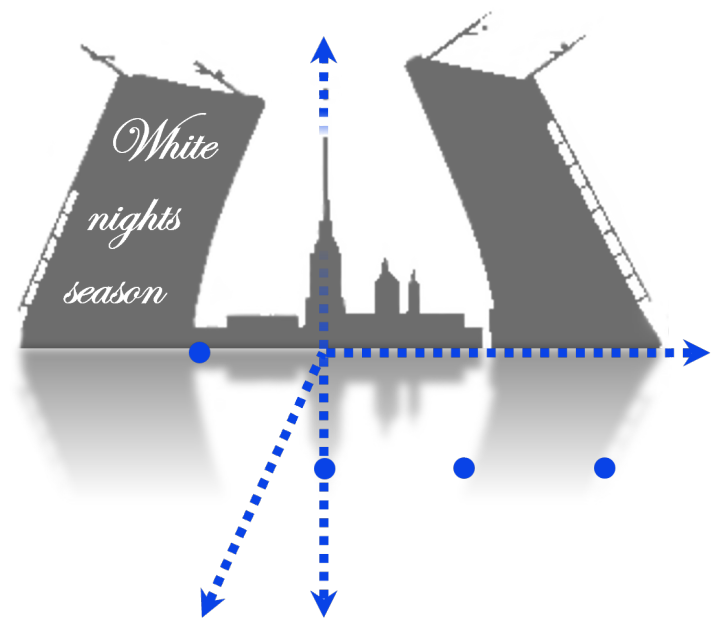
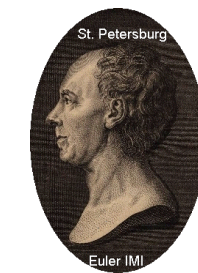


О числе Пикара и размерности однородных пространств



Бельдиев Иван Сергеевич

НИУ ВШЭ, Москва



Основные понятия

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики ноль.

Определение. Пусть X — алгебраическое многообразие с транзитивным действием алгебраической группы G . Тогда X называется однородным пространством для G .

Однородное пространство X изоморфно факторпространству G/H , где H — стабилизатор произвольной точки $x \in X$.

Через $\rho(X)$ мы обозначаем число Пикара алгебраического многообразия X , то есть ранг его группы Пикара.

Историческая справка

Интересен вопрос о связи между размерностью $\dim X$ и числом Пикара $\rho(X)$ однородного пространства X . Так, в работе [1] доказан следующий результат.

Предложение 1. Пусть X — аффинное однородное пространство для алгебраической группы G . Тогда выполнено неравенство $\rho(X) \leq \dim X$.

Случай, когда однородное пространство проективно, тесно связан с обобщённой гипотезой Мукаи. Если X — многообразие Фано с антиканоническим дивизором $-K_X$, через i_X обозначим его псевдоиндекс, то есть наименьшее возможное значение $-K_X \cdot C$, где $C \subseteq X$ — рациональная кривая. Обобщённая гипотеза Мукаи, сформулированная в [3] — следующее утверждение.

Предложение 2. Для многообразия Фано X с псевдоиндексом i_X выполняется неравенство $\rho(X) \cdot (i_X - 1) \leq \dim X$.

Известно, что всякое проективное однородное пространство является многообразием Фано, и для таких пространств неравенство $\rho(X) \cdot (i_X - 1) \leq \dim X$ доказано в той же работе [3].

Основные результаты

В случае, когда X — аффинное или проективное однородное пространство для простой или, в более общем случае, полупростой алгебраической группы, мы доказываем неравенства между $\rho(X)$ и $\dim X$, улучшающие упомянутые выше оценки. Основные результаты работы — следующие два утверждения.

Теорема 1. Пусть X — аффинное однородное пространство для простой группы ненулевой размерности. Тогда выполняются следующие неравенства:

- 1 $\rho(X) \leq \frac{1}{\text{rk}(G)+1} \dim X$;
- 2 $\rho(X) < \sqrt{\dim X}$.

Теорема 2. Пусть X — проективное однородное пространство для простой группы ненулевой размерности. Тогда выполняются следующие неравенства:

- 1 $\rho(X) \leq \frac{2}{\text{rk}(G)+1} \dim X$;
- 2 $\rho(X) < \sqrt{2 \dim X}$.

Из этих теорем несложно вывести следующее предложение, дающее оценку на $\rho(X)$ в случае, когда X — однородное пространство для полупростой группы G .

Предложение 3. Пусть G — полупростая группа, изоморфная почти прямому произведению простых групп $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_m$. Если X — аффинное (соответственно, проективное) однородное пространство для G , то выполнено неравенство

$$\rho(X) \leq \frac{1}{1 + \min \text{rk} G_i} \dim X \text{ (соответственно, } \rho(X) \leq \frac{2}{1 + \min \text{rk} G_i} \dim X \text{)}.$$

Отсюда легко вывести следующее утверждение.

Следствие. Пусть X — аффинное (соответственно, проективное) однородное пространство для полупростой группы G . Тогда выполняется неравенство

$$\rho(X) \leq \frac{1}{2} \dim X \text{ (соответственно, } \rho(X) \leq \dim X \text{)}.$$

Примеры

Пример 1. Пусть $G = (\text{SL}_2(\mathbb{K}))^n$ и $H = T^n$, где $T \subset \text{SL}_2(\mathbb{K})$ — стандартный одномерный тор, состоящий из диагональных матриц. Известно, что $\text{SL}_2(\mathbb{K})/T$ изоморфно гладкой двумерной квадрике Q_2 , при этом $\rho(Q_2) = 1$. Тогда для однородного многообразия $X = G/H$ выполнено $\dim X = 2n$ и $\rho(X) = n$. Таким образом, существуют аффинные однородные многообразия X сколь угодно большой размерности, для которых неравенство $\rho(X) \leq \frac{1}{2} \dim X$ обращается в равенство.

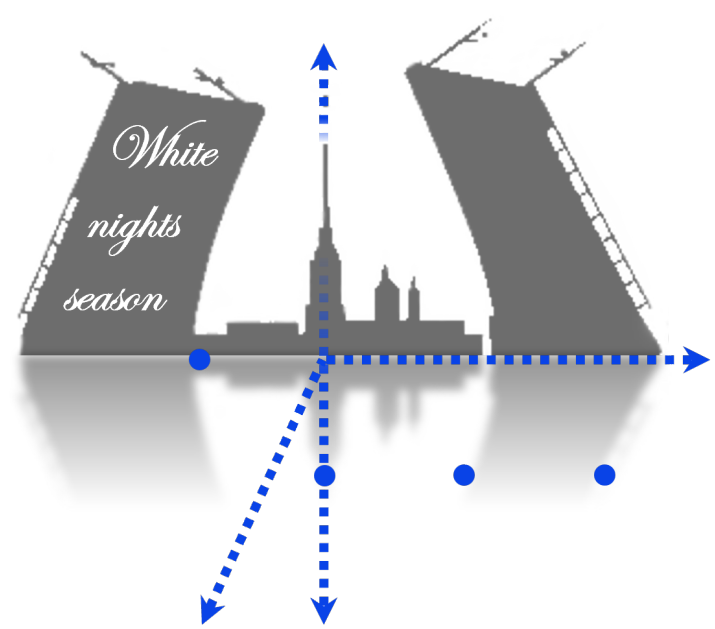
Пример 2. Аналогично предыдущему примеру, пусть $G = (\text{SL}_2(\mathbb{K}))^n$ и $H = B^n$, где $B \subset \text{SL}_2(\mathbb{K})$ — борелевская подгруппа, то есть подгруппа, состоящая из всех верхнетреугольных матриц. Известно, что $\text{SL}_2(\mathbb{K})/B$ изоморфно проективной прямой $\mathbb{P}^1$, при этом $\rho(\mathbb{P}^1) = 1$. Тогда для однородного многообразия $X = G/H$ выполнено $\dim X = \rho(X) = n$. Таким образом, существуют проективные однородные многообразия X сколь угодно большой размерности, для которых неравенство $\rho(X) \leq \dim X$ обращается в равенство.

Пример 3. Приведём пример, показывающий, что наши оценки, вообще говоря, улучшают неравенство из обобщённой гипотезы Мукаи. Рассмотрим $G = \text{SL}_n(\mathbb{K})$ и борелевскую подгруппу $H = B \subset G$. Тогда факторпространство $X = G/H$ изоморфно полному многообразию флагов, для которого $i_X = 2$. Обобщённая гипотеза Мукаи в этом случае даёт оценку $\rho(X) \leq \dim X$, в то время как доказанное нами неравенство — $\rho(X) \leq \frac{2}{n} \dim X$ (которое в данном случае в действительности является точной оценкой).

Список литературы

- [1] Ivan Arzhantsev and Yulia Zaitseva. Affine homogeneous varieties and suspensions. Research in the Mathematical Sciences 11 (2024), no. 2, article 27
- [2] Ivan Beldiev. On Picard number and dimension of algebraic homogeneous spaces. <https://arxiv.org/abs/2412.07044>, 14 pages
- [3] L. Bonavero, C. Casagrande, O. Debarre and S. Druel. Sur une conjecture de Mukai. Comment. Math. Helv. 78, 601–626 (2003). <https://doi.org/10.1007/s00014-003-0765-x>

Algebraic groups: the White Nights season V



Гибкость триномимальных многообразий

Вилкин Тимофей Владиславович

ВШЭ, МГУ, Москва



Основные понятия

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, X — аффинное алгебраическое многообразие, $\mathbb{K}[X]$ — алгебра регулярных функций на X . Обозначим через $\text{SAut}(X)$ подгруппу в группе автоморфизмов многообразия X , порождённую всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля $\mathbb{G}_a$.

Определение 1. Многообразие X называется *жестким*, если оно не допускает нетривиальных $\mathbb{G}_a$ -действий.

Определение 2. Регулярная точка $x \in X^{\text{reg}}$ называется *гибкой*, если её касательное пространство порождается касательными векторами в этой точке относительно всех $\mathbb{G}_a$ -действий.

Определение 3. Многообразие X называется *гибким*, если любая его регулярная точка гибкая.

В работе [1] была доказана следующая теорема:

Теорема 1. [1, Теорема 0.1] Пусть X неприводимое аффинное алгебраическое многообразие размерности хотя бы 2. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) X гибкое;
- (2) Группа $\text{SAut}(X)$ действует на X транзитивно;
- (3) Группа $\text{SAut}(X)$ действует на X бесконечно транзитивно.

Зафиксируем целые числа $n_0 \geq 0$, $k \geq 2$, для каждого $i = 1, \dots, k$ зафиксируем натуральное число $n_i > 0$ и кортеж $l_i = (l_{i1}, \dots, l_{in_i})$. Пусть T_{ij} , $0 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n_i$ — независимые переменные. Определим моном

$$T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} T_{i2}^{l_{i2}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}.$$

Если $n_0 = 0$, полагаем $T_0^{l_0} = 1$.

Определение 4. Аффинное алгебраическое многообразие X называется *триномимальным*, если оно задаётся следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_2 T_0^{l_0} + T_1^{l_1} - T_2^{l_2} = 0, \\ \dots, \\ \lambda_k T_0^{l_0} + T_1^{l_1} - T_k^{l_k} = 0, \end{cases}$$

где для каждого $i = 2, \dots, k$: $\lambda_i \in \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$.

В работе [3] было доказано, что любое триномимальное многообразие неприводимо и нормально.

Введём следующие обозначения:

$$T_i^1 = T_{i1} T_{i2} \dots T_{in_i}, T_i^2 = T_{i1}^2 T_{i2}^2 \dots T_{in_i}^2, \\ \bar{T}_i^{l_i} = T_{i2}^{l_{i2}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}, T_i^{2m_i} = T_{i1}^{2m_{i1}} T_{i2}^{2m_{i2}} \dots T_{in_i}^{2m_{in_i}}.$$

Историческая справка

В работе [2] были получены достаточные условия гибкости триномимальной гиперповерхности.

Теорема 2. [2, Теорема 4] Следующие типы триномимальных гиперповерхностей гибкие:

H_1	$\mathbb{V}(T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2})$
H_2	$\mathbb{V}(T_0^2 + T_1^2 + T_2^2)$
H_3	$\mathbb{V}(T_{01} \bar{T}_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_{21} \bar{T}_2^{l_2})$
H_4	$\mathbb{V}(T_{01}^2 \bar{T}_0^{2m_0} + T_{11}^2 \bar{T}_1^{2m_1} + T_{21} \bar{T}_2^{l_2})$
H_5	$\mathbb{V}(T_{01}^2 \bar{T}_0^{2m_0} + T_{11}^2 \bar{T}_1^{2m_1} + T_{21}^2 \bar{T}_2^{2m_2})$

Основные результаты

В работе [4] было получено обобщение результата Сергея Александровича Гайфулина для произвольных триномимальных многообразий.

Введём следующие типы триномимальных многообразий для $k \geq 3$:

V_1	$\mathbb{V}(\lambda_i T_0^{l_0} + T_1^{l_1} - T_i^{l_i}, 2 \leq i \leq k)$
V_2	$\mathbb{V}(\lambda_i T_0^2 + T_1^{l_1} - T_i^{l_i}, 2 \leq i \leq k)$
V_3	$\mathbb{V}(\lambda_i T_{01} \bar{T}_0^{l_0} + T_1^{l_1} - T_i \bar{T}_i^{l_i}, 2 \leq i \leq k)$
V_4	$\mathbb{V}(\lambda_i T_{01}^2 \bar{T}_0^{2m_0} - T_{11}^2 \bar{T}_1^{2m_1} - T_i \bar{T}_i^{l_i}, 2 \leq i \leq k)$
V_5	$\mathbb{V}(\lambda_i T_{01}^2 \bar{T}_0^{2m_0} + T_{11}^2 \bar{T}_1^{2m_1} + T_i \bar{T}_i^{2m_i}, 2 \leq i \leq k)$

Теорема 3. Многообразия типа V_1, V_3, V_4 гибкие.

Теорема 4. Пусть многообразие X типа V_5 или же типа V_2 , но такое, что существуют хотя бы два индекса $i_1, i_2 \in \{2, \dots, k\}$ такие, что мономы $T_{i_1}^{l_{i_1}}, T_{i_2}^{l_{i_2}}$ не содержат переменных в первой степени. Тогда многообразие X жесткое.

Примеры

Многообразие

$$X: \begin{cases} T_{01}^2 T_{02}^4 + T_{11}^2 T_{12}^6 - T_{21} T_{22}^2 = 0, \\ 2T_{01}^2 T_{02}^4 + T_{11}^2 T_{12}^6 - T_{31} T_{32}^5 = 0, \end{cases}$$

гибкое, поскольку оно типа V_4 .

Выводы и дальнейшие направления исследований

Планируется изучить критерий гибкости для триномимальных гиперповерхностей, а следом и для произвольных триномимальных многообразий.

Список литературы

- [1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. 162 (2013) no. 4, 767–823.
- [2] S. Gaifullin. On rigidity of trinomial hypersurfaces and factorial trinomial varieties. Preprint, arxiv: math.AG/1902.06136 (2019).
- [3] J. Hausen, M. Wrobel. Non-complete rational T-varieties of complexity one. Math. Nachr. 290 (2017), no. 5–6, 815–826.
- [4] M. Ignatev, T. Vilkin. On flexibility of trinomial varieties. Preprint, arxiv: math.AG/2506.20524 (2025).

Многообразия минимальных рациональных касательных орисферических многообразий Фано

Завадский Андрей Олегович
МГУ им. М.В. Ломоносова

Основные понятия

Пусть X — гладкое n -мерное комплексное многообразии Фано с числом Пикара 1. Тогда его группа Пикара $\text{Pic } X$ порождена обильным линейным расслоением $\mathcal{L} \rightarrow X$ и изоморфна $\mathbb{Z}$. Для антиканонического расслоения имеем $\wedge^{\mathbf{n}} \mathcal{T}_X \simeq \mathcal{L}^{\otimes \mathbf{r}}$, где $\mathbf{r} = \text{ind } X$ — индекс многообразия Фано.

Мы можем определить степень замкнутой кривой $C \subset X$:

$$\deg C = \deg \mathcal{L}|_{\bar{C}},$$

где $\bar{C}$ — нормализация кривой C .

Определение. Рациональные кривые минимальной степени на X образуют многообразие минимальных рациональных кривых. Обозначим через $\mathcal{K}$ одну из его неприводимых компонент. Пусть $\mathcal{K}_{\mathbf{x}}$ — подмногообразие кривых из $\mathcal{K}$, проходящих через точку $\mathbf{x}$ общего положения многообразия.

Пусть $\tau_{\mathbf{x}} : \mathcal{K}_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbf{x}}X)$, $C \mapsto T_{\mathbf{x}}C$ — касательное отображение. Его образ $\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \tau_{\mathbf{x}}(\mathcal{K}_{\mathbf{x}})$ называется **многообразием минимальных рациональных касательных (VMRT)**.

Определение. Замкнутая подгруппа H полупростой группы G называется орисферической, если она содержит унитарный радикал борелевской подгруппы группы G . Нормальное многообразие X называется **орисферическим**, если оно содержит открытую G -орбиту, изоморфную G/H .

В работе [1] были классифицированы неоднородные гладкие орисферические многообразия Фано с числом Пикара 1 и найдены их группы автоморфизмов: **Теорема 1.** Такие многообразия исчерпываются следующими тройками $X = (G, \alpha, \beta)$:

- ❶ $(B_{\mathbf{m}}, \alpha_{\mathbf{m}-1}, \alpha_{\mathbf{m}})$, где $\mathbf{m} \geq 3$ и $\text{Aut}(X) = (\text{SO}(2\mathbf{m} + 1) \times \mathbb{C}^{\times}) \ltimes V(\pi_{\mathbf{m}})$;
- ❷ $(B_3, \alpha_1, \alpha_3)$ и $\text{Aut}(X) = (\text{SO}(7) \times \mathbb{C}^{\times}) \ltimes V(\pi_3)$;
- ❸ $(C_{\mathbf{m}}, \alpha_{i+1}, \alpha_i)$ и $\text{Aut}(X) = ((\text{Sp}(2\mathbf{m}) \times \mathbb{C}^{\times})/\{\pm 1\}) \ltimes V(\pi_1)$, где $\mathbf{m} \geq 2$ и $1 \leq i \leq \mathbf{m} - 1$;
- ❹ $(F_4, \alpha_3, \alpha_2)$ и $\text{Aut}(X) = (F_4 \times \mathbb{C}^{\times}) \ltimes V(\pi_1)$;
- ❺ $(G_2, \alpha_2, \alpha_1)$ и $\text{Aut}(X) = (G_2 \times \mathbb{C}^{\times}) \ltimes V(\pi_1)$,

где G — простая группа Ли, а α и β — простые корни. Точнее, $X = G \cdot [\mathbf{v}_{-\pi_{\alpha}} + \mathbf{v}_{-\pi_{\beta}}] \subset \mathbb{P}(V(-\pi_{\alpha}) \oplus V(-\pi_{\beta}))$

Историческая справка

В работах [3] и [4] доказан следующий результат о характеристии однородных многообразий флагов, ассоциированных с длинным корнем:

Теорема. Пусть $X = G/P$, где G — простая группа Ли, а P — максимальная параболическая подгруппа, ассоциированная с длинным простым корнем. Пусть $\mathcal{C}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbf{x}}X)$ — VMRT многообразия X в точке $\mathbf{x}$. Пусть Q — гладкое многообразие Фано с числом Пикара 1, и его VMRT $\mathcal{C}_{\mathbf{q}} \subset \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbf{q}}Q)$ в общей точке

изоморфно как вложенное проективное многообразие VMRT $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$. Тогда $Q \simeq X$.

Наша цель — доказать аналогичную гипотезу, в которой X — орисферическое многообразие из списка теоремы 1.

VMRT орисферических многообразий

Введем на касательной алгебре $\mathfrak{h}$ группы $\text{Aut } X$ градуировку, положив

$$\bar{\mathfrak{h}}_j = \{x \in \mathfrak{h} \mid [\pi_{\alpha}^{\vee}, x] = jx\}$$

и сдвинув градуировку на унитарном радикале $\mathbf{U}$ алгебры так, что $\mathbf{U}_1$ оказался ненулевым слагаемым наибольшей степени в $\mathbf{U}$.

Пусть $P_{-\alpha}$ — отрицательная параболическая подгруппа, соответствующая корню α , а L — ее подгруппа Леви.

Теорема. Пусть X — орисферическое G -многообразие из списка выше, $\mathbf{x}$ — точка его открытой G -орбиты. Тогда многообразие $\mathcal{K}_{\mathbf{x}}$ минимальных рациональных кривых, проходящих через точку $\mathbf{x}$, состоит из проективных прямых в $\mathbb{P}(V(-\pi_{\alpha}) \oplus V(-\pi_{\beta}))$, лежащих в X и проходящих через $\mathbf{x}$.

Если α — длинный корень, то VMRT $\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \overline{L \cdot \langle \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\pi_{\alpha}-\pi_{\beta}} \rangle} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathbf{U}_1)$ — гладкое орисферическое L -многообразие ранга 1.

В случае $(C_{\mathbf{m}}, \alpha_{i+1}, \alpha_i)$, где $\mathbf{m} \geq 2$ и $1 \leq i < \mathbf{m} - 1$, имеем $\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \overline{L \cdot \langle \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{e}_{\beta} + \mathbf{v}_{\pi_{\alpha}-\pi_{\beta}} \rangle} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathbf{U}_1)$

Идея доказательства (длинный корень)

Действие алгебры $\mathfrak{h}$ отождествляет касательное пространство $T_{\mathbf{x}}X$ и подалгебру $\mathfrak{h}^+$ [5]. Таким образом, $T_{\mathbf{x}}X$ отождествляется с $\mathfrak{h}^+$ -модулем $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^+$. Если ограничиваться действием L , то $T_{\mathbf{x}}X$ можно отождествить с $\mathfrak{h}^+$. Можно взять $\mathbf{x} = \mathbf{v}_{-\pi_{\alpha}}$. Через $\mathbf{x}$ проходят проективные прямые в X , поэтому касательное отображение отождествляет $\mathcal{K}_{\mathbf{x}}$ и $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$, поэтому $\mathcal{C}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{h}^+)$. Действуя на $\mathbf{x}$ однопараметрической подгруппой с касательной алгеброй $\langle \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\pi_{\alpha}-\pi_{\beta}} \rangle$, получим проективную прямую. Действуя на нее группой L , получим, что замыкание Z ее L -орбиты содержится в $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$.

Равенство Z и $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ следует из равенства их размерностей и неприводимости $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$. $\dim Z$ на 1 больше числа корней, чьи корневые пространства нетривиально действуют на $\mathbf{e}_{\alpha}$ или на $\mathbf{v}_{\pi_{\alpha}-\pi_{\beta}}$, а $\dim \mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \deg C \cdot \text{ind } X - 2$ [2], причем

$$\text{ind } X = \sum_{\deg \gamma > 0} \langle \gamma \mid \alpha \rangle + \sum_{\lambda \in \Phi_{\mathbf{U}_1}} \langle \lambda \mid \alpha \rangle.$$

Алгебры символов систем распределений, порожденных VMRT

Пусть $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_Q$ — распределение на Q , порожденное конусами $\bar{\mathcal{C}}_{\mathbf{q}}$ в точках общего положения $\mathbf{q} \in Q$. Определим цепочку вложенных распределений $\mathcal{V}^1 \subseteq$

$$\mathcal{V}^2 \subseteq \dots \mathcal{T}_Q:$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^1 &= \mathcal{V}, \\ \mathcal{V}^k &= \mathcal{V}^{k-1} + \mathcal{O}_Q \cdot [\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^{k-1}], \quad k > 1, \end{aligned}$$

Алгебра символов распределения $\mathcal{V}$ в точке $\mathbf{q}$:

$$\text{gr } \mathcal{T}_{\mathbf{q}}Q = \mathcal{V}_{\mathbf{q}}^1 \oplus \mathcal{V}_{\mathbf{q}}^2/\mathcal{V}_{\mathbf{q}}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{d}}/\mathcal{V}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{d}-1}$$

с коммутатором

$$[\xi_{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_{\mathbf{q}}^k, \eta_{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_{\mathbf{q}}^l] = [\xi, \eta]_{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_{\mathbf{q}}^{k+l-1}, \quad \xi \in \mathcal{V}^k, \eta \in \mathcal{V}^l.$$

Известно, что $\dim \text{gr } \mathcal{T}_{\mathbf{q}}Q = \dim Q = n$ [2].

Теорема. Пусть $\mathcal{V}^{\bullet}$ — система распределений на многообразии Q , порожденная VMRT в его точках общего положения. Тогда

- ❶ Если корень α — длинный, то $\text{gr}_{\mathcal{V}^{\bullet}} T_{\mathbf{q}}Q \simeq \mathfrak{h}^+$.
- ❷ Если корень α — короткий, то $\text{gr}_{\mathcal{V}^{\bullet}} T_{\mathbf{q}}Q$ — коммутативная алгебра Ли.

Доказательство опирается на три леммы.

Лемма 1 [2]. Скобка Фробениуса $\wedge^2 \mathcal{V}_{\mathbf{q}} \rightarrow T_{\mathbf{q}}Q/\mathcal{V}_{\mathbf{q}}$ тождественно равна нулю на многообразии $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ бивекторов касательных направлений к конусу $\bar{\mathcal{C}}_{\mathbf{q}}$,

$$\mathcal{B}_{\mathbf{q}} = \{\xi \wedge \eta \mid \xi \in \bar{\mathcal{C}}_{\mathbf{q}}, \eta \in T_{\xi} \bar{\mathcal{C}}_{\mathbf{q}}\}.$$

Лемма 2. Пусть α — длинный корень. Тогда подалгебра в $\text{gr}_{\mathcal{V}^{\bullet}} T_{\mathbf{q}}Q$, порожденная $\mathfrak{g}_1$, является факторалгеброй алгебры $\mathfrak{g}^+$.

Лемма 3. Имеем $\mathbf{U}_1 \wedge (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathbf{U}_1) \subset \mathcal{S}_{\mathbf{q}}$.

Леммы 1-3 устанавливают ограничение сверху на размерность алгебры $\dim \text{gr } \mathcal{T}_{\mathbf{q}}Q \leq n$, из которого следует утверждение теоремы.

Дальнейшие шаги

Мы хотим построить алгебраическую группу, действующую на Q с открытой орбитой. Аналогично случаю орисферического многообразия, мы хотим, чтобы ее касательная алгебра была градуированной алгеброй Ли, продолжающая алгебру символов на отрицательные степени, а нулевое слагаемое алгебры совпадала с алгеброй Ли группы автоморфизмов VMRT.

Список литературы

- [1] B.Pasquier, On some smooth projective two-orbit varieties with Picard number 1, Math. Ann. 344 (2009), №4, 963-987.
- [2] J.-M. Hwang, Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds, School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry, Trieste, 2000, ICTP Lect. Notes 6 (2001), 335–393.
- [3] J. Hong, J.-M. Hwang, Characterization of the rational homogeneous space associated to a long simple root by its variety of minimal rational tangents, Algebraic geometry in East Asia, Hanoi 2005, Adv. Stud. Pure Math. 50, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, 217-236.
- [4] N.Mok, Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents, Third International Congress of Chinese Mathematicians, Part 1,2, AMS/IP Stud. Adv. Math., Vol. 42, Pt. 1, 2, Amer. Math., Soc., Providence, RI, 2008, 41-61
- [5] S.-Y. Kim, Geometric structures modeled on smooth projective horospherical varieties of Picard number one, Transform. Groups 22 (2017), №2, 361-386.

Гипотеза Чилиберто – Ди Дженнаро для гиперповерхностей степени 6

Квитко Ксения Васильевна¹

¹НИУ ВШЭ, Москва



Основные понятия

Алгебраическое многообразие X называется **факториальным**, если группа Пикара $\text{Pic}(X)$ совпадает с группой классов $\text{Cl}(X)$.

Пусть X – гиперповерхность, заданная уравнением

$$\{F = 0\} \subset \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, \dots, x_4] = \mathbb{P}^4.$$

Будем говорить, что X – **нодальная**, если она имеет особенности не хуже обыкновенных двойных точек (нодов). Тогда факториальность X (или эквивалентно, $\mathbb{Q}$ -факториальность) равносильна факториальности кольца $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_4]/(F)$.

Пусть d – степень гиперповерхности X .

(Не)пример 1. Пусть X задана уравнением $\ell_1 g + \ell_2 h = 0$, где однородные многочлены ℓ_1, ℓ_2, g, h выбраны общим образом, причём $\deg \ell_1 = \deg \ell_2 = 1$ и $\deg g = \deg h = d - 1$. Тогда множество $\text{Sing}(X)$ особенностей X состоит из $(d - 1)^2$ нодов и задаётся системой

$$\begin{cases} \ell_1 = 0, \\ \ell_2 = 0, \\ g = 0, \\ h = 0. \end{cases}$$

При этом X содержит плоскость $\ell_1 = \ell_2 = 0$ и не является факториальной.

(Не)пример 2. Пусть X задана уравнением $\ell g + qh = 0$, где $\deg \ell = 1$, $\deg q = 2$, $\deg g = d - 1$ и $\deg h = d - 2$. Тогда X содержит квадрику $\ell = q = 0$ и не является факториальной.

Гипотеза Чилиберто – Ди Дженнаро

Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – нодальная гиперповерхность степени $d \geq 3$, имеющая не более $2(d - 2)(d - 1)$ особых точек. Тогда

- либо она **факториальна**,
- либо она **содержит плоскость** и имеет $(d - 1)^2$ нодов,
- либо она **содержит квадратичную гиперповерхность** и имеет $2(d - 2)(d - 1)$ нодов.

Известные результаты

- Гипотеза верна **для кубических гиперповерхностей** (Finkelberg и Werner 1989).
- Гипотеза верна **в случае кватрик** (Cheltsov 2006, Shramov 2007).
- Гипотеза верна **в случае гиперповерхностей степени $d \geq 7$** (Kloosterman 2022).
- Если X не содержит плоскостей и $\#\text{Sing}(X) \leq (d - 1)^2$, то она факториальна (Cheltsov 2010a; Cheltsov 2010b).

Связь с алгеброй: дефект гиперповерхности

Дефектом $X \subset \mathbb{P}^4$ называют число $h^4(X) - h^2(X)$, т.е. ранг группы $\text{Cl}(X)/\text{Pic}(X)$. И обозначают как $\delta(X)$.

Пусть J – идеал нодов. Тогда существует связь между функцией Гильберта идеала J и дефектом $\delta(X)$ (Dimca 1990):

$$\delta(X) = \#\text{Sing}(X) - h_J(2d - 5). \quad (1)$$

Артиновы горенштейновы кольца

Пусть $H = \{x_4 = 0\}$ – гиперплоское сечение, не проходящее через ноды. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow (R/J)_{k-1} \xrightarrow{\cdot x_4} (R/J)_k \rightarrow (S/J_H)_k \rightarrow 0, \quad (2)$$

где $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_4]$, $S = R/(x_4) \simeq \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, J_H – образ J в S , и верно

$$h_{J_H}(2d - 4) > 0.$$

Выберем в S_{2d-4} подространство W коразмерности 1, содержащее $(J_H)_{2d-4}$, и положим

$$I_e = \begin{cases} \{f \in S \mid fS_{2d-4-e} \subset W\} & e \leq 2d - 4, \\ S_e & e > 2d - 4, \end{cases}$$

Тогда функция Гильберта идеала $I \supseteq J_H$ симметрична

$$h_I(2d - 4 - e) = h_I(e),$$

а (локальное) артиново факторкольцо S/I – **горенштейново**.

Цоколь $\text{Soc}(S/I)$ – аннулятор максимального идеала, является одномерным как векторное пространство.

Цокольная степень – степень многочлена, порождающего $\text{Soc}(S/I)$.

Подход Клустермана

Доказательство гипотезы для $d \geq 7$ с помощью формулы (1) сводится к изучению свойств функций Гильберта артиновых горенштейновых колец S/I цокольной степени $e = 2d - 4$ и опирается на следующие леммы.

Лемма 1

Пусть $d \geq 6$. Если $h_I(d - 4) \leq 2d - 7$, то $\text{Sing}(X)$ содержит полное пересечение мультистепеней $(1, 1, d - 1, d - 1)$ либо $(1, 2, d - 2, d - 1)$.

Лемма 2

Пусть $d \geq 7$. Если $h_I(d - 4) > 2d - 7$, то $\#\text{Sing}(X) \geq 2(d - 2)(d - 1) + 1$.

Набросок доказательства гипотезы. Если $X = \{F = 0\}$ не факториальна, то идеал нодов J содержится в некотором идеале полного пересечения $I_{CI} = (f_1, \dots, f_4)$ по

Лемме 1. Тогда $F \in (f_1, \dots, f_4)$, т.е. $F = \sum_{i=1}^4 h_i f_i$. Так как $\{f_1 = \dots = f_4 = 0\} \subset \text{Sing}(X)$ –

ноды, совокупность $\{f_1, \dots, f_4\}$ образует локальную систему координат. Тогда $h_i \in I_{CI}$. С учётом равенства $\deg F = d$ заключаем, что все $h_i \in (f_1, f_2)$. А значит, X содержит $\{f_1 = f_2 = 0\}$ – либо плоскость, либо квадрику (в зависимости мультистепени I_{CI}).

Гиперповерхности степени 6

Покажем, что утверждение Леммы 2 выполнено и для $d = 6$. Используем оценки Клустермана из таблицы.

k	0	1	2	...	m	...	$d - 4$	$d - 3$	$d - 2$	...
$h_I(k)$	1	≥ 3	≥ 6	...	$\geq 2m + 2$	...	$\geq 2d - 6$	$\geq 2d - 6$	$\geq 2d - 6$	...

Таблица 1. Оценки на значения функции Гильберта идеала I .

Из формулы (1) получаем

$$\#\text{Sing}(X) \geq h_J(2d - 4).$$

Из точной последовательности (2) и по построению идеала I

$$h_J(2d - 5) = \sum_{k=0}^{2d-4} h_{J_H}(k) \geq \sum_{k=0}^{2d-4} h_I(k).$$

Таким образом, имеем

$$\#\text{Sing}(X) \geq (2d - 14) + 2(d - 2)(d - 1).$$

При $d = 6$ правая часть этого неравенства равна 38. Для доказательства Леммы 2 необходимо исключить наборы значений $(h_I(0), \dots, h_I(2d - 4))$, которые в сумме дают 38, 39 и 40. С учётом оценок из Таблицы получаем 6 вариантов:

$$(i) = (1, 3, 6, 6, 6, 6, 3, 1), \quad (ii) = (1, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 1),$$

$$(iii) = (1, 3, 6, 7, 6, 7, 6, 3, 1), \quad (iv) = (1, 3, 7, 6, 6, 6, 7, 3, 1),$$

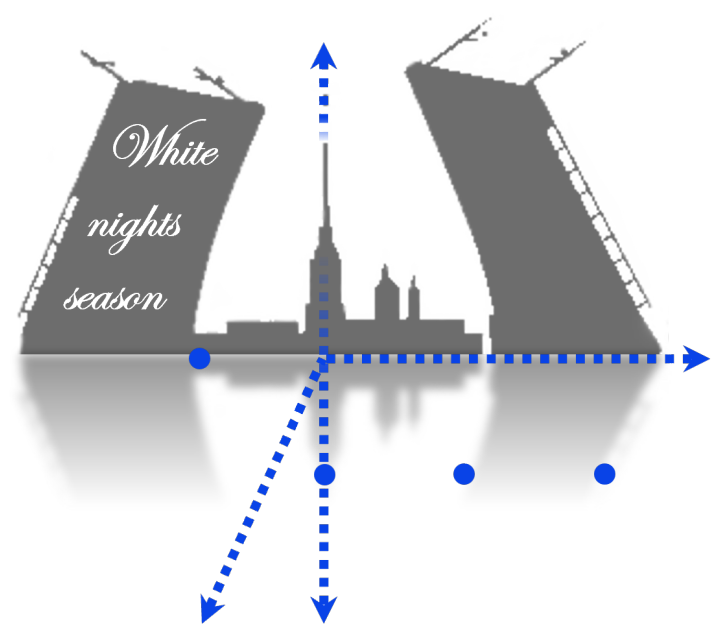
$$(v) = (1, 3, 6, 6, 7, 6, 6, 3, 1), \quad (vi) = (1, 3, 6, 6, 8, 6, 6, 3, 1).$$

Варианты (v) и (vi) не соответствуют никаким функциям Гильберта (например, по теореме Маколея); варианты (iii) и (iv) не обладают необходимым свойством унимодальности (когда после неубывания значений следует невозрастание). В случаях (i) и (ii) рассматриваются числа $d_2, \dots, d_{-1}$ – степени многочленов (по возрастанию) из множества порождающих идеала I . Тогда $d_2 \leq d_1 \leq d_0 \leq d_{-1} \leq 3$ – исходя из значений $h_I(k)$. Однако это противоречит ограничению на сумму $\sum d_i > 2d$.

Список литературы

-  Kloosterman, R. (2022). “Maximal families of nodal varieties with defect”. В: *Mathematische Zeitschrift* 300.2, с. 1141–1156.
-  Cheltsov, I. (2010a). “Factorial threefold hypersurfaces”. В: *Journal of Algebraic Geometry* 19, с. 781–791.
-  Cheltsov, I. (2010b). “On a conjecture of Ciliberto”. В: *Sbornik: Mathematics* 201.7, с. 1069–1090.
-  Shramov, K. (2007). “ $\mathbb{Q}$ -factorial quartic threefolds”. В: *Sbornik: Mathematics* 198.8, с. 1165–1174.
-  Cheltsov, I. (2006). “Nonrational nodal quartic threefolds”. В: *Pacific Journal of Mathematics* 226.1, с. 65–81.
-  Dimca, A. (1990). “Betti numbers of hypersurfaces and defects of linear systems”. В: *Duke Mathematical Journal* 60.1, с. 285–298.
-  Finkelberg, H. и J. Werner (1989). “Small resolutions of nodal cubic threefolds”. В: *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 51.2, с. 185–198.

Algebraic groups: the White Nights season V



О связности группы автоморфизмов аффинного торического многообразия

Киктева Вероника Владимировна

ФКН НИУ ВШЭ, Москва



Необходимые сведения

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Далее X — аффинное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{K}$.

Связность

Пусть S — неприводимое алгебраическое многообразие. Любое отображение $S \rightarrow \text{Aut}(X) : s \mapsto \phi_s$ определяет семейство $\{\phi_s\}_{s \in S}$. Семейство $\{\phi_s\}_{s \in S}$ называется **алгебраическим**, если отображение $S \times X \rightarrow X : (s, x) \mapsto \phi_s(x)$ является морфизмом алгебраических многообразий. Автоморфизм ϕ принадлежит **связной компоненте единицы** $\text{Aut}(X)^0$ в группе $\text{Aut}(X)$, если существует такое алгебраическое семейство, что оно содержит одновременно и ϕ , и тождественный автоморфизм id_X , см. [1, 2].

Примеры.

- (1) $\text{Aut}(\mathbb{A}^n) = \text{Aut}(\mathbb{A}^n)^0$, см. [2, Theorem 6];
- (2) $\text{Aut}((\mathbb{K}^\times)^n) = \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{K}^\times)^n \neq \text{Aut}((\mathbb{K}^\times)^n)^0$.

Аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ и алгебраический тор $(\mathbb{K}^\times)^n$ являются примерами аффинных торических многообразий.

Вопрос. При каких условиях группа автоморфизмов аффинного торического многообразия связна?

Торические многообразия

Нормальное неприводимое алгебраическое многообразие X называется **торическим**, если оно содержит алгебраический тор T в качестве открытого подмножества, причем действие тора на себе продолжается до регулярного действия тора на всём многообразии X .

Напомним соответствие между аффинными торическими многообразиями и рациональными полиэдральными конусами, см. [3]. Обозначим через N решётку однопараметрических подгрупп $\lambda : \mathbb{K}^\times \rightarrow T$ и через $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ двойственную к N решётку. Мы отождествляем решётку M с решёткой характеров тора $\chi : T \rightarrow \mathbb{K}^\times$, причем спаривание $N \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ задано правилом $(\lambda, \chi) \rightarrow \langle \lambda, \chi \rangle$, где $\chi(\lambda(t)) = t^{\langle \lambda, \chi \rangle}$. Пусть σ — полиэдральный конус в рациональном векторном пространстве $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, и $\sigma^\vee$ — двойственный к нему конус в пространстве $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Тогда многообразие $X_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M])$ является торическим, и любое аффинное торическое многообразие можно построить таким образом.

Группа классов и кольцо Кокса

Пусть X — аффинное торическое многообразие с действием тора T , соответствующее конусу σ . В этом разделе полагаем X невырожденным, то есть без обратимых регулярных функций, кроме констант.

Группой классов дивизоров многообразия X называется факторгруппа группы дивизоров Вейля по подгруппе главных дивизоров:

$$\text{Cl}(X) := \text{WDiv}(X) / \text{PDiv}(X).$$

Лучи конуса σ находятся во взаимно однозначном соответствии с T -инвариантными простыми дивизорами. Далее v_i — примитивный вектор на i -ом луче конуса σ , а $[D_i]$ — класс соответствующего ему T -инвариантного простого дивизора в группе классов дивизоров.

Кольцо Кокса является кольцом, градуированным группой классов дивизоров многообразия. В случае невырожденного аффинного торического многообразия

кольцо Кокса совпадает с алгеброй многочленов $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_r]$ с градуировкой $\deg(T_i) = [D_i]$, см. [4].

Результаты

Далее X — аффинное торическое многообразие с действующим тором $T = (\mathbb{K}^\times)^n$, соответствующее конусу σ .

Предложение 1. [5, Предложение 1] Если X вырождено, то группа автоморфизмов X не является связной.

Далее считаем многообразие X невырожденным.

Теорема 1. [5, Теорема 1, следствие 1] Следующие условия эквивалентны:

- (1) группа автоморфизмов X связна;
- (2) автоморфизмы кольца Кокса, нормализующие градуировку группой классов дивизоров, сохраняют эту градуировку;
- (3) не существует такого преобразования $L \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, $L(\sigma) = \sigma$, что $L(v_i) = v_j$, но $[D_i] \neq [D_j]$ для некоторых i, j ;
- (4) не существует нетривиальных автоморфизмов группы $\text{Cl}(X)$, переставляющих элементы $[D_1], \dots, [D_r]$.

Обозначим через Σ_D множество таких отображений $\text{Cl}(X)$ в себя, что они переставляют элементы $[D_1], \dots, [D_r]$, то есть

$$\Sigma_D := \{\phi : \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X) \mid \exists \tau \in S_r : \phi([D_i]) = [D_{\tau(i)}]\}.$$

Теорема 2. [5, Теорема 2] Для невырожденного аффинного торического многообразия X выполняется

$$\text{Aut}(X) / \text{Aut}(X)^0 \simeq \text{Aut}(\text{Cl}(X)) \cap \Sigma_D.$$

В частности,

$$|\text{Aut}(X) / \text{Aut}(X)^0| \leq r!,$$

где r — количество лучей конуса σ .

Далее X — невырожденная аффинная торическая поверхность. Конус $\sigma^\vee$, соответствующий поверхности, можно с помощью замены координат на торе T привести к виду $\text{cone}((1, 0), (a, b))$, где $0 \leq a \leq b$, и (a, b) является примитивным вектором на своём луче.

Предложение 2. [5, Предложение 3] Группа автоморфизмов поверхности X связна тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий: (i) $a = 1$; (ii) $b = 1$; (iii) $a^2 \not\equiv 1 \pmod{b}$.

Список литературы

- [1] Chakravarthi Ramanujam. A note on automorphism group of algebraic varieties. Math. Ann. 156 (1964), 25-33
- [2] Vladimir Popov. On infinite dimensional algebraic transformation groups. Transform. Groups 19 (2014), no. 2, 549-568
- [3] David Cox, John Little, and Henry Schenck. Toric Varieties. Grad. Stud. Math. 124, AMS, Providence, RI, 2011
- [4] David Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Algebraic Geom. 4 (1995), no. 1, 17-50
- [5] Вероника Киктева. О связности группы автоморфизмов аффинного торического многообразия. Матем. сб. 215:10 (2024), 89-113

Algebraic groups: the White Nights season V



Automorphisms of Fano Threefolds of Type 4-1

Alex Villaro Krüger

БШЭ, МИАХ



The Geometry

Definition A Fano threefold of type 4-1 is a smooth divisor

$$X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

of multidegree $(1, 1, 1, 1)$.

- For $1 \leq i \leq 4$ we have a projection

$$\pi_i : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

identifying X with the blowup in a smooth genus-1 curve

$$\Gamma_i \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

- The exceptional divisor is denoted by

$$E_i := \text{Exc}(\pi_i) \subset X.$$

- There is a genus-1 curve

$$\Gamma_{ij} := E_i \cap E_j \subset X$$

for each $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

- For each $\{l\} := \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j, k\}$ we have 4 special points

$$\{p_{l1}, p_{l2}, p_{l3}, p_{l4}\} := E_i \cap E_j \cap E_k$$

which are the ramification points of the degree-2 map $\Gamma_{ij} \rightarrow \mathbb{P}^1$.

In total, we have 16 distinguished points on X , denoted by p_{ij} for $1 \leq i, j \leq 4$.

Isomorphisms of Genus-1 Curves

The 6 curves $\Gamma_{ij} \subset X$ and the 4 curves $\Gamma_i \in (\mathbb{P}^1)^3$ are all isomorphic, but the isomorphisms are not canonical.

- The restriction

$$\pi_i|_{\Gamma_{ij}} : \Gamma_{ij} \xrightarrow{\sim} \Gamma_i$$

is an isomorphism.

- We have isomorphisms

$$\begin{array}{ccccc} & \Gamma_{ij} & & X & \\ & \swarrow \quad \searrow & & \downarrow \pi_j & \\ \Gamma_i & \xrightarrow{\phi_{ij}} & \Gamma_j & \longrightarrow & (\mathbb{P}^1)^3 \end{array}$$

- The composition

$$\begin{array}{ccccccc} & \Gamma_{ij} & & \Gamma_{jk} & & \Gamma_{ki} & \\ & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & \\ \Gamma_i & \xrightarrow{\phi_{ij}} & \Gamma_j & \xrightarrow{\phi_{jk}} & \Gamma_k & \xrightarrow{\phi_{ki}} & \Gamma_i \\ & & \searrow \quad \swarrow & & \swarrow \quad \searrow & & \\ & & \Gamma_l & & \Gamma_l & & \end{array}$$

γ_{il}

is a non-trivial involution $\gamma_{il} : \Gamma_i \xrightarrow{\sim} \Gamma_i$. We have 3 involutions of each of the 4 curves.

Tetrahedron of genus-1 curves

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_1 & \\ & \updownarrow & \\ & \Gamma_4 & \\ \Gamma_2 & \swarrow \quad \searrow & \Gamma_3 \\ & \xrightarrow{\phi_{23}, \phi_{32}} & \end{array}$$

is a collection consisting of

- Smooth genus-1 curves Γ_i at each vertex
- Isomorphisms ϕ_{ij}, ϕ_{ji} at each edge
- $\gamma_{il} := \phi_{ki} \circ \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ is an involution

Isomorphism of tetrahedra of genus-1 curves is a collection of $f_i : \Gamma_i \xrightarrow{\sim} \Gamma'_i$ s.t.

$$\phi'_{ij} \circ f_i = f_j \circ \phi_{ij}$$

- $\mathfrak{S}_4$ acts on the moduli stack of tetrahedra of genus-1 curves by permuting the vertices.

Theorem A The moduli stack of Fano threefolds of type 4-1 is equivalent to the $\mathfrak{S}_4$ -quotient of the moduli stack of tetrahedra of genus-1 curves.

Corollary A.1 All information about the geometry of X is packed in the corresponding tetrahedron of genus-1 curves.

Corollary A.2 Automorphisms of X correspond to pairs (f, σ) where $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ and $f \in \text{Aut}(\Gamma_1)$ acts on the Γ_1 -involutions $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}$ in a certain way determined by σ .

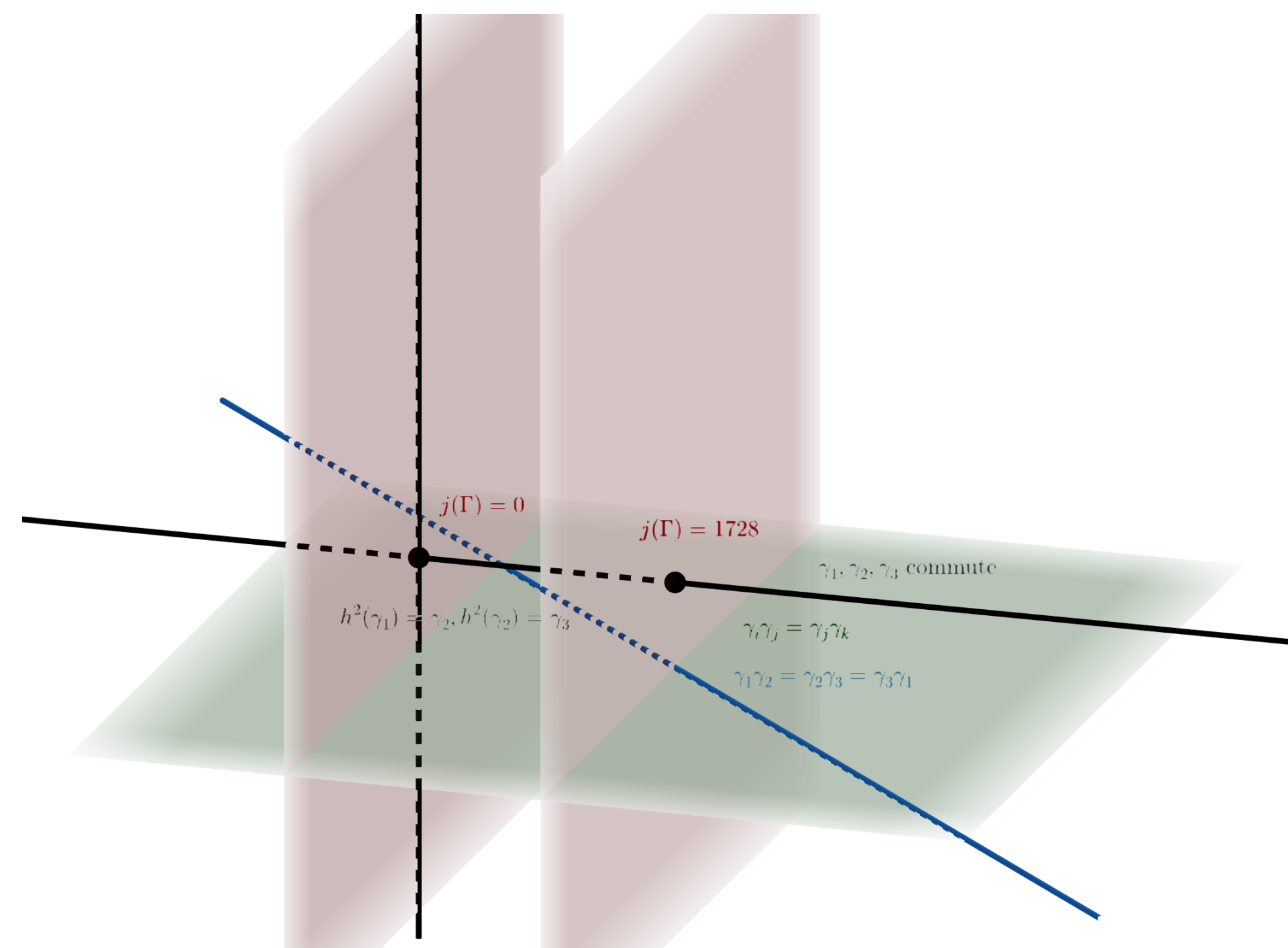
Automorphism Groups

Theorem B

$$\begin{aligned} \text{Aut}(X) &\cong \mathbb{Z}_2^4 \rtimes G, \\ G &\in \{1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathfrak{S}_3\} \end{aligned}$$

- Denote by $N := \mathbb{Z}_2^4 \triangleleft \text{Aut}(X)$
- N acts transitively and freely on the 16 points p_{ij} .
- The subgroup $G \subset \text{Aut}(X)$ is the stabilizer subgroup of one point, say p_{11} .
- Although the 4 curves Γ_i are not canonically isomorphic, the 4 curves $\text{Pic}^2(\Gamma_i)$ are canonically isomorphic. Denote this curve simply by $\text{Pic}^2(\Gamma)$. The involutions γ_{ij} induces a degree-3 étale divisor $D \subset \text{Pic}^2(\Gamma)$ and $G \cong \text{Aut}(\text{Pic}^2(\Gamma), D)$.

The Moduli Space



Derived Categories Perspective

$$\mathcal{D}^b(X) \cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1, 0, 0, 0), \mathcal{O}_X(0, 1, 0, 0), \mathcal{O}_X(0, 0, 1, 0), \mathcal{O}_X(0, 0, 0, 1) \rangle$$

- If $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$ then $\mathcal{A}$ is the derived category of a genus-1 curve with three $\mathbb{Z}_2$ -stacky points.
- In general $\mathcal{A}$ is a non-commutative genus-1 curve with canonical divisor of degree $3/2$.
- The $\mathbb{Z}_2^4$ -rigidification of the moduli stack of Fano threefolds of type 4-1, looks like the moduli stack of non-commutative genus-1 curves with canonical divisor of degree $3/2$.

Категории Делиня и их приложения к теории представлений и квантовой теории поля.

Максименко Дарья Максимовна

МГУ, Москва

Основные понятия

Основным техническим инструментом в нашей работе являются категории Делиня, которые интерполируют категории представлений $\text{Rep}(\text{GL}_N)$, $\text{Rep}(\text{O}_N)$, $\text{Rep}(\text{Sp}_N)$ для натурального N , а также позволяют аналитически продолжить эти категории для любого комплексного числа.

В частности, можно говорить о матрицах комплексного размера, что бывает полезно для вычислений в теоретической физике.

Важным объектом теории представлений является центр на критическом уровне алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n - \mathcal{Z}((\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)/(\mathcal{K} + \mathfrak{n}))_{\text{loc}})$. При помощи языка категорий Делиня можно обобщить эту конструкцию на случай $\mathfrak{gl}_t$, где $t \in \mathbb{C}$.

Историческая справка

В работе [1] была доказана следующая теорема о геометрической структуре центра на критическом уровне.

Теорема 1. Центр на критическом уровне для $\mathfrak{gl}_n$ изоморфен как Пуассонова алгебра алгебре Гельфанда-Дикого.

В работе [2] центр на критическом уровне задан явными образующими.

В нашей работе мы обобщаем эти конструкции на случай $\mathfrak{gl}_t$ и проверяем, что введенные конструкции согласованы со случаем, когда $t = n \in \mathbb{N}$.

В статье [3] на языке категорий Делиня были обобщены понятия симметрий в квантовой теории поля, а также доказаны обобщения классических результатов, например, категорная теорема Нетер. В своей работе мы продолжаем развитие категорных симметрий, рассматривая более подробно понятие категорных Голдстоуновских бозонов.

Основные результаты

Основным результатом нашей работы является обобщение таких понятий теории алгебр Ли, как центральное расширение конечномерной алгебры Ли и вертексные алгебры в тензорных категориях. С помощью введенных объектов мы строим центр на уровне k : $\mathfrak{z}^{\text{cat}}(\mathfrak{gl}_t)_k = \text{Hom}(1, V_k^{\text{cat}}(\mathfrak{gl}_t))$.

И доказываем следующий результат

Предложение 2. Пусть F – интерполяционный функтор для категории Делиня, соответствующий GL_n . Тогда $F(V_k^{\text{cat}}(\mathfrak{gl}_n)) = V_k(\mathfrak{gl}_n)$. Более того, F индуцирует сюръективное отображение $\mathfrak{z}^{\text{cat}}(\mathfrak{gl}_n)_{-n} \rightarrow (\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)/(\mathcal{K} + \mathfrak{n}))_{\text{loc}}$.

Мы также отмечаем, что на $\mathfrak{z}^{\text{cat}}(\mathfrak{gl}_t)_k$ существует структура Пуассоновой алгебры и выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 3. Для любого комплексного t алгебра псевдо-дифференциальных операторов ранга t изоморфна центру на критическом уровне $\mathfrak{gl}_t$ как Пуассонова алгебра.

Еще одним аспектом нашей работы являются категорные симметрий

в квантовой теории поля: мы ввели строгое понятие Голдстоуновских бозонов и проверили теорему Голдстоуна для частного случая скалярного поля.

Идеи доказательств

Основной идеей построения центра на критическом уровне для $\mathfrak{gl}_t$ является реализация $\mathfrak{gl}_t$ как алгебры Ли в категории Делиня

$$\mathfrak{gl}_t = \bullet \circ .$$

Далее мы рассматриваем следующие объекты

$$(\mathfrak{gl}_t)[i] = \mathfrak{gl}_t \otimes x^i, i \in \mathbb{N}, B_i = \oplus_{-i \leq j \leq i} (\mathfrak{gl}_t)[j],$$

с помощью которых реализуем аффинную алгебру

$$\mathfrak{gl}_t[x, x^{-1}] \oplus 1 = (B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots) \oplus 1.$$

Используя PBW- фильтрацию, мы определяем вертексную алгебру $V_k^{\text{cat}}(\mathfrak{gl}_t) = S(\mathfrak{gl}_t[t^{-1}]t^{-1})$.

Идея доказательства частного случая теоремы Голдстоуна состоит в возможности записать функциональный интеграл для квантовой теории поля с категорной симметрией. Данный подход позволяет почти дословно воспроизвести доказательство классической теоремы.

Примеры

Несмотря на то, что наша работа абстрактная, введенные понятия можно проиллюстрировать на несложных примерах. Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли. Тогда существует изоморфизм Хариша-Чандры $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = S(\mathfrak{h})^W$, где $S(\mathfrak{h})^W$ – элементы симметрической алгебры алгебры Картана, инвариантные относительно действия группы Вейля.

Например, группа Вейля $\mathfrak{gl}_m$ изоморфна симметрической группе S_m , следовательно, $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ изоморфен алгебре симметрических многочленов от m переменных, которая порождена $e_k = \sum x_i^k$, которые соответствуют элементам центра C_k .

Таким образом, $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_t)) = \mathbb{C}[C_1, C_2, \dots]$.

Аналогичные результаты можно получить для симплектической и ортогональной алгебр Ли.

Выводы

Наш результат важен для развития теории представлений и категорной квантовой теории поля.

В дальнейшем мы собираемся доказать сформулированную гипотезу о Пуассоновой структуре центра на критическом уровне, обобщить полученные результаты на супер случай и случай поля положительной характеристики, а также рассмотреть приложения в интегрируемых системах и квантовой теории поля.

✉ B. Feigin, E. Frenkel "Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikii algebras".

✉ A. Chervov, A. Molev "On higher order Sugawara operators arXiv: 0808.1947

✉ Damon J. Binder, Slava Rychkov "Deligne Categories in Lattice Models and Quantum Field Theory, or Making Sense of O(N) Symmetry with Non-integer N arXiv: 1911.07895

Обобщённые инвариант Макар-Лиманова
и инвариант Дерксена

Никитина Алина Владимировна

НИУ ВШЭ, Москва

Основные понятия и обозначения

 k — алгебраически замкнутое поле, $\text{char } k = 0$, B — область целостности.

Определение. Линейное отображение $\delta : B \rightarrow B$ называется **дифференцированием**, если удовлетворяет правилу Лейбница: $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$.

Определение. Дифференцирование δ называется **локально-нильпотентным**, если для каждого $f \in B$ существует $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такое, что $\delta^m(f) = 0$.

Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие.

Определение X называется **торическим**, если X нормально и существует действие тора $T \curvearrowright X$ с открытой орбитой.

Пусть $\{v_1, \dots, v_r\}$ — конечный набор $v_i \in \mathbb{R}^n$. Тогда **рациональным конусом** в $\mathbb{R}^n$ называется

$$\sigma = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\}.$$

Двойственным к σ **конусом** $\sigma^\vee \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}.$$

Определение Конус σ называется **острым** $\iff$ конус $\sigma^\vee$ полной размерности.

Утверждение. Имеет место взаимно-однозначное соответствие:

$$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ — аффинное} \\ \text{торическое многообразие} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \subset \mathbb{R}^n \text{ — острый} \\ \text{рациональный конус} \end{array} \right\}.$$

Пусть X — аффинное торическое многообразие и $\sigma^\vee \subset \mathbb{Q}^n$.

$$S_\sigma = \bigoplus_{p \in M \cap \sigma^\vee} k \cdot \chi^p.$$

Тогда $k[X] = k[S_\sigma]$.

Определение Вектор $e \in M$ называется **корнем Демазюра** конуса σ , если $\exists i$:

- $\langle e, v_i \rangle = -1$,
- $\langle e, v_j \rangle \geq 0, j \neq i$.

Если e — корень Демазюра, соответствующий вектору v_i , то

$$\delta_e(\chi^m) = \langle m, v_i \rangle \chi^{m+e}.$$

Дифференцирование δ градуированной алгебры B называется **однородным**, если образ каждого однородного элемента также однороден.

Утверждение. Существует взаимно-однозначное соответствие между корнями Демазюра и однородными локально-нильпотентными дифференцированиями на X с точностью до пропорциональности.

Определение. **Инвариантом Макар-Лиманова** $ML(X)$ называется следующая подалгебра в $k[X]$:

$$ML(X) = \bigcap_{\delta \in LND} \text{Ker } \delta.$$

Определение. **Инвариантом Дерксена** $HD(X)$ называется подалгебра $k[X]$, порождённая ядрами всех ненулевых ЛНД:

$$HD(X) = k[\text{Ker } \delta \mid \delta \in LND(X) \setminus \{0\}].$$

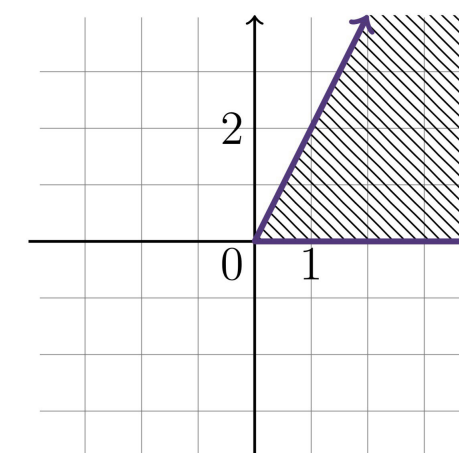
Введём новый инвариант $S(X)$:

$$S(X) = k[\text{Ker } \delta_1 \cap \text{Ker } \delta_2 \mid \delta_1, \delta_2 \in LND(X), [\delta_1, \delta_2] = 0].$$

Постановка задачи

Цель — понять, может ли $S(X)$ быть не конечно порождённым в случае нормальных аффинных торических многообразий.

Пример 1. Рассмотрим торическое многообразие Y , порождённое следующим конусом в решётке $\mathbb{Z}^2$:

Найдём инвариант S на многообразии $X = Y \times \mathbb{A}^1$ с алгеброй регулярных функций:

$$k[X] = k[a, b, c, z] / (ac - b^2).$$

Основные результаты

Предложение 1. Пусть δ_{e_1} и δ_{e_2} — два локально-нильпотентных неэквивалентных дифференцирования. Тогда коммутируют $\delta_{e_1} \circ \delta_{e_2} = \delta_{e_2} \circ \delta_{e_1}$ в том и только в том случае, если:

- v_1 и v_2 можно одновременно включить в базис N ;
- в σ есть грань $\tau = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Предложение 2. Пусть X — аффинное торическое многообразие и пусть существуют такие $\delta_1, \delta_2 \in LND(X)$, что $\delta_1 \circ \delta_2 = \delta_2 \circ \delta_1$. Тогда

$$S(X) = ML(X).$$

Теорема. В случае торического многообразия из примера 1 инвариант $S(X)$ не является конечно порождённым.

Идея доказательства теоремы

Пункт 1. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \delta_1(a \mapsto 2b; b \mapsto c; c \mapsto 0; z \mapsto 0); \\ \delta_2(a \mapsto 0; b \mapsto a; c \mapsto 2b; z \mapsto 0); \\ \delta_3(a \mapsto 0; b \mapsto 0; c \mapsto 0; z \mapsto 1). \end{aligned}$$

Дифференцирования $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ дают явное включение $k[a, c] \subset S(X)$, так как $\text{Ker } \delta_1 \cap \text{Ker } \delta_3 = k[c]$ и $\text{Ker } \delta_2 \cap \text{Ker } \delta_3 = k[a]$.

Пункт 2. В силу того, что подалгебра $S(X)$ инвариантна относительно группы автоморфизмов, она инвариантна относительно всех $\delta \in LND$. Значит

$$a \in S(X) \Rightarrow \delta_1(a) = 2b \in S(X) \Rightarrow k[b] \subset S(X).$$

Пункт 3. Теперь покажем, что $S(X)$ содержится в идеале (a, b, c) .Пусть $f \in S(X)$ такой, что $f \notin (a, b, c)$. Обозначим $B = k[a, b, c, z] / (ac - b^2)$.Так как $\text{tr.deg } B = 3$, то $\text{tr.deg } B/(f) = 2$.

Здесь $V = \text{Spec } B/(f)$. Группа $\mathbb{G}_a^2$ унитарна $\Rightarrow$ орбиты $\mathbb{G}_a^2 \curvearrowright V$, замкнуты и имеют размерность 2. Тогда

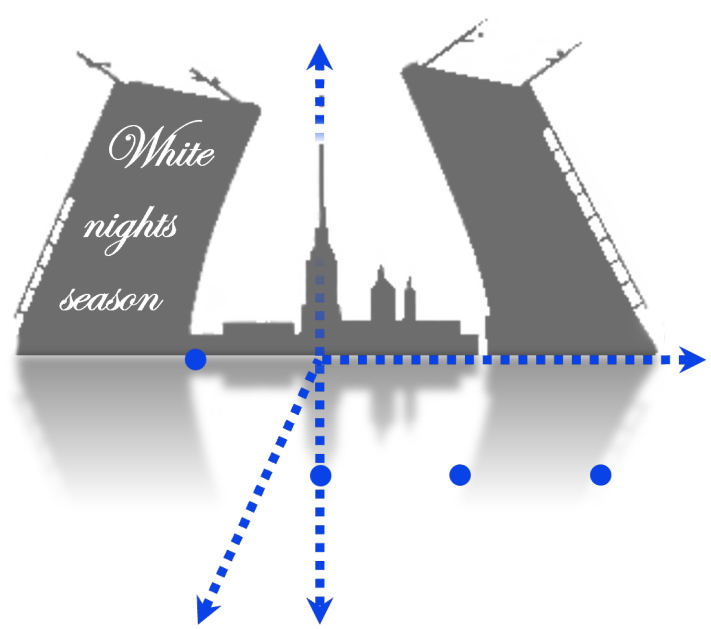
$$V = \mathbb{A}^2.$$

Пункт 4. Покажем, что $\dim(T_P V) = 3$ с помощью однородных компонент степеней $\mathfrak{g}^m$. Тогда

$$V \neq \mathbb{A}^2.$$

Список литературы

- I. Boldyrev, S. Gaifullin, A. Shafarevich, Modified Derksen invariant, arXiv:2312.08421
- S. Gayfullin, A. Shafarevich, Modified Makar-Limanov and Derksen invariants, Journal of Pure and Applied Algebra. 2024. Vol. 228. No. 6. Article 107616.
- G. Freudenburg, Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations, Encyclopaedia Math. Sci., 136, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- D. Cox, J. Little, H. Schenck, Toric Varieties, Grad. Stud. Math., 124, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.



Гибкость цилиндров над тринomialными гиперповерхностями

Петров Михаил Вадимович

МГУ, НИУ ВШЭ



Основные понятия

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, X — аффинное алгебраическое многообразие. Цилиндром над аффинным многообразием X называется многообразие $X \times \mathbb{A}^1$. Группа специальных автоморфизмов $\text{SAut}(X)$ — это подгруппа в $\text{Aut}(X)$, порождённая всеми однопараметрическими унитарными алгебраическими подгруппами, то есть подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля $\mathbb{G}_a$. Локально нильпотентным дифференцированием (ЛНД) называется линейное отображение $\delta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, отвечающее правилу Лейбница, причем для любого элемента $f \in \mathbb{K}[X]$ существует натуральное n такое, что $\delta^n(f) = 0$.

Определение. Гладкая точка x многообразия X называется *гибкой*, если $T_x X$ порождается касательными векторами к $\mathbb{G}_a$ -орбитам. Многообразие X называется *гибким*, если все его гладкие точки являются гибкими. Многообразие называется *жестким*, если на нём нет нетривиальных $\mathbb{G}_a$ -действий.

Определение. *Тринomialной гиперповерхностью* называется аффинное алгебраическое многообразие, которое задаётся одним уравнением вида

$$T_{01}^{l_1} \dots T_{0n_0}^{l_{n_0}} + T_{11}^{l_1} \dots T_{1n_1}^{l_{n_1}} + T_{21}^{l_1} \dots T_{2n_2}^{l_{n_2}} = 0, \quad n_0 \geq 0, \quad n_1, n_2 \geq 1.$$

Определение. *Инвариантом Макара-Лиманова* многообразия X называется подалгебра регулярных $\text{SAut}(X)$ -инвариантов в $\mathbb{K}[X]$:

$$\text{ML}(X) = \mathbb{K}[X]^{\text{SAut}(X)}.$$

Изучение действий $\mathbb{G}_a$ на многообразии X эквивалентно изучению локально нильпотентных дифференцирований на $\mathbb{K}[X]$, это соответствие устанавливается экспоненциальным отображением. Более подробно — действие $\mathbb{G}_a$ на $\mathbb{K}[X]$ задаётся некоторым ЛНД δ по формуле:

$$s \cdot f = \exp(s\delta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{s^i \delta^i(f)}{i!}.$$

Инвариант Макара-Лиманова эквивалентно определяется через ЛНД как пересечение ядер всех ЛНД на $\mathbb{K}[X]$.

Историческая справка

В работах [1] и [2] был доказан критерий жёсткости тринomialной гиперповерхности:

Теорема 1. Тринomialная гиперповерхность X нежесткая тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) Существуют такие $i \in \{0, 1, 2\}$, $j(i) = \{1, \dots, n_i\}$, что $l_{ij(i)} = 1$;
- 2) Существуют такие $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$, $u(i) \in \{1, \dots, n_i\}$, $v(j) \in \{1, \dots, n_j\}$, что $l_{iu(i)} = l_{jv(j)} = 2$ и $\forall a \in \{1, \dots, n_i\}$, $b \in \{1, \dots, n_j\}$ степени l_{ia} и l_{jb} чётны;

В совместной работе с С.А. Гайфуллиным (готовится к публикации) был получен следующий результат:

Теорема 2. Пусть X — нежесткая тринomialная гиперповерхность, причём X сама по себе не является цилиндром. Тогда $\text{ML}(X \times \mathbb{A}^1) = \mathbb{K}$.

Ясно, что условие $\text{ML}(X) = \mathbb{K}$ является необходимым для того, чтобы многообразие X было гибким. Известно также, что для жесткого многообразия X выполняется

$$\text{ML}(X \times \mathbb{A}^1) = \mathbb{K}[X] = \text{ML}(X).$$

Естественный вопрос: для каких многообразий домножение на прямую приводит не только к тривиальному инварианту Макара-Лиманова, но и к гибкости цилиндра?

Основной результат

В работе исследуются нежесткие тринomialные гиперповерхности, которые сами по себе не являются цилиндрами. Для этого класса многообразий получен следующий результат:

Теорема 3. Пусть X — тринomialная гиперповерхность, не являющаяся цилиндром. Тогда:

$$X \text{ нежесткая} \Leftrightarrow \text{цилиндр } X \times \mathbb{A}^1 \text{ гибкий}.$$

Идея доказательства

Мы построим достаточное количество ЛНД на $\mathbb{K}[X]$ в каждой гладкой точке при помощи особой техники. Основные идеи состоят в следующем:

- 1) Заменить исходную гиперповерхность такой, на которой можно легко выписать большое количество ЛНД;
- 2) Поднять полученные ЛНД на исходный цилиндр;
- 3) Проверить, что соответствующие касательные векторы порождают касательное пространство в каждой гладкой точке.

Наиболее содержательны первые два пункта. В этом помогает теорема о локальном слайсе:

Теорема 4. ([5], §1.4) Пусть B — алгебра, D — ненулевое ЛНД на B , и r — локальный слайс, то есть такой элемент, что $D^2(r) = 0$, но $D(r) \neq 0$. Тогда

$$B_{D(r)} = (\text{Ker } D)_{D(r)}[r].$$

Таким образом, если построить на $\mathbb{K}[X \times \mathbb{A}^1]$ ЛНД с ядром $\mathbb{K}[Y]$, то теорема 4 говорит о том, что в $X \times \mathbb{A}^1$ и $Y \times \mathbb{A}^1$ есть изоморфные открытые подмножества. Тогда можно задать ЛНД на открытом подмножестве в $Y \times \mathbb{A}^1$, перенести его на открытое подмножество в $X \times \mathbb{A}^1$, и продолжить на весь цилиндр путём домножения на достаточно большую степень $D(r)$. Значительная часть работы посвящена доказательству того, что на всяком цилиндре из условия теоремы 3 существует ЛНД с ядром, которое является координатной алгеброй другой тринomialной гиперповерхности, у которой одна из степеней l_{ij} в уравнении меньше, чем у исходной. Продолжая этот процесс, каждую нежесткую тринomialную гиперповерхность можно привести к одному из двух видов:

- 1) В одном из мономов все степени l_{ij} равны 1;
- 2) В двух мономах все степени l_{ij} равны 2.

На таких гиперповерхностях легко выписать множество ЛНД с линейно независимыми касательными векторами. Перенеся их на исходный цилиндр вышеописанным способом, мы получим достаточное количество ЛНД для того, чтобы породить касательное пространство в каждой гладкой точке, и тем самым докажем гибкость $X \times \mathbb{A}^1$.

Список литературы

- [1] I. Arzhantsev. On rigidity of factorial trinomial hypersurfaces. Int. J. Algebra Comput. 26 (2016) no. 5, 1061-1070.
- [2] S. Gaifullin. On Rigidity of Trinomial Hypersurfaces and Factorial Trinomial Varieties. arXiv:1902.06136.
- [3] S. Gaifullin and M. Petrov. On Zariski cancellation problem, maximal tori in automorphism group, and Makar-Limanov invariant.
- [4] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. 162 (2013) no. 4, 767–823.
- [5] G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Encyclopaedia Math. Sci., vol. 136, Springer, Berlin, 2006.

Аффинные моноиды с активной группой обратимых элементов

Преснова Екатерина

ВШЭ, Москва

Основные понятия

Пусть X — нормальное неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, и пусть дан морфизм $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x * y$. Тогда X называется **алгебраическим моноидом**, если для всех $x, y, z \in X$ выполнено $x * (y * z) = (x * y) * z$ и найдется такая точка $1 \in X$, что $x * 1 = 1 * x = x$. В этом случае 1 называется нейтральным элементом. Группа обратимых элементов G алгебраического моноида X является алгебраической группой и открыта по Зарисскому в X .

Нас интересует случай, когда $G = U \rtimes T$, где T — тор, U — унипотентная группа, полупрямое произведение задается гомоморфизмом $\psi: T \rightarrow \text{Aut } U$.

Лемма 1 [YZ] Пусть X — аффинный моноид с группой обратимых элементов $G = U \rtimes T$. Тогда на U можно ввести координаты таким образом, что $\psi(t) = \text{diag}(\chi_1(t), \dots, \chi_k(t)) \in \text{GL}(U)$, где $\chi_1(t), \dots, \chi_k(t)$ — характеры тора T .

В условиях леммы 1 группу обратимых элементов будем обозначать $G_{\bar{X}}$, где $\bar{X} = (\chi_1, \dots, \chi_k)$ — набор характеров.

Активные моноиды

Определение Полупрямое произведение $G = U \rtimes T$ называется **активным**, если $\dim T + \dim \text{Im } \psi = \dim G$.

Понятие активного полупрямого произведения было введено в работе [YZ].

Лемма 2 [YZ, лемма 2] Группа $G = G_{\bar{X}}$ активна тогда и только тогда, когда характеры тора линейно независимы.

Следствие Пусть $G = U \rtimes T$ активна. Тогда $\dim U \leq \dim T$.

Предложение [YZ, Предложение 2] Пусть X — аффинный моноид с активной группой обратимых элементов $G_{\bar{X}}$. Тогда X является торическим многообразием, а группа обратимых элементов $G_{\bar{X}}$ инвариантна относительно действия тора.

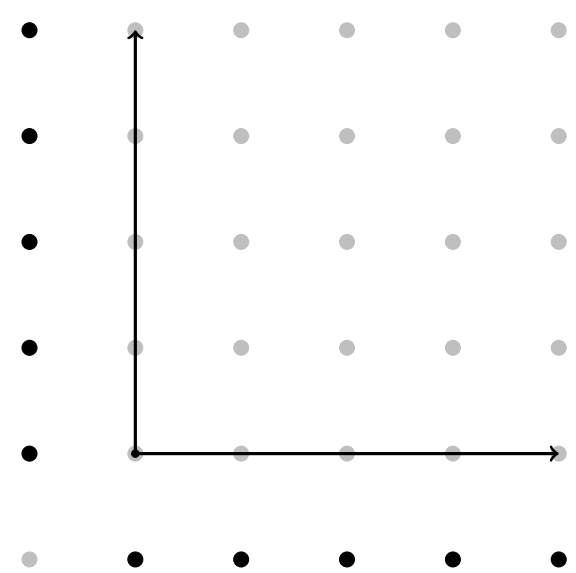
Утверждение Пусть полупрямое произведение $U \rtimes T$ активно. Тогда группа U является коммутативной, и, следовательно, $U \cong \mathbb{G}_a^k$.

Корни Демазюра

Пусть X_{σ} — аффинное торическое многообразие, а $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{N}$ — примитивные векторы на одномерных образующих конуса σ . Для каждого $1 \leq i \leq m$ определим множество

$$\mathfrak{R}_i = \{e \in M \mid \langle p_i, e \rangle = -1, \langle p_j, e \rangle \geq 0 \text{ для всех } i \neq j, 1 \leq j \leq m\}.$$

Элементы множества $\mathfrak{R} = \cup_{1 \leq i \leq m} \mathfrak{R}_i$ называются **корнями Демазюра**.



Определение Пусть $\tau = \langle p_1, \dots, p_k \rangle_{\geq 0}$ — регулярная k -мерная грань конуса σ . Назовем набор корней Демазюра $e_r^{(i)}$, где $i = 1, \dots, k$, $r = 1, 2$, **согласованным с гранью τ** , если $\langle p_j, e_1^{(i)} \rangle = \langle p_j, e_2^{(i)} \rangle = -\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, \dots, k$.

Классификация

Теорема 1 Пусть $X = X_{\sigma}$ — аффинное торическое многообразие, конус σ содержит k -мерную симплицияльную регулярную грань $\tau \subset \sigma$ и $e_1^{(i)}$ и $e_2^{(i)}$ — набор корней Демазюра, согласованных с τ . Тогда формула коумножения $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$

$$\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u \prod_{i=1}^k (1 \otimes \chi^{e_1^{(i)}} + \chi^{e_2^{(i)}} \otimes 1)^{\langle p_i, u \rangle}, \quad (1)$$

где $\mathbb{K}[X_{\sigma}] = \oplus_{u \in S_{\sigma}} \mathbb{K} \chi^u$, задает на X структуру моноида с группой обратимых элементов $G_{\bar{X}}$, где $\chi_i = \chi^{e_1^{(i)} - e_2^{(i)}}$.

Теорема 2 Любой аффинный алгебраический моноид с активной группой обратимых элементов изоморфен моноиду из теоремы 1 для некоторых конуса σ , его k -мерной симплицияльной регулярной грани τ и набора корней Демазюра $e_1^{(i)}$ и $e_2^{(i)}$, согласованного с τ ($i = 1, \dots, k$). Более того, группа обратимых элементов моноида из теоремы 1 активна тогда и только тогда, когда разности $e_1^{(i)} - e_2^{(i)}$ линейно независимы.

Идемпотенты

Напомним, что $x \in X$ называется идемпотентом, если $x * x = x$.

Теорема 3 Пусть X_{σ} — корневой моноид, γ — грань конуса σ . Обозначим через E_{γ} множество идемпотентов, лежащих в орбите O_{γ} . Тогда в обозначениях теоремы 1:

- Если $\tau \subseteq \gamma$, то $E_{\gamma} = \{x_{\gamma}\}$;
- Если найдется луч $p_i \notin \gamma$, и соответствующие корни Демазюра $e_1^{(i)}, e_2^{(i)} \notin \gamma^{\perp}$ или $e_1^{(i)}, e_2^{(i)} \in \gamma^{\perp}$, то $E_{\gamma} = \emptyset$;
- Если для всех лучей $p_1, \dots, p_s \notin \gamma$ из соответствующих корней Демазюра $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}$ ровно один лежит в $\gamma^{\perp}$, то $E_{\gamma} = \{\chi^u = 1 \mid \forall u \in (\tau, \gamma)^{\perp} \cap S_{\sigma}\}$

Примеры

Рассмотрим конус σ в 4-мерной решетке $\mathbb{N}$ с одномерными образующими $p_1 = (1, 0, 0, 0)$, $p_2 = (0, 1, 0, 0)$, $p_3 = (0, 0, 1, 0)$, $p_4 = (0, 1, 0, 1)$, $p_5 = (1, 0, 0, 1)$. Тогда двойственный конус $\sigma^{\vee} \subset M$ будет задаваться образующими $q_1 = (1, 0, 0, 0)$, $q_2 = (0, 1, 0, 0)$, $q_3 = (0, 0, 1, 0)$, $q_4 = (0, 0, 0, 1)$, $q_5 = (1, 1, 0, -1)$. Рассмотрим функции $x_i = \chi^{q_i}$. Тогда алгебра регулярных функций соответствующего торического многообразия будет изоморфна $\mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ с соотношениями $x_1 x_2 = x_4 x_5$. Тогда

$$X = \{x_1 x_2 = x_4 x_5\} \subseteq \mathbb{A}^5.$$

Рассмотрим двумерный регулярный конус $\tau = \langle p_1, p_2 \rangle_{\geq 0}$. Выберем корни Демазюра, согласованные с конусом τ (по 2 для каждого примитивного вектора p_1, p_2).

$$e_1^{(1)} = (-1, 0, a_1, b_1), e_2^{(1)} = (-1, 0, a_2, b_2), \text{ где } a_i \geq 0, b_i > 0, \\ e_1^{(2)} = (0, -1, c_1, d_1), e_2^{(2)} = (0, -1, c_2, d_2), \text{ где } c_i \geq 0, d_i > 0;$$

При таком выборе корней Демазюра формула (1) будет иметь вид:

$$\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^{e_1^{(1)}} + \chi^{e_2^{(1)}} \otimes 1)^{\langle p_1, u \rangle} (1 \otimes \chi^{e_1^{(2)}} + \chi^{e_2^{(2)}} \otimes 1)^{\langle p_2, u \rangle}$$

Умножение на X будет иметь вид:

$$x * y = (x_1 y_3^{a_1} y_4^{b_1} + y_1 x_3^{a_2} x_4^{b_2}, x_2 y_3^{c_1} y_4^{d_1} + y_2 x_3^{c_2} x_4^{d_2}, x_3 y_3, x_4 y_4, \\ x_5 y_3^{a_1 + c_1} y_4^{b_1 + d_1 - 1} + x_1 x_3^{c_2} x_4^{d_2 - 1} y_2 y_3^{a_1} y_4^{b_1 - 1} + x_2 x_3^{a_2} x_4^{b_2 - 1} y_1 y_3^{c_1} y_4^{d_1 - 1} + y_5 x_3^{a_2 + c_2} x_4^{b_2 + d_2 - 1}).$$

Список литературы

- [YZ] Yulia Zaitseva, Affine monoids of corank one, Results in Mathematics. 79 (2024), no. 7, article 249
- [PZ] Ekaterina Presnova, Yulia Zaitseva, Affine monoids with active group of invertible elements, in preparation

T-однородные локально нильпотентные дифференцирования на тринomialных многообразиях

Кирилл Рассолов

ВШЭ, МГУ



Основные понятия

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $\mathbf{A}$ — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей без нильпотентов над $\mathbb{K}$. Дифференцированием на $\mathbf{A}$ называется линейное отображение $\delta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, удовлетворяющее правилу Лейбница: для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$ выполнено $\delta(\mathbf{ab}) = \delta(\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a}\delta(\mathbf{b})$. Дифференцирование δ называется локально-нильпотентным (ЛНД), если для любого элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ существует $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta^n(\mathbf{a}) = 0$. Если на $\mathbf{A}$ задана градуировка, то ЛНД δ называется **однородным**, если $\delta(\mathbf{a})$ — однородный элемент для любого однородного элемента $\mathbf{a}$.

Существует биекция между действиями аддитивной группы $\mathbb{G}_{\mathbf{a}}$ поля $\mathbb{K}$ на аффинном многообразии $\mathbf{X}$ и локально нильпотентными дифференцированиями на $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$. Если на $\mathbf{X}$ задано действие алгебраического тора $\mathbb{T}$, то на $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ возникает градуировка группой характеров тора $\mathbb{T}$, а ЛНД, однородным относительно этой градуировки, соответствуют $\mathbb{T}$ -нормализуемые $\mathbb{G}_{\mathbf{a}}$ -действия на $\mathbf{X}$.

Определение. Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ с координатами $\mathbf{T}_{ij}$. Пусть $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{K}^2$ попарно линейно независимы, $\mathbf{T}_i^{\mathbf{l}_i} = \mathbf{T}_{i1}^{\mathbf{l}_{i1}} \dots \mathbf{T}_{in_i}^{\mathbf{l}_{in_i}}$ — мономы от непересекающихся наборов переменных. **Тринomialное многообразие** задаётся в $\mathbb{A}^n$ тем условием, что в матрице

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_0^{\mathbf{l}_0} & \dots & \mathbf{T}_r^{\mathbf{l}_r} \\ \mathbf{a}_0 & \dots & \mathbf{a}_r \end{pmatrix}$$

любые три столбца линейно зависимы. Это условие можно записать уравнениями:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i^{\mathbf{l}_i} & \mathbf{T}_{i+1}^{\mathbf{l}_{i+1}} & \mathbf{T}_{i+2}^{\mathbf{l}_{i+2}} \\ \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \mathbf{a}_{i+2} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 0, \dots, r-2. \quad (1)$$

Также допускается, что некоторые координаты, обозначаемые $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_m$, не участвуют в мономах $\mathbf{T}_i^{\mathbf{l}_i}$ (и в уравнениях).

Мы рассматриваем естественное эффективное действие алгебраического тора $\mathbb{T}$ на тринomialном многообразии $\mathbf{X}$ со сложностью 1. ЛНД на алгебре $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ будем называть **T-однородным**, если оно однородно в градуировке группой характеров тора $\mathbb{T}$. Наша цель — описать все такие ЛНД.

Историческая справка

В [1, 2] аналогичная задача была решена для наиболее тонкой градуировки, относительно которой все переменные однородны. Она соответствует действию квазитора $\mathbf{H}$, связной компонентой которого является описанный выше тор $\mathbb{T}$. Известно, в частности, что $\mathbf{H} = \mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ факториальна. Задача описания $\mathbb{T}$ -однородных ЛНД более интересна, поскольку в разложении произвольного ЛНД в сумму $\mathbb{T}$ -однородных дифференцирований крайние слагаемые заведомо локально нильпотентны.

В случае, когда $\mathbf{X}$ является тринomialной гиперповерхностью, $\mathbb{T}$ -однородные ЛНД были описаны Т. Красиковым в его дипломной работе.

Основные результаты

Получено явное описание для $\mathbb{T}$ -однородных ЛНД на алгебре регулярных функций тринomialного многообразия. Не приводя явных формул в силу громоздкости, ниже мы опишем способ их вывода.

Идеи доказательств

Доказательство легко сводится к случаю, когда переменные $\mathbf{S}_k$ отсутствуют. Далее, мы показываем, что для любого $\mathbb{T}$ -однородного ЛНД δ в каждом мономе $\mathbf{T}_i^{\mathbf{l}_i}$ все переменные, кроме, быть может, одной, лежат в $\ker \delta$. Присоединяя все лежащие в ядре переменные к полю $\mathbb{K}$ и переходя к алгебраическому замыканию, мы получаем тринomialное многообразие $\mathbf{Y}$ над новым полем, причем все мономы $\mathbf{T}_i^{\mathbf{l}_i}$ теперь имеют вид $\mathbf{x}_i^{\alpha_i}$, где $\mathbf{x}_i$ — переменные.

В [3] был получен критерий существования на тринomialном многообразии ненулевых ЛНД (т.е. критерий нежесткости). Из него следует, что наше новое тринomialное многообразие изоморфно (как многообразие с действием тора) одному из следующих:

- (i) $\{\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{y}^\beta - \mathbf{z} = 0\} \simeq \mathbb{A}^2$, $\alpha, \beta > 0$,
- (ii) $\{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 - \mathbf{z}^2 = 0\}$,
- (iii) $\{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 - \mathbf{z}^\gamma = 0\}$, где $\gamma > 2$.

Случай (i) самый простой, поскольку известен явный вид всех ЛНД на $\mathbb{A}^2$, и среди них легко выбрать однородные.

Случай (ii) наиболее трудозатратен. Здесь применяется техника полиэдральных дивизоров [4], позволяющая описать однородные ЛНД на нормальном аффинном многообразии с действием тора.

В **случае (iii)** можно действовать аналогично случаю (ii), однако есть более простой способ. Замена $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ дает эквивариантный изоморфизм с торическим многообразием $\{\mathbf{uv} = \mathbf{z}^\gamma\}$. При этом (одномерный в данном случае) тор $\mathbb{T}$ вкладывается в двумерный тор $\tilde{\mathbb{T}}$, действующий с открытой орбитой. Поэтому всякое $\tilde{\mathbb{T}}$ -однородное ЛНД является $\mathbb{T}$ -однородным. Однако в [5] найдено достаточное условие, при котором верно обратное. В нашем случае оно выполнено, поэтому $\mathbb{T}$ -однородные ЛНД получаются при помощи корней Демажюра. Заметим, что специфика случая (ii) состоит как раз в том, что условие из работы [5] не выполнено.

Вывод явных формул

Следующая процедура позволяет получить явные формулы для $\mathbb{T}$ -однородных ЛНД на $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$. В каждом мономе $\mathbf{T}_i^{\mathbf{l}_i}$ выбирается произвольно переменная $\mathbf{T}_{ic_i}$, остальные переменные присоединяются к полю $\mathbb{K}$. Рассматривается многообразие $\mathbf{Y}$ из предыдущего пункта, координатами на котором являются $\mathbf{x}_i = \mathbf{T}_{ic_i}$. Если на $\mathbb{K}[\mathbf{Y}]$ нет ненулевых ЛНД, полагается $\delta = 0$. Иначе $\mathbf{Y}$ изоморфно одному из многообразий (i, ii, iii), причем изоморфизм задается явными формулами. Выбирается произвольное дифференцирование ∂ на $\mathbb{K}[\mathbf{Y}]$, для которого $\partial(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{K}[\mathbf{T}_{01}, \dots, \mathbf{T}_{m_r}]$. Тогда ∂ дает серию $\mathbb{T}$ -однородных ЛНД на $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ с одинаковым ядром. А именно, ЛНД δ из этой серии имеет вид $\delta(\mathbf{T}_{ij}) = 0$ при $j \neq c_i$, $\delta(\mathbf{T}_{ic_i}) = \mathbf{h}\partial(\mathbf{x}_i)$, где в качестве $\mathbf{h}$ можно выбрать любой ненулевой однородный элемент $\ker \partial \cap \mathbb{K}[\mathbf{T}_{01}, \dots, \mathbf{T}_{m_r}]$. Все $\mathbb{T}$ -однородные ЛНД на $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ получаются применением данного алгоритма ко всевозможным наборам переменных $\mathbf{T}_{ic_i}$, $i = 1, \dots, r$.

Пример

На поверхности (ii) существует несколько серий $\mathbb{T}$ -однородных ЛНД:

- (a) $\delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y}) = \mathbf{Fz}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^q$, $\delta(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{q+1}$,
- (b) $\delta(\mathbf{x}) = (2\kappa\mathbf{y} + (\kappa^2 + 1)\mathbf{z})\mathbf{F}^q$, $\delta(\mathbf{y}) = (2\kappa\mathbf{x} + (\kappa^2 - 1)\mathbf{z})\mathbf{F}^q$,
 $\delta(\mathbf{z}) = ((\kappa^2 + 1)\mathbf{x} + (\kappa^2 - 1)\mathbf{y})\mathbf{F}^{q+1}$,

где $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\kappa \in \mathbb{K}$, $\mathbf{F}$ — многочлен от $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, коэффициенты которого зависят от параметров $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Остальные серии получаются из предыдущих перестановками координат с заменой знаков.

Заметим, что ненулевых $\mathbf{H}$ -однородных ЛНД на поверхности (ii) нет.

Список литературы

- [1] Sergey Gaifullin and Yulia Zaitseva. On homogeneous locally nilpotent derivations of trinomial algebras // J. Algebra Appl. 18 (2019), no. 10, 1950196:1–19.
- [2] Рассолов К. Однородные локально нильпотентные дифференцирования на тринomialных многообразиях. // Принято в печать в Мат. заметки
- [3] Polina Evdokimova, Sergey Gaifullin, Anton Shafarevich. Rigid Trinomial Varieties // arXiv:2307.06672v1 (2023).
- [4] Altmann K., Hausen J. Polyhedral divisors and algebraic torus actions // Math. Ann. (2006), vol. 334, no. 3, 557–607.
- [5] Kotenkova P. Y. On restriction of roots on affine T-varieties // Beitr. Algebra Geom. (2014), vol. 55, no. 2, 621–634.

Структуры коммутативных алгебраических полугрупп на $\mathbb{A}^2$

Селин Кирилл Владимирович

ВШЭ, Москва

Основные понятия

Определение. Алгебраической полугруппой S называется алгебраическое многообразие вместе с морфизмом $\cdot : S \times S \rightarrow S$, для которого выполнено условие ассоциативности.

$E(S)$ - множество идемпотентов полугруппы S . Для любого $e \in E(S)$ множество eSe ($= eS$ в коммутативном случае) - подмоноид в S .

Пусть $e \in E$, обозначим $S_e = \{x \in S | xe = ex = e\}$ - подполугруппа в S (с постоянным умножением в коммутативном случае).

Можем определить на $E(S)$ частичный порядок. Будем говорить, что $e \leq f$ для $e, f \in E(S)$, если $eSe \subset fSf$.

Нас интересует вопрос классификации структур алгебраических полугрупп на аффинной плоскости.

Известные результаты

Для аффинной прямой легко выводятся все структуры алгебраических полугрупп. Все они изоморфны одной из полугрупп со следующими операциями умножения:

- $x \cdot y = x + y$
- $x \cdot y = xy$
- $x \cdot y = d \in k$
- $x \cdot y = x$
- $x \cdot y = y$

Также известны структуры алгебраических моноидов на аффинной плоскости, полученные в [2]:

- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1^a y_1 + x_2^b y_2), \quad a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Идемпотенты в полугруппах

Для изучения структур полугрупп на аффинной плоскости предлагается рассматривать подмногообразия идемпотентов. В работе [1] было показано, что для любой алгебраической полугруппы S множество $E(S)$ не пусто.

Также в работе [1] среди прочего была доказана следующая

Теорема.

- Любое подмножество в $E(S)$ имеет минимальный и максимальные элементы
- Элемент $e \in E(S)$ минимален среди всех идемпотентов тогда и только тогда, когда eSe - группа

- Если S коммутативна, то $E(S)$ конечна и имеет минимальный элемент

Текущие результаты

Будем обозначать через S конкретную коммутативную полугруппу на $\mathbb{A}^2$. Пусть $e \in E(S)$ - некоторый минимальный элемент. Возможны три случая:

- $\dim(eS) = 2$. Тривиальный случай, так как тогда $S = eS$ - группа.
- $\dim(eS) = 1$. В данном случае eS - неприводимая коммутативная группа размерности 1, а значит, либо изоморфна $\mathbb{G}_a$, либо $\mathbb{G}_m$.
- $\dim(eS) = 0$. Здесь eS - точка и умножение на e схлапывает в неё всю плоскость. Существуют нетривиальные примеры таких полугрупп.

В случае $\dim(eS) = 1$ обозначим $G = eS$ - группа (прямая или тор). Имеем сюрьективное отображение

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^2 &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto ex \end{aligned}$$

Предполагается, что из вложений алгебраической группы eS и множества $S_e = \varphi^{-1}(e)$ получится выудить структуру полугруппы на всей плоскости $\mathbb{A}^2$.

Примеры

- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 y_1 y_2, 1)$

Данная полугруппа имеет 2 идемпотента: $e_1 = (1, 1)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Соответствующие моноиды:

- $e_1 S = \{y = 1\}$,
- $e_2 = \{(0, 1)\} \subset e_1 S$,

Минимальный идемпотент сдвигает всю полугруппу в одну точку, при этом умножение не конктсантно.

- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, 0)$

В данной полугруппе единственный идемпотент - $e = (0, 0)$.

Соответствующие моноиды:

$$eS = \{y = 0\},$$

$$S_e = \{x = -y\}.$$

eS - группа, изоморфная $\mathbb{G}_a$, а S_e - моноид с постоянным умножением.

Список литературы

- M. Brion. "On Algebraic Semigroups and Monoids". arXiv:1208.0675.
- Ivan Arzhantsev, Sergey Bragin, Yulia Zaitseva. "Commutative algebraic monoid structures on affine spaces". Communications in Contemporary Mathematics 2020 22:08.



Finite subgroups of automorphism groups of non-trivial Severi–Brauer varieties

Alexandra Sonina

HSE, Laboratory of Algebraic Geometry



Preliminaries

Severi–Brauer variety

Definition. An algebraic variety X of dimension n over a field k is called a **Severi–Brauer variety** if it becomes isomorphic to $\mathbb{P}_k^n$ after the extension of scalars to the algebraic closure $\bar{k}$ of k .

A Severi–Brauer variety is **non-trivial** if it is not isomorphic to $\mathbb{P}_k^n$ over the base field k .

A Severi–Brauer variety is called **minimal** if it has no non-trivial twisted linear Severi–Brauer subvarieties.

A Severi–Brauer variety over k is trivial if and only if it has a k -point. Given a field k and a positive integer n , there exists a one-to-one correspondence between Severi–Brauer varieties of dimension $n-1$ and central simple algebras of degree n which, moreover, preserves automorphism groups.

Lemma 1. Let X be a Severi–Brauer variety over a field k corresponding to a central simple algebra A . Then $\text{Aut}(X) \cong A^*(k)/k^*$.

Let μ_n be a cyclic group of order n .

By Galois extension L/k with a Galois group isomorphic to μ_n , an element $\alpha \in k^*$ and a generator σ of $\text{Gal}(L/k)$ one can a **cyclic algebra** $A = (L/k, \sigma, \alpha)$, which is a central simple algebra over k of degree n . Explicitly, A is generated over k by L and an element α subject to relations $\alpha^n = \alpha$ and

$$\lambda\alpha = \alpha\sigma(\lambda) \quad \text{for all } \lambda \in L.$$

Lemma 2. Suppose that in the above notation the element α is not contained in the image of the Galois norm $\text{Nm}_{L/k}$. Then A is not isomorphic to a matrix algebra.

Balanced product

Let n be a positive integer and

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i},$$

where p_i are pairwise different prime numbers. One has canonical isomorphism

$$\mu_n^* \cong \prod_{i=1}^k \mu_{p_i}^*(p_i),$$

where $\mu_n^*(p_i) \cong \mu_{p_i}^*$.

Definition. Let q be a prime number. Suppose that n is divisible only by primes p_i congruent to 1 modulo q , and let $\chi : \mu_q \rightarrow \mu_n^*$ be a homomorphism. We say that χ is **balanced** if its composition with each of the projections $\mu_n^* \rightarrow \mu_{p_i}^*$ is an embedding. We say that a semidirect product G of μ_n and μ_q corresponding to the homomorphism χ is balanced if χ is balanced.

The problem and previous results

Non-trivial Severi–Brauer varieties have complicated automorphism groups. A natural question is: “What finite groups can appear as subgroups of these automorphism groups?”. However, in this generality the question does not make much sense. The right question is “What are the finite subgroups of automorphism groups of Severi–Brauer varieties that correspond to division algebras?”

This question was firstly developed by C. Shramov. He showed the following theorems:

Theorem 1, [1]. Let L be a field of characteristic 0. Let S be a non-trivial Severi–Brauer surface over L . Let G be a finite subgroup of $\text{Aut}(S)$, then there exists a positive integer n such that G is isomorphic to a subgroup of $\mu_3 \times (\mu_n \rtimes \mu_3)$, where the semidirect product is balanced.

Theorem 2, [1]. For any n such that the semidirect product $\mu_n \rtimes \mu_3$ is balanced there exists a field $L \subset \bar{\mathbb{Q}}$ and a non-trivial Severi–Brauer surface S over L , such that $\mu_3 \times (\mu_n \rtimes \mu_3)$ is a subgroup of $\text{Aut}(S)$.

Moreover, in the case, where S is a non-trivial Severi–Brauer surface over base field of characteristic 0 the group $\text{Bir}(S)$ was also studied.

Theorem 3, [2]. Let S be a non-trivial Severi–Brauer surface over field of characteristic zero. Then any finite subgroup of $\text{Bir}(S)$ is conjugate either to a subgroup of $\text{Aut}(S)$, or to a subgroup of μ_3^3 .

In the article [3] A. Savelyeva generalized Theorem 1. It was proven that all finite subgroups of $\text{Aut}(X)$ are some subgroups of groups of special form for some dimensions of Severi–Brauer varieties.

Theorem 4, [3]. Let X be a non-trivial Severi–Brauer variety of dimension $q-1$ over a field L , where $q \geq 3$ is prime. Let G be a finite subgroup of $\text{Aut}(X)$, then there exists a positive integer n such that G is isomorphic to a subgroup of $\mu_q \times (\mu_n \rtimes \mu_q)$, where the semidirect product is balanced.

Main results

It was proven that there is a universal example of non-trivial Severi–Brauer variety, which group of automorphism contains all possible finite subgroups and, moreover, in the case of dimension 2 its group of birational automorphism contains μ_3^3 .

Theorem 5 Let $q \geq 3$ be a prime number. There exists a field $k \subset \bar{\mathbb{Q}}$ and a non-trivial Severi–Brauer variety X of dimension $q-1$ over $L = k(t)$, where t is a transcendental variable, such that $\text{Aut}(X)$ contains all groups $\mu_q \times (\mu_n \rtimes \mu_q)$, where the semidirect product is balanced. Moreover, if $q = 3$ then $\mu_3^3 \subset \text{Bir}(X)$.

Additionally, the case where the base field has positive characteristic was developed. Denote by $\text{ord}_p(l)$ the minimum integer r such that $l^r - 1$ is divisible by p . Let $v_q(l)$ be the maximum r such that l is divisible by q^r .

Theorem 6 Let l be any prime number. Let L be a field of characteristic l . Let X be a non-trivial Severi–Brauer variety of dimension $q-1$ over a field k , where $q \geq 3$ is prime and $l \neq q$. Then there exists a positive integer k such that for any finite subgroup G of $\text{Aut}(X)$ there exists a positive integer $n = \prod_{i=1}^m p_i^{r_i}$ such that $v_q(\text{ord}_{p_i}(l)) = k$ for $1 \leq i \leq m$ and G is isomorphic to a subgroup of $\mu_q \times (\mu_n \rtimes \mu_q)$, where the semidirect product is balanced.

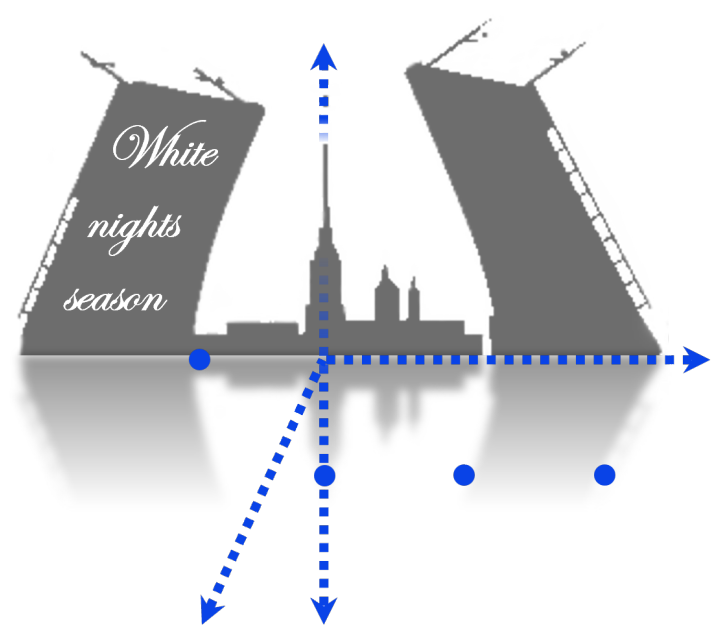
Theorem 7 Let l be any prime number. Let $q \geq 3$ be a prime number and $l \neq q$, let k be a positive integer. Then there exists a field $k \subset \bar{\mathbb{F}}_l$ and a non-trivial Severi–Brauer variety X of dimension $q-1$ over $L = k(t)$ such that $\text{Aut}(X)$ contains all groups $\mu_q \times (\mu_n \rtimes \mu_q)$. The conditions on those groups are as follows:

- ① One has that n is a positive integer such that $n = \prod_{i=1}^m p_i^{r_i}$
- ② For $1 \leq i \leq m$ one has $v_q(\text{ord}_{p_i}(l)) = k$ and the semidirect product is balanced.

Literature

- [1] C. Shramov. Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces. Eur. J. Math. 7, no. 2, 591–612, 2021.
- [2] C. Shramov. Birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces. Sb. Math., 211 (2020), no. 3, 466–480.
- [3] A. Savelyeva. Finite subgroups of automorphism groups of Severi–Brauer varieties. arxiv:2503.20514

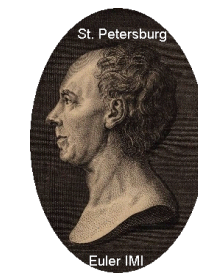
Algebraic groups: the White Nights season V



Стабилизаторы однородных локально нильпотентных дифференцирований на торических многообразиях

Чунаев Дмитрий Андреевич

МГУ им. Ломоносова, НИУ ВШЭ



Основные понятия

Доклад основан на совместной работе с П. Евдокимовой.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Рассмотрим аффинное многообразие X и его алгебру регулярных функций $B := \mathbb{K}[X]$.

Определение 1. Дифференцирование $\delta: B \rightarrow B$ называется **локально нильпотентным** (ЛНД), если для любого $f \in B$ найдётся натуральное число n такое, что $\delta^n(f) = 0$.

Обозначим множество всех ЛНД алгебры B как $LND(B)$. Существует естественное действие группы автоморфизмов $Aut(B)$ алгебры B на $LND(B)$ сопряжениями. Стабилизатор этого действия обозначим $Aut_\delta(B)$.

Два ЛНД δ и ∂ называются **эквивалентными**, если $Ker(\delta) = Ker(\partial)$, это равносильно тому, что $\partial = h\delta$, для некоторого h из поля частных $Quot(Ker(\delta))$. Для данного ЛНД δ обозначим $\mathcal{U}(\delta)$ — подгруппу экспонент всех эквивалентных с δ ЛНД.

Также для дальнейшего нам понадобится понятие инд-группы и ее алгебры Ли.

Определение 2. **Инд-многообразие** — это объединение $V = \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ возрастающей последовательности алгебраических многообразий $V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow \dots$, причем все вложения $V_i \hookrightarrow V_{i+1}$ замкнуты в топологии Зарисского. Если все V_i аффинны, то V — **аффинное инд-многообразие**. На инд-многообразии вводится топология Зарисского: $U \subseteq V$ замкнуто в V тогда и только тогда, когда $U \cap V_i$ замкнуто в V_i . На замкнутом подмножестве инд-многообразия имеется естественная структура инд-многообразия.

Морфизм двух инд-многообразий $V = \cup_i V_i$ и $W = \cup_i W_i$ — это такое отображение $\phi: V \rightarrow W$, что для любого k найдется l , что выполнено следующее: $\phi(V_k) \subseteq W_l$ и индуцированное отображение $V_k \rightarrow W_l$ — морфизм алгебраических многообразий.

Определение 3. **Инд-группа** G — это инд-многообразие с групповой структурой такой, что отображение $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ является морфизмом инд-многообразий.

Для группы $Aut(B)$ существует естественная структура инд-группы, а ее алгебра Ли вкладывается в алгебру дифференцирований на B (см. [5]).

Историческая справка

Стабилизаторы дифференцирований изучались в ряде работ. В работе [6], например, было доказано, что у простого дифференцирования на алгебре многочленов от двух переменных стабилизатор тривиален, а также, что простота дифференцирования вида $\delta = \partial_x + (ay + b)\partial_y$ (где $a \neq 0$) равносильна тривиальности его стабилизатора.

В работе [1] изучались стабилизаторы ЛНД на некоторых поверхностях Данилевского. Там было доказано, что у алгебр $B = \mathbb{K}[x, y, z]/(x^n y - \phi(z))$ и $B = \mathbb{K}[x, y, z]/(f(x)y - \phi(z))$ стабилизатор $Aut_\delta(B)$ порождается конечной циклической группой и подгруппой треугольных автоморфизмов.

В работе [3] изучались стабилизаторы ЛНД на некоторых почти жестких многообразиях, то есть таких, на которых есть такое ЛНД D , что любое другое ЛНД δ имеет вид $\delta = hD$, где $h \in Ker(D)$. В частности, были частично описаны стабилизаторы ЛНД на обобщенных поверхностях Данилевского, многообразиях Данилевского и

полностью описаны стабилизаторы ЛНД на двойных поверхностях Данилевского и поверхностях, заданных уравнениями $X^a + Y^b + Z^c = X^m U - Y^n V = 0$, введенных в [4].

Основные результаты

Любой $\varphi \in Aut_\delta(B)$ сохраняет подалгебру $A := Ker(\delta)$, поэтому можно рассмотреть гомоморфизм ограничения $\Theta: Aut_\delta(B) \rightarrow Aut(A)$. В [2] доказано следующее утверждение:

Утверждение. $Ker(\Theta) = \mathcal{U}(\delta)$.

Аналогично [7] можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть $H \subseteq Aut(X)$ — замкнутая подгруппа, $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли такая, что в ней все ЛНД эквивалентны и если ЛНД $\partial \in \mathfrak{h}$, то $\exp(t\partial) \in H$. Тогда в H_{alg} (группа, порожденная всеми связными алгебраическими полгруппами в H) все максимальные торы сопряжены с помощью подгруппы $\mathcal{U}$, порожденной всеми унитарными элементами из H .

Группа $Aut_\delta(B)$ удовлетворяет необходимым условиям, если для δ нет коммутирующих с ним, но неэквивалентных ему ЛНД, и поэтому для нее верно следующее:

Следствие. Пусть δ — ЛНД, у которого нет коммутирующих с ним, но неэквивалентных ему ЛНД и $\mathbb{T}$ — максимальный тор в $Aut_\delta(B)$. Тогда $Aut_\delta(B)$ сохраняет множество $\mathbb{T}$ -полуинвариантных функций из A .

Это следствие оказывается полезным для изучения $Im(\Theta)$ на аффинных многообразиях с действием тора для таких δ , у которых нет коммутирующих с ними, но неэквивалентных им ЛНД. В частности, все эти факты позволяют описать $Aut_\delta(B)$ для таких ЛНД на торических многообразиях:

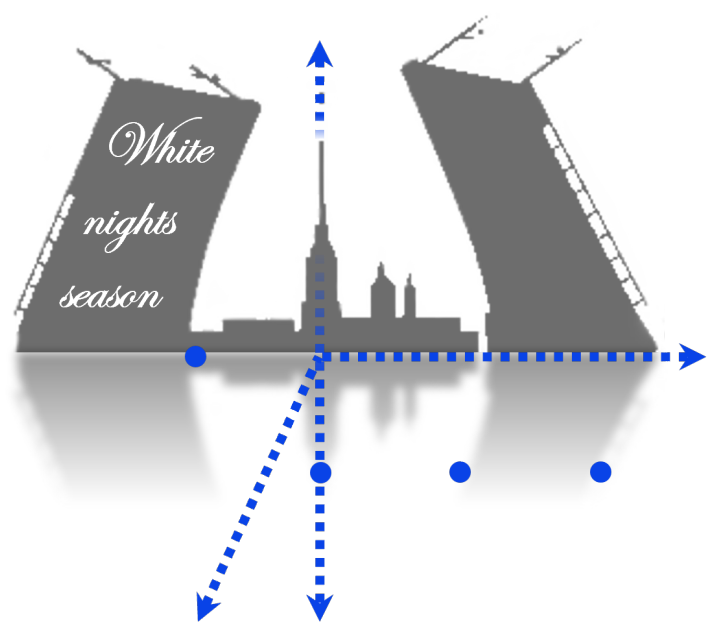
Теорема 2. Пусть X — аффинное торическое многообразие с эффективным действием тора $\mathbb{T}$ и δ — такое $\mathbb{T}$ -однородное ЛНД на многообразии X , что не существует коммутирующих с ним и не эквивалентных ему ЛНД. Тогда:

$$Aut_\delta(B) = S_\delta \ltimes \mathbb{T}_\delta \ltimes \mathcal{U}(\delta),$$

где S_δ — конечная группа, а $\mathbb{T}_\delta$ — подтор в $\mathbb{T}$, состоящий из коммутирующих с δ элементов.

Список литературы

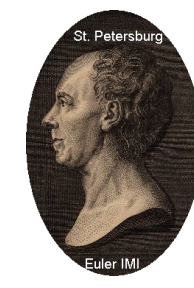
- [1] R. Baltazar and M. Veloso. On isotropy group of Danielewski surfaces, Commun. Algebra, 49(3) (2021) 1006–1016.
- [2] N. Dasgupta, S. Gaifullin, A. Lahiri. Isotropy subgroups of locally nilpotent derivations, in preparation.
- [3] N. Dasgupta and A. Lahiri. Isotropy subgroups of some almost rigid domains, J. of Pure and Appl. Algebra, 227 (2023), 107250.
- [4] D.R. Finston, S. Maubach. The automorphism group of certain factorial threefold and a cancellation problem, Israel J. Math. 163 (2008) 369–381.
- [5] J.-P. Furter, H. Kraft. On the geometry of the automorphism groups of affine varieties, arXiv:1809.04175, 2018.
- [6] L. G. Mendes and I. Pan. On plane polynomial automorphisms commuting with simple derivations, J. Pure Appl. Algebra, 221(4), (2016), 875–882.
- [7] A. Perepechko, A. Regeta. When is the automorphism group of an affine variety nested? Transform. Groups, 28 (2023), 401–412.



Орбиты сферических представлений и двойственность Пясецкого

Даниил Алексеевич Шунин

МГУ/ВШЭ



Конструкция двойственности

Основное поле $\mathbb{C}$. Пусть G — связная линейная алгебраическая группа; V — векторное пространство с линейным действием группы G .

Теорема (В. С. Пясецкий [1])

$$|V/G| < \infty \iff |V^*/G| < \infty$$

Более того, если число орбит конечно, то $|V/G| = |V^*/G|$, и между орбитами в V и V^* имеется естественная биекция.

Пусть $O = G \cdot v \subset V$ — орбита. Конормальное расслоение:

$$N^*O = \{(v, v^*) \mid v \in O, \langle v^*, T_v O \rangle = 0\} \subset V \oplus V^*$$

Коммутационное многообразие:

$$\mathfrak{C} = \{(v, v^*) \mid \langle v^*, \xi v \rangle = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}\} = \bigcup_{O \subset V} N^*O = \bigcup_{Q \subset V^*} N^*Q$$

Если число орбит конечно, то

$$\begin{array}{ccc} V/G & \xleftrightarrow{\text{дв-ть Пясецкого}} & \text{Irr}(\mathfrak{C}) \\ O & \longrightarrow & N^*O = N^*Q \longleftarrow Q \end{array}$$

Сферические представления

Пусть G редуктивна, B — борелевская подгруппа. Линейное представление V называется **сферическим**, если B действует в нем с открытой орбитой.

Сферические представления имеют конечное число G -орбит и классифицированы:

для сферического (G, V) найдутся **неразложимые насыщенные** сферические (G_i, V_i) , что $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ и $G \triangleleft G_1 \times \dots \times G_k$, а действие G на V получено ограничением на подгруппу. Имеется лишь конечное число серий неразложимых сферических представлений с точностью до **геометрической эквивалентности** (Кац, Brion, Benson, Ratcliff, Leahy). Список приведен в [2].

Результат

Таблица 1: Неприводимые представления

No.	G	V	Прим.	Орбиты и двойственность
1	$GL_q \times GL_p$	$\mathbb{C}^q \otimes \mathbb{C}^p$	$q \geq p \geq 1, r = p$	$O_0^V = O_{r-i}$ $O_0 \rightarrow \dots \rightarrow O_r$
2	GL_n	$S^2 \mathbb{C}^n$	$n \geq 1, r = n$	
3	GL_n	$\wedge^2 \mathbb{C}^n$	$n \geq 2, r = \lfloor n/2 \rfloor$	
4	$E_6 \times \mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}^{27}$	$r = 3$	$O_0^V = O_2, O_1^V = O_1$ $O_0 \rightarrow O_1 \rightarrow O_2$
5	$SO_n \times \mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}^n$	$n \geq 2$	
6	$G_2 \times \mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}^7$	—	
7	$Spin_7 \times \mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}^8$	—	
8	$Spin_{10} \times \mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}^{16}$	—	$O_0^V = O_3, O_1^V = O_1, O_2^V = O_2$ $O_0 \rightarrow O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow O_3$
9	$Spin_9 \times \mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}^{16}$	—	
10	$Sp_{2n} \times \mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}^{2n}$	$n \geq 1$	$O_0^V = O_1$ $O_0 \rightarrow O_1$
11	$Sp_{2n} \times GL_2$	$\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2$	$n \geq 2$	$O_{00}^V = O_{22}, O_{10}^V = O_{10}, O_{20}^V = O_{20}$ $O_{00} \rightarrow O_{10} \rightarrow O_{20} \rightarrow O_{22}$
12	$Sp_{2n} \times GL_3$	$\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^3$	$n \geq 3$	$O_{00}^V = O_{32}, O_{10}^V = O_{22}, O_{20}^V = O_{30}$ $O_{00} \rightarrow O_{10} \rightarrow O_{20} \rightarrow O_{32}$
13	$Sp_4 \times GL_3$	$\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3$	—	$O_{00}^V = O_{32}, O_{10}^V = O_{22}, O_{20}^V = O_{20}$ $O_{00} \rightarrow O_{10} \rightarrow O_{20} \rightarrow O_{22} \rightarrow O_{32}$
14	$Sp_4 \times GL_n$	$\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^n$	$n \geq 4$	$O_{00}^V = O_{44}, O_{10}^V = O_{32}, O_{20}^V = O_{20}, O_{22}^V = O_{22}$ $O_{00} \rightarrow O_{10} \rightarrow O_{20} \rightarrow O_{22} \rightarrow O_{32} \rightarrow O_{44}$

Таблица 2: Приводимые представления

No.	(G, V)	Прим.	Орбиты и двойственность
1	$GL_n \times \mathbb{C}^\times$ $\wedge^2 \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$	$n \geq 4$	$\{0\}^V = Y_k, (O_1^V)^V = O_k, O_i^V = Y_{k-i},$ $Z_i^V = \begin{cases} Z_{k-i}, & \text{при } n = 2k, \\ Z_{k-i+1}, & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow \dots \rightarrow O_{k-1} \rightarrow O_k$ $O_1^V \rightarrow Z_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{k-1} \rightarrow Y_{k-1} \rightarrow (Z_k \rightarrow) Y_k$
2	$GL_n \times \mathbb{C}^\times$ $\wedge^2 \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*$	$n \geq 4$	$\{0\}^V = Y_k, (O_1^V)^V = O_k, O_i^V = Y_{k-i},$ $Z_i^V = \begin{cases} Z_{k-i}, & \text{при } n = 2k, \\ Z_{k-i+1}, & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow \dots \rightarrow O_{k-1} \rightarrow O_k$ $O_1^V \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{k-1} \rightarrow (Z_k \rightarrow) Y_k$ $Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{k-1} \rightarrow Y_k$

Таблица 2: Приводимые представления (продолжение)

No.	(G, V)	Прим.	Орбиты и двойственность
1	$GL_q \times GL_p$ $(\mathbb{C}^q \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathbb{C}^p$	$q \geq p \geq 2$ $p > q \geq 2$	$\{0\}^V = Y_p, (O_1^V)^V = O_p, O_i^V = Y_{p-i}, Z_i^V = Z_{p-i}.$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow \dots \rightarrow O_{p-1} \rightarrow O_p$ $O_1^V \rightarrow Z_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{p-1} \rightarrow Y_{p-1} \rightarrow Y_p$ $\{0\}^V = Y_q, (O_1^V)^V = O_q, O_i^V = Y_{q-i}, Z_i^V = Z_{q-i+1}.$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow \dots \rightarrow O_{q-1} \rightarrow O_q$ $O_1^V \rightarrow Z_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{q-1} \rightarrow Y_{q-1} \rightarrow Z_q \rightarrow Y_q$
2	$GL_q \times GL_p$ $(\mathbb{C}^q \otimes \mathbb{C}^p) \oplus (\mathbb{C}^p)^*$	$q \geq p \geq 2$ $p > q \geq 2$	$\{0\}^V = Y_p, (O_1^V)^V = O_p, O_i^V = Y_{p-i}, Z_i^V = Z_{p-i}.$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow \dots \rightarrow O_{p-1} \rightarrow O_p$ $O_1^V \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{p-1} \rightarrow Y_{p-1} \rightarrow Y_p$ $\{0\}^V = Y_q, (O_1^V)^V = O_q, O_i^V = Y_{q-i}, Z_i^V = Z_{q-i+1}.$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow \dots \rightarrow O_{q-1} \rightarrow O_q$ $O_1^V \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{q-1} \rightarrow Y_{q-1} \rightarrow Z_q \rightarrow Y_q$
3	$\mathbb{C}^\times \times Sp_{2n} \times \mathbb{C}^\times$ $\mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2n}$	$n \geq 2$	$\{0\}^V = Y, O_1^V = O_1^V, Z_i^V = Z_i^V, (Z^0)^V = Z^0.$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow Z \rightarrow Z^0 \rightarrow Y$
4	$(Sp_{2n} \times \mathbb{C}^\times) \times GL_2$ $(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2$	$n \geq 2$	$\{0\}^V = Y_{22}, (O_1^V)^V = O_{22}, O_{j0}^V = Y_{j0}, Z_{10}^V = Z_{10}.$ $\{0\} \rightarrow O_{10} \rightarrow O_{20} \rightarrow O_{22}$ $O_1^V \rightarrow Z_{10} \rightarrow Y_{10} \rightarrow Y_{20} \rightarrow Y_{22}$
5	$GL_n \times SL_2 \times GL_m$ $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m)$	$m \geq 2, n \geq 2$	$\{0\}^V = Y_{22}, (O_1^V)^V = Y_{21}, (O_2^V)^V = O_2,$ $O_1^V = Y_{12}, \text{остальные — самодвойственны.}$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow O_2$ $O_1^V \rightarrow Z_{11} \rightarrow Y_{11} \rightarrow Y_{21}$ $O_2^V \rightarrow Y_{12} \rightarrow Y_{22}$
6	$(Sp_{2n} \times \mathbb{C}^\times) \times SL_2 \times GL_m$ $(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m)$	$m \geq 2, n \geq 2$	$\{0\}^V = Y_{22,2}, (O_1^V)^V = Y_{22,1}, (O_2^V)^V = O_{22},$ $O_{j0}^V = Y_{j0,2}, i = 1, 2,$ $\text{остальные — самодвойственны.}$ $\{0\} \rightarrow O_{10} \rightarrow O_{20} \rightarrow O_{22}$ $O_1^V \rightarrow Z_{10,1} \rightarrow Y_{10,1} \rightarrow Y_{20,1} \rightarrow Y_{22,1}$ $O_2^V \rightarrow Y_{10,2} \rightarrow Y_{20,2} \rightarrow Y_{22,2}$
7	$(Sp_{2n} \times \mathbb{C}^\times) \times SL_2 \times (Sp_{2m} \times \mathbb{C}^\times)$ $(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2m})$	$m \geq 2, n \geq 2$	$\{0\}^V = Y_{22,22}, O_{22}^V = O_{22}^V,$ $O_{j0}^V = Y_{j0,22}, (O_{i0}^V)^V = Y_{22,i0}, i = 1, 2,$ $\text{остальные — самодвойственны.}$ $\{0\} \rightarrow O_{10} \rightarrow O_{20} \rightarrow O_{22}$ $O_{10}^V \rightarrow Z_{10,10} \rightarrow Y_{10,10} \rightarrow Y_{20,10} \rightarrow Y_{22,10}$ $O_{20}^V \rightarrow Y_{10,20} \rightarrow Y_{20,20} \rightarrow Y_{22,20}$ $O_{22}^V \rightarrow Y_{10,22} \rightarrow Y_{20,22} \rightarrow Y_{22,22}$
8	$\mathbb{C}^\times \times Spin_8 \times \mathbb{C}^\times$ $\mathbb{C}_+^8 \oplus \mathbb{C}_-^8$	—	$\{0\}^V = Y_{22}, (O_1^V)^V = Y_{21}, (O_2^V)^V = O_2,$ $O_1^V = Y_{12}, \text{остальные — самодвойственны.}$ $\{0\} \rightarrow O_1 \rightarrow O_2$ $O_1^V \rightarrow Z_{11} \rightarrow Y_{11} \rightarrow Y_{21}$ $O_2^V \rightarrow Y_{12} \rightarrow Y_{22}$

Теорема

Следующие утверждения

- о $G \triangleleft H$ связны, H действует в V , $|V/G| < \infty \Rightarrow$ у G и H одни и те же орбиты;
- о для разложимого $G_1 \times G_2 : V_1 \oplus V_2$ справедливо $(O_1 \times O_2)^V = O_1^V \times O_2^V$;

сводят описание двойственности для произвольного сферического представления к описанию для неразложимых насыщенных сферических представлений. Последнее приведено в таблицах 1 и 2.

Список литературы

- [1] В. С. Пясецкий, Линейные группы Ли, действующие с конечным числом орбит, Функц. анализ и его прил. 9 (1975), № 4, 85–86.
- [2] F. Knop, Some remarks on multiplicity free spaces, in: Representation Theories and Algebraic Geometry, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 514, Dordrecht, Springer Netherlands, 1998, 301–317.