Конференция
«Алгебраические группы: сезон белых ночей V»

Сборник тезисов

Содержание

Вырождения сферических подалгебр и сферические корни

Роман Авдеев
НИУ ВШЭ
suselr@yandex.ru

Аннотация

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа и B — её борелевская подгруппа. Замкнутая подгруппа $H \subset G$ называется *сферической* (а однородное пространство G/H — *сферическим*), если группа B имеет открытую орбиту в G/H. Известная классификация Луны сферических однородных пространств даётся биекцией между всеми такими пространствами и наборами комбинаторных инвариантов, называемыми однородными сферическими данными. В этом контексте открытой проблемой является нахождение явных формул и/или алгоритмов, позволяющих вычислять однородные сферические данные сферического однородного пространства G/H исходя из явного вида сферической подгруппы H, стандартным способом задания которой является регулярное вложение в некоторую параболическую подгруппу группы G. К настоящему моменту докладчику удалось свести эту проблему к вычислению только одного комбинаторного инварианта — набора сферических корней. В свою очередь, для вычисления сферических корней в работе [1] предложена общая стратегия, заключающаяся в нахождении вырождений алгебры Ли подгруппы H, обладающих некоторыми специальными свойствами. В докладе планируется обсудить полученные в рамках этой стратегии результаты и остающиеся открытыми вопросы.

Ключевые слова — сферическое многообразие, сферическая подгруппа, сферические корни.

Список литературы

[1] Roman Avdeev, *Degenerations of spherical subalgebras and spherical roots*, Comm. Cont. Math. **26** (2024), no. 6, 2350029, 53 pp.

Подгруппы Бореля групп автоморфизмов аффинных торических поверхностей

Иван Аржанцев
ФКН НИУ ВШЭ
arjantsev@hse.ru

Аннотация

Подгруппой Бореля группы автоморфизмов алгебраического многообразия X называется максимальная по включению связная разрешимая ind-подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$. Мы описываем с точностью до сопряженности все подгруппы Бореля в группе автоморфизмов нормальной аффинной торической поверхности. Описание базируется на изучении действия группы автоморфизмов на дереве Басса-Серра. Доклад основан на совместной работе с Михаилом Зайденбергом.

Исследования поддержаны грантом РНФ 25-11-00302.

О числе Пикара и размерности однородных пространств

Иван Бельдиев

НИУ ВШЭ, Москва

ivbeldiev@gmail.com

Аннотация

Алгебраическое многообразие X называется однородным пространством, если на X имеется транзитивное регулярное действие алгебраической группы. Алгебраические однородные пространства — классический объект, который изучался во многих работах. В частности, недавно в [1] было доказано, что число Пикара $\rho(X)$ (то есть ранг группы Пикара) аффинного однородного пространства X не превосходит его размерности. Вопрос о связи числа Пикара и размерности однородного пространства также связан с обобщённой гипотезой Мукаи (см. [3], утверждающей следующее: для многообразия Фано X выполняется неравенство $\rho(X) \cdot (i_X - 1) \leqslant \dim X$, где i_X — псевдоиндекс многообразия X.

В случае, когда X — аффинное однородное пространство для простой или, в более общем случае, полупростой группы, мы доказываем более сильные неравенства. Один из результатов работы — следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X — аффинное однородное пространство для простой группы ненулевой размерности. Тогда выполняются следующие неравенства:*

1. $\rho(X) \leqslant \frac{1}{\mathrm{rk}(G)+1} \dim X$;
2. $\rho(X) < \sqrt{\dim X}$.

Также мы доказываем аналогичные неравенства для проективных пространств.

Теорема 2. *Пусть X — проективное однородное пространство для простой группы ненулевой размерности. Тогда выполняются следующие неравенства:*

1. $\rho(X) \leqslant \frac{2}{\mathrm{rk}(G)+1} \dim X$;
2. $\rho(X) < \sqrt{2 \dim X}$.

Из этих теорем несложно вывести следующие результаты, дающие оценки на $\rho(X)$ в случае, когда X — однородное пространство для полупростой группы G.

Предложение 1. *Пусть G — полупростая группа, изоморфная почти прямому произведению простых групп $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_m$. Если X — аффинное (соответственно, проективное) однородное пространство для G, то выполнено неравенство*

$$\rho(X) \leqslant \frac{1}{1 + \min \mathrm{rk} G_i} \dim X \text{ (соответственно, } \rho(X) \leqslant \frac{2}{1 + \min \mathrm{rk} G_i} \dim X).$$

Следствие 1. *Пусть X — аффинное (соответственно, проективное) однородное пространство для полупростой группы G. Тогда выполняется неравенство*

$$\rho(X) \leqslant \frac{1}{2} \dim X \text{ (соответственно, } \rho(X) \leqslant \dim X).$$

Ключевые слова — аффинное многообразие, проективное многообразие, группа Пикара, алгебраическая группа, полупростая группа, однородное пространство.

Список литературы

[1] Ivan Arzhantsev and Yulia Zaitseva. Affine homogeneous varieties and suspensions. Research in the Mathematical Sciences 11 (2024), no. 2, article 27

[2] Ivan Beldiev. On Picard number and dimension of algebraic homogeneous spaces. https://arxiv.org/abs/2412.07044 , 14 pages

[3] L. Bonavero, C. Casagrande, O. Debarre and S. Druel. Sur une conjecture de Mukai. Comment. Math. Helv. 78, 601–626 (2003). https://doi.org/10.1007/s00014-003-0765-x

Группа бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра над полем $\mathbb{Q}$

Викулова Анастасия Вадимовна

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,

119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений,

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,

119048, г.Москва, ул. Усачева, д. 6

vikulovaav@gmail.com

Аннотация

Группа бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра является непростым объектом для изучения. Но несмотря на это, последние несколько десятков лет бирациональные геометры очень активно исследуют свойства этой группы. Одним из подходов к изучению подобных групп является исследование конечных подгрупп. В докладе мы предъявим все конечные подгруппы в группе бирациональных автоморфизмов поверхности Севери–Брауэра над полем $\mathbb{Q}$ и поговорим о конечных подгруппах в группе бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра над полями характеристики, отличной от 2 и 3. Работа основана на статье [1].

Ключевые слова — поверхности Севери–Брауэра, группа автоморфизмов

Список литературы

[1] A. V. Vikulova, *Birational automorphism groups of Severi-Brauer surfaces over the field of rational numbers*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2024), no. 24, 14638–14654.

Гибкость триномиальных многообразий

Тимофей Владиславович Вилкин

НИУ ВШЭ

tvilkin@hse.ru

Аннотация

Доклад основан на совместной работе автора с М.В. Игнатьевым.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. X — аффинное алгебраическое многообразие, $\mathrm{SAut}(X)$ — подгруппа в группе автоморфизмов многообразия X, порождённая всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля $\mathbb{G}_a$. Напомним, что аффинное многообразие X называется гибким, если на множестве его гладких точек транзитивно действует группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$. Из гибкости аффинного алгебраического многообразия следует бесконечная транзитивность действия группы $\mathrm{SAut}(X)$ на множестве гладких точек.

Постерный доклад посвящен триномиальным многообразиям, то есть таким аффинным многообразиям, которые задаются системами уравнений следующего вида:

$$c_0 T_0^{l_0} + c_1 T_1^{l_1} + c_2 T_2^{l_2} = 0,$$

где $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}$ — некоторые мономы от переменных T_{ij}, константы $c_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ с некоторыми условиями, $n_0 \geqslant 0, n_1, n_2 > 0$, а l_{ij} — положительные целые числа. Если $n_0 = 0$, то первый моном считается равным единице. В работе [2] были доказаны достаточные условия гибкости триномиальных гиперповерхностей. В работе [3] получено обобщение этого результата на произвольные триномиальные многообразия.

В постерном докладе будут представлены достаточные условия гибкости произвольных триномиальных многообразий.

Работа была выполнена при поддержке проекта в рамках программы "Международное академическое сотрудничество "Гибкость и вычислительные методы"" НИУ ВШЭ.

Ключевые слова — алгебраическое многообразие, триномиальное многообразие, гибкое многообразие, локально нильпотентные дифференцирования.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013) no. 4, 767–823.

[2] S. Gaifullin. On rigidity of trinomial hypersurfaces and factorial trinomial varieties. Preprint, arxiv: `math.AG/1902.06136` (2019).

[3] M. Ignatev, T. Vilkin. On flexibility of trinomial varieties. Preprint, arxiv: `math.AG/2506.20524` (2025).

Локально изотропные группы Стейнберга

Егор Воронецкий

Санкт-Петербургский государственный университет, лаборатория им. П.Л. Чебышева

voronetckiiegor@yandex.ru

Аннотация

Рассмотрим редуктивную групповую схему G над кольцом K. Абстрактная группа точек $G(K)$ достаточно хорошо изучена, когда G расщепляется и имеет ранг хотя бы 2. В этом случае корневые унипотентны порождают элементарную подгруппу $\mathrm{E}_G(K) \leqslant G(K)$, которая оказывается нормальной и совершенной (с несколькими исключениями), а факторгруппа $G(K)/\mathrm{E}_G(K)$ — разрешимой, когда K конечномерное. Также есть классификация подгрупп $G(K)$, нормализуемых $\mathrm{E}_G(K)$.

При ранге хотя бы 3 у элементарной подгруппы есть каноническое центральное расширение $\mathrm{St}_G(K) \to \mathrm{E}_G(K)$, называемое группой Стейнберга, оно задаётся явными образующими и соотношениями. Более того, это универсальное центральное расширение при ранге хотя бы 5, а для групп рангов 3 и 4 можно явно посчитать мультипликатор Шура $\mathrm{St}_G(K)$ в терминах кольца K.

В нерасщепимом случае ситуация сложнее. Если G глобально изотропная, то есть в ней существует всюду собственная параболическая подгруппа, то можно легко определить $\mathrm{E}_G(K)$ и доказать её нормальность, совершенность, а также классифицировать подгруппы $G(K)$, которые ей нормализуются [3, 4, 5, 6, 7]. Этот случай уже обобщает все изотропные группы над полями, в том числе конечные простые группы типа Ли (кроме групп Судзуки, Ри и Титса).

В докладе будет рассказано про локально изотропный случай, когда G достаточно изотропна локально по Зарисскому, но глобально в ней может не быть собственных параболических подгрупп. Примером такой группы $G(K)$ является группа автоморфизмов конечно порождённого проективного модуля P_K постоянного ранга хотя бы 3. Оказывается [1, 2], в такой общности всё ещё можно построить группы $\mathrm{E}_G(K)$ и $\mathrm{St}_G(K)$, обладающие ожидаемыми свойствами.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 19-71-30002.

Ключевые слова — изотропная редуктивная группа, элементарная подгруппа, группа Стейнберга

Список литературы

[1] Воронецкий Е. Ю., *Локально изотропные элементарные группы*, Алгебра и анализ, **36**:2 (2024), 1–26.

[2] Воронецкий Е. Ю., *Локально изотропные группы Стейнберга I. Централъностъ* K_2-*функтора*, Алгебра и анализ, **37**:3 (2025), 22–74.

[3] Куликова Е. А., Ставрова А. К., *Централизатор элементарной подгруппы в изотропной редуктивной группе*, Вестник СПбГУ, **46**:1 (2013), 22–28.

[4] Лузгарёв А. Ю., Ставрова А. К., *Совершенность элементарной подгруппы изотропной редуктивной группы*, Алгебра и анализ, **23**:5 (2011), 140–154.

[5] Петров В. А., Ставрова А. К., *Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах*, Алгебра и анализ, **20**:4 (2008), 160–188.

[6] Stavrova A., *On the congruence kernel of isotropic groups over rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **373** (2020), 4585–4626.

[7] Stepanov A., Stavrova A., *Normal structure of isotropic reductive groups over rings*, J. Algebra, **656** (2024), 486–515.

Аффинные SL(n)-вложения с действием тора сложности один

Гайфуллин Сергей Александрович
МГУ/ВШЭ
sgayf@yandex.ru

Аннотация

В 1972 году В.Л. Попов получил классификацию нормальных аффинных трёхмерных квазиоднородных SL(2)-многообразий. Он показал, что все такие многообразия параметризуются парами (n, h), где n – натуральное число, равное порядку стабилизатора, а $h \in (0, 1]$ – рациональное число, названное высотой данного многообразия. Более того было показано, что стабилизатор точки открытой орбиты циклический, и потому данный многообразия названы SL(2)/$\mathbb{Z}_n$-вложениями.

В работе [1] описаны те SL(2)/$\mathbb{Z}_n$-вложения, которые являются торическими. В работе [5] данная деятельность продолжена для нормальных аффинных SL(n)-вложений. В работе [3] описаны кольца Кокса SL(2)/$\mathbb{Z}_n$-вложений. Оказывается, что тотальное координатное кольцо нормального аффинного SL(2)/$\mathbb{Z}_n$-вложения может быть задано как гиперповерхность в 5-мерном аффинном пространстве, заданная уравнением

$$x_1x_2 + x_3x_4 = y^b.$$

Данная гиперповерхность является частным случаем так называемых триномиальных многообразий, которые появляются как тотальные координатные пространства многообразий с действием тора сложности один, см. [4]. Основной результат, который будет рассказан в докладе – это новое доказательство результата В.Л. Попова о классификации нормальных аффинных SL(2)/$\mathbb{Z}_n$-вложений с помощью теории колец Кокса и результатов работы [4]. Идеей является поднятие действия группы на тотальное координатное кольцо так, чтобы поднятое действие нормализовалось естественным тором, действующим на триномиальном многообразии. Также будут рассказаны некоторые обобщения этого результата, которые можно получить той же техникой.

Ключевые слова — SL(2)-вложение, локально нильпотентное дифференцирование, действие тора, сложность действия.

Список литературы

[1] С.А. Гайфуллин. *Аффинные торические* SL(2)*-вложения*. Мат. сборник, **199**:3 (2008), 3–24.

[2] В.Л. Попов. *Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы* SL(2). Изв. АН СССР. Сер. матем., **37**:4 (1973), 792–832.

[3] V. Batyrev and F. Haddad. *On the Geometry of* SL(2)*-Equivariant Flips*. Moscow Mathematical Journal, **8**:4 (2008), 621–646.

[4] J. Hausen and M. Wrobel. *Non-complete rational T-varieties of complexity one*. Math. Nachr. **290**:5-6 (2017), 815-826.

[5] N. Medved. *Affine toric varieties with an open orbit of an* SL(n)*-action*. arXiv:1812.10058.

Действия неаффинных алгебраических групп и свойство Жордана для групп бирациональных автоморфизмов

Алексей Голота
НИУ ВШЭ, МИАН
agolota@hse.ru

Аннотация

Пусть X – проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, а $\mathrm{Bir}(X)$ – группа бирациональных автоморфизмов многообразия X. Известно, что для некоторых важных классов многообразий группы $\mathrm{Bir}(X)$ обладают свойством Жордана: существует константа $J = J(X)$, такая что каждая конечная подгруппа $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ содержит нормальную абелеву подгруппу $A \triangleleft G$ индекса, не превосходящего $J(X)$. В то же время, Ю. Г. Зархин показал, что группа бирациональных автоморфизмов произведения проективной прямой и эллиптической кривой не жорданова. Я расскажу о гипотетической характеризации многообразий, группы бирациональных автоморфизмов которых не являются жордановыми, а также о некоторых частичных результатах в этом направлении.

Ключевые слова — группа бирациональных автоморфизмов, алгебраическая группа, абелево многообразие, свойство Жордана.

Существенные полугруппы и правила ветвления

Горницкий А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова

gnomage@mail.ru

Аннотация

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли конечной размерности, а $\mathfrak{h}$ — ее полупростая подалгебра. Задача о разложении неприводимого конечномерного представления алгебры $\mathfrak{g}$ в сумму неприводимых представлений подалгебры $\mathfrak{h}$ называется *задачей ветвления*, а ее решение — *правилом ветвления*. Часто правило ветвления оказывается тесно связанным с некоторыми базисами в пространствах представлений алгебры $\mathfrak{g}$, что видно, скажем, на примере базисов Гельфанда-Цейтлина. В 2005 г. Э.Б. Винберг предложил метод построения базисов во всех неприводимых представлениях произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Базисные векторы параметризуются полугруппой Σ, называемой *существенной полугруппой*. Пусть $A := \mathbb{C}[G/U]$, где G — односвязная связная алгебраическая группа, причем $\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}$, а U — максимальная унипотентная подгруппа в G. Тогда $A = \bigoplus_\lambda V(\lambda)^*$ — сумма всех конечномерных неприводимых представлений $\mathfrak{g}$. Полугруппа Σ параметризует линейный базис в A, а некоторая ее подполугруппа $\Sigma' \subset \Sigma$ параметризует линейный базис в подалгебре всех старших векторов относительно $\mathfrak{h}$. В докладе планируется обсудить связь подполугруппы Σ' с задачей ветвления.

Ключевые слова — полупростая алгебра Ли, алгебраическая группа, представление, правило ветвления.

Список литературы

[1] Andrei Gornitskii, *Essential semigroups and branching rules*, Journal of Algebra **681**, 2025, 190-205.

B-нормализуемые подгруппы на сферических многообразиях

Жгун В.С.

МФТИ, НИУ ВШЭ, ФГУ ФЦ НИИСИ

zhgoon@mail.ru

Аннотация

Пусть X — алгебраическое многообразие с действием связной редуктивной группы G. При исследовании группы автоморфизмов особую роль играют действия аддитивной группы, поскольку полупростая часть группы автоморфизмов в случае, когда она алгебраична, может быть восстановлена с помощью этих действий. В случае, когда на многообразии действует группа G, то для описания разложения алгебры Ли группы автоморфизмов в сумму неприводимых G-модулей достаточно описать множество старших векторов, которые порождают B-нормализуемые действия на многообразии X. Для сферического многообразия X, то есть многообразия на котором борелевская подгруппа B действует с открытой орбитой задача описания B-нормализуемых действий была поставлена в работе Р.С.Авдеева и И.В.Аржанцева [1]. В случае, когда X аффинно в работе [2] был получен набор данных, включающий комбинаторные и непрерывные объекты, в терминах которых можно задать B-нормализуемое аддитивное действие единственным образом. Также в этой работе были получены достаточные условия на этот набор данных, при которых существует соответствующее аддитивное действие.

В настоящем докладе я расскажу, каким образом задача об описании B-нормализуемых действий на сферическом многообразии сводится к описанию аддитивных действий на аффинных сферических многообразиях.

Во второй части доклада я обсужу вопрос о том как B-нормализуемое аддитивное действие может быть продолжено на орисферическое многообразие, которое получается с помощью конструкции орисферического стягивания (деформации) многообразия X.

Доклад основан на серии совместных работ с Р.С.Авдеевым.

Ключевые слова — сферические многообразия, корни Демазюра, группы автоморфизмов, аддитивные действия.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, R. Avdeev, Root subgroups on affine spherical varieties, Selecta Math. (N. S.) 28 (2022), no. 3, Article 60, 37 pp.

[2] Авдеев Р. С., Жгун В. С. О существовании B-корневых подгрупп на аффинных сферических многообразиях // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления (ранее - Доклады Академии Наук. Математика). — 2022 — Т. 503, № 1 С. 5-10.

[3] R. Avdeev, V. Zhgoon. Root subgroups on horospherical varieties / Cornell University. Series arXiv ”math”. 2024. No. 2312.03377.

Теория нормальных форм для дифференциальных операторов и гипотеза Диксмье для первой алгебры Вейля

А. Б. Жеглов

МГУ им. М.В. Ломоносова

alexander.zheglov@math.msu.ru

Аннотация

Гипотеза Диксмье для первой алгебры Вейля была сформулирована в статье Диксмье 1968 года [2] и сейчас известна как первая из серии похожих гипотез Диксмье (они появились позже) для алгебр Вейля $A_n = K[x_1, ..., x_n][\partial_1, \ldots, \partial_n]$, $n > 1$, $char(K) = 0$.

Все эти гипотезы, как известно, стабильно эквивалентны другой серии известных гипотез о якобиане [5], [7]. Все эти гипотезы до сих пор остаются открытыми.

В докладе я планирую рассказать схему доказательства гипотезы Диксмье для первой алгебры Вейля, изложенной в препринте [9]. Это доказательство получено несколько неожиданно, с использованием новой техники – теории нормальных форм для дифференциальных операторов [4], создание которой задумывалось для совершенно другого типа задач (явная параметризация пространств модулей пучков без кручения на спектральных алгебраических многообразиях), [1], [8]. Доказательство существенно использует новый результат, полученный с помощью теории нормальных форм, о связи между решениями уравнения струны не взаимно простых порядков и коммутирующими дифференциальными операторами ранга один (обобщающий известный результат для взаимно простых порядков из работы [6]), а также опирается на некоторые оценки для потенциальных контрпримеров к гипотезе Диксмье и технику многоугольников Ньютона [3], в значительной степени давно известные как фольклор.

Ключевые слова — уравнение струны, алгебра Вейля, гипотеза Диксмье.

Список литературы

[1] I. Burban, A. Zheglov, *Cohen-macaulay modules over the algebra of planar quasi-invariants and Calogero-Moser systems*, Proceedings of LMS, 2020. - Vol. 121, no. 4. - P. 1033-1082. arXiv:1703.01762.

[2] J. Dixmier, *Sur les algèbres de Weyl*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968) 209–242.

[3] A. Jorge Guccione, J. Juan Guccione, C. Valqui, *The Dixmier conjecture and the shape of possible counterexamples*, J. of Algebra, 399 (2014), 581–633.

[4] J. Guo, A. Zheglov, *Normal forms for ordinary differential operators, I*, preprint, https://arxiv.org/abs/2406.14414

[5] A. Ya. Kanel-Belov, M. L. Kontsevich, *The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture*, Mosc. Math. J., **7**:2 (2007), 209-218.

[6] A. Schwarz, Mod. Phys. Lett., Vol.06 (1991)

[7] Y. Tsuchimoto, *Preliminaries on Dixmier Conjecture*, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ., Ser. A Math. 24 (2003), 43-59.

[8] A.B. Zheglov, *Schur-Sato theory for quasi-elliptic rings* Proc. Steklov Inst. Math., 320 (2023), 115-160 (special issue dedicated to the memory of A.N. Parshin)

[9] A.B. Zheglov, *The conjecture of Dixmier for the first Weyl algebra is true*, https://arxiv.org/abs/2410.06959

Многообразия минимальных рациональных касательных орисферических многообразий Фано

Завадский Андрей Олегович

МГУ

zavadskiao@gmail.com

Аннотация

Пусть X — гладкое n-мерное комплексное многообразие Фано с числом Пикара 1. Тогда его группа Пикара $\operatorname{Pic} X$ порождена обильным линейным расслоением $\mathcal{L} \to X$ и изоморфна $\mathbb{Z}$. Для антиканонического расслоения имеем $\bigwedge^n \mathcal{T}_X \simeq \mathcal{L}^{\otimes r}$, где $r = \operatorname{ind} X$ — индекс многообразия Фано. Мы можем определить степень замкнутой кривой $C \subset X$:

$$\deg C = \deg \mathcal{L}|_{\widetilde{C}},$$

где $\widetilde{C}$ — нормализация кривой C.

Среди рациональных кривых на X большой интерес представляют кривые минимальной степени. Многообразие касательных направлений к минимальным рациональным кривым в точке x называется *многообразием минимальных рациональных касательных (variety of minimal rational tangents)*, или, сокращенно, VMRT. Алгебро-геометрические свойства многообразий минимальных рациональных касательных, а также их применения в алгебраической геометрии можно найти в обзоре [1].

Следующая гипотеза утверждает, что вложенное орисферическое многообразие Фано с числом Пикара 1 характеризуется его VMRT в точке общего положения:

Гипотеза. Пусть Q — гладкое многообразие Фано с числом Пикара 1, и его VMRT $\mathcal{C}_q \subset \mathbb{P}(T_q Q)$ в общей точке проективно изоморфно VMRT $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(T_x X)$ в точке общего положения орисферического многообразия X с числом Пикара 1. Тогда $Q \simeq X$.

Аналогичная гипотеза характеризации однородных многообразий флагов, ассоциированных с длинным корнем была доказана ранее [2].

В своем докладе я расскажу о начальных шагах доказательства гипотезы. Мы найдем VMRT орисферических многообразий. Они также окажутся проективными орисферическими многообразиями и будут иметь ранг 1 или 2. Далее, имея гладкое многообразие Фано Q с числом Пикара 1, VMRT $\mathcal{C}_q$ которого в его общей точке совпадает с VMRT некоторого орисферического многообразия, мы вычислим два его интересных инварианта: алгебру символов системы распределений, порожденной VMRT в точках общего положения, и группу автоморфизмов VMRT.

Ключевые слова — многообразие Фано, орисферическое многообразие, многообразие минимальных рациональных касательных.

Список литературы

[1] J.-M. Hwang, *Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds*, School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry, Trieste, 2000, ICTP Lect. Notes **6** (2001), 335–393.

[2] J. Hong, J.-M. Hwang, *Characterization of the rational homogeneous space associated to a long simple root by its variety of minimal rational tangents*, Algebraic geometry in East Asia, Hanoi 2005, Adv. Stud. Pure Math. **50**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, 217-236.

Структуры алгебраических моноидов на трёхмерном аффинном пространстве

Зайцева Юлия Ивановна
ФКН НИУ ВШЭ
yuliazaitseva@gmail.com

Аннотация

Я расскажу о полученной классификации структур алгебраических моноидов на трёхмерном аффинном пространстве. Результат основан на редукции общего случая к коммутативным моноидам. Также изучены различные алгебраические свойства всех моноидов, появляющихся в классификации. Доклад основан на совместной работе с Р.С. Авдеевым и И.В. Аржанцевым.

Ключевые слова — Аффинное пространство, алгебраическая группа, алгебраический моноид, групповое вложение.

Список литературы

[1] Ivan Arzhantsev, Roman Avdeev, and Yulia Zaitseva. Algebraic monoid structures on the affine 3-space. https://arxiv.org/abs/2412.09559, 14 pages

Касательные конусы к многообразиям Шуберта для групп Каца–Муди

Михаил Игнатьев
НИУ ВШЭ
mignatev@hse.ru

Аннотация

Пусть G — простая комплексная алгебраическая группа, T — максимальный тор в G, B — борелевская подгруппа в G, содержащая T. Пусть Φ — система корней группы G, Φ^+ — множество положительных корней, Δ — множество простых корней, W — группа Вейля. Обозначим через $\mathcal{F} = G/B$ многообразие флагов, а через $X_w \subseteq \mathcal{F}$ — подмногообразие Шуберта, отвечающее элементу w группы Вейля W. Все такие подмногообразия содержат точку $p = e \mod B$; пусть $C_w = C_p X_w$ — касательный конус к X_w в точке p; заметим, что

$$C_w \subseteq T_p X_w \subseteq T_p \mathcal{F},$$

где T_p обозначает касательное пространство в точке p. Основной вопрос, который будет нас интересовать, — выяснить, для каких элементов группы Вейля касательные конусы могут совпадать. К примеру, $C_w = C_{w^{-1}}$ для любого элемента $w \in W$. Отметим, что в работе [4] были получены достаточные условия совпадения касательных конусов для A_{n-1}. В 2013 году Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов в работе [2] вычислили явно все касательные конусы для систем корней $\Phi = A_{n-1}$ при $n \leqslant 6$. Основываясь на этих вычислениях, Панов выдвинул следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть $I(W)$ — множество инволюций (то есть, элементов, квадрат которых равен* id*) в группе Вейля, $w_1, w_2 \in I(W)$, $w_1 \neq w_2$. Тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.*

В 2014 году Елисеев и М.В. Игнатьев в статье [3] доказали эту гипотезу для типов A_{n-1}, F_4 и G_2; в 2016 году М.А. Бочкарёв, Игнатьев и А.А. Шевченко доказали [1] её для типов B_n и C_n; в том же году Игнатьев и Шевченко проверили, что она верна в случае D_n для так называемых базисных инволюций [5]. В 2020 году те же авторы проверили [6], что гипотеза верна для некоторых пар инволюций, удовлетворяющих дополнительным условиям, в типах E_6, E_7 и E_8. Основным инструментом, который использовался при доказательстве гипотезы, являются так называемые многочлены Костанта–Кумара. Они были определены в работе Б. Костанта и С. Кумара [7]. Оказывается, с каждым элементов $w \in W$ можно связать некоторый многочлен d_w, который зависит только от касательного конуса, поэтому, чтобы показать, что $C_{w_1} \neq C_{w_2}$, достаточно проверить, что $d_{w_1} \neq d_{w_2}$. Именно это и было сделано в указанных выше статьях.

В 1996 году Кумар в статье [8] показал, что аналогичные вопросы можно поставит и для бесконечномерных групп Каца–Муди. Более того, для них касательные конусы будут конечномерными, и для их несовпадения тоже достаточно проверить несовпа-

дение аналогов многочленов Костанта–Кумара. В докладе я планирую обсудить эти вопросы и, в частности, доказать, что эти многочлены не совпадают для инволюций в группе $\tilde{S}_n$ аффинных перестановок для небольших значений n.

Доклад основан на совместной работе с С. Бондарем.

Работа выполнена при поддержке проекта в рамках программы «Международное академическое сотрудничество “Гибкость и вычислительные методы”» НИУ ВШЭ.

Ключевые слова — группа Каца–Муди, многочлен Костанта–Кумара, касательный конус, группа аффинных перестановок.

Список литературы

[1] M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra **465** (2016), 259–286.

[2] D.Yu. Eliseev, A.N. Panov. Tangent cones to Schubert varieties for A_n of lower rank. J. Math. Sci. **188** (2013), no. 5, 596–600.

[3] D.Yu. Eliseev, M.V. Ignatyev. Kostant–Kumar polynomials and tangent cones to Schubert varieties for involutions in A_n, F_4 and G_2. J. Math. Sci. **199** (2014), no. 3, 289–301.

[4] D. Fuchs, A. Kirillov, S. Morier-Genoud, V. Ovsienko. On tangent cones to Schubert varieties. Arnold Math. J. **3** (2017), no. 4, 451–482.

[5] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. On tangent cones to Schubert varieties in type D_n. St. Petersburg Math. J. **27** (2016), no. 4, 609–623.

[6] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. On tangent cones to Schubert varieties in type E. Comm. in Math. **28** (2020), no. 2, 179–197.

[7] B. Kostant, S. Kumar. The nil-Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac–Moody group G. Adv. Math. **62** (1986), 187–237.

[8] S. Kumar. The nil-Hecke ring and singularities of Schubert varieties. Invent. Math. **123** (1996), 471–506

Гипотеза Чилиберто – Ди Дженнаро для гиперповерхностей степени 6

Квитко Ксения Васильевна

НИУ ВШЭ, Москва

ksenia.kvitko@yahoo.com

Аннотация

Пусть X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени d, которая имеет только обыкновенные двойные точки (ноды) в качестве особенностей. Такая гиперповерхность называется *нодальной*. Можно задаться вопросом, является ли она факториальной или, эквивалентно, $\mathbb{Q}$-факториальной. Это свойство имеет важное значение для изучения рациональности (см. [2]). Ч. Чильберто и В. Ди Дженнаро сформулировали в [1] следующую гипотезу. Если $X \subset \mathbb{P}^4$ — нодальная гиперповерхность степени d, имеющая не более $2(d-2)(d-1)$ особых точек, то верно одно из утверждений:

(1) X факториальна;

(2) X содержит плоскость и имеет не менее $(d-1)^2$ нодов;

(3) X содержит квадратичную поверхность и имеет ровно $2(d-2)(d-1)$ нодов.

Гипотеза была доказана для $d = 3$ Г. Финкельбергом и Ю. Вернером [6], для $d = 4$ И. Чельцовым и К. Шрамовым [3, 8], а для $d \geqslant 7$ Р. Клустерманом в [7]. Кроме того, в [4, 5] было показано, что нефакториальное нодальное трёхмерное многообразие $X \subset \mathbb{P}^4$ степени d должно иметь не менее $(d-1)^2$ нодов; более того, если имеет место равенство, то X содержит плоскость.

Используя подход Клустермана, можно доказать гипотезу и для степени $d = 6$.

Переходя к алгебраическим методам, мы разбиваем доказательство Клустермана на несколько частей и исправляем ту часть, которая не работает в нашем случае. А именно пусть X — трёхмерная нодальная гиперповерхность степени $d \geqslant 6$ в $\mathrm{Proj}(R) \simeq \mathbb{P}^4$, и пусть $J \subset R$ — однородный идеал $\mathrm{Sing}(X)$. Пусть $\{\ell = 0\}$ — общая гиперплоскость, не проходящая через $\mathrm{Sing}(X)$. Взяв идеал $\overline{J}$, соответствующий этому гиперплоскостному сечению, и, возможно, добавив другие однородные полиномы f_j степени d_j, где $d-1 \leqslant d_j \leqslant 2d-4$, мы можем построить такой идеал $I \supset \overline{J}$ в $S = R/(\ell)$, что соответствующее фактор кольцо S/I будет артиновым горенштейновым кольцом цокольной степени $2d-4$. Другими словами, мы получаем некоторое локальное кольцо, имеющее симметричную функцию Гильберта $h_I(k)$ для $k \leqslant 2d-4$ и $h_I(k) = 0$ для $k \geqslant 2d-3$. Тогда нижняя граница на число $\#\mathrm{Sing}(X)$ может быть найдена через значения $h_I(k)$. Оказывается, что $\mathrm{Sing}(X)$ содержит полное пересечение мультистепени либо $(1, 1, d-1, d-1)$, либо $(1, 2, d-2, d-1)$, если $h_I(d-4)$ не превосходит $2d-7$. В противном случае Клустерман показал, что X степени $d \geqslant 7$ имеет больше особых точек, чем предполагалось в гипотезе. Последующая оценка на $\#\mathrm{Sing}(X)$ через значения h_I, а затем через функцию Гильберта идеала полного пересечения

I_{CI} мультистепени $(1, 2, d-2, d-1)$ отлично работает в случае $d > 7$. Для $d = 7$ эта нижняя граница в точности равна $2(d-2)(d-1)$. Таким образом, существует только один "плохой" вариант для значений h_I (т.е. когда все неравенства для $h_I(k)$ становятся равенствами). Как показывает геометрический анализ, проведённый в [7], этот вариант не реализуется. Однако этот анализ не применим для гиперповерхностей шестой степени, для которых существует более одного варианта, дающего $\#\mathrm{Sing}(X)$ меньше, чем $2(d-2)(d-1)+1$. Согласно теоремам об унимодальности для такого идеала I, с которым мы работаем, если $h_I(k) \leqslant h_I(k+1)$ для некоторого $k \leqslant d-4$, то $h_I(k+1) \leqslant h_I(k+2)$. Следовательно, мы сводим все возможные "плохие" последовательности $h_I(k)$ к двум случаям и исключаем их также, анализируя размерность пересечения гиперповерхностей фиксированной степени t, проходящих через подсхему, определённую t-однородной компонентой I.

Ключевые слова — факториальность нодальных гиперповерхностей, артиновы горенштейновы кольца.

Список литературы

[1] C. Ciliberto and V. Di Gennaro. Factoriality of certain hypersurfaces of $\mathbb{P}^4$ with ordinary double points. In *Algebraic Transformation Groups and Algebraic Varieties: Proceedings of the conference Interesting Algebraic Varieties Arising in Algebraic Transformation Group Theory held at the Erwin Schrödinger Institute, Vienna, October 22–26, 2001*, pages 1–7. Springer, 2004.

[2] I.A. Cheltsov. Birationally rigid Fano varieties. *Russian Mathematical Surveys*, 60(5):875–965, 2005.

[3] I. Cheltsov. Nonrational nodal quartic threefolds. *Pacific Journal of Mathematics*, 226(1):65–81, 2006.

[4] I. Cheltsov. Factorial threefold hypersurfaces. *Journal of Algebraic Geometry*, 19:781–791, 2010.

[5] I.A. Cheltsov. On a conjecture of Ciliberto. *Sbornik: Mathematics*, 201(7):1069–1090, 2010.

[6] H. Finkelnberg and J. Werner. Small resolutions of nodal cubic threefolds. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 51(2):185–198, 1989.

[7] R. Kloosterman. Maximal families of nodal varieties with defect. *Mathematische Zeitschrift*, 300(2):1141–1156, 2022.

[8] K.A. Shramov. Q-factorial quartic threefolds. *Sbornik: Mathematics*, 198(8):1165–1174, 2007.

О связности группы автоморфизмов аффинного торического многообразия

Вероника Владимировна Киктева

НИУ ВШЭ, Факультет компьютерных наук

vkikteva@hse.ru

Аннотация

Доклад основан на работе [1]. Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, а X — алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{K}$, через $\mathrm{Aut}(X)$ обозначим группу регулярных автоморфизмов многообразия X. В общем случае группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является алгебраической группой. Однако для неё можно определить понятие связности, см. [2] и [3].

Известны примеры аффинных торических многообразий как со связной, так и с несвязной группой автоморфизмов. В [4, лемма 4] и [3, теорема 6] доказывается, что группа автоморфизмов n-мерного аффинного пространства при любом натуральном n является связной. Примером аффинного торического многообразия с несвязной группой автоморфизмов является алгебраический тор $T = (\mathbb{K}^\times)^n$. В данном контексте уместно поставить вопрос о связности группы автоморфизмов произвольного аффинного торического многообразия.

В докладе мы обсудим критерий связности группы автоморфизмов аффинного торического многообразия, сформулированный в комбинаторных терминах и в терминах группы классов дивизоров многообразия. Доказано, что группа автоморфизмов вырожденного аффинного торического многообразия несвязна, а группа автоморфизмов невырожденного аффинного торического многообразия связна тогда и только тогда, когда не существует нетривиальных автоморфизмов группы классов дивизоров многообразия, переставляющих классы T-инвариантных простых дивизоров. Для таких многообразий описана группа компонент группы автоморфизмов. В частности, доказано, что она является конечной.

При поддержке проекта в рамках программы "Международное академическое сотрудничество «Гибкость и вычислительные методы»" НИУ ВШЭ.

Ключевые слова — группа автоморфизмов, торическое многообразие, группа классов дивизоров, кольцо Кокса.

Список литературы

[1] Киктева В.В. О связности группы автоморфизмов аффинного торического многообразия. Матем. сб. 215:10 (2024), 89–113

[2] Chakravarthi Ramanujam. A note on automorphism group of algebraic varieties. Math. Ann. 156 (1964), 25-33

[3] Vladimir Popov. On infinite dimensional algebraic transformation groups. Transform. Groups 19 (2014), no. 2, 549-568

[4] Igor Shafarevich. On some infinite-dimensional groups. II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 45 (1981), no. 1, 214-226

О свойстве Донга для бинарных квадратичных операд

П. С. Колесников

Институт математики им. С.Л. Соболева (Новосибирск)

pavelsk77@gmail.com

Аннотация

Пусть A — векторное пространство над полем $\Bbbk$ характеристики нуль, снабженное одним или несколькими билинейными операциями $\circ_i$, $i \in I$, где I — конечное множество. Для удобства будем полагать, что для любого $j \in I$ найдется такое $i \in I$, что $y \circ_j x = \pm x \circ_i y$ для всех $x, y \in A$. Таким образом, например, некоммутативную ассоциативную алгебру надо рассматривать как систему с двумя операциями умножения.

Формальным распределением над A называется (формальный) степенной ряд, бесконечный в обе стороны:

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}, \quad a_n \in A,$$

через $A[[z, z^{-1}]]$ обозначается пространство всех формальных распределений.

Говорят, что два формальных распределения $a(z), b(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ образуют *локальную пару*, если найдется такое целое $N \geqslant 0$, что

$$a(w) \circ_i b(z)(w - z)^N = 0$$

в пространстве $A[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$ для любого $i \in I$. Свойство локальности формальных распределений над алгебрами Ли играет ключевую роль в теории вертексных алгебр (см., например, [1]). В частности, если $a(z), b(z)$ — локальная пара, то

$$a(w) \circ_i b(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_{i,n}(z) \frac{1}{n!} \partial_z^n \delta(w - z),$$

где $\delta(w - z)$ — формальная дельта-функция. Ряды $c_{i,n}(z)$ называются *конформными n-произведениями* формальных распределений $a(z)$ и $b(z)$, $c_{i,n} = (a_{i(n)} b)$.

Классическая *лемма Донга* утверждает, что если $a(z), b(z), c(z)$ — три попарно взаимно локальных формальных распределения над алгеброй Ли ($|I| = 1$), то $[a_{(n)} b](z)$ и $c(z)$ тоже образуют локальную пару. Поскольку применение дифференцирования ∂_z также не нарушает локальности, лемма Донга позволяет порождать *конформные алгебры формальных распределений* любым семейством попарно взаимно локальных рядов над алгебрами Ли.

Утверждение, аналогичное лемме Донга, также верно для формальных распределений над ассоциативной алгеброй. С другой стороны, для правосимметричных (пре-лиевых) алгебр это утверждение неверно. Возникает естественный вопрос: как определить, для каких многообразий алгебр аналог леммы Донга верен. Понятно, что этот

вопрос касается тождеств степени два и три, выполняющихся на всех алгебрах такого многообразия. Следовательно, речь идет о свойствах бинарной квадратичной операды [2], определяющей данное многообразие.

Именно, пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V, R)$ — бинарная квадратичная операда, где V — пространство бинарных операций ($\dim V = |I| < \infty$), R — S_3-модуль определяющих соотношений. Говорим, что $\mathcal{P}$ обладает *свойством Донга*, если для любой $\mathcal{P}$-алгебры A и для любых попарно взаимно локальных формальных распределений $a, b, c \in A[[z, z^{-1}]]$ ряды $(a_{i(n)} b)(z)$ и $c(z)$ образуют локальную пару для всех $i \in I$, $n \geqslant 0$.

Нам удалось установить следующий критерий.

Теорема 1 [3]. *Бинарная квадратичная операда $\mathcal{P}(V, R)$ обладает свойством Донга тогда и только тогда, когда в дуальной операде $\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(V^*, R^\perp)$ операции вида $(x_1 \circ_i x_2) \circ_j x_3$, $i, j \in I$, линейно независимы.*

Например, операды, управляющие многообразиями алгебр Ли (Lie), ассоциативных алгебр (As), алгебр Новикова (Nov), алгебр Пуассона (Pois) и Новикова–Пуассона (NP), обладают свойством Донга. Наоборот, все многообразия, полученные дендриформным расщеплением (например, preLie, preAs=Dend, preCom=Zinb), не обладают свойством Донга.

Классические конструкции теории квадратичных ассоциативных алгебр (черное $\bullet$ и белое $\circ$ произведения Манина) естественно переносятся на бинарные квадратичные операды (см. [2]). Свойство Донга не сохраняется при белом произведении: так, например, As$\circ$Lie изоморфна свободной бинарной операде, задающей многообразие всех неассоциативных алгебр, она не обладает свойством Донга. Оказалось, что черное произведение сохраняет свойство Донга.

Следствие. *Если $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ — бинарные квадратичные операды, обладающие свойством Донга, то их черное произведение Манина $\mathcal{Q} \bullet \mathcal{P}$ также обладает свойством Донга.*

Также была обнаружена любопытная связь свойства Донга для операды $\mathcal{P}$ со строением свободной алгебры *производного многообразия* $D\mathcal{P} = \mathrm{Nov} \circ \mathcal{P}$, где $\circ$ означает белое произведение Манина операд. В общем случае, белое произведение Манина $\mathcal{Q} \circ \mathcal{P}$ двух бинарных операд — это бинарная подоперада в их тензорном (адамаровом) произведении $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{P}$. Случай, когда $\mathrm{Nov} \circ \mathcal{P} = \mathrm{Nov} \otimes \mathcal{P}$, характерен тем, что для такой $\mathcal{P}$ легко найти явное описание свободной $D\mathcal{P}$-алгебры, порожденной некоторым множеством X [4].

Оказывается, что эти два свойства (лемма Донга и полнота белого произведения с Nov) эквивалентны друг другу.

Теорема 2. *Бинарная квадратичная операда $\mathcal{P}$ обладает свойством Донга тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Nov} \circ \mathcal{P} = \mathrm{Nov} \otimes \mathcal{P}$.

Доклад основан на совместной работе с Б. К. Сартаевым (Университет Нархоз, Алматы, Казахстан). Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований РАН (проект FWNF-2022-0002).

Ключевые слова — локальность, формальное распределение, неассоциативная алгебра, операда.

Список литературы

[1] В. Г. Кац. Вертексные алгебры для начинающих. М.: МЦНМО, 2005.

[2] V. Ginzburg, M. Kapranov, Koszul duality for operads, Duke Math. J., 76(1) (1994) 203–272.

[3] P. S. Kolesnikov, B. K. Sartayev, On the Dong Property for a binary quadratic operad, arXiv:2412.20021 [math.RA].

[4] P. Kolesnikov, F. Mashurov, B. Sartayev, On pre-Novikov algebras and derived Zinbiel variety, SIGMA 20 (2024), 017, 15 pages.

Свойство симметрии одного класса унитарных унипотентных матриц над кольцами многочленов

В.И. Копейко

Калмыцкий государственный университет

kopeiko52@mail.ru

Аннотация

Пусть (R, λ, Λ) – унитарное кольцо, где R – ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x \to \overline{x}$, λ – центральный элемент кольца R такой, что $\lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$ и Λ – аддитивная подгруппа R, удовлетворяющая некоторым условиям. Если положить $\overline{\Lambda} = \{\overline{x}, x \in \Lambda\}$, то получаем еще одно унитарное кольцо $(R, \overline{\lambda}, \overline{\Lambda})$. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$ стандартным способом, положив $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

Определение 1. Матрица $a (\in M_r(R))$ называется Λ-эрмитовой, если она является $(-\lambda)$-эрмитовой, то есть $a = -\lambda a^*$, и все ее диагональные элементы содержатся в Λ.

В работе мы будем использовать блочную форму записи матриц. Более точно, запись $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ означает, что $a, b, c, d \in M_r(R)$. Для натурального r положим $I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r (соответственно 0) обозначает единичную (соответственно нулевую) матрицу порядка r.

Определение 2. Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ называется унитарной, если $\alpha^* I_r^\lambda \alpha = I_r^\lambda$ и называется Λ-унитарной, если, кроме того, диагональные элементы матриц a^*c и b^*d содержатся в Λ.

Множество $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ всех Λ-унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) Λ-унитарной группой.

Определение 3. Ненулевая матрица вида $\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in M_r(R)$, называется нильпотентом степени 2 Λ-унитарного типа, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) матрицы b и ab являются $\overline{\Lambda}$-эрмитовыми, причем $ab = ba^*$;

2) матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми,причем $ca = a^*c$;

3) $bc = a^2$ и $cb = (a^*)^2$.

Отметим, что при выполнении условий 1)-3), матрица α является нильпотентной степени нильпотентности 2.

Предложение ([1], Теорема 1). Пусть k – натуральное число, $\alpha (\in M_{2r}(R))$ – ненулевая матрица. Матрица $e_{2r} - \alpha X^k$ является $\Lambda[X]$-унитарной тогда и только тогда, когда матрица α является нильпотентом степени 2 Λ-унитарного типа.

Пусть π обозначает перестановку из симметрической группы S_n, равную произведению транспозиций $(1\ n)(2\ n-1) \ldots (k\ k+1)$, если $n = 2k$ и равную произведению

$(1\ n)(2\ n-1)\dots(k\ k+2)$, если $n = 2k+1$. Для матричного многочлена $\alpha = \alpha(X) = a_1 + a_2X^{k_2} + \dots + a_nX^{k_n} \in M_{2r}(R[X])$, где $1 \leqslant k_2 < \dots < k_n$, положим $\overline{\alpha(X)} = \alpha(X)_\pi = a_n + a_{n-1}X^{k_2} + \dots + a_1X^{k_n}$.

Теорема. В обозначениях выше, $\alpha(X)^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{\alpha(X)}^2 = 0$. В этом случае, для произвольного натурального k, матрица $e_{2r} - \alpha(X)X^k$ является $\Lambda[X]$-унитарной тогда и только тогда, когда матрица $e_{2r} - \overline{\alpha(X)}X^k$ является $\Lambda[X]$-унитарной, причем матрицы a_1 и a_n являются нильпотентами степени 2 Λ-унитарного типа.

В [1] автором была введена ниль-подгруппа $Unip_1K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ унитарной нильпотентной по Бассу K_1–группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, порожденная всеми классами с представителями вида $e_{2r} - \alpha X^k$ при некоторых натуральных r, k, где $\alpha(\in M_{2r}(R))$ – нильпотент степени 2 Λ-унитарного типа. Для построенной ниль-группы в [1] был получен ряд структурных результатов, аналогичных хорошо известным свойствам нильпотентной по Бассу K_1–группы $NK_1(R)$ из алгебраической K-теории. Теорема позволяет расширить построенную (унитарную) ниль-группу путем добавления новых образующих с представителями, описанными в теореме и получить для данной группы аналогичные свойства.

Список литературы

[1] В. И. Копейко. О структуре унитарных ниль K_1-групп. - Записки научных семинаров ПОМИ, 522 (2023), 84-100.

Automorphisms of Fano Threefolds of Type 4-1

Крюгер Алекс Вилларо

ВШЭ, МИАН

alex@geometriamafia.ru

Аннотация

Трёхмерное многообразие Фано типа 4-1 является гладким дивизором мультистепени $(1, 1, 1, 1)$ в произведении четырёх проективных прямых $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Такое многообразие X содержит шесть выделенных кривых рода 1 и шестнадцать выделенных точек. Эти конфигурации позволяют явно описать модульный стек трёхмерных многообразий Фано типа 4-1, их трёхмерное грубое модульное пространство и группы автоморфизмов.

Группа $\mathrm{Aut}(X)$ содержит нормальную подгруппу

$$N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4,$$

действующую свободно и транзитивно на 16 выделенных точках. Стабилизатор одной из этих точек изоморфен одной из групп

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad S_3,$$

и

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq N \rtimes G.$$

Постер основан на работе, находящейся в стадии подготовки.

Ключевые слова — Группы автоморфизмов, трёхмерные многообразия Фано, модули, производные категории.

Список литературы

[1] Ivan Cheltsov, Maksym Fedorchuk, Kento Fujita, and Anne-Sophie Kaloghiros. K-moduli of pure states of four qubits. 2024. arXiv: 2412.19972 [math.AG].

[2] Alexander Kuznetsov. Derived categories of families of Fano threefolds. 2022. arXiv: 2202.12345 [math.AG]

[3] Alexander Kuznetsov and Yuri Prokhorov. ”Rationality over nonclosed fields of Fano threefolds with higher geometric Picard rank”. In: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 23.1 (2024), pp. 207-247.

Категории Делиня и их приложения к теории представлений и квантовой теории поля

Максименко Дарья Максимовна

МГУ, Москва

daria.m.maksimenko@math.msu.ru

Аннотация

Основным техническим инструментом в нашей работе являются категории Делиня, которые интерполируют категории представлений $Rep(GL_N)$, $Rep(O_N)$, $Rep(Sp_N)$ для натурального N, а также позволяют аналитически продолжить эти категории для любого комплексного числа. В частности, можно говорить о матрицах комплексного размера, что бывает полезно для вычислений в теоретической физике.

В своей работе мы изучаем важный объект теории представлений – центр на критическом уровне для $\mathfrak{gl}_t$, где $t \in \mathbb{C}$. У нас получилось реализовать центр как Пуассонову алгебру в Ind-замыкании категории Делиня. Мы также разработали метод реализации универсальных обертывающих алгебр Ли комплексного ранга, проиллюстрировав этот метод на примерах.

Еще одним аспектом нашей работы являются квантовые теории поля, обладающие категорными симметриями. В своём докладе я расскажу об известных результатах и о наших продвижениях в доказательстве категорной теоремы Голдстоуна.

Работа поддержана грантом фонда ”Базис” 24-10-3-23-1.

Список литературы

[1] B. Feigin, E. Frenkel ”Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikii algebras”.

[2] A. Chervov, A. Molev ”On higher order Sugawara operators”, arXiv: 0808.1947

[3] Damon J. Binder, Slava Rychkov ”Deligne Categories in Lattice Models and Quantum Field Theory, or Making Sense of O(N) Symmetry with Non-integer N”, arXiv: 1911.07895

Инвариантные симплектические структуры на нильпотентных группах Ли

Д.В. Миллионщиков

МГУ имени М.В. Ломоносова

dmitry.millionschikov@math.msu.ru

Аннотация

Мы будем обсуждать левоинвариантные симплектические структуры на нильпотентных группах (алгебрах) Ли. Известно, что при помощи симплектической формы можно определить одномерное центральное расширение $\tilde{G}$ ($\tilde{\mathfrak{g}}$) симплектической группы (алгебры) Ли G ($\mathfrak{g}$). Всегда ли можно (с увеличением индекса нильпотентности) центрально расширить группу (алгебру Ли) $\tilde{G}$ ($\tilde{\mathfrak{g}}$) до следующей симплектической группы (алгебры) Ли? В работе Бабенко-Тайманова [1] была рассмотрена бесконечная башня последовательных одномерных центральных расширений нильпотентных групп (алгебр) Ли с чередованием "симплектическая – контактная (группа) алгебра Ли". Эта башня последовательных центральных расширений строится по положительной части W+ алгебры Витта W. В недавней работе Тайманова [2] было сформулировано несколько интересных открытых вопросов о свойствах подобных башен в духе сформулированного выше вопроса. Доклад будет посвящен ответам на эти вопросы, с использованием, в частности, результатов [3].

Ключевые слова — нильпотентная группа Ли, симплектическая структура, центральное расширение, аффинный коцикл.

Список литературы

[1] И.К. Бабенко, И.А. Тайманов, *О существовании неформальных односвязных симплектических многообразий*, УМН, **53**:5 (1998), 225–226

[2] И.А. Тайманов, *Центральные расширения алгебр Ли, динамические системы и симплектические нильмногообразия*, Труды МИАН, **327** (2024), 317–329

[3] Д.В. Миллионщиков, *Деформации филиформных алгебр Ли и симплектические структуры*, Труды МИАН, **252** (2006), 194–216

Инволюции Маркова на треугольных и кубических поверхностях

Александр Перепечко

НИУ ВШЭ

a@perep.ru

Аннотация

Данная работа сделана совместно с Дмитрием Чунаевым и Даниилом Шуниным и поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

В последнее время появилось много обобщений *поверхности Маркова*, задаваемой уравнением $xyz = x^2 + y^2 + z^2$ в $\mathbb{A}^3$. В первую очередь они интересны наличием тройки инволюций, свободно порождающих подгруппу конечного индекса в $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$.

Мы вводим класс *треугольных* аффинных поверхностей, то есть допускающих пополнение треугольником из (-1)-кривых, который включает в себя большинство таких обобщений, и приводим эти поверхности к каноническому виду.

Теорема. Пусть S — нормальная аффинная поверхность, допускающая пополнение треугольником из (-1)-кривых. Тогда она изоморфна кубической поверхности

$$\{xyz = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d\} \subset \mathbb{A}^3$$

для некоторых a, b, c, d из основного поля.

Мы также приводим полное описание группы автоморфизмов поверхности S в зависимости от параметров a, b, c, d.

Наконец, мы рассматриваем более общий случай квазипроективной поверхности с изолированными особенностями, допускающей пополнение треугольником из (-1)-кривых. В этом случае мы приводим бинарное дерево из $\mathbb{P}^1$-расслоений на такой поверхности и выражаем её группу автоморфизмов как конечное расширение подгруппы в $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$, действующей на данном дереве и включающей указанные выше инволюции.

Ключевые слова — аффинная поверхность, группа автоморфизмов, пополнение, инволюция.

Список литературы

[1] А. Ю. Перепечко, *Автоморфизмы поверхностей марковского типа*, Матем. заметки, 110:5 (2021), 744–750; Math. Notes, 110:5 (2021), 732–737.

[2] A. Perepechko and M. Zaidenberg. *Automorphism groups of rigid affine surfaces: the identity component*, to appear in: Algebr. Geom., 2026.

Гибкость цилиндров над триномиальными гиперповерхностями

М.В. Петров
МГУ, НИУ ВШЭ
m.v.petrov@hse.ru

Аннотация

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, X — аффинное алгебраическое многообразие. Цилиндром над аффинным многообразием X называется многообразие $X \times \mathbb{A}^1$. Группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ — это подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$, порождённая всеми однопараметрическими унипотентными алгебраическими подгруппами, то есть подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля $\mathbb{G}_a$. Аффинное алгебраическое многообразие X называется гибким, если группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек X транзитивно. Многообразие называется жёстким, если на нём нет нетривиальных $\mathbb{G}_a$-действий.

Триномиальная гиперповерхность задаётся одним уравнением вида

$$T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} = 0,$$

где $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}$ — мономы от независимых переменных T_{ij}, $n_0 \geqslant 0$, $n_1, n_2 \geqslant 1$ — натуральные числа, а l_{ij} — положительные целые числа. Если $n_0 = 0$, то соответствующий моном T_0 полагается равным единице. В работе [2] получен критерий жёсткости триномиальной гиперповерхности. В ещё не опубликованной совместной работе с С.А. Гайфуллиным было доказано необходимое условие гибкости цилиндров над триномиальными многообразиями, а именно тривиальность инварианта Макар-Лиманова. В докладе будет рассказано о том, что нежёсткость равносильна гибкости цилиндра в случае триномиальных гиперповерхностей, которые сами по себе не являются цилиндрами.

Ключевые слова — алгебраическое многообразие, триномиальное многообразие, гибкое многообразие, локально нильпотентное дифференцирование.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013) no. 4, 767–823.

[2] S. Gaifullin. On rigidity of trinomial hypersurfaces and factorial trinomial varieties. Preprint, arxiv: `math.AG/1902.06136` (2019).

Двухсторонние идеалы в универсальных обёртывающих алгебрах алгебр петель

Петухов А.В.
ИППИ РАН им. А.А. Харкевича
alex--2@yandex.ru

Аннотация

В своём докладе я хотел поговорить о моей совместной работе с С. Сьеррой, посвящённой двухсторонним идеалам в универсальных обёртывающих алгебрах алгебр петель. Ключевая теорема для всех таких идеалов J в том, что существует счётная последовательность двухсторонних идеалов $J_1, J_2, \ldots$ такая, что J содержит все элементы последовательности $J_1, J_2, \ldots$, начиная с некоторого места (конструкция напоминает конструкцию предела последовательности). Таким образом, изучение двухсторонних идеалов для универсальных обёртывающих алгебр алгебр петель сводится к изучению идеалов в счётном числе факторов по идеалам $J_1, J_2, \ldots$. В данном случае эти факторы являются ассоциативными подалгебрами в универсальных обёртывающих алгебрах конечномерных алгебр Ли. Полностью аналогичное утверждение выполнено и для симметрических алгебр алгебр петель, рассматриваемых как пуассоновы алгебры. Для этих пуассоновых алгебр радикальные пауссоновы идеалы допускают классификацию и описание в терминах орбит действия некоторой конечномерной группы на подходящем аффинном многообразии.

Похожие результаты могут быть получены для разных многих классов бесконечномерных алгебр Ли (алгебры Витта и Вирасоро, локально простые алгебры, локально нильпотентные алгебры) и всё это может рассматриваться в контексте “расширения метода орбит Кириллова на бесконечмерные алгебры Ли” [1, 2, 3, 4, 5].

Ключевые слова — двухсторонние идеалы, пуассоновы алгебры, алгебры петель, аффинные алгебры.

Список литературы

[1] On the two-sided ideals of Loop Lie algebras, совместная статья со Сьюзан Сьеррой сейчас пишется.

[2] The Poisson spectrum of the symmetric algebra of the Virasoro algebra, совместная статья со Сьюзан Сьеррой, Compositio Mathematica 159-5 (2023), 933 - 984.

[3] The orbit method for locally nilpotent infinite-dimensional Lie algebras, совместная статья с Михаилом Игнатьевым, J. Algebra 585 (2021), 501–557, see also arXiv.org/abs/2004.01068.

[4] Primitive ideals of $U(\mathfrak{sl}(\infty))$, совместная статья с Иваном Пенковым, Bulletin of London Mathematical Society **50** 2018, 435–448.

[5] On ideals in the enveloping algebra of a locally simple Lie algebra, совместная статья с Иваном Пенковым, International Mathematical Research Notices **13** (2015), 5196–5228, arXiv:1210.0466.

Аффинные моноиды с активной группой обратимых элементов

Екатерина Преснова
НИУ ВШЭ

Аннотация

Пусть X — нормальное неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, и пусть дан морфизм $X \times X \to X, (x, y) \mapsto x * y$. Тогда X называется алгебраическим моноидом, если для всех $x, y, z \in X$ выполнено $x * (y * z) = (x * y) * z$ и найдется такая точка $1 \in X$, что $x * 1 = 1 * x = x$. Группа обратимых элементов G алгебраического моноида X является алгебраической группой и открыта по Зарисскому в X.

Нас интересует случай, когда $G = U \rtimes T$, где T — тор, U — унипотентная группа, полупрямое произведение задается гомоморфизмом $\psi : T \to \operatorname{Aut} U$. Полупрямое произведение $G = U \rtimes T$ называется активным, если $\dim T + \dim \Im\psi = \dim G$. Понятие активного полупрямого произведения было введено в работе [YZ], и показано, что любой аффинный моноид с активной группой обратимых элементов является аффинным торическим многообразием.

В совместной работе [PZ] с Ю. Зайцевой мы описали все активные моноиды. Более точно, любой активный моноид строится по конусу σ соответствующего торического многообразия, k-мерной регулярной грани $\tau \subset \sigma$ и некоторому набору корней Демазюра конуса σ.

Список литературы

[YZ] Yulia Zaitseva, *Affine monoids of corank one*, Results in Mathematics. 79 (2024), no. 7, article 249

[PZ] Ekaterina Presnova, Yulia Zaitseva, *Affine monoids with active group of invertible elements*, in preparation

T-однородные локально нильпотентные дифференцирования на триномиальных многообразиях

Кирилл Рассолов

МГУ, ВШЭ

kirill.rassolov@math.msu.ru

Аннотация

Известно, что если алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ имеет нулевую характеристику, то существует биекция между алгебраическими действиями аддитивной группы $\mathbb{G}_a$ поля $\mathbb{K}$ на аффинном многообразии X и локально нильпотентными дифференцированиями (ЛНД) на $\mathbb{K}[X]$. Поэтому задачи описания этих классов объектов эквивалентны. Если на X задано действие алгебраического тора T, то на на $\mathbb{K}[X]$ возникает градуировка группой характеров тора T, а ЛНД, однородным относительно этой градуировки, соответствуют T-нормализуемые $\mathbb{G}_a$-действия на X.

Мы получили явный вид однородных ЛНД на $\mathbb{K}[X]$ в случае, когда X является триномиальным многообразием типа 2, а градуировка соответствует естественному действию тора T размерности $\dim X - 1$. В работах [1, 2] аналогичная задача была решена для градуировки, заданой действием максимального квазитора (связной компонентой которого является тор T).

На группе характеров тора можно задать отношение линейного порядка. Тогда всякое ЛНД раскладывается в сумму однородных дифференцирований, где слагаемые наибольшей и наименьшей степени будут локально нильпотентными. Поэтому описание T-однородных ЛНД может стать первым шагом к описанию всех ЛНД на $\mathbb{K}[X]$.

Ключевые слова — локально нильпотентное дифференцирование, $\mathbb{G}_a$-действие, триномиальное многообразие.

Список литературы

[1] Sergey Gaifullin and Yulia Zaitseva. *On homogeneous locally nilpotent derivations of trinomial algebras*. J. Algebra Appl. 18 (2019), no. 10, 1950196:1-19.

[2] Кирилл Рассолов. *Однородные локально нильпотентные дифференцирования на триномиальных многообразиях.* Конференция «Алгебраические группы: сезон белых ночей». Сборник тезисов. (2024), 26–27.

Комбинаторика характеров Эйлера для супералгебры $\mathfrak{gl}(m, n)$

А.Н. Сергеев

Саратовский Государственный Университет

SergeevAN@info.sgu.ru

Аннотация

Работа посвящена исследованию характеров неприводимых конечномерных представлений общей линейной супералгебры $\mathfrak{gl}(m, n)$. Пусть $K(\mathfrak{gl}(m, n))$ - кольцо Гротендика конечномерных представлений. Известна формула для разложения неприводимого характера в виде бесконечной суммы характеров модулей Каца с некоторыми коэффициентами. Характеры Эйлера образуют базис в кольце $K(\mathfrak{gl}(m, n))$. В работе доказывается комбинаторная формула для коэффициентов разложения неприводимых характеров по характерам Эйлера. Как следствие дается новое доказательство формулы для суперразмерности неприводимого модуля и формулы ограничения на подалгебру.

Ключевые слова — характер Эйлера, супералгебра, кольцо Гротендика.

Список литературы

[1] J. Brundan and C. Stroppel. : Highest weight categories arising from Khovanov's diagram algebra IV: the general linear supergroup. J. Eur. Math. Soc. **14** (2012)

[2] Y. Su, R.B. Zhang. : Character and dimension formulae for general linear superalgebra. Adv. in Math. **211** (2007)

[3] A.N. Sergeev. : Combinatorics of irreducible characters for Lie superalgebra gl(m,n). arXiv:2401.12534 math.RT (2024)

Кольца Пухликова–Хованского и многогранники Гельфанда–Цетлина

Е. Ю. Смирнов

ВШЭ, НМУ, GTIIT

evgeny.smirnov@gmail.com

Аннотация

В работе А. В. Пухликова и А. Г. Хованского [3] было предложено описание кольца когомологий торического многообразия X как фактора кольца дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами по аннулятору многочлена объема многогранника моментов многообразия X. Эта конструкция была обобщена К. Кавехом [1], который заметил, что кольцо когомологий многообразия полных флагов может быть получено в результате применения аналогичной конструкции ко многограннику Гельфанда–Цетлина. Впоследствии это описание было использовано в совместной работе докладчика с В. А. Кириченко и В. А. Тимориным [2], в которой была предложена реализация исчисления Шуберта на многообразиях полных флагов при помощи пересечения определенных наборов граней многогранников Гельфанда–Цетлина.

Доклад будет посвящен обобщению этих результатов на случай K-теории гладких торических и флаговых многообразий. При этом для K-теории вместо алгебры дифференциальных операторов нужно рассматривать алгебру, порожденную операторами сдвига на решетке, и факторизовать ее по аннулятору многочлена Эрхарта многогранника. Я собираюсь подробно остановиться на случае многообразия флагов $\mathrm{GL}(n)/B$ и разобрать алгоритм для вычисления произведений классов структурных пучков многообразий Шуберта (или, в комбинаторных терминах, произведений многочленов Гротендика): для этого мы предъявим в кольце многогранника Гельфанда–Цетлина элементы, отвечающие классам структурных пучков многообразий Шуберта, и опишем их произведения в терминах граней многогранников Гельфанда–Цетлина. Полученные результаты обобщают основной результат работы [2]. Кроме того, будет рассказано про аналогичное описание для колец T-инвариантных когомологий и T-инвариантной K-теории гладких торических многообразий и многообразий полных флагов.

Доклад основан на совместной работе с Л. В. Мониным ([4, 5]).

Ключевые слова — K-теория, многообразие флагов, торическое многообразие, многогранник моментов.

Список литературы

[1] Kiumars Kaveh. Note on cohomology rings of spherical varieties and volume polynomial. *J. Lie Theory*, 21(2):263–283, 2011.

[2] Valentina Kirichenko, Evgeny Smirnov, and Vladlen Timorin. Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes. *Russian Mathematical Surveys*, 67(4):685, 2012.

[3] Askold Khovanskii and Alexander Pukhlikov. Finitely additive measures of virtual polyhedra. *Algebra i Analiz*, 4(2):161–185, 1992.

[4] Leonid Monin, Evgeny Smirnov. Polyhedral models for K-theory of toric and flag varieties. *Sém. Lothar. de Combinatoire*, 89B (2023), article #76, 12 pp. (Proceedings of FPSAC2023).

[5] Leonid Monin, Evgeny Smirnov. Polyhedral models for K-theory of toric and flag varieties. In preparation, 2025.

Конечные подгруппы в группе автоморфизмов нетривиальных многообразий Севери–Брауэра

Александра Сонина

НИУ ВШЭ, лаборатория алгебраической геометрии

sasha-sonina@mail.ru

Аннотация

Алгебраическое многообразие X размерности n над полем $\Bbbk$ называется многообразием Севери—Брауэра, если оно становится изоморфным $\mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk}}$ после расширения скаляров до алгебраического замыкания $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$. Мы называем многообразие Севери–Брауэра нетривиальным, если оно не изоморфно $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ над исходным полем $\Bbbk$. Многообразие Севери–Брауэра над полем $\Bbbk$ является тривиальным тогда и только тогда, когда оно имеет $\Bbbk$-точку. Для заданного поля $\Bbbk$ и натурального числа n существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями Севери–Брауэра размерности $n-1$ и центральными простыми алгебрами степени n, которое, более того, сохраняет группы автоморфизмов [1, Глава 5].

Нетривиальные многообразия Севери–Брауэра имеют сложные группы автоморфизмов. Естественный вопрос: «Какие конечные группы могут быть подгруппами этих групп автоморфизмов?» Однако в такой общности вопрос не имеет особого смысла.

Согласно теореме Веддербёрна (см., напр., [1, Теорема 2.1.3]), каждая конечномерная центральная простая алгебра над полем $\Bbbk$ изоморфна матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(D)$ с коэффициентами в центральной алгебре с делением D над $\Bbbk$. Поэтому естественна следующая версия общего вопроса: «Каковы конечные подгруппы групп автоморфизмов многообразий Севери–Брауэра, соответствующих алгебрам с делением?».

Такие многообразия Севери–Брауэра называются минимальными и имеют геометрический смысл: это в точности те многообразия Севери–Брауэра, которые не содержат нетривиальных скрученных линейных подмногообразий Севери–Брауэра (см., напр., [1, Следствие 5.3.5]).

Из теоремы Веддербёрна следует, что каждое нетривиальное многообразие Севери–Брауэра размерности $p-1$ является минимальным, если p — простое число.

Обозначим за μ_n циклическую группу порядка n. В статье [4] было доказано следующее утверждение. Пусть X — нетривиальное многообразие Севери–Брауэра размерности $q-1$ над полем $\Bbbk$, где $q \geqslant 3$ — простое число. Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда существует натуральное число n такое, что G изоморфна подгруппе в $\mu_q \times (\mu_n \rtimes \mu_q)$, где полупрямое произведение является сбалансированным.

Этот вопрос впервые возник в работе [2], где была получена полная классификация конечных подгрупп группы автоморфизмов нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра над полями характеристики ноль. Более того, в [3] было доказано, что любая

конечная подгруппа в $\mathrm{Bir}(S)$, где S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра, сопряжена либо подгруппе в $\mathrm{Aut}(S)$, либо подгруппе в μ_3^3.

В своем докладе я развиваю результат, полученный Анной Савельевой, а именно строю пример, показывающий, что над полем характеристики 0 существует нетривиальное многообразие Севери–Брауэра, подгруппами группы автоморфизмов которого являются все возможные конечные подгруппы. Также были найдены дополнительные ограничения на конечные подгруппы для многообразий над полями положительной характеристики и построены соответствующие примеры, показывающие, что больше ограничений на подгруппы нет.

Ключевые слова — многообразия Севери–Брауэра, минимальные многообразия Севери–Брауэра, конечные подгруппы группы автоморфизмов.

Список литературы

[1] Ph. Gille, T. Szamuely. *Central simple algebras and Galois cohomology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **101**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] C. Shramov. Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces. Eur. J. Math. 7, no. 2, 591–612, 2021.

[3] C. Shramov. *Birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces*. Sb. Math., **211** (2020), no. 3, 466–480.

[4] A. Savelyeva. Finite subgroups of automorphism groups of Severi–Brauer varieties. arxiv:2503.20514

Элементарные подгруппы и главные расслоения редуктивных групп

Анастасия Ставрова

ПОМИ РАН

anastasia.stavrova@gmail.com

Аннотация

Пусть R — коммутативное кольцо с 1. Пусть G — редуктивная групповая схема (для краткости называемая редуктивной группой) над R в смысле [5]. Типичным примером такой группы G является полная линейная группа GL_n.

Элементарная подгруппа $E_n(R)$ группы $GL_n(R)$ — это подгруппа, порожденная матрицами элементарных преобразований I рода, т.е.

$$E_n(R) = \langle 1_n + te_{ij},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ t \in R \rangle.$$

Эта подгруппа была положена Х. Бассом [3] в основу построения алгебраической K-теории. В частности, нестабильный K_1-функтор определяется как фактор-группа $GL_n(R)/E_n(R)$, а K_2 — как ядро некоторого центрального расширения $E_n(R)$. В определении элементарной подгруппы участвует фиксированный базис модуля R^n, но, согласно теореме Суслина [2], $E_n(R)$ не зависит от выбора базиса при $n \geqslant 3$, и, в частности, нормальна в $GL_n(R)$.

В общем случае редуктивных групп над кольцами мы используем следующее определение элементарной подгруппы [1]. Пусть P — собственная параболическая подгруппа редуктивной группы G над R, U_P — ее унипотентный радикал. Определим элементарную подгруппу $E_P(R)$, соответствующую P, как подгруппу в $G(R)$, порожденную $U_P(R)$ и $U_{P^-}(R)$, где P^- — некоторая противоположная к P параболическая подгруппа в G (известно, что такая подгруппа существует и $E_P(R)$ не зависит от ее выбора). Подгруппа P называется строго собственной, если она пересекает собственным образом каждую нетривиальную нормальную полупростую подгруппу в G. Если $P \leqslant Q$ — две строго собственные параболические подгруппы, то $E_P(R) = E_Q(R)$. Если, сверх того, G имеет изотропный ранг $\geqslant 2$ локально в топологии Зариского, что $E_P(R) = E(R)$ не зависит от выбора P и нормальна в $G(R)$.

В случае, когда R является полем, унипотентный радикал U_P любой параболической подгруппы изоморфен как многообразие аффинному пространству, и $U_P(R)$ находится в биекции с R^n, $n \geqslant 1$. В общем случае $U_P(R)$ можно отождествить с точками некоторого проективного R-модуля [5]. Как следствие, элементарная подгруппа обладает следующим полезным свойством: для любого идеала I в R отображение $E_P(R) \to E_P(R/I)$ сюръективно (при том, что для $G(R) \to G(R/I)$ это, вообще говоря, неверно).

Это простое наблюдение часто оказывается полезным для изучения главных G-расслоений. Напомним, что гладкая R-схема X с действием группы G называется главным G-расслоением, если морфизм $G \times_R X \to X \times_R X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, является изоморфизмом (иначе говоря, действие просто транзитивно). Такое расслоение в общем случае локально тривиально в этальной топологии, но не в топологии Зариского. Следующие результаты существенным образом используют свойство сюръективности для элементарной подгруппы.

Теорема 3. *[6] Пусть C — относительная гладкая проективная кривая над гензелевым локальным кольцом R с полем вычетов k, и пусть $C_k = C \times_R k$ — соответствующая кривая над k. Пусть G — односвязная редуктивная группа над C. Если главное G-расслоение E над C тривиально при ограничении на C_k, то оно тривиально локально в топологии Зариского на C.*

Теорема 4. *[9] Пусть G — редуктивная группа над локальным кольцом R с полем вычетов k. Пусть G — редуктивная группа над R и пусть E — главное G-расслоение на $\mathbb{P}^1_R$. Если E тривиально на бесконечности, то оно локально тривиально в топологии Зариского на $\mathbb{P}^1_R$.*

Последняя теорема обобщает различные результаты о расслоениях на $\mathbb{P}^1_R$, которые используются в большинстве современных доказательств гипотезы Гротендика–Серра, таких как [7, 4]. Напомним, что гипотеза Гротендика–Серра утверждает, что если E — главное G-расслоение над произвольной регулярной схемой X, которое тривиально в общих точках X, то оно, опять же, локально тривиально в топологии Зариского.

Приведем еще одно, менее очевидное, свойство элементарной подгруппы.

Лемма 1. *[11, 8] Пусть R — подкольцо коммутативного кольца R', и $h \in R$ — не делитель нуля в R', такой, что $R/h \cong R'/h$, так что имеет место декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_h \\ \downarrow & & \downarrow \\ R' & \longrightarrow & (R')_h \end{array} \tag{1}$$

Пусть G — линейная редуктивная группа над R, P — ее собственная параболическая R-подгруппа. Тогда $E_P((R')_h) \subseteq G(R') \cdot E_P(R_h)$.

Типичные примеры троек R, R', h такого типа возникают в следующих двух случаях:

1. $R' = R_f$ для некоторого элемента $f \in R$, такого что $fR + hR = R$;
2. R — нетерова область и $R' = \hat{R}$ — h-адическое пополнение R' (например, $R = \mathbb{Z}$, $R' = \mathbb{Z}_p$).

В этих случаях декартов квадрат (1) задает покрытие $Spec(R)$ в строго плоской топологии Гротендика (в первом случае — даже в топологии Зариского) и позволяет строить главные G-расслоения над R при помощи склейки главных G-расслоений над R' и R_h при помощи изоморфизма (функции склейки) $g \in G((R')_h)$. Соответственно, приведенная лемма гласит, что если функция склейки содержится в $E_P((R')_h)$, то склейка двух тривиальных расслоений будет тривиальным расслоением над R. Существует и аналогичный результат для элементарных выделенных квадратов топологии Нисневича.

При помощи данной леммы доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *[10] Пусть D — произвольное дедекиндово кольцо, G — односвязная редуктивная группа над D, имеющая строго собственную параболическую D-подгруппу.*

Тогда все главные G-расслоения над D, локально тривиальные в топологии Зариского, тривиальны.

Список литературы

[1] В.А. Петров, А.К. Ставрова, *Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах*, Алгебра и Анализ **20** (2008), 160–188.

[2] А.А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **41** (1977), 235–252.

[3] H. Bass, *K-theory and stable algebra*, Publ. Math. I.H.É.S. **22** (1964), 5–60.

[4] K. Česnavičius, *Grothendieck–Serre in the quasi-split unramified case*, Forum of Mathematics, Pi **10:e9** (2022), 1–30.

[5] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 151–153, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[6] P. Gille, R. Parimala, V. Suresh, *Local triviality for G-torsors*, Mathematische Annalen **380** (2021), 539–567.

[7] I. Panin, *Proof of the Grothendieck–Serre conjecture on principal bundles over regular local rings containing a field*, Изв. РАН. Сер. матем. **84** (2020), 169–186.

[8] I. A. Panin and A. K. Stavrova, *On the Grothendieck-Serre conjecture concerning principal G-bundles over semi-local Dedekind domains*, Зап. научн. сем. ПОМИ **443** (2016), 133–146.

[9] I. Panin, A. Stavrova, *On the Gille theorem for the relative projective line*, arXiv:2305.16627.

[10] I. Panin, A. Stavrova, *On a theorem of Harder*, arXiv:2502.19223.

[11] A. Stavrova, *Homotopy invariance of non-stable K_1-functors*, J. K-Theory **13** (2014), 199–248.

Коумножения на аффинном суперянгиане и квантовый группоид Вейля

Волков В.Д., Стукопин В.А.
МФТИ, ЮМИ
stukopin@mail.ru

Аннотация

Для аффинной нескрученной супералгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$, задаваемой матрицей Картана A, с системой простых корней Π, мы определяем суперянгиан $Y_{\hbar}(\mathfrak{g}(A))$ как квантование супербиалгебры $\mathfrak{g}(A)[t]$ и явно описываем его как супералгебру Хопфа в терминах минималистской ситемы образующих и соотношений в случае когда $\mathfrak{g}(A) = \hat{sl}(m|n, \Pi)$. Мы определяем действие группоида Вейля на аффинном суперянгиане как деформацию действия на $\mathfrak{g}(A)[t]$, уважающую структуру супералгебры Хопфа и показываем, что такая деформация единственна. Используя это действие мы доказываем, что суперянгианы, определяемые различными системами простых корней изоморфны как супералгебры Хопфа. Мы вводим также аффинный суперянгиан Дринфельда $Y_{\hbar}^{D}(\hat{sl}(m|n, \Pi))$ и явно строим изоморфизм между ним и аффинным суперянгианом $Y_{\hbar}(\hat{sl}(m|n, \Pi))$. Используя построенный изоморфизм мы определяем структуру супералгебры Хопфа на $Y_{\hbar}^{D}(\hat{sl}(m|n, \Pi))$. Как следствие получаем, что янгианы Дринфельда, определяемые разными матрицами Картана изоморфны. В докладе уточняются результаты работ [1], [2].

Ключевые слова — аффинный суперянгиан, супералгебра Хопфа, группоид Вейля.

Список литературы

[1] V. D. Volkov, V. A. Stukopin, Affine super-Yangian and a quantum Weyl groupoid, Theoret. and Math. Phys., 216:3 (2023), 1313–1325.

[2] V. D. Volkov, V. A. Stukopin, Группоид Вейля и его действие на аффинном суперянгиане, Зап. научн. сем. ПОМИ, 532 (2024), 119–135.

О семействе скобок Пуассона на $\mathfrak{gl}(n)$, согласованных со скобкой Склянина

Д.В. Талалаев
МГУ им. М.В. Ломоносова, ЯрГУ им. П.Г. Демидова
dtalalaev@yandex.ru

Аннотация

Я расскажу о недавнем результате, полученным совместно с В.В. Соколовым в работе [1]. Мы построили семейство совместных квадратичных скобок Пуассона на $\mathfrak{gl}(n)$, обобщающее скобку Склянина. Подобные скобки появились в нескольких работах в 90-х годах в рамках квантового метода обратной задачи [2], связаны с группами Ли-Пуассона, алгебрами уравнения отражения [3] и многими обобщениями. Для любой из скобок в семействе сдвиг аргумента определяет также совместимую линейную скобку. Большое внимание будет уделено бигамильтоновому формализму для некоторых пучков из этого семейства как методу построения инволютивных подалгебр для линейной скобки. Я приведу несколько интересных примеров семейств такого типа, имеющих отношение как к теории интегрируемых систем, так и к общей задаче об инвариантах.

Еще один феномен предлагаемой конструкции состоит в особом условии на скобки антидиагональных миноров матрицы Лакса для всего рассматриваемого семейства квадратичных скобок: эти скобки имеют лог-канонический вид. Это свойство родственно каноническим Пуассоновым структурам на кластерных алгебрах и существенно используется нами для построения инволютивных подалгебр.

Ключевые слова — квадратичные скобки Пуассона, группы Ли-Пуассона, алгебры уравнения отражения.

Список литературы

[1] Vladimir V. Sokolov, Dmitry V. Talalaev, *On a family of Poisson brackets on gl(n) compatible with the Sklyanin bracket*, arxiv.org/abs/2502.16925

[2] M. Semenov-Tian-Shansky, A. Sevostyanov, (1997) *Classical and Quantum Nonultralocal Systems on the Lattice*. In: Fokas, A.S., Gelfand, I.M. (eds) Algebraic Aspects of Integrable Systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol 26. Birkhäuser Boston.

[3] I.V. Cherednik, *Factorizing particles on a half-line and root systems*, Theoret. Math. Phys **61** (1984), 977-983.

Максимальные коммутативные подалгебры Пуассона и сжатия Инёню–Вигнера полупростых алгебр Ли

Д.А. Тимашев

МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

timashev@mccme.ru

Аннотация

Разложение полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму двух подалгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{h}$ определяет пучок согласованных скобок Пуассона на симметрической алгебре $S(\mathfrak{g})$, из которого по схеме Ленарда–Магри строится коммутативная подалгебра Пуассона $A \subset S(\mathfrak{g})$. Панюшев и Якимова доказали в [1], что алгебра A имеет максимальную возможную степень трансцендентности тогда и только тогда, когда индексы сжатий Инёню–Вигнера алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вдоль подалгебр Ли $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{h}$ равны рангу алгебры $\mathfrak{g}$. Мы получим явную формулу для индекса сжатия Инёню–Вигнера $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{ab}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ вдоль подалгебры $\mathfrak{h}$ (здесь $\mathfrak{h}$ рассматривается как подалгебра Ли, а $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{ab}}$ — абелев идеал в $\mathfrak{g}_0$, на котором $\mathfrak{h}$ действует как на факторпространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$). В частности, мы докажем, что алгебра A имеет максимальную возможную степень трансцендентности тогда и только тогда, когда обе подалгебры Ли $\mathfrak{f}, \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ являются сферическими. Это обобщает результаты Панюшева и Якимовой [1]. Доклад основан на работе [2].

Ключевые слова — полупростая алгебра Ли, сжатие Инёню–Вигнера, коприсоединённое представление, индекс, согласованные скобки Пуассона, вполне интегрируемая система.

Список литературы

[1] D. I. Panyushev and O. S. Yakimova, *Compatible Poisson brackets associated with 2-splittings and Poisson commutative subalgebras of $S(\mathfrak{g})$*, J. London Math. Soc. (2) **103** (2021), no. 4, 1577–1595.

[2] D. A. Timashev, *Index of Inönü–Wigner contractions of semisimple Lie algebras*, Russian J. Math. Phys. **32** (2025), no. 1, 189–195.

Стабилизаторы однородных локально нильпотентных дифференцирований на торических многообразиях

Чунаев Д.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ

dchunaev@hse.ru

Аннотация

Доклад основан на совместной работе с П. Евдокимовой.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Рассмотрим аффинное алгебраическое многообразие X с алгеброй регулярных функций $B := \mathbb{K}[X]$. Обозначим как $\mathrm{LND}(B)$ множество всех локально нильпотентных дифференцирований (ЛНД) алгебры B, то есть таких дифференцирований $\delta\colon B \to B$, что для любого $f \in B$ найдётся такое натуральное число n, что $\delta^n(f) = 0$.

Существует естественное действие группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(B)$ алгебры B на $\mathrm{LND}(B)$ сопряжениями. Обозначим стабилизатор ЛНД δ при этом действии как $\mathrm{Aut}_\delta(B)$. Ранее изучались стабилизаторы ЛНД на некоторых классах многообразий, например, в [3] были описаны стабилизаторы простых дифференцирований на алгебре многочленов от двух переменных, в [1] изучались стабилизаторы ЛНД на поверхностях Данилевского, а в [2] — стабилизаторы ЛНД на некоторых почти жестких многообразиях.

В докладе будет представлен способ описания $\mathrm{Aut}_\delta(B)$, основанный на вычислении $\mathrm{Ker}(\Theta)$, $\mathrm{Im}(\Theta)$ для естественного гомоморфизма ограничения

$$\Theta\colon \mathrm{Aut}_\delta(B) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Ker}(\delta)).$$

Если для δ нет коммутирующих с ним, но не эквивалентных ему ЛНД, то, используя технику, аналогичную технике работы [4], можно показать, что все максимальные торы в группе, порожденной связными алгебраическими подгруппами $\mathrm{Aut}_\delta(B)$, сопряжены. С помощью этой техники удается описать $\mathrm{Aut}_\delta(B)$ для таких однородных ЛНД на торических многообразиях. Также в работе в комбинаторном виде описано условие того, что для данного однородного ЛНД на торическом многообразии нет коммутирующих с ним, но не эквивалентных ему ЛНД.

Ключевые слова — аффинное алгебраическое многообразие, локально нильпотентное дифференцирование, торическое многообразие.

Список литературы

[1] R. Baltazar and M. Veloso. *On isotropy group of Danielewski surfaces*, Commun. Algebra, 49(3) (2021) 1006–1016.

[2] N. Dasgupta and A. Lahiri. *Isotropy subgroups of some almost rigid domains*, J. of Pure and Appl. Algebra, 227 (2023), 107250

[3] L. G. Mendes and I. Pan. *On plane polynomial automorphisms commuting with simple derivations*, J. Pure Appl. Algebra, 221(4), (2016), 875-882

[4] A. Perepechko, A. Regeta. *When is the automorphism group of an affine variety nested?* Transform. Groups, 28 (2023), 401-412

Симметрии и интегрируемость полной симметрической системы Тоды

Г.И.Шарыгин

МГУ им. М.В.Ломоносова

gshar@yandex.ru

Аннотация

Полная симметрическая система Тоды — это прямолинейное (можно даже сказать «наивное») обобщение обычной цепочки Тоды. Она задаётся уравнением Лакса

$$\dot{L} = [M(L), L],$$

где L — симметричная вещественная матрица с нулевым следом, а $M(L) = L_+ - L_-$ — её наивная антисимметризация: разность её верхне- и нижне-треугольных частей. Эту систему можно обобщить на произвольные вещественные полупростые алгебры Ли.

Эта система оказывается примером интегрируемой гамильтоновой системы: первые интегралы этой системы оказываются (рациональными) функциями от матричных элементов, инвариантными относительно сопряжений верхнетреугольными матрицами. Я расскажу о том, почему так происходит и приведу примеры таких функций. Кроме того, я расскажу о том, как построить симметрии этой системы (векторные поля, сохраняющие систему): эта конструкция связана с представлениями алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ и позволяет, в частности, проверить критерий Ли-Бианки интегрируемости этой системы. Доклад основан на совместных работах с Ю.Черняковым и Д.Талалаевым [1], [2].

Ключевые слова — интегрируемые системы, алгебры Ли, представления алгебр Ли

Список литературы

[1] Yu. B. Chernyakov, G. I. Sharygin, *Full symmetric Toda system and vector fields on the group $SO_n(\mathbb{R})$*, `arXiv:2501.00137`

[2] Yury B. Chernyakov, Georgy I. Sharygin, Dmitry V. Talalaev, *The Lie-Bianchi integrability of the full symmetric Toda system*, `arXiv:2506.07113`

Предельные точки для однопараметрических подгрупп для аддитивных действий

Шафаревич Антон

МГУ/НИУ ВШЭ

shafarevich.a@gmail.com

Аннотация

Аддитивным действием на алгебраическом многообразии X называется действие группы $\mathbb{C}^n$ на X с открытой в топологии Зарисского орбитой. На одном алгебраическом многообразии может быть много неэквивалентных аддитивных действий. Так, например, Б. Хассетт и Ю. Чинкель показали, что на проективном пространстве $\mathbb{P}^6$ есть бесконечно много аддитивных действий (см. [1]). Задача описания всех аддитивных действий на заданном многообразии X может быть достаточно сложной. Поэтому разумно попытаться описать аддитивные действия, обладающие некоторыми дополнительными условиями.

В 2023 году К. Кроули в [2] описал все алгебраические многообразия, на которых есть аддитивное действие, удовлетворяющее следующим двум условиям. Первое — число орбит конечное. Второе — для каждой орбиты O_1 есть одномерная подгруппа $H = \langle v \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$ и точка x из открытой орбиты, такие что замыкание орбиты Hx содержит некоторую точку из O_1. В своем докладе я расскажу про аддитивные действия, удовлетворяющие второму условию. В частности, я опишу все проективные гиперповерхности, на которых есть аддитивное действие, удовлетворяющее второму условию.

Список литературы

[1] B. Hassett, Yu. Tschinkel, “Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$”, Int. Math. Res. Not. IMRN, 1999:22 (1999), 1211–1230.

[2] C. Crowley, ”Hyperplane arrangements and compactifications of vector groups”, (2023), arXiv:2209.00052.

Двойственность Пясецкого для сферических линейных представлений

Шунин Д. А.

МГУ/ВШЭ

sshunindaniil@gmail.com

Аннотация

Двойственные линейные представления V и V^* комплексной связной линейной алгебраической группы G одновременно имеют либо бесконечное, либо конечное число орбит. В последнем случае между орбитами в V и V^* имеется биективное соответствие, называемое *двойственностью Пясецкого* [1]. Оно устанавливается при помощи *коммутационного многообразия*

$$\mathfrak{C} = \{(v, v^*) \mid \langle v^*, T_v(Gv)\rangle = 0\} \subset V \oplus V^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает спаривание между V и V^*. Это замкнутое подмногообразие, каждая из неприводимых компонент $\mathfrak{C}_i$ которого совпадает с замыканием конормального расслоения $N^*O = \{(v, v^*) \mid v \in O, \langle v^*, T_v(Gv)\rangle = 0\}$ однозначно определенной орбиты $O \subset V$. И наоборот, замыкание множества N^*O для каждой орбиты O совпадает с одной из компонент $\mathfrak{C}_i$. Точно так же, орбиты Q в V^* находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами $\mathfrak{C}_i$ многообразия $\mathfrak{C}$. Сквозная биекция между орбитами в V и V^* и задает *двойственность Пясецкого*.

К примеру, в случае действия группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ в пространстве V квадратичных форм на $\mathbb{C}^n$ орбитами являются множества O_k форм ранга k. Аналогично, рангом k определяются и орбиты Q_k в двойственном пространстве V^* квадратичных форм на $(\mathbb{C}^n)^*$. Можно показать, что двойственными по Пясецкому здесь являются орбиты O_k и Q_{n-k}, $k = 0, \dots, n$. В общем случае, соответствие может быть устроено весьма разнообразно.

Обозримым классом представлений с заведомо конечным числом орбит является класс *сферических представлений*, т.е. векторных пространств с линейным действием связной редуктивной группы, на которых борелевская подгруппа имеет открытую орбиту. В серии работ [2, 3, 4] получена классификация таких представлений. С ее помощью мы даем полное описание двойственности Пясецкого для орбит сферических линейных представлений.

Ключевые слова — двойственность Пясецкого, сферическое представление.

Список литературы

[1] В. С. Пясецкий, *Линейные группы Ли, действующие с конечным числом орбит*, Функц. анализ и его прил. **9** (1975), № 4, 85--86.

[2] C. Benson, G. Ratcliff, *A Classification of Multiplicity Free Actions*, J. Algebra **181** (1996), no. 1, 152–186.

[3] V. G. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra **64** (1980), 190–213.

[4] A. S. Leahy, *A classification of multiplicity free representations*, J. Lie Theory, **8** (1998), no. 2, 367–391.

Циклы в графах подвыражений

Владимир Щиголев
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
shchigolev_vladimir@yahoo.com

Аннотация

Пусть $\mathfrak{S}(\underline{s}, w)$ — граф, вершинами которого являются все w-подвыражения фиксированного выражения $\underline{s}$ от простых порождающих группы Кокстера, а рёбрами — пары подвыражений с расстоянием Хэмминга 2. Мы доказываем, что $\mathfrak{S}(\underline{s}, w)$ связен и его пространство циклов порождено циклами длин 3,4 и $n+2$, где n пробегает множество всех конечных порядков произведений двух (не обязательно простых) отражений.

Напомним, что для неориентированного графа $G = (V, E)$ *пространство циклов* — это векторное пространство над полем из двух элементов, состоящее из подмножеств множества рёбер E, определяющих подграф с чётными степенями всех вершин, относительно операции симметрической разности.

Пусть (W, S) – система Кокстера. Кратчайшее представление элемента $w \in W$ в виде $w = s_1 \cdots s_m$, где $s_i \in S$, называется *редуцированным выражением*. Один и тот же элемент w может иметь несколько редуцированных выражений, и все они образуют вершины графа, рёбрами которого служат пары выражений полученных друг из друга следующим преобразованием своего подслова:

$$\underbrace{sts\cdots}_{m \text{ множителей}} \to \underbrace{tst\cdots}_{m \text{ множителей}},$$

где m — порядок произведения st. Теорема Мацумото [5] утверждает, что такой граф связен. Более того, пространство циклов этого графа порождается независимыми циклами и циклами, целиком принадлежащими конечным параболическим подгруппам W_J группы W ранга три [6, Theorem 2.17]. Это важный результат, использованный Дж. Уильямсоном и Б. Элайсом для определения диаграматических категорий в [4].

Мы рассматриваем аналогичные задачи для графов подвыражений, которые определяются следующим образом. Рассмотрим конечную последовательность $\underline{s} = (s_1, .., s_m)$ элементов из S, которую мы назовём *выражением*. Её *подвыражение* — это последовательность $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$, где каждый элемент e_i равен либо 0 либо 1. Оно называется *w-подвыражением*, если $s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_m^{e_m} = w$. Все w-подвыражения фиксированного выражения $\underline{s}$ образуют вершины неориентированного графа $\mathfrak{S}(\underline{s}, w)$. Подвыражения играют важную роль в теории представлений, отражая комбинаторику многочленов Каждана-Люстига и бимодулей Зёргеля, см. например [3] и [4]. Рёбрами графа $\mathfrak{S}(\underline{s}, w)$ являются пары w-подвыражений, находящиеся друг от друга на расстоянии Хэмминга 2 (то есть, отличающиеся ровно на двух позициях). Такое определение рёбер имеет следующую геометрическую интерпретацию: пара $\{\underline{e}, \underline{e}'\}$ вершин графа $\mathfrak{S}(\underline{s}, w)$ является его ребром тогда и только тогда, когда галерея $\underline{\Gamma}'$ камер комплекса Кокстера системы (W,S), отвечающая подвыражению $\underline{e}'$, получается из галереи $\underline{\Gamma}$, отвечающей подвыражению $\underline{e}$, сгибом относительно некоторой стенки. Заметим, что обе галереи $\underline{\Gamma}$ и $\underline{\Gamma}'$ начинаются в фундаментальной камере C и заканчиваются в камере wC.

Мною получены следующие результаты:

Теорема 1. *Любой граф $\mathfrak{S}(\underline{s},w)$ связен.*

Теорема 2. *Пространство циклов графа $\mathfrak{S}(\underline{s},w)$ порождено циклами длин 3,4 и $n+2$, где n пробегает множество всех конечных порядков произведений двух (не обязательно простых) отражений.*

Более того, все циклы последней теоремы явно описаны при помощи циклов, возникающих в графах подвыражений для конечных групп диэдра.

Для групп Вейля конечномерных простых комплексных алгебр Ли порядки произведений отражений хорошо известны [2, гл. VI, x1, н. 3]. Отсюда получаем следующую таблицу:

система корней	A_1	$A_n, n\geqslant 2$	B_2,C_2	$B_n,C_n,n\geqslant 3$	D_n,E_6,E_7,E_8	F_4	G_2
длины циклов	3	3,4,5	3,4,6	3,4,5,6	3,4,5	3,4,5,6	3,4,5,8

В ходе доказательства теорем 1 и 2 использовались геометрическое представление групп Кокстера [2, гл. V, x4] и теория линейных групп Кокстера, разработанная Э. Б. Винбергом [1].

Ключевые слова — группа Кокстера, подвыражения, пространство циклов.

Список литературы

[1] Э. Б. Винберг, Дискретные линейные группы, порожденные отражениями, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1971, том 35, выпуск 5, 1072–1112

[2] Н. Бурбаки, Элементы математики, Группы и алгебры Ли, Гл. IV–VI, Москва, Мир, 1972.

[3] V.V. Deodhar, A combinatorial setting for questions in Kazhdan-Lusztig theory, *Geom Dedicata* **36**, 95–119 (1990).

[4] B. Elias, G. Williamson, Soergel calculus, *Represent. Theory*, **20**, 295–374 (2016).

[5] H. Matsumoto. Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés. C. R. Acad. Sci. Paris, 258:34193422, 1964.

[6] M. Ronan, Lectures on buildings, *University of Chicago Press*, Chicago, IL, 2009, Updated and revised.