St. Petersburg Youth Meeting on Probability and Mathematical Physics

Санкт-Петербургский государственный университет, 25–28 ноября 2024

АННОТАЦИИ

Мультистабильность в трехвидовой трофической системе

Алмасри Ахмад
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
ahmal6398@gmail.com

В математических моделях динамики популяций появление континуума решений является редкой ситуацией. Проводится анализ трофической цепи, построенной на основе модели А.Н. Колмогорова и состоящей из жертвы $x(t)$, потребляющего её хищника $y(t)$ и питающегося обоими видами суперхищника $z(t)$. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правой частью $[x(\mu_0 + \mu_1 x)(1 - x) - (y+z); \quad -\lambda_1 y + \alpha_1 xy + \beta_1 x^2 y - \delta_1 zy; \quad -\lambda_2 z + \alpha_2 xz + \beta_2 x^2 z + \delta_2 zy]$ с положительными коэффициентами μ_0, μ_1 ,λ_j, δ_j, α_j, β_j $(j = 1, 2)$. Данная модель относится к классу косимметричных динамических систем [1] при дополнительных условиях на параметры: $\lambda_2 = (\lambda_1/\delta_1 + \mu_0)\delta_2$, $\alpha_2 = (\alpha_1/\delta_1 + \mu_0 - \mu_1)\delta_2$, $\beta_2 = (\beta_1/\delta_1 + \mu_1)\delta_2$. В этом случае возникает однопараметрическое семейство равновесий с индивидуальным спектром устойчивости аналогично [2]. Построены бассейны для семейства, состоящего из устойчивых равновесий. Определены условия на параметры, при которых в результате бифуркации Хопфа от равновесий ответвляются периодические решения. Рассчитаны периоды и мультипликаторы возникающих циклов, установлена их принадлежность однопараметрическому семейству. Изучена динамика системы при нарушении условий косимметрии, для этого применяется аппарат теории косимметрии В.И. Юдовича, включающий вычисление и анализ косимметрических дефектов и селективных функций.

Автор выражает благодарность В.Г. Цибулину за внимание к работе.

[1] В.И. Юдович, *Бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию*, Докл. РАН, 398(1), 57–61, 2004.

[2] А. Алмасри, В.Г. Цибулин, *Анализ динамической системы жертва-хищник-суперхищник: семейство равновесий и его разрушение*, Компьютерные исследования и моделирование, 15 (2023), 1603–1617.

Предельное распределение момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня, принадлежащего области малых уклонений

Анохина Мария
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
anokhina.mary1@gmail.com

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в.) с $\mathbf{E}X_1 = 0$. Для этого блуждания хорошо известен закон арксинуса (см. [1]):

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x\right) \to \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \quad n \to \infty, \quad x \in [0,1],$$

где τ_M — момент первого достижения максимума блужданием S_n. Нас интересуют такие же результаты, но для

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x \middle| M_n = k\right), \quad x \in [0,1],$$

где $M_n = S_{\tau_M}$. В работе [2] автором был получен результат, касающийся области умеренных уклонений. В данном докладе будет получено асимптотическое поведение данной вероятности для арифметического случайного блуждания в случае $k \sim n^\alpha$, $n \to \infty$, при $0 < \alpha < 1/2$ для случая конечной дисперсии, а также будет получена локальная предельная теорема.

[1] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, М., Мир, 1 (1984), 80–103.

[2] М. А. Анохина, *Предельная теорема для момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня, лежащего в зоне умеренно больших уклонений*, Матем. заметки, 115(4), 502-520, 2024.

Задача Сильвестра–Радона

Барышева Ксения
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
baryshevaxenia@gmail.com

Задача Сильвестра–Радона

Задача Сильвестра состоит в нахождении вероятности того, что $d+2$ случайные точки в $\mathbb{R}^d$ находятся в выпуклом положении. В докладе мы обсудим ее следующее обобщение. Теорема Радона утверждает, что если $d+2$ точки в $\mathbb{R}^d$ находятся в общем положении, то их можно единственным образом разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются. Если точки случайные, то естественно поинтересоваться, какова вероятность того, что в меньшей группе находится k точек. Данный вопрос сводится к задаче Сильвестра при $k = 1$.

Об инвариантной граничной задаче для волнового уравнения в цилиндре над шаром

Беляева Юлия
Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва,
Институт прикладной математики и механики, г. Донецк
`yilia-b@yandex.ru,belyaeva-yuo@rudn.ru`

Рассматривается волновое уравнение в цилиндре над единичным шаром с начальными условиями и граничным условием на сфере. Граничное условие имеет вид суммы сверток неизвестной функции и ее нормальной производной с заданными на сфере функциями. Такая задача относится к классу инвариантных задач, которые ранее изучались в монографии [1]. Исследована разрешимость описанной выше смешанной задачи. При определенных условиях на коэффициенты Фурье функций из граничного условия, доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи.

[1] В.П. Бурский, *Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений*, Киев, Наук. думка, 315, 2002.

Геометрические характеристики выпуклых оболочек плоских случайных процессов

Болотин Артём
Московский физико-технический институт, г. Москва
`bolotin2003@yandex.ru`

Пусть $K_1, K_2, ...K_s$ - выпуклые тела в $\mathbb{R}^d$. Минковский доказал, что d-мерный объём $\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_1 + ... + \lambda_s K_s)$ при $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \geq 0$ является однородным многочленом степени d:

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_1 + ... + \lambda_s K_s) = \sum_{i_1=1}^{s} ... \sum_{i_d=1}^{s} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_s} \widetilde{V}_d(K_{i_1}, ..., K_{i_d}),$$

где функции $\widetilde{V}_d(K_{i_1}, ..., K_{i_d})$ считаются симметричными и называются смешанным объёмом $K_{i_1}, ..., K_{i_d}$.

Рассматриваются выпуклые оболочки плоских случайных процессов (броуновское движение, броуновский мост, случайные блуждания) и при некоторых дополнительных предположениях вычисляются их смешанный объём, площадь и длина границы.

Предельные теоремы для пфаффианных процессов

Боровиков Михаил
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
`misha.borovikov@gmail.com`

Пфаффианные процессы естественным образом возникают в различных задачах из разных областей математики, к примеру, они описывают плотность собственных значений кругового симплектического ансамбля, а так же плотность комплексных и вещественных корней ряда, коэффициентами которого являются независимые гауссовские величины. В докладе предлагается обсудить предельные теоремы для пфаффианных процессов.

Выбор признаков на основе теории информации

Ван Шаньвэнь
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
`shanven.van@math.msu.ru`

В докладе представлена единая структура для определенных статистик для отбора признаков на основе теории информации. В частности, в основном рассматриваются две обобщенные оценки условной взаимной информации: условная информация о взаимодействии и взвешенное короткое расширение условной взаимной информации. При различных предположениях даны их предельные распределения: нормальное распределение или взвешенное распределение хи-квадрат с определенными степенями свободы. Оказывается, что в рамках нашей структуры охватываются многие статистики в теории информации для отбора признаков.

[1] J. Mielniczuk, P. Teisseyre, *Stopping rules for mutual information-based feature selection*, Neurocomputing, 358 (2019), 255-274.

[2] J. Mielniczuk, *Information Theoretic Methods for Variable Selection — A Review*, Entropy. 24(8), 2022.

Электрический алгоритм классификации и его состоятельность

Васильев Иван
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
`vanya71161@gmail.com`

В докладе рассматривается модель бинарной классификации, основанная на электрической теории цепей Маркова и введенная в работе [1]. Как и всегда, у нас есть какое-то множество точек X мощности r, которым присвоены некоторые метки, для определенности, нули и единицы. Также есть другое множество Y, называемое тестовым, мощности t, для элементов которого мы эти метки хотим предсказать. Иначе говоря, хотим каждому элементу y_i этого тестового множества присвоить значение p_i из отрезка $[0, 1]$, соответствующее вероятности отнесения его к классу с меткой 1.

Для решения этой задачи предлагается объединить точки обоих множеств в один граф, например, на основе метода k-ближайших соседей, и запустить по нему из каждой тестовой точки y_i случайное блуждание, которое рано или поздно придет в точку 0 или 1. Тогда вероятность того, что блуждание поглотится в точке с меткой 1, и будет нашей искомой вероятностью p_i.

Отметим несколько полезных свойств данного классификатора: во-первых, достаточно просто понять, как бинарная классификация обобщается на многоклассовую, во-вторых, в обучающую выборку помимо размеченных данных можно также добавлять и неразмеченные — они просто будут задавать дополнительную геометрию точек, а при подсчете финальных вероятностей мы будем их игнорировать.

Основным результатом работы является доказательство состоятельности данного классификатора для линейно разделимых данных. Иначе говоря, показано, что при устремлении мощности тренировочного множества к бесконечности, вероятность верной классификации устремится к единице, при условии, что данные возможно линейно разделить. Кроме того, будет приведена асимптотическая оценка вероятности неверной классификации.

[1] Mrinmaya Sachan, Dirk Hovy, Eduard Hovy, *A Solving Electrical Networks to incorporate Supervision in Random Walks*, Proceedings of the 22nd international conference on World Wide Web companion, 2013.

Среднеквадратичный риск FDR-метода в задаче выявления значимых элементов разреженного массива слабо зависимых данных

Воронцов Михаил
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
m.vtsov@mail.ru

В докладе рассматривается модель данных

$$x_i = \mu_i + z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где μ — неизвестный вектор истинных данных, являющийся разреженным (μ_i равно или близко к нулю для большинства индексов i), а z — вектор шума с $z_i \sim N(0, \sigma^2)$. В данной модели возникает задача выявления значимых элементов массива, заключающаяся в построении оценки $\hat{\mu}(x)$ вектора μ, у которой большинство компонент равны нулю. Данная задача эквивалентна задаче множественной проверки гипотез.

В работе [1] для решения задачи множественной проверки гипотез был предложен метод (алгоритм Бенжамини-Хохберга), основанный на идее контроля ожидаемой доли ложных отклонений (false discovery rate, FDR) гипотез. В работе [2], в предположении разреженности вектора данных и независимости его компонент, для данного метода было проведено исследование асимптотики среднеквадратичного риска. В то же время в ряде приложений вектор данных может иметь зависимые компоненты.

В настоящем докладе приводятся асимптотические результаты для среднеквадратичного риска и оценки среднеквадратичного риска FDR-метода в случае, когда вектор μ принадлежит одному из классов разреженности L_0 или L_p, а вектор z имеет слабо зависимые компоненты.

[1] Y. Benjamini, Y. Hochberg, *Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing*, Journal Of The Royal Statistical Society Series, 57(1), 289-300, 1995.

[2] F. Abramovich, Y. Benjamini, D. Donoho, I. Johnstone, *Adapting to Unknown Sparsity by controlling the False Discovery Rate*, The Annals of Statistics, 34(2), 584-653, 2006.

О группах, порождённых инволюциями таблиц Юнга

Германсков Михаил
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург
mgermanskov@gmail.com

Пусть дана диаграмма Юнга λ. Можно рассмотреть множество стандартных таблиц Юнга формы λ, то есть монотонных по строкам и столбцам заполнений клеток диаграммы последовательными натуральными числами. На множестве таблиц заводятся элементарные инволюции: инволюция с номером i меняет местами i и $i+1$ во всех таблицах, в которых после такой замены сохраняется монотонность по строкам и столбцам. Итак, каждой диаграмме Юнга λ сопоставляется группу G_λ, порождённую всеми такими элементарными операциями. Я расскажу о некоторых свойствах таких групп в случае, когда у диаграммы λ не более трех строк.

Сходимость аддитивных функционалов в детерминантном точечном процессе с ядром Куммера

Горбунов Сергей
Московский физико-технический институт, г. Москва
gorbunov.sm@phystech.edu

Скейлинговые пределы матричных ансамблей с устремлением размеров матриц к бесконечности — одна из естественных конструкций для получения точечных процессов с бесконечным числом частиц. Однако точечные процессы можно получать и из мер на полубесконечных эрмитовах матрицах. В случае конечных матриц переход к мере на собственных числах означает разложение меры в эргодические компоненты. Бородин, Ольшанский и Вершик использовали эту интерпретацию для полубесконечных матриц и показали, что эргодические меры относительно сопряжения конечными унитарными матрицами в этом случае также параметризуются наборами действительных чисел, но уже счётным их числом. А разложение мер Хуа-Пикрелла — проективного предела некоторых конечномерных матричных ансамблей — в эргодические компоненты в смысле Теоремы Шоке даёт меру на счётных подмножествах действительной оси, оказывающуюся детерминантной. Ядро даного процесса связано с гипергеометрическими функциями. В докладе пойдёт речь об аддитивных функционалах данного процесса — суммах значений некоторой функции в точках случайного подмножества. Будет рассмотрен предел их распределений при сжатии частиц. Также будет рассказано о связи этого процесса с Тёплицевыми определителями с сингулярными генераторами и об устройстве ядра этого процесса.

Об аппроксимации решения периодической одномерной квадратичной задачи вариационного исчисления в режиме онлайн с неизвестным внешним воздействием

Гуртовая Ольга
Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону

imedashvili@sfedu.ru

Рассматривается одномерная квадратичная вариационная задача с периодическими граничными условиями и неизвестным внешним воздействием. Задача решается последовательно: игрок выбирает траекторию, после чего получает информацию о внешнем воздействии. Цель состоит в минимизации квадратичного функционала в смысле статического или динамического сожаления по отношению к некоторой последовательности сравнения. Решение аппроксимируется отрезками ряда Фурье. На основе оценок ошибки аппроксимации, а также констант Липшица и гладкости аппроксимирующей функции показано, что задача оценки сожаления сводится к стандартной конечномерной ситуации. Проведены численные эксперименты для некоторых алгоритмов минимизации статического и динамического сожалений.

Модель накопления частиц в нуле при блуждании по целочисленным точкам полупрямой

Гусаров Александр
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
naik67.67@gmail.com

Рассматривается случайное блуждание по целочисленным точкам неотрицательной полупрямой. Время предполагается дискретным. В начальный момент времени распределение частиц задаётся следующим образом: в каждой точке, независимо от других точек, находится одна частица с вероятностью $0 < p \leq 1$ или отсутствует с вероятностью $q = 1 - p$. Затем каждая из частиц, независимо от эволюций других частиц, в каждый момент времени совершает скачок влево с вероятностью $0 \leq p_- \leq 1$ или вправо с вероятностью $p_+ = 1 - p_-$. Достигнув нуля, частица не может продолжить блуждание, и происходит процесс накопления частиц в нуле. Изучено асимптотическое поведение математического ожидания численности частиц в нуле. Доказана предельная теорема для численности частиц в нуле для случая $p_- \geq p_+$. Также найдено среднее время достижения частицей нуля в случае $p_- > p_+$.

Теоретико-групповой анализ уравнения типа Ван-дер-Поля

Дегтярев Дмитрий
Адыгейский Государственный Университет, г. Майкоп
degtyarev.diamat@gmail.com

Получен вид точечных групп преобразований для обобщённого уравнения типа Ван дер Поля. Получены условия существования нетривиальной группы, а также достаточные условия интегрируемости уравнения с помощью группового метода.

Как оценить случайность линейного классификатора?

Жиянов Антон
Высшая школа экономики, г. Москва
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

zhiyanovap@gmail.com

Классификаторы широко используются в биомедицинских приложениях для выявления закономерностей, позволяющих отличать различные группы образцов между собой (например, рак и норму) [1-3]. Построение классификатора можно разделить на два основных этапа: выбор метода классификации и метрики, определяющей качество классификатора [4]. Существует множество методов классификации и метрик, удовлетворяющих тем или иным естественным условиям [5], однако линейные классификаторы и метрика «accuracy» (доля правильно предсказанных классов) считаются самыми интерпретируемыми и простыми.

Обычно качество классификатора измеряется на тестовой выборке. Однако, даже при низком качестве классификации, важно ответить на следующий вопрос: действительно ли классы, которые мы пытаемся разделить, различаются между собой?

Формально, пусть $Y = (Y_i, i \le k)$, $Z = (Z_i, i \le l)$ – две независимые выборки в $\mathbb{R}^d$, взятых из распределений $\mathcal{F}_Y$ и $\mathcal{F}_Z$ соответственно. Предположим, что множества $\{Y_i, i \le k\}$ и $\{Z_i, i \le l\}$ почти линейно разделимы. В этом случае естественно считать, что $\mathcal{F}_Y \ne \mathcal{F}_Z$. Однако, какова вероятность события AU_m, что две выборки почти линейно разделимы с не более чем m ошибками, если их распределения предполагаются равными?

Ранее полная линейная разделимость (AU_0) нормы и рака по данным экспрессии генов изучалась в работе [6]. Авторы разработали алгоритм, проверяющий это свойство для любых пар генов в среднем за константное время. Также они показали, что количество линейно разделимых пар значительно превышает ожидаемое.

В теоретической части работы мы устанавливаем более строгие верхние оценки условной $CPAU_m\ (Y,Z) = SU$ и безусловной $PPAU_m$ вероятностей почти линейной разделимости. На их основе мы строим несколько статистических тестов, которые применяем к классификатору, обнаруживающему рецидив рака молочной железы у пациентов с ER-положительным статусом [7]. В результате мы подтверждаем роль пары генов IGFBP6 и ELOVL5 в дифференциации рецидива.

[1] Joseph A. Cruz and David S. Wishart, *Applications of machine learning in cancer prediction and prognosis*, Cancer Informatics, 2 (2006).

[2] Konstantina Kourou and etc., *Machine learning applications in cancer prognosis and prediction*, Computational and Structural Biotechnology Journal, 13 (2015).

[3] Le Kang and etc., *Linear combination methods to improve diagnostic/prognostic accuracy on future observations*, Statistical Methods in Medical Research, 25 (2016).

[4] Kevin P Murphy, *Machine learning: a probabilistic perspective*, The MIT Press, 2012.

[5] Martijn Gösgens and etc., *Good Classification Measures and How to Find Them*, Advances in Neural Information Processing Systems, 21, 17136-17147, 2021.

[6] Giora Unger and Benny Chor, *Linear separability of gene expression data sets*, IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics, 7 (2010).

[7] V. V. Galatenko and etc, *Highly informative marker sets consisting of genes with low individual degree of differential expression*, Scientific Reports, 5 (2015).

Эффекты случайной поглощающей среды в симметричных ветвящихся случайных блужданиях по одномерной решетке

Ивлев Олег
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
olivlegerr@gmail.com

Как правило, ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) рассматривают в однородной ветвящейся случайной среде, см., напр., [1]. Цель работы — изучение простого симметричного ВСБ по одномерной решетке в неоднородной случайной поглощающей среде с непрерывным временем. Представленные результаты будут обобщать теоремы из [2] в двух направлениях. Проведена оценка сверху для вероятности возникновения экспоненциального роста среднего числа частиц для случайной среды, имеющей единственный центр размножения частиц, расположенный в нуле, и четыре источника гибели частиц, симметрично расположенных относительно нуля, где интенсивность поглощения частиц задается разнораспределенными случайными величинами. Подобный результат получен и для случайной среды, имеющей $2n$ источников гибели частиц, симметрично расположенных относительно нуля, но в которых поглощение частиц задается одинаково распределенными случайными величинами.

[1] S. Molchanov, *Lectures on random media Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, Springer, Berlin, 1581 (1994), 242–411.

[2] V. Kutsenko, S. Molchanov, E. Yarovaya, *Branching Random Walks in a Random Killing Environment with a Single Reproduction Source*, Mathematics, 12 (2024), 550. https://doi.org/10.3390/math12040550

Уточнение асимптотики среднего времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки

Иевлев Роман
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
roman.ievlev@math.msu.ru

В работе исследуется модель симметричного, однородного, неприводимого случайного блуждания с конечной дисперсией скачков на решетке $\mathbf{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Время предполагается непрерывным. Особое внимание уделяется изучению случайной величины ξ_t, которая описывает время пребывания блуждания в нуле до момента времени t. Основной целью исследования является уточнение асимптотических разложений для ряда вероятностных характеристик, связанных с ξ_t, таких как переходные вероятности и среднее время пребывания в нуле. Для этого были установлены необходимые условия, при которых возможно уточнить разложение указанных функций. В ходе работы удалось получить явные формы этих разложений. Полученные результаты могут быть применимы в анализе аналогичных моделей, а также получении скоростей сходимости в предельных теоремах, связанных с подобными процессами.

Об асимптотике вероятностей невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде с замораживаниями

Коршунов Иван
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
IDKorshunov@mail.ru

Известно, что ветвящийся процесс в случайной среде хорошо описывается соответствующим случайным блужданием

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k — производящая функция числа потомков и случайная среда. В докладе будет рассмотрен вопрос вырождения ветвящегося процесса в случайной среде с заморозками при $\mathsf{E}\xi_1 = 0$, отличающегося от обычного ВПСС тем, что каждая среда устанавливается на несколько поколений. Оказывается, что данный вопрос так же тесно связан со случайным блужданием

$$S_n = \tau_1\xi_1 + \ldots + \tau_n\xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k — производящая функция числа потомков и случайная среда, а τ_k — длительность k-й заморозки.

В докладе будет показано, что, если число потомков любой частицы имеет геометрическое распределение, а также при определенных условиях на моменты ξ и на замораживания $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ вероятность выживания всего процесса удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\mathsf{P}\left(Z_{s_n} > 0\right) \sim \frac{c}{\sqrt{\tau_1^2 + \ldots + \tau_n^2}},\ n \to \infty$$

для некоторой положительной константы c, где $s_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$.

Мультистабильные решения задачи фильтрационной конвекции в круговой области

Коханов Павел
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
kohanov@sfedu.ru

Нетривиальное ответвление множественных стационарных режимов обнаружено для плоской задачи фильтрационной конвекции Дарси в случае слоя, прямоугольника и кольцевых областей. Для односвязной области В.И. Юдовичем [1] на основе теории косимметрии было доказано существование однопараметрического семейства решений и двукратность критических чисел Рэлея для состояния механического равновесия. Это свойство системы уравнений должны воспроизводить соответствующие численные аппроксимации [2]. В настоящей работе рассматривается возникновение конвекции в круговой области, заполненной пористой средой, насыщенной несжимаемой жидкостью и подогреваемой снизу. Для определения критических значений чисел Рэлея получены формулы на основе нулей бесселевых функций. Разработан метод конечных разностей для системы уравнений в полярных координатах относительно функции тока и температуры с учетом полюса [3]. Численная схема позволила рассчитывать двукратные собственные значения соответствующей спектральной задачи и вычислять ответвляющиеся конвективные режимы.

Работа выполнена в Южном федеральном университете, г. Ростов-на-Дону.

[1] В.И. Юдович, Косимметрия, *Вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции*, Мат. заметки, 49(5), 142-148, 1995.

[2] B. Karasözen, A.V. Trofimova, V.G. Tsybulin, *Natural convection in porous annular domains: Mimetic scheme and family of steady states*, Journal of Computational Physics, 231(7), 2995-3005, 2012.

[3] П.В. Коханов, В.Г. Цибулин, *Численная схема в полярных координатах для анализа конвекции в пористой среде*, ЭВ НЦ ЧЭС, 20(4), 37-44, 2023.

Фазовые переходы в надкритическом ветвящемся случайном блуждании при различных конфигурациях источников ветвления

Кротов Михаил
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
mikhail.krotov@math.msu.ru

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по решетке $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$). Время t предполагается непрерывным. При $t = 0$ на $\mathbb{Z}^d$ имеется одна частица. Исследуется случай, в котором наблюдается экспоненциальный рост численностей частиц в каждой точке решетки. Из [1] вытекают предельные теоремы о сходимости нормированных численностей частиц почти наверное при изучаемых конфигурациях. Фазовые переходы в надкритическом ВСБ определяются структурой дискретного положительного спектра эволюционного оператора численностей частиц, см. [2]. Изучаются условия существования положительных изолированных собственных значений и их кратность в зависимости от конкретной конфигурации источников ветвления и их интенсивностей. Данные условия могут быть выписаны в явном виде для ряда конкретных конфигураций источников ветвления. Полученные эффекты при различных конфигурациях источников ветвления проиллюстрированы с помощью компьютерного моделирования.

[1] Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен., 68(4), 779–795, 2023.

[2] Е. Б. Яровая, *Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания*, Теория вероятн. и ее примен., 62(3), 518–541, 2017.

Асимптотики максимальных взвешенных пересечений случайных множеств Ципфа

Лялинов Иван
Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, г. Санкт-Петербург
lyalinov239@yandex.ru

В докладе будет рассказан интересный для приложений вопрос о размере максимального пересечения случайного множества Ципфа с элементами большого набора независимых множеств того же типа, но, возможно, с другими параметрами. Также будет сформулирована предельная теорема для асимптотического поведения максимума взвешенной релевантности пересечения множеств Ципфа для случая степенных и экспотенциальных весов. Будет показано, что максимальная взвешенная релевантность подчиняется той же предельной теореме, что и релевантность, определённая наиболее редкими элементами пересечений.

Докритические ветвящиеся процессы с долгим временем жизни и дважды стохастической пуассоновской иммиграцией

Малиновский Георгий
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
georgy.malinovsky@math.msu.ru

Изучаются докритические ветвящиеся процессы с иммиграцией. Ранее такие процессы рассматривались в предположении конечного среднего времени жизни частиц, тогда они имеют стационарное предельное распределение. Рассматривается случай, когда распределения времен жизни частиц имеют степенные хвосты и бесконечные средние. При этом оказывается, что число частиц растет и можно получить аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Кроме того, входной поток предполагается дважды стохастическим, а именно, его интенсивность описывается неотрицательным стационарным случайным процессом, при некоторых ограничениях на корреляционную функцию. Такие потоки ранее рассматривались в теории массового обслуживания, но для ветвящихся процессов это делается впервые.

Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме

Мишулович Арсений
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
st062829@student.spbu.ru

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{A}_\varepsilon$ с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами: $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\nabla + \varepsilon^{-2}p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$. Известно, что спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет зонную структуру: он является объединением замкнутых отрезков (спектральных зон). Зоны могут перекрываться. Между зонами могут открываться лакуны. Согласно гипотезе Бете–Зоммерфельда, в многомерном случае число лакун конечно. Получена аппроксимация резольвенты в регулярной точке оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$, близкой к краю внутренней спектральной лакуны, по «энергетической» норме с погрешностью порядка $O(\varepsilon)$. В случае когда $p \equiv 0$, «энергетическая» норма — это операторная норма из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$, случай $p \not\equiv 0$ будет обсуждаться на докладе.

Об одном комбинаторном классе случайных блужданий

Мишура Петр
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
mishurapetr@gmail.com

Для произвольной последовательности s_i длины n наибольшей выпуклой минорантой называется наибольшая выпуклая последовательность h_i, такая, что $h_i \le s_i$. В точках, где достигаются равенства, находятся ее вершины, а между ними – ребра. Для стандартного случайного блуждания с независимыми одинаково распределенными шагами длины ребер выпуклой миноранты распределены как циклы равновероятно выбранной перестановки длины n.

Мы рассмотрим другую меру на случайных перестановках, в которой циклический тип будет непосредственно задаваться параметром θ. С помощью обобщенного преобразования Верваата по ней мы получим новое случайное блуждание и рассмотрим соответствующий ему предельный случайный процесс.

О свойствах максимума случайного процесса назначений

Москаленко Тимофей
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
teamofey1982@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию максимума процесса назначений для прямоугольных матриц. Найдена асимптотика математических ожиданий максимума, получены соответствующий закон больших чисел и некоторые экспоненциальные оценки вероятностей больших уклонений.

Иерархия Пальма для детерминантных точечных процессов

Новгородов Егор
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
egor_neo@mail.ru

В докладе будут рассмотрена иерархия Пальма для детерминантных точечных процессов.

Анализ модели переноса плазмы в винтовом магнитном поле

Оксогоева Ирина
Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва
oksogi@mail.ru

В докладе представлены результаты анализа математической модели переноса плазмы в спиральной открытой магнитной ловушке СМОЛА, созданной в ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН [1]. Удержание плазмы в установке осуществляется за счёт передачи импульса от магнитного поля с винтовой симметрией вращающейся плазме. Математическая модель основана на стационарном уравнении переноса плазмы [2]. В модель введен учет функционального вида коэффициентов модели, заданных в диапазоне, соответствующем физике процесса удержания. Приведены зависимости параметров модели от координат, при которой наблюдается качественное соответствие расчета экспериментальным данным. Математическая модель разработана для предсказания параметров удержания плазмы в проектируемых установках со спиральным магнитным полем.

[1] A. V. Sudnikov, A. D. Beklemishev, V. V.Postupaev, A. V. Burdakov, I. A. Ivanov, N. G. Vasilyeva,K. N. Kuklin, E. N. Sidorov, *SMOLA device for helical mirror concept*

exploration , Fusion Eng. Des., 122 (2017), 86-93.

[2] A.D. Beklemishev *Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation*, AIP Conf. Proc., 1771 (2016), 040006.

Меры Шура и процесс Шура

Пинчук Никита
Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
nikitapinchuk@mail.ru

удут рассмотрены меры Шура на двумерных диаграммах Юнга и процесс Шура на трёхмерных диаграммах Юнга. Исследование включает анализ асимптотического поведения мер Шура, их связь с детерминантным точечным процессом и симметричными многочленами Шура. Процесс Шура изучен с точки зрения динамики разбиений с использованием цепей Маркова.

Статистическое оценивание энтропии переноса

Пономарь Анастасия
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
anastasia.ponomar@math.msu.ru

Энтропия переноса, которую ввел T.Schreiber (2000), предоставляет возможность измерять объем направленной информации между случайными процессами. Известно, например, что для гауссовских процессов использование этой величины, в определенном смысле, эквивалентно применению подхода, развитого в ряде работ C.W.J.Granger. Энтропия переноса и ее статистические оценки представляют не только теоретический интерес, но и широко применяются во многих областях. Достаточно упомянуть неврологию, кардиологию, биохимию и финансы. В докладе рассматриваются некоторые асимптотические результаты, относящиеся к статистическому оцениванию энтропии переноса и условной взаимной информации. Кроме того, обсуждаются иллюстрирующие примеры.

Метод двойного бутстрапа для оценки индекса экстремальных значений с использованием экспектилий

Прокопенко Евгений
Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
evgenii.prokopenko@gmail.com

Пусть $\overline{F}(x) = L(x)x^{-\frac{1}{\gamma}}$ — хвост распределения F, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция, а константа $\gamma > 0$ называется индексом экстремальных значений (EVI). Индекс EVI позволяет понять скорость убывания хвоста распределения, а также оценить вероятность превышения определённого значения. Например, в теории страхования параметр γ определяет убытки инвестиционного портфеля, а в задачах на сетевых графах описывает динамику крупномасштабных кластеров.

Наиболее известный подход к оценке EVI включает группу оценок, использующих свойства порядковых статистик. Самая популярная из них — оценка Хилла (Hill, 1975):

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} \log \left(\frac{X_{(n-i+1)}}{X_{(n-k(n))}} \right),$$

где $X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}$ — порядковые статистики из распределения F. Однако распространённой проблемой этих методов является их зависимость от числа максимальных элементов выборки $k(n)$. Для нахождения оптимального числа $k(n)$ был предложен метод двойного бутстрапа (Draisma и др., 1999).

Другие методы оценки индекса используют экспектильные оценки (Daouia и др., 2021). Экспектилии, в отличие от квантилей, позволяют оценивать не только частоту экстремальных событий, но и их величину.

В данном докладе обсуждаются ключевые идеи оценки индекса экстремальных значений, концепция экспектилий и построение метода двойного бутстрапа для нахождения оптимального уровня оценки EVI на основе экспектилий. Теория подкрепляется численными сравнениями различных методов оценки индекса экстремальности на синтетических данных. Работа выполнена совместно с А.Е. Лукьяновым.

Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при наличии младших членов

Сафронов Игорь
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
st085672@student.spbu.ru

Работа относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов. В R^d рассматривается матричный эллиптический оператор четвёртого порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме; оператор содержит члены второго порядка и положительно определённый потенциал. Показано, что в пределе малого периода обратный оператор сходится по операторной норме в L_2 к обратному от эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический оператор четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Получена оценка погрешности точного порядка.

Асимптотика вероятности невырождения критического двуполого ветвящегося процесса в случайной среде

Сенько Павел
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
psenko2901@outlook.com

Представим себе следующий процесс ветвления. Пусть изначально есть одна пара частиц разных полов. На первом шаге эта пара дает случайное количество потомков — случайное количество частиц обоих полов. Полученные частицы образуют новые пары, количество которых описывается согласно заранее зафиксированной функции — функции паросочетаний. На втором шаге этого процесса каждая образованная пара дает случайное количество новых частиц, независимо от других пар и от предыстории процесса. После этого все новые частицы образуют пары, согласно зафиксированной функции паросочетаний. На третьем шаге каждая пара снова порождает новые частицы и образуются новые пары и так далее.

Добавим в модель случайную среду — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин. Будем считать, что теперь размножение и образование пар зависит еще и от этой среды. А именно, разыграем случайную среду $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$. Рассмотрим теперь произвольный шаг $k \geq 1$ нашего процесса и пары частиц, образованных на прошлом шаге. Зафиксируем элемент η_k среды $\boldsymbol{\eta}$. Тогда каждая пара дает случайное количество потомков обоих полов в соответствии с производящей функцией, зависящей от η_k. После этого все новые потомки образуют новые пары согласно функции паросочетаний, которая также зависит от η_k. На следующем шаге фиксируется элемент η_{k+1} и процесс продолжается аналогичным образом.

Рассмотренный процесс — физическая интерпретация двуполого ветвящегося процесса в случайной среде (ДВПСС), введенного впервые S. Ma в работе [1], где исследовались условия невырождения процесса и сходимость нормированного процесса в случае невырождения.

Оказывается, что предельная теорема об асимптотике невырождения критического ДВПСС при широком классе функций паросочетаний, рассмотренном впервые в работе [2] Шкляева А.В., имеет близкий вид к классической теореме для критических ветвящихся процессов в случайной среде, формулировку которой можно найти, например, в статье [3].

[1] S. Ma, *Bisexual Galton –Watson branching processes in random environments* , Acta Math. Appl. Sin, Engl. Ser., 22 (2006), 419–428.

[2] А. В. Шкляев, *Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде*, Дискретная математика, Дискрет. матем., 35:3 (2023), 125–142

[3] G. Kersting, V. Vatutin, *Discrete time branching processes in random environment.* , John Wiley & Sons, 2017.

Совершенные детерминантные меры: формализм Ольшанского

Соколов Игорь
Московский физико-технический институт, г. Москва
sokolov.igor506@yandex.ru

Детерминантный точечный процесс есть борелевская вероятностная мера на пространстве конфигураций рассматриваемого фазового пространства, которая характеризуются набором корреляционных функций, задающихся как детерминант корреляционного ядра. Один и тот же процесс может задаваться разными ядрами. Григорий Ольшанский [1] сопоставляет рассматриваемым вероятностным мерам представление алгебр специального вида. Начиная с дискретного случая, он строит представление алгебры $C(\Omega) \rtimes \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ – группа конечных перестановок фазового пространства Ω), которое ставит в соответствие борелевской мере, инвариантной относительно действия группы $\mathcal{S}$. При переходе к непрерывному случаю строится сюръективный гомоморфизм между указанной выше алгеброй и алгеброй антикоммутационных соотношений $\mathfrak{A}^0$ (CAR).

Представление последней оказывается весьма удобным для изучения мер специального типа, называемых «совершенными» (perfect).

[1] G. Olshanski, *Determinantal point processes and fermion quasifree states*, arXiv: 2002.10723v2.

[2] A. Bufetov, *Quasi-Symmetries of Determinantal Point Processes*, arXiv:1409.2068.

Предельные теоремы для вероятностной модели биржевого стакана

Тарасенко Александр
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
`a.tarasenko2@g.nsu.ru`

Биржевой стакан – это таблица заявок на покупку/продажу некоторого актива, в которой отображены объемы заявок и соответствующие им цены. Рассматривается модель, где цены заявок выбираются из фиксированного конечного множества, а размещения и отмены заявок и сделки по заявкам с наилучшей ценой происходят согласно независимым процессам Пуассона. В работах предшественников рассматривался случай, когда сделки совершаются только для одной заявки. В случае, когда сделка может происходить по нескольким заявкам одновременно, приведены достаточные условия эргодичности системы. Для среднего арифметического между наилучшими ценами на покупку и продажу приводятся оценка вероятности при следующем изменении пойти вверх/вниз.

Предельная теорема для процесса поступления решений в онлайн-олимпиаде

Терехов Иван
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
`terivan14@gmail.com`

Доклад посвящен математическому решению проблемы выдачи вариантов во время проведения онлайн-олимпиады. Представим себе соревнование, в котором есть несколько вариантов заданий (предположительно равных по сложности), пользователи подключаются к участию в случайные моменты из некоторого промежутка, получают задачи и спустя некоторое время сдают решения. Основная задача – по ходу проведения олимпиады проверять однородность различных вариантов и остановить выдачу части вариантов заданий, если они значимо сложнее или проще остальных. Отсюда возникает задача о проверке однородности вариантов заданий. При этом желательно построить последовательный критерий, чтобы контролировать однородность вариантов заданий прямо во время проведения олимпиады, а для построения последовательного критерия требуется изучить поведение поступающих данных, рассматривая их как случайный процесс. Настоящая работа посвящена изучению такого процесса и доказательству предельной теоремы для него.

Предположим, что мы хотим проверить справедливость одного конкретного задания, у этого задания есть m вариантов. Считаем, что варианты раздаются независимо и равновероятно для каждого участника, каждый человек решает только один вариант, поэтому будем считать, что общее число людей, решающих каждый возможный вариант не зависит от варианта и равно N.

Пусть S_i^j – время, когда i-й человек из j-го варианта начал решать задание, T_i^j – время, которое этот человек затратил на решение. Считаем для всех i, j, что S_i^j – независимые одинаково распределенные случайные величины, T_i^j – независимые и при фиксированном j одинаково распределенные случайные величины. Тогда естественно предположить, что у отличающихся по сложности вариантов будет разное распределение времени их решения, в частности, может отличаться среднее время решения, а значит, вопрос о равной сложности вариантов сводится к проверке однородности выборок времен решения задания, введенных выше.

Введем процессы, которые исследуются в настоящей работе. Пусть

$$\xi_i^j(t) = I\{S_i^j + T_i^j \leq t\}$$

– индикатор того, что участник закончил решение задания на момент времени t,

$$\eta_i^j(t) = (T_i^j + S_i^j) \cdot I\{S_i^j + T_i^j \leq t\} + t \cdot I\{S_i^j + T_i^j > t\} = \omega_i^j(t) + t(1 - \xi_i^j(t))$$

– время, которое этот участник затратил на решение на момент времени t. Тогда количество участников, закончивших решение j-го варианта задания на момент времени t будет равно

$$K_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^j(t),$$

а суммарное время затраченное участниками на решение задания j-ого варианта на момент времени t

$$A_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \eta_i^j(t).$$

Объединим все варианты в векторные случайные процессы:

$$\gamma_i(t) = (\xi_i^1(t), \eta_i^1(t), \ldots, \xi_i^m(t), \eta_i^m(t))^T,$$

$$\hat{X}_N(t) = (K_1(t), A_1(t), \ldots, K_m(t), A_m(t))^T = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(t),$$

$$X(t) = (\mathbf{E}\xi_i^1(t), \mathbf{E}\eta_i^1(t), \ldots, \mathbf{E}\xi_i^m(t), \mathbf{E}\eta_i^m(t))^T.$$

К величине $\hat{X}_N(t)$, введенной выше, применим функцию

$$h(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_1^m, x_2^m) = \sum_{j=1}^{m} x_1^j \ln \left(\frac{x_1^j}{x_1^1 + \cdots + x_1^m} \cdot \frac{x_2^1 + \cdots + x_2^m}{x_2^j} \right).$$

Для полученного таким образом случайного процесса $h(\hat{X}_N(t))$ в предположении однородности вариантов нами была доказана следующая сходимость по распределению в пространстве Скорохода $D[0, \infty)$ при $N \to \infty$

$$h(\hat{X}_N(t)) \xrightarrow{D} \frac{1}{2} Z(t)^T \operatorname{Hess}(h)(X(t)) Z(t),$$

где $Z(t)$ – некоторый векторный гауссовский случайный процесс, $\mathrm{Hess}(h)$ – матрица вторых производных для функции h, $X(t)$ – вектор математических ожиданий, введенный выше.

Данная теорема позволяет строить последовательные критерии для процесса $h(\hat{X}_N(t))$, используя распределение предельного процесса.

В докладе будет сформулирована теорема о сходимости случайных процессов, описанная выше, будут изложены идеи ее доказательства, представлен явный вид одномерных распределений предельного процесса, а также представлены примеры использования этих фактов на практике.

Задача рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами притяжения

Торопов Виктор
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
st076443@student.spbu.ru

В работе в рамках дифракционного подхода построена эффективная модель для изучения асимптотического решения задачи рассеяния $2 \to 2(3)$ трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами притяжения, поддерживающими связанные состояния. Асимптотичность решения определяется быстрым убыванием его невязки в уравнении Шредингера. Структура координатной асимптотики решения задачи рассеяния получена при исследовании асимптотики предельных значений ядра резольвенты оператора Шредингера на абсолютно непрерывном спектре. В свою очередь, асимптотика предельных значений ядра резольвенты строится с помощью альтернирующего метода Шварца, примененного к данной задаче.

Операторные оценки погрешности при усреднении оператора Дирака с периодическими коэффициентами

Фаддеева Нина
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
faddeevanina@gmail.com

Работа относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов. Рассматривается двумерный оператор Дирака с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами: сингулярным магнитным потенциалом, переменной массой и электрическим потенциалом. Исследуется поведение резольвенты этого оператора в пределе малого периода. Получена аппроксимация резольвенты по операторной норме в L_2 с оценкой погрешности точного порядка. Аппроксимация представляет собой резольвенту эффективного оператора с постоянными коэффициентами, окаймлённую быстро осциллирующими множителями.

Предельные теоремы для ветвящегося случайного блуждания с одним центром генерации частиц при возможном поглощении в каждой точке $\mathbb{Z}^d$

Филичкина Елена
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
elena.filichkina1999@yandex.ru

Рассматривается предельное поведение ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) по $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$, при больших временах следующего вида: в выделенной точке решетки частица может производить потомков, а в остальных точках помимо блуждания возможно поглощение частицы. Для такого процесса получена полная классификация асимптотического поведения всех целочисленных моментов численностей частиц. Оно оказывается различным в зависимости от существования в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, изолированного собственного значения, а также от знака этого собственного значения. Кроме того, применение техники, основанной на изучении операторных семейств, порожденных ВСБ (см., напр., [2]), позволяет получить некоторые дополнительные результаты о предельном поведении процесса.

[1] E. Filichkina, E. Yarovaya, *Branching Random Walks with One Particle Generation Center and Possible Absorption at Every Point*, Mathematics, 11(7), 1676, 2023.

[2] Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая,*Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен., 68(4), 779–795, 2023.

mm-энтропия негауссовских мер

Хамзин Виктор
Санкт-Петербургский государственный университет, ММИ им. Эйлера,
г. Санкт-Петербург
olimpiadnik74@mail.ru

mm-энтропией метрического пространства с мерой называется величина, показывающая, какое число шаров одинакового радиуса необходимо взять, чтобы покрыть множество нужной меры. Она была определена еще в классической работе К.Шеннона [2], но до недавнего времени практически не изучалась. А.М.Вершик и М.А.Лифшиц в [1] нашли значение mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой. Доклад будет посвящен результатам, полученным в негауссовском случае: мы рассмотрим конечномерные пространства с абсолютно непрерывной мерой, а также пространство траекторий процесса Пуассона.

[1] А. М. Вершик, М. А. Лифшиц, *О mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой*, Теория вероятн. и ее примен., 68(3), 532-543, 2023.

[2] К. Шеннон, *Математическая теория связи*, Работы по теории информации и кибернетике, М., Изд-во иностр.лит., 1963, 243-332.

Слабая сходимость к распределению Миттаг-Леффлера некоторых стохастических процессов

Чернышенко Екатерина
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
ekaterina.chernyshenko@math.msu.ru

Распределение Миттаг-Леффлера часто возникает в моделях с так называемыми тяжелыми хвостами распределения. Рассматриваются три модели стохастических процессов, в каждой из которых установлена сходимость к распределению Миттаг-Леффлера. Первая модель называется процессом китайского ресторана (см. [1]). Эта модель описывает случайные разбиения множества $\{1, 2, ..., n\}$ на подмножества, называемые блоками разбиений. В [1] рассматривается асимптотика числа этих блоков при стремлении n к бесконечности. Установлено, что число блоков разбиения сходится почти наверное к величине, распределенной в соответствии с законом распределения Миттаг-Леффлера. Мы покажем, как данная модель с дискретным временем сводится к модели с непрерывным временем - модели процесса Юла чистого рождения. При этом частицы, рождающиеся в популяции в соответсвии с процессом Юла, окрашиваются в цвета согласно следующим правилам: изначально в процессе существует одна частица, окрашенная в какой-то цвет; каждая следующая частица с определенной вероятностью окрашивается либо в цвет своего родителя, если она идентична ему, либо в новый цвет, которого еще не встречалось в популяции. В [2] установлено, что при стремлении t к бесконечности, число образовавшихся различных цветов сходится к величине, имеющей распределение Миттаг-Леффлера. Мы продемонстрируем как распределение Миттаг-Леффлера возникает при изучении предельного распределения времени пребывания симметричного однородного неприводимого случайного блуждания в точке одномерной решетки при условии, которое приводит к бесконечной дисперсии скачков случайного блуждания (см. [3]). Наконец, показано, что в каждой из предельных теорем рассматриваемые случайные величины нормируются на функции одного и того же типа.

[1] J. Pitman, *Exchangeable and partially exchangeable random partitions.*, Probab. Theory Retat. Fields, 102 (1995), 145-158.

[2] J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes.*, Lecture Notes in Math. 1875. Springer, Berlin, 2006.

[3] А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, *О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки.*, Теория вероятн. и ее примен., 66(4), 657–675, 2021.

Асимптотика связности случайных графов Эрдёша-Реньи и случайных двудольных графов через неоднородные блуждания

Чиняев Борис
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
bchinyaev.msu@gmail.com

В докладе исследуются случайные графы Эрдёша-Реньи $G(n, p)$ и случайные двудольные графы $G(n, m, p)$. Изучается асимптотика вероятности связности рассматриваемых графов при $n, m \to \infty$, $p(n) \to 0$. Для нахождения вероятности связности предлагается метод, основанный на анализе неоднородных случайных блужданий, позволяющий определить точную асимптотику для различных значений $p(n)$. Показывается, что вероятность связности графов в этих моделях находится из вероятности того, что некоторый случайный мост, построенный по неоднородному случайному блужданию, является экскурсией.

[1] V.E. Stepanov, *On the probability of connectedness of a random graph $G_m(t)$*, Theory of Probability Its Applications, 15(1), 55-67, 1970.

[2] R. Van Der Hofstad, *Random graphs and complex networks*, Cambridge university press, 54 (2024).

Численная аппроксимация вероятности разорения в модели Крамера-Лундберга

Шабалин Данила
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
danilshabalin2002@mail.ru

В докладе рассматривается классическая модель Крамера-Лундберга, описывающая динамику капитала страховщика во времени. Вероятность разорения является ключевым вопросом теории риска, однако её аналитическое выражение доступно лишь в отдельных частных случаях, что требует обращения к различным оценкам и асимптотикам.

В работе исследуются несколько численных подходов для вычисления вероятности разорения, в частности, методы, основанные на решении интегрального уравнения восстановления, которые сравниваются с наивным способом вычисления суммы ряда по формуле Полячека-Хинчина. Приведены оценки точности этих методов и продемонстрированы примеры, иллюстрирующие их практическое применение.

О нижних больших уклонениях для некоторых моделей ветвящихся процессов

Шкляев Александр
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва
ashklyaev@gmail.com

Представим себе последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, которую мы будем называть средой. При фиксации среды будем рассматривать последовательность независимых величин $X_{i,j} \sim F_{\eta_i}$, где $\{F_y\}$ – некоторое семейство функций распределения. Случайную последовательность, определяющуюся соотношениями $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ называют ветвящимся процессом в случайной среде.

Проблема верхних больших уклонений (то есть, неформально говоря, изучения асимптотики вероятностей событий $\{Z_n > x\}$, где x нетипично велико для Z_n) для ветвящихся процессов в случайной среде впервые была исследована М.В. Козловым в работе [1] в достаточно частном случае геометрического распределения числа потомков. Затем ряд исследователей (V. Bansaye, C. Boinghoff) обобщили эти результаты на более общие распределения, сумев, однако, исследовать лишь логарифмическую асимптотику. Наконец в 2018-2020 году ряд исследователей (Д. Бурашевский, П. Дишевский, А.В. Шкляев, Е.И. Прокопенко, М.А. Струлева) получили ряд точных результатов, описывающих асимптотику.

Проблема нижних больших уклонений (то есть событий $\{0 < Z_n < x\}$, где x нетипично мало для Z_n) изучена куда хуже. До недавнего времени наиболее общей здесь была работа [2], в которой исследовалась грубая (логарифмическая) асимптотика такого рода вероятностей. Кроме этого, исследуя точную асимптотику в явном виде К. Денисов открыл ряд любопытных феноменов в частном случае геометрического распределения величин X. В 2024 году автором была выпущена первая работа (см. [3]), исследовавшая нижние большие уклонения в достаточно общих предположениях. Доклад посвящен этому результату и его обобщениям на другие зоны уклонений и другие виды ветвящихся процессов.

[1] М. В. Козлов, *О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков*, Дискретная математика, 18(2), 29-47, 2006.

[2] V. Bansaye, C. Böinghoff, *Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 282 (2013), 15-34.

[3] А. В. Шкляев, *Нижние большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде*, Дискретная математика, 36(3), 127-140, 2024.

Применение метода Стейна к изучению модели случайного блуждания

Юшкова Ольга
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
`olga.ushkova@math.msu.ru`

Метод Стейна позволяет с помощью некоторой вероятностной метрики оценивать близость распределений. В работе рассматривается непрерывное по времени симметричное однородное неприводимое случайное блуждание по многомерной решетке Z^d, $d > 1$. С помощью метода Стейна получена оценка скорости сходимости распределения времени пребывания нормированного случайного блуждания в нуле к экспоненциальному закону в метрике Васерштейна с использованием равновесного распределения. Доказательство основано на дискретной аппроксимации времени и асимптотических свойствах переходных вероятностей случайного блуждания. Показано, что в случае размерности d > 2 скорость сходимости равна $O(t^{-d/2+1})$, а в случае $d = 2$ принимает значение $O(1/\ln^2 t)$.

[1] A. A. Aparin, G. A. Popov, and E. B. Yarovaya, *On the sojourn time distribution of a random walk at a multidimensional lattice point*, Theory Probab. Appl., 2022.

[2] Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007.

[3] Erol Peköz, Adrian Röllin, *Exponential approximation for the nearly critical Galton-Watson process and occupation times of Markov chains*, Electron. J. Probab., 2011, 1381–1393.

Нетранзитивные структуры из независимых случайных величин с равными средними и дисперсиями

Якушева Александра
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
alexandra.yakusheva.msu@gmail.com

Нетранзитивные кости, популяризованные М.Гарднером в 1970-е, представляют собой простые примеры нетранзитивности отношения стохастического предшествования. В наборе соответствующих дискретных случайных величин это отношение идет по кругу, как в игре «камень-ножницы-бумага». Известно и более сложное обобщение этой игры, игра «камень-ножницы-бумага-ящерица-Спок», придуманная С.Кассом. Автором построены наборы нетранзитивных костей с равными средними и дисперсиями, соответствующие схемам этих игр, изучены их различные интересные свойства. Следует отметить, что наборы с равными средними ранее были известны, но с условиями на дисперсии рассматриваются впервые. Далее рассматривается модификация путем умножения дискретных случайных величин на непрерывные из некоторых параметрических семейств. Изучается, как доля нетранзитивных наборов меняется в зависимости от параметра.