимметрии было доказано существование однопараметрического семейства решений и двукратность критических чисел Рэлея для состояния механического равновесия. Это свойство системы уравнений должны воспроизводить соответствующие численные аппроксимации [2]. В настоящей работе рассматривается возникновение конвекции в круговой области, заполненной пористой средой, насыщенной несжимаемой жидкостью и подогреваемой снизу. Для определения критических значений чисел Рэлея получены формулы на основе нулей бесселевых функций. Разработан метод конечных разностей для системы уравнений в полярных координатах относительно функции тока и температуры с учетом полюса [3]. Численная схема позволила рассчитывать двукратные собственные значения соответствующей спектральной задачи и вычислять ответвляющиеся конвективные режимы.

Работа выполнена в Южном федеральном университете, г. Ростов-на-Дону.

[1] В.И. Юдович, Косимметрия, *Вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции*, Мат. заметки, 49(5), 142-148, 1995.

[2] B. Karasözen, A.V. Trofimova, V.G. Tsybulin, *Natural convection in porous annular domains: Mimetic scheme and family of steady states*, Journal of Computational Physics, 231(7), 2995-3005, 2012.

[3] П.В. Коханов, В.Г. Цибулин, *Численная схема в полярных координатах для анализа конвекции в пористой среде*, ЭВ НЦ ЧЭС, 20(4), 37-44, 2023.

Фазовые переходы в надкритическом ветвящемся случайном блуждании при различных конфигурациях источников ветвления

Кротов Михаил
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
`mikhail.krotov@math.msu.ru`

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по решетке $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 1)$. Время t предполагается непрерывным. При $t = 0$ на $\mathbb{Z}^d$ имеется одна частица. Исследуется случай, в котором наблюдается экспоненциальный рост численностей частиц в каждой точке решетки. Из [1] вытекают предельные теоремы о сходимости нормированных численностей частиц почти наверное при изучаемых конфигурациях. Фазовые переходы в надкритическом ВСБ определяются структурой дискретного положительного спектра эволюционного оператора численностей частиц, см. [2]. Изучаются условия существования положительных изолированных собственных значений и их кратность в зависимости от конкретной конфигурации источников ветвления и их интенсивностей. Данные условия могут быть выписаны в явном виде для ряда конкретных конфигураций источников ветвления. Полученные эффекты при различных конфигурациях источников ветвления проиллюстрированы с помощью компьютерного моделирования.

[1] Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен., 68(4), 779–795, 2023.

[2] Е. Б. Яровая, *Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания*, Теория вероятн. и ее примен., 62(3), 518–541, 2017.

Асимптотики максимальных взвешенных пересечений случайных множеств Ципфа

Лялинов Иван
Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, г. Санкт-Петербург
`lyalinov239@yandex.ru`

В докладе будет рассказан интересный для приложений вопрос о размере максимального пересечения случайного множества Ципфа с элементами большого набора независимых множеств того же типа, но, возможно, с другими параметрами. Также будет сформулирована предельная теорема для асимптотического поведения максимума взвешенной релевантности пересечения множеств Ципфа для случая степенных и экспотенциальных весов. Будет показано, что максимальная взвешенная релевантность подчиняется той же предельной теореме, что и релевантность, определённая наиболее редкими элементами пересечений.

Докритические ветвящиеся процессы с долгим временем жизни и дважды стохастической пуассоновской иммиграцией

Малиновский Георгий
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
georgy.malinovsky@math.msu.ru

Изучаются докритические ветвящиеся процессы с иммиграцией. Ранее такие процессы рассматривались в предположении конечного среднего времени жизни частиц, тогда они имеют стационарное предельное распределение. Рассматривается случай, когда распределения времен жизни частиц имеют степенные хвосты и бесконечные средние. При этом оказывается, что число частиц растет и можно получить аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Кроме того, входной поток предполагается дважды стохастическим, а именно, его интенсивность описывается неотрицательным стационарным случайным процессом, при некоторых ограничениях на корреляционную функцию. Такие потоки ранее рассматривались в теории массового обслуживания, но для ветвящихся процессов это делается впервые.

Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме

Мишулович Арсений
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
st062829@student.spbu.ru

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{A}_\varepsilon$ с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами: $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\nabla + \varepsilon^{-2}p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$. Известно, что спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет зонную структуру: он является объединением замкнутых отрезков (спектральных зон). Зоны могут перекрываться. Между зонами могут открываться лакуны. Согласно гипотезе Бете–Зоммерфельда, в многомерном случае число лакун конечно. Получена аппроксимация резольвенты в регулярной точке оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$, близкой к краю внутренней спектральной лакуны, по «энергетической» норме с погрешностью порядка $O(\varepsilon)$. В случае когда $p \equiv 0$, «энергетическая» норма — это операторная норма из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$, случай $p \not\equiv 0$ будет обсуждаться на докладе.

Об одном комбинаторном классе случайных блужданий

Мишура Петр
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
mishurapetr@gmail.com

Для произвольной последовательности s_i длины n наибольшей выпуклой минорантой называется наибольшая выпуклая последовательность h_i, такая, что $h_i \leq s_i$. В точках,

где достигаются равенства, находятся ее вершины, а между ними – ребра. Для стандартного случайного блуждания с независимыми одинаково распределенными шагами длины ребер выпуклой миноранты распределены как циклы равновероятно выбранной перестановки длины n.

Мы рассмотрим другую меру на случайных перестановках, в которой циклический тип будет непосредственно задаваться параметром θ. С помощью обобщенного преобразования Верваата по ней мы получим новое случайное блуждание и рассмотрим соответствующий ему предельный случайный процесс.

О свойствах максимума случайного процесса назначений

Москаленко Тимофей
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
teamofey1982@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию максимума процесса назначений для прямоугольных матриц. Найдена асимптотика математических ожиданий максимума, получены соответствующий закон больших чисел и некоторые экспоненциальные оценки вероятностей больших уклонений.

Иерархия Пальма для детерминантных точечных процессов

Новгородов Егор
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
egor_neo@mail.ru

В докладе будут рассмотрена иерархия Пальма для детерминантных точечных процессов.

Анализ модели переноса плазмы в винтовом магнитном поле

Оксогоева Ирина
Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва
oksogi@mail.ru

В докладе представлены результаты анализа математической модели переноса плазмы в спиральной открытой магнитной ловушке СМОЛА, созданной в ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН [1]. Удержание плазмы в установке осуществляется за счёт передачи импульса от магнитного поля с винтовой симметрией вращающейся плазме. Математическая модель основана на стационарном уравнении переноса плазмы [2]. В модель введен учет функционального вида коэффициентов модели, заданных в диапазоне, соответствующем физике процесса удержания. Приведены зависимости параметров модели от координат, при которой наблюдается качественное соответствие расчета экспериментальным данным. Математическая модель разработана для предсказания параметров удержания плазмы в проектируемых установках со спиральным магнитным полем.

[1] A. V. Sudnikov, A. D. Beklemishev, V. V.Postupaev, A. V. Burdakov, I. A. Ivanov, N. G. Vasilyeva,K. N. Kuklin, E. N. Sidorov, *SMOLA device for helical mirror concept*

exploration , Fusion Eng. Des., 122 (2017), 86-93.

[2] A.D. Beklemishev *Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation*, AIP Conf. Proc., 1771 (2016), 040006.

Меры Шура и процесс Шура

Пинчук Никита
Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
nikitapinchuk@mail.ru

удут рассмотрены меры Шура на двумерных диаграммах Юнга и процесс Шура на трёхмерных диаграммах Юнга. Исследование включает анализ асимптотического поведения мер Шура, их связь с детерминантным точечным процессом и симметричными многочленами Шура. Процесс Шура изучен с точки зрения динамики разбиений с использованием цепей Маркова.

Статистическое оценивание энтропии переноса

Пономарь Анастасия
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
anastasia.ponomar@math.msu.ru

Энтропия переноса, которую ввел T.Schreiber (2000), предоставляет возможность измерять объем направленной информации между случайными процессами. Известно, например, что для гауссовских процессов использование этой величины, в определенном смысле, эквивалентно применению подхода, развитого в ряде работ C.W.J.Granger. Энтропия переноса и ее статистические оценки представляют не только теоретический интерес, но и широко применяются во многих областях. Достаточно упомянуть неврологию, кардиологию, биохимию и финансы. В докладе рассматриваются некоторые асимптотические результаты, относящиеся к статистическому оцениванию энтропии переноса и условной взаимной информации. Кроме того, обсуждаются иллюстрирующие примеры.

Метод двойного бутстрапа для оценки индекса экстремальных значений с использованием экспектилий

Прокопенко Евгений
Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
evgenii.prokopenko@gmail.com

Пусть $\overline{F}(x) = L(x)x^{-\frac{1}{\gamma}}$ — хвост распределения F, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция, а константа $\gamma > 0$ называется индексом экстремальных значений (EVI). Индекс EVI позволяет понять скорость убывания хвоста распределения, а также оценить вероятность превышения определённого значения. Например, в теории страхования параметр γ определяет убытки инвестиционного портфеля, а в задачах на сетевых графах описывает динамику крупномасштабных кластеров.

Наиболее известный подход к оценке EVI включает группу оценок, использующих свойства порядковых статистик. Самая популярная из них — оценка Хилла (Hill, 1975):

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} \log \left(\frac{X_{(n-i+1)}}{X_{(n-k(n))}} \right),$$

где $X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}$ — порядковые статистики из распределения F. Однако распространённой проблемой этих методов является их зависимость от числа максимальных элементов выборки $k(n)$. Для нахождения оптимального числа $k(n)$ был предложен метод двойного бутстрапа (Draisma и др., 1999).

Другие методы оценки индекса используют экспектильные оценки (Daouia и др., 2021). Экспектилии, в отличие от квантилей, позволяют оценивать не только частоту экстремальных событий, но и их величину.

В данном докладе обсуждаются ключевые идеи оценки индекса экстремальных значений, концепция экспектилий и построение метода двойного бутстрапа для нахождения оптимального уровня оценки EVI на основе экспектилий. Теория подкрепляется численными сравнениями различных методов оценки индекса экстремальности на синтетических данных. Работа выполнена совместно с А.Е. Лукьяновым.

Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при наличии младших членов

Сафронов Игорь
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
st085672@student.spbu.ru

Работа относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов. В R^d рассматривается матричный эллиптический оператор четвёртого порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме; оператор содержит члены второго порядка и положительно определённый потенциал. Показано, что в пределе малого периода обратный оператор сходится по операторной норме в L_2 к обратному от эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический оператор четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Получена оценка погрешности точного порядка.

Асимптотика вероятности невырождения критического двуполого ветвящегося процесса в случайной среде

Сенько Павел
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
psenko2901@outlook.com

Представим себе следующий процесс ветвления. Пусть изначально есть одна пара частиц разных полов. На первом шаге эта пара дает случайное количество потомков — случайное количество частиц обоих полов. Полученные частицы образуют новые пары, количество которых описывается согласно заранее зафиксированной функции — функции паросочетаний. На втором шаге этого процесса каждая образованная пара дает случайное количество новых частиц, независимо от других пар и от предыстории процесса. После этого все новые частицы образуют пары, согласно зафиксированной функции паросочетаний. На третьем шаге каждая пара снова порождает новые частицы и образуются новые пары и так далее.

Добавим в модель случайную среду — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин. Будем считать, что теперь размножение и образование пар зависит еще и от этой среды. А именно, разыграем случайную среду $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$. Рассмотрим теперь произвольный шаг $k \geq 1$ нашего процесса и пары частиц, образованных на прошлом шаге. Зафиксируем элемент η_k среды $\boldsymbol{\eta}$. Тогда каждая пара дает случайное количество потомков обоих полов в соответствии с производящей функцией, зависящей от η_k. После этого все новые потомки образуют новые пары согласно функции паросочетаний, которая также зависит от η_k. На следующем шаге фиксируется элемент η_{k+1} и процесс продолжается аналогичным образом.

Рассмотренный процесс — физическая интерпретация двуполого ветвящегося процесса в случайной среде (ДВПСС), введенного впервые S. Ma в работе [1], где исследовались условия невырождения процесса и сходимость нормированного процесса в случае невырождения.

Оказывается, что предельная теорема об асимптотике невырождения критического ДВПСС при широком классе функций паросочетаний, рассмотренном впервые в работе [2] Шкляева А.В., имеет близкий вид к классической теореме для критических ветвящихся процессов в случайной среде, формулировку которой можно найти, например, в статье [3].

[1] S. Ma, *Bisexual Galton –Watson branching processes in random environments* , Acta Math. Appl. Sin, Engl. Ser., 22 (2006), 419–428.

[2] А. В. Шкляев, *Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде*, Дискретная математика, Дискрет. матем., 35:3 (2023), 125–142

[3] G. Kersting, V. Vatutin, *Discrete time branching processes in random environment.* , John Wiley & Sons, 2017.

Совершенные детерминантные меры: формализм Ольшанского

Соколов Игорь
Московский физико-технический институт, г. Москва
sokolov.igor506@yandex.ru

Детерминантный точечный процесс есть борелевская вероятностная мера на пространстве конфигураций рассматриваемого фазового пространства, которая характеризуются набором корреляционных функций, задающихся как детерминант корреляционного ядра. Один и тот же процесс может задаваться разными ядрами. Григорий Ольшанский [1] сопоставляет рассматриваемым вероятностным мерам представление алгебр специального вида. Начиная с дискретного случая, он строит представление алгебры $C(\Omega) \rtimes \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ – группа конечных перестановок фазового пространства Ω), которое ставит в соответствие борелевской мере, инвариантной относительно действия группы $\mathcal{S}$. При переходе к непрерывному случаю строится сюръективный гомоморфизм между указанной выше алгеброй и алгеброй антикоммутационных соотношений $\mathfrak{A}^0$ (CAR).

Представление последней оказывается весьма удобным для изучения мер специального типа, называемых «совершенными» (perfect).

[1] G. Olshanski, *Determinantal point processes and fermion quasifree states*, arXiv: 2002.10723v2.

[2] A. Bufetov, *Quasi-Symmetries of Determinantal Point Processes*, arXiv:1409.2068.

Предельные теоремы для вероятностной модели биржевого стакана

Тарасенко Александр
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
a.tarasenko2@g.nsu.ru

Биржевой стакан – это таблица заявок на покупку/продажу некоторого актива, в которой отображены объемы заявок и соответствующие им цены. Рассматривается модель, где цены заявок выбираются из фиксированного конечного множества, а размещения и отмены заявок и сделки по заявкам с наилучшей ценой происходят согласно независимым процессам Пуассона. В работах предшественников рассматривался случай, когда сделки совершаются только для одной заявки. В случае, когда сделка может происходить по нескольким заявкам одновременно, приведены достаточные условия эргодичности системы. Для среднего арифметического между наилучшими ценами на покупку и продажу приводятся оценка вероятности при следующем изменении пойти вверх/вниз.

Предельная теорема для процесса поступления решений в онлайн-олимпиаде

Терехов Иван
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
terivan14@gmail.com

Доклад посвящен математическому решению проблемы выдачи вариантов во время проведения онлайн-олимпиады. Представим себе соревнование, в котором есть несколько вариантов заданий (предположительно равных по сложности), пользователи подключаются к участию в случайные моменты из некоторого промежутка, получают задачи и спустя некоторое время сдают решения. Основная задача – по ходу проведения олимпиады проверять однородность различных вариантов и остановить выдачу части вариантов заданий, если они значимо сложнее или проще остальных. Отсюда возникает задача о проверке однородности вариантов заданий. При этом желательно построить последовательный критерий, чтобы контролировать однородность вариантов заданий прямо во время проведения олимпиады, а для построения последовательного критерия требуется изучить поведение поступающих данных, рассматривая их как случайный процесс. Настоящая работа посвящена изучению такого процесса и доказательству предельной теоремы для него.

Предположим, что мы хотим проверить справедливость одного конкретного задания, у этого задания есть m вариантов. Считаем, что варианты раздаются независимо и равновероятно для каждого участника, каждый человек решает только один вариант, поэтому будем считать, что общее число людей, решающих каждый возможный вариант не зависит от варианта и равно N.

Пусть S_i^j – время, когда i-й человек из j-го варианта начал решать задание, T_i^j – время, которое этот человек затратил на решение. Считаем для всех i, j, что S_i^j – независимые одинаково распределенные случайные величины, T_i^j – независимые и при фиксированном j одинаково распределенные случайные величины. Тогда естественно предположить, что у отличающихся по сложности вариантов будет разное распределение времени их решения, в частности, может отличаться среднее время решения, а значит, вопрос о равной сложности вариантов сводится к проверке однородности выборок времен решения задания, введенных выше.

Введем процессы, которые исследуются в настоящей работе. Пусть

$$\xi_i^j(t) = I\{S_i^j + T_i^j \le t\}$$

– индикатор того, что участник закончил решение задания на момент времени t,

$$\eta_i^j(t) = (T_i^j + S_i^j) \cdot I\{S_i^j + T_i^j \le t\} + t \cdot I\{S_i^j + T_i^j > t\} = \omega_i^j(t) + t(1 - \xi_i^j(t))$$

– время, которое этот участник затратил на решение на момент времени t. Тогда количество участников, закончивших решение j-го варианта задания на момент времени t будет равно

$$K_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^j(t),$$

а суммарное время затраченное участниками на решение задания j-ого варианта на момент времени t

$$A_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \eta_i^j(t).$$

Объединим все варианты в векторные случайные процессы:

$$\gamma_i(t) = (\xi_i^1(t), \eta_i^1(t), \ldots, \xi_i^m(t), \eta_i^m(t))^T,$$

$$\hat{X}_N(t) = (K_1(t), A_1(t), \ldots, K_m(t), A_m(t))^T = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(t),$$

$$X(t) = (\mathbf{E}\xi_i^1(t), \mathbf{E}\eta_i^1(t), \ldots, \mathbf{E}\xi_i^m(t), \mathbf{E}\eta_i^m(t))^T.$$

К величине $\hat{X}_N(t)$, введенной выше, применим функцию

$$h(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_1^m, x_2^m) = \sum_{j=1}^{m} x_1^j \ln\left(\frac{x_1^j}{x_1^1 + \cdots + x_1^m} \cdot \frac{x_2^1 + \cdots + x_2^m}{x_2^j}\right).$$

Для полученного таким образом случайного процесса $h(\hat{X}_N(t))$ в предположении однородности вариантов нами была доказана следующая сходимость по распределению в пространстве Скорохода $D[0, \infty)$ при $N \to \infty$

$$h(\hat{X}_N(t)) \xrightarrow{D} \frac{1}{2} Z(t)^T \operatorname{Hess}(h)(X(t)) Z(t),$$

где $Z(t)$ – некоторый векторный гауссовский случайный процесс, $\mathrm{Hess}(h)$ – матрица вторых производных для функции h, $X(t)$ – вектор математических ожиданий, введенный выше.

Данная теорема позволяет строить последовательные критерии для процесса $h(\hat{X}_N(t))$, используя распределение предельного процесса.

В докладе будет сформулирована теорема о сходимости случайных процессов, описанная выше, будут изложены идеи ее доказательства, представлен явный вид одномерных распределений предельного процесса, а также представлены примеры использования этих фактов на практике.

Задача рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами притяжения

Торопов Виктор
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
st076443@student.spbu.ru

В работе в рамках дифракционного подхода построена эффективная модель для изучения асимптотического решения задачи рассеяния $2 \to 2(3)$ трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами притяжения, поддерживающими связанные состояния. Асимптотичность решения определяется быстрым убыванием его невязки в уравнении Шредингера. Структура координатной асимптотики решения задачи рассеяния получена при исследовании асимптотики предельных значений ядра резольвенты оператора Шредингера на абсолютно непрерывном спектре. В свою очередь, асимптотика предельных значений ядра резольвенты строится с помощью альтернирующего метода Шварца, примененного к данной задаче.

Операторные оценки погрешности при усреднении оператора Дирака с периодическими коэффициентами

Фаддеева Нина
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
faddeevanina@gmail.com

Работа относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов. Рассматривается двумерный оператор Дирака с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами: сингулярным магнитным потенциалом, переменной массой и электрическим потенциалом. Исследуется поведение резольвенты этого оператора в пределе малого периода. Получена аппроксимация резольвенты по операторной норме в L_2 с оценкой погрешности точного порядка. Аппроксимация представляет собой резольвенту эффективного оператора с постоянными коэффициентами, окаймлённую быстро осциллирующими множителями.

Предельные теоремы для ветвящегося случайного блуждания с одним центром генерации частиц при возможном поглощении в каждой точке $\mathbb{Z}^d$

Филичкина Елена
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
elena.filichkina1999@yandex.ru

Рассматривается предельное поведение ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) по $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$, при больших временах следующего вида: в выделенной точке решетки частица может производить потомков, а в остальных точках помимо блуждания возможно поглощение частицы. Для такого процесса получена полная классификация асимптотического поведения всех целочисленных моментов численностей частиц. Оно оказывается различным в зависимости от существования в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, изолированного собственного значения, а также от знака этого собственного значения. Кроме того, применение техники, основанной на изучении операторных семейств, порожденных ВСБ (см., напр., [2]), позволяет получить некоторые дополнительные результаты о предельном поведении процесса.

[1] E. Filichkina, E. Yarovaya, *Branching Random Walks with One Particle Generation Center and Possible Absorption at Every Point*, Mathematics, 11(7), 1676, 2023.

[2] Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая,*Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен., 68(4), 779–795, 2023.

mm-энтропия негауссовских мер

Хамзин Виктор
Санкт-Петербургский государственный университет, ММИ им. Эйлера,
г. Санкт-Петербург
olimpiadnik74@mail.ru

mm-энтропией метрического пространства с мерой называется величина, показывающая, какое число шаров одинакового радиуса необходимо взять, чтобы покрыть множество нужной меры. Она была определена еще в классической работе К.Шеннона [2], но до недавнего времени практически не изучалась. А.М.Вершик и М.А.Лифшиц в [1] нашли значение mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой. Доклад будет посвящен результатам, полученным в негауссовском случае: мы рассмотрим конечномерные пространства с абсолютно непрерывной мерой, а также пространство траекторий процесса Пуассона.

[1] А. М. Вершик, М. А. Лифшиц, *О mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой*, Теория вероятн. и ее примен., 68(3), 532-543, 2023.

[2] К. Шеннон, *Математическая теория связи*, Работы по теории информации и кибернетике, М., Изд-во иностр.лит., 1963, 243-332.

Слабая сходимость к распределению Миттаг-Леффлера некоторых стохастических процессов

Чернышенко Екатерина
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
ekaterina.chernyshenko@math.msu.ru

Распределение Миттаг-Леффлера часто возникает в моделях с так называемыми тяжелыми хвостами распределения. Рассматриваются три модели стохастических процессов, в каждой из которых установлена сходимость к распределению Миттаг-Леффлера. Первая модель называется процессом китайского ресторана (см. [1]). Эта модель описывает случайные разбиения множества $\{1, 2, ..., n\}$ на подмножества, называемые блоками разбиений. В [1] рассматривается асимптотика числа этих блоков при стремлении n к бесконечности. Установлено, что число блоков разбиения сходится почти наверное к величине, распределенной в соответствии с законом распределения Миттаг-Леффлера. Мы покажем, как данная модель с дискретным временем сводится к модели с непрерывным временем - модели процесса Юла чистого рождения. При этом частицы, рождающиеся в популяции в соответсвии с процессом Юла, окрашиваются в цвета согласно следующим правилам: изначально в процессе существует одна частица, окрашенная в какой-то цвет; каждая следующая частица с определенной вероятностью окрашивается либо в цвет своего родителя, если она идентична ему, либо в новый цвет, которого еще не встречалось в популяции. В [2] установлено, что при стремлении t к бесконечности, число образовавшихся различных цветов сходится к величине, имеющей распределение Миттаг-Леффлера. Мы продемонстрируем как распределение Миттаг-Леффлера возникает при изучении предельного распределения времени пребывания симметричного однородного неприводимого случайного блуждания в точке одномерной решетки при условии, которое приводит к бесконечной дисперсии скачков случайного блуждания (см. [3]). Наконец, показано, что в каждой из предельных теорем рассматриваемые случайные величины нормируются на функции одного и того же типа.

[1] J. Pitman, *Exchangeable and partially exchangeable random partitions.*, Probab. Theory Retat. Fields, 102 (1995), 145-158.

[2] J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes.*, Lecture Notes in Math. 1875. Springer, Berlin, 2006.

[3] А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, *О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки.*, Теория вероятн. и ее примен., 66(4), 657–675, 2021.

Асимптотика связности случайных графов Эрдёша-Реньи и случайных двудольных графов через неоднородные блуждания

Чиняев Борис
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
bchinyaev.msu@gmail.com

В докладе исследуются случайные графы Эрдёша-Реньи $G(n, p)$ и случайные двудольные графы $G(n, m, p)$. Изучается асимптотика вероятности связности рассматриваемых графов при $n, m \to \infty$, $p(n) \to 0$. Для нахождения вероятности связности предлагается метод, основанный на анализе неоднородных случайных блужданий, позволяющий определить точную асимптотику для различных значений $p(n)$. Показывается, что вероятность связности графов в этих моделях находится из вероятности того, что некоторый случайный мост, построенный по неоднородному случайному блужданию, является экскурсией.

[1] V.E. Stepanov, *On the probability of connectedness of a random graph $G_m(t)$*, Theory of Probability Its Applications, 15(1), 55-67, 1970.

[2] R. Van Der Hofstad, *Random graphs and complex networks*, Cambridge university press, 54 (2024).

Численная аппроксимация вероятности разорения в модели Крамера-Лундберга

Шабалин Данила
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
danilshabalin2002@mail.ru

В докладе рассматривается классическая модель Крамера-Лундберга, описывающая динамику капитала страховщика во времени. Вероятность разорения является ключевым вопросом теории риска, однако её аналитическое выражение доступно лишь в отдельных частных случаях, что требует обращения к различным оценкам и асимптотикам.

В работе исследуются несколько численных подходов для вычисления вероятности разорения, в частности, методы, основанные на решении интегрального уравнения восстановления, которые сравниваются с наивным способом вычисления суммы ряда по формуле Полячека-Хинчина. Приведены оценки точности этих методов и продемонстрированы примеры, иллюстрирующие их практическое применение.

О нижних больших уклонениях для некоторых моделей ветвящихся процессов

Шкляев Александр
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва
ashklyaev@gmail.com

Представим себе последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, которую мы будем называть средой. При фиксации среды будем рассматривать последовательность независимых величин $X_{i,j} \sim F_{\eta_i}$, где $\{F_y\}$ – некоторое семейство функций распределения. Случайную последовательность, определяющуюся соотношениями $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ называют ветвящимся процессом в случайной среде.

Проблема верхних больших уклонений (то есть, неформально говоря, изучения асимптотики вероятностей событий $\{Z_n > x\}$, где x нетипично велико для Z_n) для ветвящихся процессов в случайной среде впервые была исследована М.В. Козловым в работе [1] в достаточно частном случае геометрического распределения числа потомков. Затем ряд исследователей (V. Bansaye, C. Boinghoff) обобщили эти результаты на более общие распределения, сумев, однако, исследовать лишь логарифмическую асимптотику. Наконец в 2018-2020 году ряд исследователей (Д. Бурашевский, П. Дишевский, А.В. Шкляев, Е.И. Прокопенко, М.А. Струлева) получили ряд точных результатов, описывающих асимптотику.

Проблема нижних больших уклонений (то есть событий $\{0 < Z_n < x\}$, где x нетипично мало для Z_n) изучена куда хуже. До недавнего времени наиболее общей здесь была работа [2], в которой исследовалась грубая (логарифмическая) асимптотика такого рода вероятностей. Кроме этого, исследуя точную асимптотику в явном виде К. Денисов открыл ряд любопытных феноменов в частном случае геометрического распределения величин X. В 2024 году автором была выпущена первая работа (см. [3]), исследовавшая нижние большие уклонения в достаточно общих предположениях. Доклад посвящен этому результату и его обобщениям на другие зоны уклонений и другие виды ветвящихся процессов.

[1] М. В. Козлов, *О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков*, Дискретная математика, 18(2), 29-47, 2006.

[2] V. Bansaye, C. Böinghoff, *Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 282 (2013), 15-34.

[3] А. В. Шкляев, *Нижние большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде*, Дискретная математика, 36(3), 127-140, 2024.

Применение метода Стейна к изучению модели случайного блуждания

Юшкова Ольга
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
olga.ushkova@math.msu.ru

Метод Стейна позволяет с помощью некоторой вероятностной метрики оценивать близость распределений. В работе рассматривается непрерывное по времени симметричное однородное неприводимое случайное блуждание по многомерной решетке Z^d, $d > 1$. С помощью метода Стейна получена оценка скорости сходимости распределения времени пребывания нормированного случайного блуждания в нуле к экспоненциальному закону в метрике Васерштейна с использованием равновесного распределения. Доказательство основано на дискретной аппроксимации времени и асимптотических свойствах переходных вероятностей случайного блуждания. Показано, что в случае размерности d > 2 скорость сходимости равна $O(t^{-d/2+1})$, а в случае $d = 2$ принимает значение $O(1/\ln^2 t)$.

[1] A. A. Aparin, G. A. Popov, and E. B. Yarovaya, *On the sojourn time distribution of a random walk at a multidimensional lattice point*, Theory Probab. Appl., 2022.

[2] Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007.

[3] Erol Peköz, Adrian Röllin, *Exponential approximation for the nearly critical Galton-Watson process and occupation times of Markov chains*, Electron. J. Probab., 2011, 1381–1393.

Нетранзитивные структуры из независимых случайных величин с равными средними и дисперсиями

Якушева Александра
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
alexandra.yakusheva.msu@gmail.com

Нетранзитивные кости, популяризованные М.Гарднером в 1970-е, представляют собой простые примеры нетранзитивности отношения стохастического предшествования. В наборе соответствующих дискретных случайных величин это отношение идет по кругу, как в игре «камень-ножницы-бумага». Известно и более сложное обобщение этой игры, игра «камень-ножницы-бумага-ящерица-Спок», придуманная С.Кассом. Автором построены наборы нетранзитивных костей с равными средними и дисперсиями, соответствующие схемам этих игр, изучены их различные интересные свойства. Следует отметить, что наборы с равными средними ранее были известны, но с условиями на дисперсии рассматриваются впервые. Далее рассматривается модификация путем умножения дискретных случайных величин на непрерывные из некоторых параметрических семейств. Изучается, как доля нетранзитивных наборов меняется в зависимости от параметра.

Секция «Возможности искусственного интеллекта, математического анализа и моделирования в медицине: от идеи до внедрения»

Санкт-Петербургский государственный университет, 29 ноября 2024

ДОКЛАДЫ

ШКОЛА ЭКСПЕРТА «ИННОВАЦИИ В МЕДИЦИНЕ И ИХ НАДЕЖНАЯ ПРАВОВАЯ ОХРАНА»

Председатели: Эриванцева Т.Н., Дышлюк М.В.

Эриванцева Т.Н. (Москва). Стратегия правовой защиты разработок для надежной защиты интеллектуальной собственности и повышения инвестиционной привлекательности.

Дышлюк М.В. (Санкт-Петербург). Особенности правовой охраны средств индивидуализации в медицине.

ШКОЛА «РАЗВИТИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В МЕДИЦИНЕ»

Председатели: Курапеев Д.И., Мулюха В.А.

Мулюха В.А. (Санкт-Петербург). Машинное обучение в медицине: преимущества и недостатки.

Курапеев Д.И. (Санкт-Петербург). Искусственный интеллект как инструмент поиска неспецифических признаков при проведении диагностических исследований у пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями.

СЕССИЯ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ «МАТЕМАТИКА И МЕДИЦИНА: ЕСТЬ ЛИ СВЯЗЬ? ВЗГЛЯД МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ»

Председатели: Осипов Н.Н., Вавилова Т.В., Бородулина Е.А.

Рубинштейн А.А., Кудрявцев И.В., Спельников Д., Осипов Н.Н., Старшинова А.А. (Санкт-Петербург). Математическое моделирование для определения диагностически значимых иммунологических показателей при дифференциальной диагностике туберкулеза и саркоидоза.

Овчинникова М.А., Власов В.С. (Санкт-Петербург). Шкалы риска венозных тромбозов у пациентов с солидными опухолями.

Васюкова Е.А., Исаков А.О., Зайкова Е.К., Ерисковская А.И., Попова П.В. (Санкт-Петербург). Применение искусственного интеллекта в разработке способа прогнозирования восстановления овуляции у женщин с синдромом поликистозных яичников.

Пищулов К.А., Моисеева О.М., Симакова М.А., Вавилова Т.В. (Санкт-Петербург). Предикторы развития венозных тромбоэмболических осложнений у пациентов с глиальными опухолями ЦНС: возможности различных алгоритмов.

Анопова А.Д., Исаков А.О. (Санкт-Петербург). DiaCompanion. Прогнозирование постпрандиальной гликемии у беременных женщин с гестационным сахарным диабетом в мобильном приложении.

СЕССИЯ «ЗНАЧЕНИЕ АНАЛИЗА BIG DATA В ЛАБОРАТОРНОЙ ПРАКТИКЕ: ВОЗМОЖНОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ»

Председатели: Вавилова Т.В., Белевитин А.Б.

Осипов Н.Н., Спельников Д.М. (Санкт-Петербург). Анализ данных и машинное обучение для эффективной диагностики и лечения социально значимых заболеваний.

Захаров Н.М. (Москва). Специализированные информационные решения Акросс - Клиническая лаборатория (АКЛ). Модуль Бактериология.

Куценко В.А., Свинин Г.Е., Имаева А.Э. (Москва). Валидация шкалы SCORE-2 на выборке из российской популяции.

Говоров И.Е., Ульрих Е.А. (Санкт-Петербург). Применение нейросетевого алгоритма в дифференциальной диагностике кольпоскопической картины.

СЕССИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭПИДЕМИОЛОГИИ, ДИАГНОСТИКЕ И ЛЕЧЕНИИ ИНФЕКЦИОННОЙ ПАТОЛОГИИ»

Председатели: Старшинова А.А., Бородулина Е.А.

Старшинова А.А., Осипов Н.Н., Кульпина А.Я., Беляева Е.Н. (Санкт-Петербург). Математическое моделирование в прогнозе распространения туберкулезной инфекции в РФ.

Бородулина Е.А., Еременко Е.П. (Самара). Система поддержки принятия врачебных решений при лечении туберкулеза.

Гогоберидзе Ю.Т., Бородулина Е.А, Просвиркин И.А., Бородулин Б.Б., Поваляев Е.И. (Самара). Перспективы использования "диагностических метрик" для повышения эффективности скрининга заболеваний легких.

Амосова Е.А. (Самара). Вопросы нечеткой логики в вопросах диагностики туберкулезной инфекции.

Вдоушкина Е.С. (Самара). Системный анализ факторов, влияющих на течение вирусного поражения легких (на примере НКИ).