

9-ая Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике ¹

17–20 ноября 2025

АННОТАЦИИ

Многоточечное штрафование симметричного процесса Леви

Абильдаев Темирлан

ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург,

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

t.abildaev23@gmail.com

Мы рассмотрим одномерный симметричный процесс Леви $\xi(t)$, $t \geq 0$, обладающий локальным временем $L(t, x)$, и построим оператор $\mathcal{A} + \sum_{k=1}^n \mu_k \delta(x - a_k)$, $\mu_k > 0$, где $\mathcal{A}$ – это генератор порождаемой $\xi(t)$ полугруппы, а $\delta(x - a_k)$ – дельта-функция Дирака в точке $a_k \in \mathbb{R}$. Мы покажем, что построенный оператор – это генератор C_0 -полугруппы $\{U_t\}_{t \geq 0}$ в $L_2(\mathbb{R})$, действующей по формуле

$$(U_t f)(x) = \mathbf{E} f(x - \xi(t)) e^{\sum_{k=1}^n \mu_k L(t, x - a_k)}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}),$$

и обобщим формулу Фейнмана-Каца для потенциала типа линейной комбинации дельта-функций с положительными коэффициентами.

Далее мы построим семейство штрафующих мер $\{\mathbf{Q}_{T,x}^\mu\}_{T \geq 0}$, определяемых формулой

$$\mathbf{Q}_{T,x}^\mu = \frac{e^{\sum_{k=1}^n \mu_k L(T, x - a_k)}}{\mathbf{E} e^{\sum_{k=1}^n \mu_k L(T, x - a_k)}} \mathbf{P}_{T,x},$$

где $\mathbf{P}_{T,x}$ – мера процесса $\xi(t)$, $t \leq T$, и покажем, что при $T \rightarrow \infty$ это семейство слабо сходится к некоторому феллеровскому процессу. Мы опишем порождаемую этим процессом полугруппу Фейнмана-Каца и приведём предельную теорему для $\xi(T)$ относительно $\mathbf{Q}_{T,x}^\mu$.

Оператор Шредингера с самоподобными свойствами

Андронов Николай Иванович

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

nickandronick@gmail.com

В докладе рассматривается одномерное уравнение Шрёдингера с потенциалом, заданным как бесконечная сумма дельта-функций, расположенных в точках, координаты которых задаются квадратичным полиномом от номера. Задача сводится к анализу семейства разностных уравнений, параметры которых зависят от спектрального параметра исходной задачи. Для этого семейства установлена перенормировочная формула, связывающая решения с большими номерами с решениями с номерами порядка единицы. Эта формула открывает путь к дальнейшему исследованию спектральных свойств исходного оператора.

¹<https://indico.eimi.ru/event/1948/>

Вероятность невырождения критического ветвящегося процесса в случайной среде при условии фиксации значения минимума сопровождающего случайного блуждания

Анохина Мария Андреевна

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

anokhina.mary1@gmail.com

Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $\{f_y(s), y \in \mathbb{R}\}$ — семейство производящих функций. Рассмотрим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_i = \ln f_{\eta_i}'(1)$. Ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС) называют последовательность $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = X_{n+1,1} + \dots + X_{n+1,Z_n}$. Будет рассмотрен случай арифметических случайных величин X_i с $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. В данном докладе будет получено следующее асимптотическое соотношение

$$e^{k_n} \mathbf{P} \left(Z_n > 0 \middle| \min_{i \leq n} S_i = -k_n \right) \rightarrow C, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\{k_n\}$ — некоторая целочисленная последовательность такая, что $k_n/\sqrt{n} \rightarrow y > 0$, $k_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, C — некоторая константа.

О невырождении пары ветвящихся процессов в общей случайной среде

Арапов Дмитрий Андреевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

dmitrii.arapov@math.msu.ru

В докладе рассматривается модель пары ветвящихся процессов $\{\mathbf{Z}_n = (Z_{n,1}, Z_{n,2}), n \in \mathbb{N}_0\}$ с общей случайной средой (ПВПСС). При фиксации последней последовательности случайных величин $\{Z_{n,1}, n \in \mathbb{N}_0\}$ и $\{Z_{n,2}, n \in \mathbb{N}_0\}$ предполагаются независимыми ветвящимися процессами в изменяющейся среде.

Эта модель имеет довольно естественную биологическую интерпретацию. Мы можем представлять себе две популяции, довольно сильно изолированные друг от друга, например, бабочку махаон и павлиноглазку геркулес. Ареалы этих видов не пересекаются. Несмотря на кажущуюся автономность друг от друга, и махаон, и павлиноглазка существуют на одной планете. Процессы планетарного масштаба, например, температурный режим, являются общей “средой” для этих видов живых организмов.

ПВПСС является частным случаем многотипного ветвящегося процесса, в котором, однако, частицы одного типа могут порождать частицы другого, в нашем случае это невозможно. Такое упрощение модели позволяет изучать процесс при гораздо менее жестких условиях.

Мы будем рассматривать критическую ПВПСС $\{\mathbf{Z}_n\}$, то есть и процесс $\{Z_{n,1}\}$, и процесс $\{Z_{n,2}\}$ предполагаются критическими. Под невырождением процесса $\{\mathbf{Z}_n\}$ мы понимаем невырождение обоих типов частиц. Как и в случае ветвящегося процесса в случайной среде, оказывается, что асимптотически вероятность невырождения ПВПСС к моменту n лишь на мультипликативную константу отличается от вероятности “положительности” двумерного сопровождающего блуждания при $n \rightarrow \infty$.

При этом вопросы, связанные с асимптотическим поведением вероятности “положи-

тельности” многомерных случайных блужданий подробно исследованы В. Вахтелем и Д. Денисовым в работе [1].

- [1] Denisov D., Wachtel V., *Random walks in cones revisited*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. – 2024. – Vol. 60, No. 1. – P. 126–166.

Вероятностное представление решения задачи Коши для дискретного нестационарного уравнения Шрёдингера

Байтеев Руслан Илмирович

ММИ имени Эйлера, г. Санкт-Петербург

altermapper@gmail.com

Изучается одномерное уравнение Шрёдингера на $\mathbb{Z}$, описывающее квантовую эволюцию дискретной волновой функции $u(n, t)$ с непрерывным временем. Задано начальное состояние $\varphi(n)$, и волновая функция имеет стандартную интерпретацию, $|u(n, t)|^2$ является вероятностью наблюдения свободной частицы в момент времени t в точке n . Развивается новый подход к решению эволюционного уравнения, основанный на использовании дискретных аналитических функций и симметричных случайных блужданий.

Energy-casimir метод и нелинейная устойчивость в задачах физики плазмы

Беляева Юлия Олеговна

Российский университет дружбы народов, г. Москва,

Институт прикладной математики и механики, г. Донецк

yilia-b@yandex.ru

Доклад посвящен исследованию некоторых классов стационарных решений уравнений Власова-Пуассона на нелинейную устойчивость. Данная система является моделью кинетики высокотемпературной плазмы. Energy-Casimir метод применяется для случая стационарных решений в полупространстве под действием однородного внешнего магнитного поля.

Об одной гипотезе де Бранжа

Бережа Игорь Дмитриевич

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

ibereza@disroot.org

Доклад посвящён аксиоматическому описанию пространств де Бранжа. Сначала будет представлена процедура «искажения» пространств де Бранжа из специального класса, после чего с помощью данной конструкции будет опровергнута гипотеза Л. де Бранжа 1963г. о зависимости аксиомы непрерывности от остальных аксиом де Бранжа, высказанная в [1]. Доклад подготовлен по материалам статьи [2].

- [1] L. de Branges, *Some Hilbert spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – P. 445–468.

[2] Bereza I., *On a conjecture of de Branges*, arXiv:2507.12576.

Смешанные объёмы выпуклых оболочек случайных процессов

Болотин Артём Сергеевич

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

bolotin2003@yandex.ru

Пусть $K_1, K_2, \dots, K_s$ — выпуклые тела в пространстве $\mathbb{R}^d$. Минковский доказал, что d -мерный объём $\text{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \dots + \lambda_s K_s)$ при $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \geq 0$ является однородным многочленом степени d :

$$\text{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \dots + \lambda_s K_s) = \sum_{i_1=1}^s \dots \sum_{i_d=1}^s \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_d} V_d(K_{i_1}, \dots, K_{i_d}),$$

где функции $V_d(K_{i_1}, \dots, K_{i_d})$ считаются симметричными и называются смешанными объёмами.

Мы рассмотрим выпуклые оболочки независимых случайных блужданий с перестановочными приращениями и вычислим их смешанный объём. В качестве следствия получим аналогичный результат для независимых симметричных устойчивых процессов Леви.

Синус-процесс и гауссов мультипликативный хаос

Буфетов Александр Игоревич

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва

bufetov@mi-ras.ru

Мультипликативный хаос рождается в работах Андрея Николаевича Колмогорова: 17 дек. 1940 г. Колмогоров подает в ДАН СССР краткое сообщение "О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении". Через несколько дней, 28 декабря 1940 г., Колмогоров подает в ДАН СССР знаменитую заметку "Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса". Теорию Колмогорова однородной изотропной турбулентности подверг критике Ландау, указавший на необходимость учета сильно хаотического поведения диссипации энергии в турбулентном потоке. В 1961 году в Люмини Колмогоров представил доклад "Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса где ответил на то возражение Ландау, что (в формулировке самого Колмогорова) "изменчивость диссипации энергии должна неограниченно возрастать". Колмогоров и Обухов сформулировали новую гипотезу — о "нормальности распределения логарифма" диссипации энергии в турбулентном потоке.

Лог-нормальной гипотезой Колмогорова и Обухова – сформулированной на физическом уровне строгости – вдохновлены работы Мандельброта о мультипликативных каскадах, а, вслед за ними, Перьера и Жана-Пьера Кахана, давшего теорему существования гауссова мультипликативного хаоса.

Оказалось, что построенный Каханом гауссов мультипликативный хаос возникает в самых разных задачах и, в том числе, как заметил это санкт-петербургский физик Ян Валерьевич Федоров, в задачах теории случайных матриц. Сходимостью к гауссову мультипликативному хаосу в различных матричных моделях занимались многие математики, в частности (список далеко не полон) — Berestycki, Chhaibi, Lambert, Nikeghbali, Ostrovsky, Simm, Webb.

В лекциях мы начнем с краткого рассмотрения теории Колмогорова и лог-нормальной гипотезы Колмогорова-Обухова, продолжим обсуждением теории Мандельброта-Перьера-Кахана, и перейдем к рассмотрению сходимости к гауссову мультипликативному хаосу случайных голоморфных функций – стохастических произведений Эйлера, отвечающих синус-процессу.

Времена встречи, коалесценции и консенсуса случайных блужданий на случайных графах

Васильев Роман Алексеевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

r.a.vasiliev1998@gmail.com

Работа посвящена исследованию времён встречи, коалесценции и консенсуса случайных блужданий на неориентированных случайных графах. Рассматриваются три класса моделей: случайные d -регулярные графы, графы Эрёдша–Рэни $G(n, p)$ и конфигурационные модели со степенными распределениями степеней. Для регулярных и $G(n, p)$ графов доказан экспоненциальный предел для нормированного времени встречи двух независимых блужданий, стартующих из стационарного распределения:

$$\frac{T_{\text{meet}}}{E[T_{\text{meet}}]} \xrightarrow{d} \text{Exp}(1), \quad E[T_{\text{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$

В случае тяжёлых хвостов показано ускорение $E[T_{\text{meet}}] = o(n)$. Из полученных результатов следуют оценки для времени коалесценции и консенсуса: $E[T_{\text{coal}}] \sim \frac{n}{d} \log m$ и $E[T_{\text{cons}}] \sim \frac{n}{d} \log n$. Сравнение с известными работами (Avena et al., Benjamini–Kozma–Wormald, Oliveira) показывает согласование с ранее установленными порядками и уточнение асимптотик для неориентированных моделей.

- [1] Avena L., Capannoli F., Hazra R. S., Quattropiani M., *Meeting, coalescence and consensus time on random directed graphs*, 2024.
- [2] Benjamini I., Kozma G., Wormald N., *The mixing time of the giant component of a random graph*, 2016.
- [3] Oliveira R. I., *Mean field conditions for coalescing random walks*, 2013.

Центральная предельная теорема для кулоновского газа при больших температурах

Горбунов Сергей Михайлович
МФТИ, г. Москва

Круговым β -ансамблем называют следующую меру на n -точечных подмножествах единичной окружности

$$d\mathbb{P}_\beta^n(\theta_1, \dots, \theta_n) = Z^{-1} \prod_{1 \leq m < l \leq n} |e^{i\theta_m} - e^{i\theta_l}|^\beta \prod_{k=1}^n d\theta_k, \quad \theta_j \in (-\pi, \pi).$$

С физической точки зрения данная мера представляет собой распределение Гиббса системы частиц, взаимодействующих с парным потенциалом $U(\theta_1, \theta_2) = -\ln|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|$ при обратной температуре β . Килип и Стоичу показали [5], что при скейлинге углов $\theta_j \rightarrow n\theta_j$ и устремлении $n \rightarrow \infty$ данные меры имеют предел — синус- β процесс $\mathbb{P}_\beta$ — меру на бесконечных локально конечных подмножествах прямой.

Теорема. Пусть $\beta \leq 2$. Пусть функция f на действительной оси и ее производная квадратично-интегрируемы. Тогда сумма $\sum_{x \in X} f(x/R)$ значений функции в точках случайного подмножества $X \sim \mathbb{P}_\beta$ за вычетом математического ожидания сходится к гауссовому распределению при $R \rightarrow \infty$. Если функция действительно-значная, то сходимость имеет место по метрике Колмогорова-Смирнова со скоростью $1/\sqrt{\ln R}$.

При $\beta = 2$ круговой ансамбль совпадает с радиальной частью меры Хаара на унитарной группе. Соответствующий предельный процесс $\mathbb{P}_2$ является синус-процессом Дайсона. При $\beta = 1, 4$ точечные процессы $\mathbb{P}_\beta^n, \mathbb{P}_\beta$ являются пфаффианными. В общем случае, однако, не существует выражений для корреляционных функций синус- β процесса.

В 1970 году Генри Джек, рассматривая матричные интегралы, ввел семейство симметрических функций [3], параметризуемых разбиениями и параметром β . Макдональд позже дал их алгебро-комбинаторное описание [7], вывел для них аналог формулы Коши и показал их ортогональность относительно кругового β -ансамбля. Цзян и Мацумото использовали [4] результаты Макдональда для поиска точных оценок на моменты сумм степеней координат частиц под круговым β -ансамблем. Наш метод продолжает их рассуждения. В частности, следуя Бородину и Окунькову [1], мы получаем разложение ожиданий мультипликативных функционалов в многочлены Джека, обобщающее теорему Гесселя [2], и используем формулу для математического ожидания размера диаграммы по мере Джека. Полученная оценка выдерживает скейлинговый предел Килипа и Стоичу.

Удивительным образом требование на температуру $\beta \leq 2$ следует из экспоненциального роста норм многочленов Джека при $\beta > 2$. Это комбинаторное проявление фазового перехода исследуемых мер при $\beta = 2$, замеченного еще Валко и Вирагом [8]. Другое его проявление, предположенное Ламбертом [6], это достаточность конечности $1/2$ -соболевской полунормы для выполнения обобщения теоремы Сеге лишь при $\beta \leq 2$. В конструкции Валко и Вирага [8] синус- β процесса спектром случайного дираковского оператора значение $\beta = 2$ разделяет случаи предельной точки и предельной окружности соответствующего оператора.

- [1] Borodin A., Okounkov A., *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants*, Integral Equations Operator Theory – 2000. – Vol. 37. – P. 386–396.

- [2] Gessel I. M., *Symmetric functions and P-recursiveness*, J. Comb. Theory, Ser. A – 1990. – Vol. 53. – P. 257–285.
- [3] Jack H., *A class of symmetric polynomials with a parameter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A – 1970. – Vol. 69. – P. 1–18.
- [4] Jiang T., Matsumoto S., *Moments of traces of circular beta-ensembles*, Ann. Probab. – 2015. – Vol. 43. – P. 3279–3336.
- [5] Killip R., Stoiciu M., *Eigenvalue statistics for CMV matrices: From Poisson to clock via random matrix ensembles*, Duke Math. J. – 2009. – Vol. 146. – P. 361–399.
- [6] Lambert G., *Mesoscopic central limit theorem for the circular β -ensembles and applications*, Electron. J. Probab. – 2021. – Vol. 26. – P. 1–33.
- [7] Macdonald I. G., *Symmetric functions and Hall polynomials*, The Clarendon Press, 2nd ed.(1995).
- [8] Valkó B., Virág B., *Continuum limits of random matrices and the Brownian carousel*, Invent. Math. – 2009. – Vol. 177. – P. 463–508.

Решение спектральной задачи модели Кронига-Пенни с помощью алгоритма Шура

Губкин Павел Васильевич

ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург,

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

gubkinpavel@pdmi.ras.ru

Релятивистская модель Кронига-Пенни описывает одномерный оператор Дирака $\mathcal{D}_Q$ на полупрямой $\mathbb{R}_+$ вида $\mathcal{D}_Q : X \mapsto JX' + QX$, где постоянная матрица J – это квадратный корень из минус единичной матрицы, а потенциал $Q = \sum_{k \geq 0} Q_k \delta_{hk}$ является мерой с носителем на решетке $h\mathbb{Z}_+$ при некотором $h > 0$. Как и в более классических случаях, например, $Q \in L^2(\mathbb{R}_+)$, для такого оператора Дирака можно определить функцию Вейля m_Q и соответствующую функцию Шура $f_Q = \frac{m_Q - i}{m_Q + i}$. Две следующие теоремы позволяют свести спектральную теорию модели Кронига-Пенни к теории ортогональных многочленов на единичной окружности.

Теорема. Нагрузка Q_0 потенциала Q в нуле выражается через значение $f_Q(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} f_Q(iy)$.

Теорема. Функции Шура f_Q и f_{Q_h} , соответствующие потенциалам $Q = \sum_{k \geq 0} Q_k \delta_{hk}$ и $Q_h = \sum_{k \geq 0} Q_{k+1} \delta_{hk}$ связаны шагом классического алгоритма Шура

$$e^{2ihz} f_{Q_h}(z) = \frac{f_Q(z) - f_Q(\infty)}{1 - \overline{f_Q(\infty)} f_Q(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

В докладе будет показано, как с помощью этого сведения получить явную двустороннюю оценку устойчивости для отображения $Q \mapsto m_Q$. Доклад основан на совместной работе [1] с Романом Бессоновым.

- [1] Bessonov R., Gubkin P., *Direct and inverse spectral continuity for Dirac operators*, arXiv:2505.00485.

Пространственно-временная структура простого симметричного ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}$

Гусаров Александр Сергеевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

aleksandr.gusarov@math.msu.ru

Рассматривается простое симметричное ветвящиеся случайное блуждание с непрерывным временем по одномерной решетке $\mathbb{Z}$. В этом случае случайное блуждание описывается разностным лапласианом с коэффициентом диффузии $\kappa > 0$. Также предполагается, что единственный источник ветвления (т.е. точка, в которой частицы могут размножаться и гибнуть) находится в нуле, и его интенсивность (т.е. первая производная производящей функции потомков) предполагается равной $0 < \beta < \infty$. В начальный момент времени $t = 0$ на решетке находится одна частица в точке x . Результаты для численностей частиц в некоторой фиксированной точке $y \in \mathbb{Z}$ при $t \rightarrow \infty$ хорошо известны, см., например в [1] и [2]. В докладе показано, как в явном виде установить изменение поведения численностей частиц в зависимости от степенного соотношения между временной и пространственной координатами одномерной решетки.

- [1] Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, МЦНМО (2025).
- [2] Смородина Н. В., Яровая Е. Б., *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен. – 2023. – Т. 68, № 4. – С. 779–795.

Гладкость минимальных локально вогнутых функций

Добронравов Егор Петрович

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

yegordobronravov@mail.ru

В теории уравнений в частных производных интересен вопрос о решениях вырожденного уравнения Монжа-Ампера. Вогнутыми решениями вырожденного уравнения Монжа-Ампера являются минимальные локально вогнутые функции. Минимальные локально вогнутые функции так же возникают как функции оптимизирующие интегральные функционалы в теории функций Беллмана. В связи с этим интересен вопрос о структуре и гладкости минимальных локально вогнутых функций. Существенным ограничением существующих работ по данному вопросу — отсутствие свободной границы — куска границы, на котором граничное значение не задаётся, а так же предполагали существование гладкой строго вогнутой мажоранты. Мы разберём, что даже в случае отсутствия данных ограничений минимальная локально вогнутая функция $C^{1,1}$ гладкая внутри области и вплоть до жёсткой границы, а так же обсудим, насколько гладкой может быть минимальная локально вогнутая функция вплоть до свободной границы.

Размерность мер с малым преобразованием Фурье

Добронравов Никита Петрович

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
dobronravov1999@mail.ru

Принцип неопределённости в математическом анализе — это совокупность фактов, утверждающих: функция и её преобразование Фурье не могут быть одновременно малыми. Одним из вариантов принципа неопределённости является теорема о том, что не существует ненулевой функции в $L_p(\mathbb{R}^d)$, если носитель её преобразования Фурье это множество конечной α -хаусдорфовой меры с $\alpha < 2d/p$. Мы доказали, что этот принцип не выполняется в предельном случае. Мы доказали, что для любых $2 < p < \infty$ и $d \in \mathbb{N}$ существует вероятностная мера с компактным носителем μ в $\mathbb{R}^d$, такая, что $\mathcal{H}_{\frac{2d}{p}}(supp(\mu)) = 0$ и $\hat{\mu} \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Здесь $\mathcal{H}_\alpha$ — хаусдорфова мера размерности α .

Стохастическая динамика вблизи критических точек в стохастическом градиентном спуске

Дудукалов Дмитрий Витальевич

Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
d.dudukalov@g.nsu.ru

Доклад посвящён предельным теоремам для аддитивного стохастического градиентного спуска при стремлении шага к нулю. Будут выделены условия, при которых имеет место сходимост (почти наверное или по вероятности) к минимуму функции, из области притяжения которого был запущен процесс, а также условия, при которых такой сходимости не наблюдается. Кроме того, будет рассмотрена стохастическая динамика в случае запуска градиентного спуска из окрестности негладкого максимума.

Асимптотический анализ некоторых интегралов с сильно вырождающимися знаменателями

Елохин Алексей Анатольевич

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
aelokhin@hse.ru

В задаче строго обоснования теории теплопроводности Пайерлса возникает необходимость получения асимптотики для интегралов, имеющих вид $\int \frac{F dx}{\Omega^2 + \nu^2}$, при стремлении параметра ν к нулю. Существование такой асимптотики определяется свойствами функции Ω , в частности её поведением в окрестности своих критических точек. В своем докладе я планирую в общих чертах изложить схему получения такой асимптотики для случая, когда критические точки Ω вырождены, а также обсудить связанные с этим трудности.

- [1] Elokhin A., *Asymptotics for a class of singular integrals of quotients with highly degenerate denominators*, arXiv:2509.21604.

О ветвящихся случайных блужданиях в однородных и неоднородных случайных средах

Ивлев Олег Евгеньевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

olivlegerr@gmail.com

Рассматриваются две модели непрерывных по времени симметричных ветвящихся случайных блужданий по многомерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ в случайных средах. В первой модели представлена однородная ветвящаяся среда, где интенсивности гибели и деления частиц в каждой $x \in \mathbb{Z}^d$ определяются парой неотрицательных случайных величин $(\xi^-(x) = \xi^-(x, \omega), \xi^+(x) = \xi^+(x, \omega))$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Таким образом, среда (т.е. набор характеристик ветвления в источниках) в первой модели представляет собой совокупность пар случайных величин $(\xi^-(x), \xi^+(x))$, где $x \in \mathbb{Z}^d$. Будем предполагать, что пары $(\xi^-(x), \xi^+(x))$ независимы и одинаково распределены. Математическое ожидание относительно меры $\mathcal{P}$ будем обозначать $\langle \cdot \rangle$. Во второй модели изучается неоднородная ветвящаяся среда, которая определяется единственной парой неотрицательных случайных величин $(\xi^-(0), \xi^+(0))$, задающими интенсивности гибели и деления частиц в нуле соответственно. Цель работы — изучение так называемых ”отоженных” моментов $\langle m_n^p \rangle$, $p \geq 1$ локальных и общих численностей частиц для обеих моделей. Получены соответствующие асимптотики для моментов, подтверждающие гипотезу о их виде, выдвинутую в работе [1].

- [1] Yarovaya E., *Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environment*, Communications in Statistics-Simulation and Computation – 2012. – Vol. 41, No. 7. – P. 1232–1249.
- [2] Alberverio S. et al., *Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment*, Markov Process. Relat. Fields – 2000. – Vol. 6, No. 4. – P. 473–516.

Детерминантные процессы и интерполяция функций по значениям в точках случайной конфигурации

Клименко Алексей Владимирович

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва,

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва

klimenko@mi-ras.ru

Доклад основан на совместной работе с А. А. Боричевым, А. И. Буфетовым и Ж. Лином.

Детерминантные процессы — это класс случайных точечных полей, то есть вероятностных мер на множестве дискретных подмножеств (их называют конфигурациями) некоторого фазового пространства E , выделяемый особым видом корреляционных функций. Детерминантный процесс может быть построен по сжимающему оператору на пространстве $L^2(E)$. В большинстве известных примеров этот оператор является проектором на некоторое подпространство $H \subset L^2(E)$, причём это подпространство состоит из достаточно регулярных функций, так что корректно определены значения функции в каждой точке пространства E . Тогда можно связать детерминантный процесс

(случайную конфигурацию X) с пространством H вопросом об интерполяции функций: определяется ли функция $f \in H$ однозначно по своим значениям в точках (почти любой) конфигурации X ? Обсуждению этого вопроса и будет посвящён доклад.

Баланс сил как механизм формирования сообществ в случайных графах

Кобзев Иван Сергеевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

kobzev.smc@yandex.ru

Экспоненциальные модели случайных графов (ERGM) часто страдают от вырожденности при моделировании сетей с сообществами, приводя к формированию либо разреженного графа, либо одной сверхплотной компоненты.

В докладе предлагается механизм, объясняющий спонтанное возникновение сообществ как результат конкуренции двух сил: локального притяжения, формирующего плотные группы, и стабилизирующего отталкивания, препятствующего их слиянию. Этот принцип исследуется на примере минимальной ERGM, где притяжение моделируется через поощрение треугольников, а отталкивание — через штраф за пути длины три.

Формулируется основная теорема о фазовом переходе к состоянию с несколькими стабильными сообществами. Обсуждаются ключевые идеи доказательства и приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие теоретические выводы.

Стационарный частично асимметричный простой процесс исключения через призму одномерных магнитных случайных блужданий: фазовые переходы и смежные аспекты

Коваленко Елизавета Дмитриевна

МФТИ, г. Москва

kovalenko.elizavebeth@gmail.com

Рассматривается модель частично асимметричного простого процесса исключений - PASEP. Из матричного анзаца для стационарного состояния получена алгебра, представляющая собой q -деформацию матричной алгебры полностью асимметричного простого процесса исключений (TASEP). Стационарное решение может быть выражено через q -полиномы Эрмита, допускающие интерпретацию в терминах магнитных случайных блужданий. Ожидается, что фазовый переход в модели PASEP будет соответствовать локализации магнитных случайных блужданий на границе.

- [1] Derrida B., Evans M. R., Hakim V., Pasquier V., *Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation*, J. Phys. A: Math. Gen., 1493-1517 (1993).
- [2] Valov A., Gorsky A., Nechaev S., *Equilibrium mean-field-like statistical models with KPZ scaling*, Phys. Part. Nucl. – 2021. – Vol. 52, No. 2. – P. 185–201.
- [3] Koekoek R., Lesky P. A., Swarttouw R. F., *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues*, Springer, (2010).

Вероятностно-статистические свойства случайного графа с независимыми весами вершин

Котова Анна Александровна

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

kotann2710@mail.ru

В работе исследуется модель случайного графа, построенного по следующему принципу. Каждой вершине присваивается случайный вес w_i , где w_i — независимые одинаково распределённые случайные величины. Затем, когда веса вершин уже зафиксированы, независимо между каждой парой вершин i, j проводится ребро с вероятностью $f(w_i, w_j)$, где f — заранее выбранная функция (см. [1], [2]).

Для данной модели получены предельные теоремы для распределения степеней вершин и в случае билинейной функции ребра f построены статистические оценки функции распределения весов вершин.

[1] Caldarelli G., Capocci A., Rios P., Muñoz M., *Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness*, Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89, No. 25., 258702.

[2] Stegehuis C., Zwart B., *Scale-free graphs with many edges*, Electron. Commun. Probab. — 2023. — Vol. 28. — P. 1–11.

О методе Л. В. Фирсова определения длины аттического стадия

Краковский Михаил Алексеевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

krakovskiyma@my.msu.ru

Работа посвящена статистическому анализу метода Л. В. Фирсова определения длины стадия — базовой единицы расстояний, применявшейся античными географами. Метод Фирсова был подвергнут критике Engels'om, указавшим на существование “больших выбросов” в данных. Наша цель — статистическая проверка гипотезы Л. В. Фирсова о существовании устойчивой меры длины, приблизительно равной 157–158 м, которая могла быть принята в эллинистической научной традиции, с использованием критерия Стьюдента и корреляционного анализа. Полученные результаты подтверждают точность метода Фирсова.

Связь структуры спектра эволюционного оператора ветвящегося блуждания по $\mathbb{Z}$ с конфигурацией источников ветвления

Кротов Михаил Данилович

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

mikhail.krotov@math.msu.ru

Рассматривается непрерывное по времени ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по одномерной решетке $\mathbb{Z}$. В начальный момент времени $t = 0$ в произвольной точке $\mathbb{Z}$

имеется одна частица. Детальный подход к описанию моделей ВСБ см., напр., в [1]. Нами рассматриваются конфигурации конечного числа источников ветвления, т.е. таких точек на $\mathbb{Z}$, в которых частицы могут производить конечное число потомков или гибнуть. Предполагается равная интенсивность ветвления частиц в источниках ветвления. Исследуется надкритическое ВСБ, которое характеризуется экспоненциальным ростом численностей частиц в каждой точке решетки. Для него верны предельные теоремы о сходимости нормированных численностей частиц почти наверное, см. [2]. Фазовые переходы в надкритическом ВСБ определяются структурой дискретного положительного спектра эволюционного оператора, т.е. оператора, возникающего в правой части уравнения, описывающего эволюцию первых моментов численностей частиц, см. [3]. В работе изучаются условия существования положительных изолированных собственных значений, а также их поведение в зависимости от некоторых конфигураций источников ветвления и их интенсивностей. В отличие от аналогичных моделей ВСБ по многомерным решеткам, для ВСБ по $\mathbb{Z}$ вычисления представлены в явном виде, что значительно облегчает возможность применения методов численного моделирования.

- [1] Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Центр прикл. исслед. мех.-матем. ф-та МГУ, М., 104с. (2007).
- [2] Смородина Н. В., Яровая Е. Б., *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен. – 2023. – Т. 68, № 4. – С. 779–795.
- [3] Яровая Е. Б., *Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания*, Теория вероятн. и ее примен. – 2017. – Т. 62, № 3. – С. 518–541.

Средние расстояния между случайными точками внутри и на границе выпуклого тела

Лотников Алексей Сергеевич

ММИ имени Эйлера, г. Санкт-Петербург,

ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург

alex.lotnikov@gmail.com

В 2019 году А.С. Тарасов и Д.Н. Запорожец выдвинули гипотезу, согласно которой среднее расстояние между двумя случайными точками на границе выпуклого тела не меньше среднего расстояния между двумя случайными точками внутри него. В докладе будет рассмотрен частный случай этой гипотезы для центрально-симметричных плоских тел. Будут представлены полученные в этом направлении результаты, включая точные соотношения между средними расстояниями для описанных фигур, которые являются аналогами формулы Кингмана, связывающей средние расстояния между внутренними точками с длиной случайной хорды. В заключение будут обсуждаться возможные пути ослабления исходной гипотезы для произвольных плоских тел.

- [1] Kingman J., *Random secants of a convex body*, J. Appl. Probab. – 1969. – Vol. 6, No. 3. – P. 660–672.
- [2] Moseeva T., *Random sections of convex bodies*, Zap. Nauchn. Semin. POMI – 2019. – Vol. 486. – P. 190–199.

- [3] Bonnet G., Gusakova A., Thäle C., Zaporozhets D., *Sharp inequalities for the mean distance of random points in convex bodies*, Adv. Math., 326, (2021).
- [4] Gorshkov A., Nikitin I., *Mean distance between random points on the boundary of a convex figure*, J. Math. Sci. – 2024. – Vol. 286, No. 5. – P. 798–806.

Математические основы фильтра Калмана

Максимов Владислав Владимирович

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

`vladislav.maksimov@math.msu.ru`

Фильтр Калмана, безусловно, является одним из самых важных открытий в области прикладной математики в прошлом веке. Про него написано множество инженерных книг, но не так много именно математических. Мы рассмотрим строгую математическую постановку задачи и докажем теорему о существовании и единственности решения задачи оптимального оценивания с помощью аппарата матричнозначных скалярных произведений. Если останется время, то мы обсудим вопросы эффективной численной реализации алгоритма фильтрации.

- [1] Kailath T., Sayed A. H. and Hassibi B., *Linear Estimation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (2000).
- [2] <https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python>
- [3] Матасов А.И., *Основы теории фильтра Калмана*.

О законе повторного логарифма для случайных блужданий по многомерной решётке

Низамова Элина Ильсуровна

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

`elina.nizamova@math.msu.ru`

В работе устанавливается функциональный закон повторного логарифма для симметричного непрерывного по времени случайного блуждания по многомерной решетке. Описание модели случайного блуждания с конечной дисперсией скачков см., напр., в [2]. Нами данный закон доказан в чуть более сильном предположении, чем существование конечной дисперсии скачков случайного блуждания, а, именно, при существовании момента порядка $2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$. При доказательстве основного результата используются функциональные законы повторного логарифма для дискретных случайных блужданий и винеровского процесса в сочетании с теоремой о сильной аппроксимации винеровским процессом из [1] и [3]. Предложенный подход позволил преодолеть трудности, возникающие при переходе от дискретного времени к непрерывному. Основным результатом является обобщением классического закона повторного логарифма для непрерывных по времени случайных блужданий.

- [1] Булинский А. В., *Новый вариант функционального закона повторного логарифма*, Теория вероятн. и ее примен. – 1980. – Т. 25, № 3. – С. 502–512.
- [2] Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Центр прикл. исслед. мех.-матем. ф-та МГУ, М. (2007).
- [3] Bashtova E., Shashkin A., *Strong Gaussian approximation for cumulative processes*, Stoch. Proc. Appl. – 2022. – Vol. 150. – P. 1–18.

О минимальной интегральной энергии мажорант винеровского процесса

Никитин Сергей Евгеньевич

ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург

nikitin97156@mail.ru

В докладе рассматривается асимптотическое поведение (на длинных интервалах времени) минимальной интегральной энергии

$$|h|_T^\psi := \int_0^T \psi(h'(t))dt$$

для мажорант винеровского процесса $W(\cdot)$, удовлетворяющих ограничениям $h(0) = r$, $h(t) \geq W(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Результаты значительно обобщают асимптотические оценки, полученные ранее для случая кинетической энергии $\psi(u) = u^2$, причём оказывается, что этот случай, где минимальная энергия растёт логарифмически, является пограничным между двумя другими режимами.

Мартингальные преобразования и минимальные бивогнутые функции

Новиков Михаил Игоревич

ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург,

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №24-71-10011

Novikov.3.14@yandex.ru

Доклад будет посвящен точным оценкам математического ожидания величины $f(\psi_\infty)$, где f — произвольная функция, а ψ_∞ , опуская детали, можно описать, как предельное значение мартингального преобразования индикатора события. Мы обсудим, как такого рода задача может быть полностью сведена к вычислению минимальной бивогнутой функции, расскажем про связь с пространством ВМО и приведём примеры конкретных неравенств, которые можно получить таким образом. В качестве основного результата будет представлен точный критерий минимальности бивогнутой функции, заданной в полосе $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x - y| \leq 1\}$.

Финальный продукт случайной рекуррентной последовательности

Оберган Фёдор Владимирович

Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва
oberganfedor@mail.ru

Рассмотрим модель случайной рекуррентной последовательности $(Y_n, n \geq 0)$, которая задается соотношением $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$, где коэффициенты A_n – положительные независимые одинаково распределенные случайные величины, а B_n может зависеть от $(A_k, B_k, 0 \leq k < n)$ при любом $n > 0$. Эта модель была введена и активно исследовалась А.В. Шкляевым ([1]). Изучение подобных последовательностей вызывает интерес, поскольку некоторые типы ветвящихся процессов, такие как ветвящийся процесс в случайной среде с иммиграцией и без, двупольный ветвящийся процесс в случайной среде, представимы в виде таких последовательностей. Вероятности больших отклонений для таких ветвящихся процессов в случайной среде исследовались с помощью случайных рекуррентных последовательностей в [2] и [3]. В докладе будет представлена полученная автором теорема о больших отклонениях для n -ой частичной суммы U_n ряда, членами которого являются элементы случайной рекуррентной последовательности.

Также в докладе будут рассмотрены модели финальных продуктов случайной рекуррентной последовательности. Отметим, что для ветвящихся процессов финальный продукт исследовался в [4]. Пусть $(Y_n, n \geq 0)$ – определенная выше целочисленная, неотрицательная рекуррентная последовательность, а $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, которую назовем случайной средой. При фиксации среды рассмотрим последовательность независимых величин $C_{i,j}$, распределенных согласно g_{ζ_i} , где $\{g_y(s), y \in \mathbb{R}\}$ – некоторое семейство вероятностных производящих функций. Потребуем также, чтобы при любом фиксированном $k \geq 0$ случайные величины $(C_{k+1,i}, i > 0)$ не зависели от $(Y_j, j \leq k)$. Локальным финальным продуктом случайной рекуррентной последовательности $(Y_k, k \geq 0)$ при фиксированном $n \geq 0$ назовем случайную величину $L_n = \sum_{i=1}^{Y_n} C_{n+1,i}$, а случайную величину $F_n = \sum_{m=0}^n L_m$ назовем общим финальным продуктом при фиксированном $n \geq 0$.

Автором будут представлены теоремы о больших отклонениях для финальных продуктов L_n и F_n , которые позволяют исследовать предельное поведение не только самих ветвящихся процессов, но и некоторых аддитивных функционалов от них. Интерпретация полученных результатов и примеры их применения к ветвящимся процессам в случайной среде также будут отражены в докладе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-11-00037) в Математическом институте имени В.А. Стеклова Российской академии наук.

- [1] Шкляев А. В., *Большие отклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I*, Дискрет. матем. – 2019. – Т. 31, № 4. – С. 102–115.
- [2] Шкляев А. В., *Большие отклонения ветвящегося процесса в случайной среде. II*, Дискрет. матем. – 2020. – Т. 32, № 1. – С. 135–156.
- [3] Шкляев А. В., *Большие отклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде*, Дискрет. матем. – 2023. – Т. 35, № 3. – С. 125–142.
- [4] Ватутин В. А., *Системы поллинга и многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде с финальным продуктом*, Теория вероятн. и ее примен. – 2010. – Т. 55, № 4. – С. 644–679.

Динамическое построение GFF на графе

Панов Даниил Романович, Мозоляко Павел Александрович

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
panovdan2003@gmail.com

Около 13 лет назад Х. Хеденмальм и П. Ниеминен опубликовали статью [1], в которой динамически построили гауссовское свободное поле на областях комплексной плоскости из белого шума при помощи вариационной формулы Адамара. Мы покажем, что аналогичный результат можно получить и в дискретном контексте, на графах, при этом будет получен дискретный аналог формулы Адамара. Как и в непрерывном случае, эта конструкция дает удобное представление гауссовского поля, из которого легко получаются некоторые его известные свойства.

- [1] Hedenmalm H., Nieminen P. J., *The Gaussian free field and Hadamard's variational formula*, Probab. Theory Relat. Fields – 2014. – Vol. 159. – P. 61–73.

Универсальные локально–линейные ядерные оценки для производной регрессионной функции

Петренко Сергей Сергеевич

Новосибирский Государственный Университет, г. Новосибирск
s.petrenko@g.nsu.ru

Рассматривается задача непараметрической регрессии, состоящая в оценивании производной регрессионной функции, когда значения регрессионной функции с точностью до случайных погрешностей наблюдаются в некотором известном наборе детерминированных или случайных точек (наборе регрессоров). Решению этой задачи, в том числе методами ядерного сглаживания, посвящена обширная литература. В докладе будут приведены условия состоятельности и асимптотической нормальности нового класса локально-линейных ядерных оценок, при этом используется более общее и обладающее рядом преимуществ условие на регрессоры, чем известные ранее в этой задаче.

Отметим, что в работах предшественников модели с детерминированными или случайными регрессорами рассматриваются отдельно. При этом в первом случае относительно регрессоров требуется некоторое условие регулярного заполнения области задания регрессионной функции, а во втором – та или иная форма слабой зависимости регрессоров. В докладе набор регрессоров представляет собой случайные величины в схеме серий, а в качестве параметра серии выступает объем наблюдений. Последнее позволяет включить в рассмотрение в качестве частного случая и модели с детерминированными регрессорами. При изучении асимптотических свойств новой ядерной оценки относительно набора регрессоров требуется лишь, чтобы эти величины с высокой вероятностью образовывали измельчающееся разбиение области задания регрессионной функции. Данное условие в терминах плотных данных является по существу необходимым для восстановления регрессионной функции и ее производных. Оно универсально относительно стохастической природы регрессоров и позволяет в едином подходе рассматривать модели с детерминированными и случайными регрессорами, но без требования регулярности или слабой зависимости. Наконец, данное простое и наглядное условие позволяет оценить интересующую нас функцию без использования информации и характере зависимости регрессоров, что особенно важно для практических приложений.

Метод обрыва степенного ряда для SIS-модели с различными скоростями миграции восприимчивых и инфицированных

Подолин Дмитрий Алексеевич

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва
d-podolin@mail.ru

Рассмотрим следующую модификацию SIS-модели распространения заболевания:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} = -\beta SI + \gamma I, \quad \frac{\partial I}{\partial t} + U \frac{\partial I}{\partial x} = \beta SI - \gamma I. \quad (1)$$

В системе (1) $S(x, t)$ представляет линейную плотность восприимчивых к заболеванию, а $I(x, t)$ – линейную плотность инфицированных. В момент времени $t = 0$, восприимчивые начинают мигрировать вдоль оси x с постоянной скоростью V , а инфицированные – в том же направлении с постоянной скоростью U . Естественно предположить, что восприимчивые перемещаются быстрее инфицированных, поэтому $V > U$.

Используя безразмерные переменные, получаем нормированную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}} = -\bar{S}\bar{I} + \bar{I} \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{x}} = \bar{S}\bar{I} - \bar{I} \end{cases}, \quad \bar{U} = \frac{U}{V} < 1. \quad (2)$$

Для решения задачи Коши применяем метод обрыва степенного ряда. Решения ищутся в виде степенных рядов:

$$S(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t)x^k, \quad I(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t)x^k. \quad (3)$$

Подставляя ряды (3) в систему (2) и обрывая на порядке N , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $S_k(t)$ и $I_k(t)$.

Для проверки точности используем точное решение типа Бейтмана:

$$I(x, t) = \frac{1 - U}{1 + e^{-2x+(1+U)t}}, \quad S(x, t) = U + (1 - U) \frac{e^{-2x+(1+U)t}}{1 + e^{-2x+(1+U)t}}. \quad (4)$$

Количественный анализ показывает значительное улучшение точности с увеличением N . Метод демонстрирует сходимость и применимость для решения SIS-модели с миграцией.

- [1] Brauer F., Driessche P., Wu J., eds. *Mathematical epidemiology*, Springer Berlin, Heidelberg, (2008).

Рассеяние и излучение акустических волн в дискретных волноводах с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность

Сморчков Данил Сергеевич

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

st076101@student.spbu.ru

Дискретный волновод – это граф G , состоящий из нескольких дискретных полуцилиндров, соединенных конечным числом вершин и ребер. Под дискретным цилиндром мы понимаем граф, периодический при сдвиге на заданный вектор и имеющий конечную ячейку периодичности. На графе G рассматривается уравнение вида $-\operatorname{div} a \nabla u - \mu u = f$, где заданная функция f и неизвестная функция u – это функции на множестве V вершин графа, а div и ∇ – разностные аналоги соответствующих дифференциальных операторов. Спектральный параметр μ предполагается вещественным и фиксированным. Весовая функция a определена на множестве ребер, является положительной и удовлетворяет экспоненциальной стабилизации на бесконечности.

Собственные функции непрерывного спектра определяются как ограниченные решения однородной задачи, не принадлежащие $\ell_2(V)$. Мы строим базис собственных функций непрерывного спектра, удовлетворяющий асимптотике на бесконечности: $Y_j^+ = u_j^+ + \sum_{k=1}^{\mathfrak{r}} S_{j,k} u_k^- + o(1)$. Здесь $u_1^+, \dots, u_{\mathfrak{r}}^+$ обозначают *приходящие волны*, а $u_1^-, \dots, u_{\mathfrak{r}}^-$ – *уходящие*. Матрица $S = \|S_{j,k}\|$ называется *матрицей рассеяния*.

Мы описываем корректную постановку задачи с *естественными условиями излучения* $u = c_1 u_1^- + \dots + u_{\mathfrak{r}}^- + o(1)$. Коэффициенты c_j считаются по формуле $c_j = i(f, Y_j^-)_V$, где $(\cdot, \cdot)_V$ – это расширение скалярного произведения в $\ell_2(V)$, а $Y_1^-, \dots, Y_{\mathfrak{r}}^-$ – другой базис собственных функций непрерывного спектра, связанный с предыдущим соотношениями $Y_j^- = \sum_{k=1}^{\mathfrak{r}} (S^{-1})_{j,k} Y_k^+$.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с А.С. Порецким.

Условные меры совершенных мер совершенны

Соколов Игорь Вячеславович

МФТИ, г. Москва

sokolov.igor506@yandex.ru

Главный результат доклада – условная мера детерминантного точечного процесса, совершенного в смысле Г.И. Ольшевского [1], также является совершенной. Доклад основан на совместной работе с А.И. Буфетовым.

- [1] Olshanski G., *Determinantal point processes and fermion quasifree states*, arXiv:2002.10723v2.
- [2] Bufetov A. I., *Quasi-Symmetries of Determinantal Point Processes*, arXiv:1409.2068.
- [3] Bufetov A. I., Yanqi Qiu, and Alexander Shamov. *Kernels of conditional determinantal measures and the proof of the lyons-peres conjecture*, arxiv:1612.06751, 2018.
- [4] Bufetov A. I., *Conditional measures of determinantal point processes*, arxiv:1411.4951, 2016.

Характеристический полином случайной унитарной матрицы: вероятност-

ный подход

Сологубова Ксения Александровна
МФТИ, г. Москва
shushasl@mail.ru

Рассматривается работа Бургада, Хьюза, Никегбали и Йора, в которой предлагается новый подход к изучению характеристического полинома случайной унитарной матрицы. Ранее для анализа его распределения использовались сложные аналитические методы, такие как интеграл Сельберга и плотность Вейля. Авторы предлагают более простой и наглядный вероятностный подход, основанный на рекурсивном построении меры Хаара.

Основной результат работы — построение двух эквивалентных представлений характеристического полинома: как произведение независимых случайных величин и как сумма независимых случайных величин, если рассмотреть его логарифм.

Мы разбираем, как такие представления позволяют получить новые, более простые доказательства известных фактов. В частности, мы останавливаемся на новом доказательстве центральной предельной теоремы Китинга-Снейта, которое использует только классические результаты теории вероятностей, такие как многомерная ЦПТ, и позволяет избежать громоздких вычислений.

О моделировании каталитических ветвящихся случайных блужданий

Сусорова Марина Александровна
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
susorovama@gmail.com

Настоящий доклад посвящён компьютерному моделированию непрерывных по времени каталитических ветвящихся случайных блужданий (КВСБ) на одномерных и двумерных решётках.

В то время как классические исследования подобных систем, как правило, сосредоточены на их асимптотическом поведении при больших временах [1], данная работа сфокусирована на численном анализе эволюции процессов на конечных временных интервалах. Ключевой задачей является анализ пространственно-временной динамики плотности частиц и её распределения по узлам решётки, что требует применения специализированных алгоритмов.

Основным результатом работы является разработка и сравнительный анализ двух альтернативных вычислительных подходов — рекурсивного и нерекурсивного алгоритмов, — позволяющих проводить детальное моделирование КВСБ. В докладе будут представлены принципы реализации этих методов, обсуждены их вычислительные особенности, а также продемонстрированы результаты моделирования, включая серии визуализаций и анимации, наглядно иллюстрирующие динамику систем.

- [1] Булинская Е. Вл., *Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания*, Докторская диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Москва (2024).

- [2] Ермишкина Е. М., Яровая Е. Б., *Моделирование ветвящихся случайных блужданий по многомерной решетке*, Фундам. и прикл. матем. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 37–56.

Предельные теоремы для класса максимальных ветвящихся процессов

Талпа Григорий Андреевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

grigorii.talpa@math.msu.ru

Пусть $\{X_{i,j}\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин с функцией распределения F . Зададим рекуррентно последовательность $\{M_n\}$:

$$M_0 = 1, \quad M_n = \max(X_{n,1}, \dots, X_{n,M_{n-1}}), \quad n \geq 1.$$

Процесс $\{M_n\}$ называется максимальным ветвящимся процессом (МВП) и был впервые введен в работе [1], где также изучалась вероятность его невырождения. По аналогии с классическими ветвящимися процессами Гальтона–Ватсона (ВП) можно сказать, что в МВП в каждом поколении выживают потомки только одной частицы – той, у которой их больше всего.

Добавим в модель случайную среду. Зафиксируем последовательность н.о.р. случайных величин $\{\eta_i\}$ и будем рассматривать $\{X_{i,j}\}$ с функцией распределения F_{η_i} , где $\{F_y\}$ – некоторое семейство функций распределения. Процесс, определяемый по аналогии с $\{M_n\}$, но в случайной среде, называется максимальным ветвящимся процессом в случайной среде (МВПСС) и был впервые введен в статье [2].

В данной работе рассматривается случай, когда функция распределения имеет вид

$$F_y(x) = 1 - \frac{c(y)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

В зависимости от значения величины $\mathbf{E} \ln c(\eta)$ процессы классифицируются как надкритические, критические и докритические. Для данного семейства функций $\{F_y\}$ (при некоторых дополнительных ограничениях) получена асимптотика вероятностей невырождения $\mathbf{P}(M_n > 0) \sim c/\sqrt{n}$ в критическом случае, а также установлены центральная предельная теорема и асимптотика вероятностей больших уклонений в надкритическом случае.

- [1] Lamperti J., *Maximal branching processes and long range percolation*, J. Appl. Probab. – 1970. – Vol. 7, No. 1. – P. 89–96.

- [2] Лебедев А. В., *Максимальные ветвящиеся процессы в случайной среде*, Информ. и её примен. – 2018. – Т. 12, № 2. – С. 35–43.

Уравнение Колмогорова–Чепмена и его связь с марковским свойством процесса

Филичкина Елена Михайловна

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

elena.filichkina1999@yandex.ru

В докладе рассматриваются примеры процессов, удовлетворяющих уравнению Колмогорова–Чепмена, но не являющихся марковскими. Один из первых таких примеров был предложен Феллером в [1], где рассматривается процесс с тремя и более состояниями. На основе примера Бернштейна о попарно независимых величинах, которые не являются независимыми в совокупности, можно также построить примеры процессов с двумя состояниями. Показано, что уравнение Колмогорова–Чепмена неоднозначно определяет немарковский процесс. А также установлено, что для невырожденного гауссовского процесса с непрерывной ковариационной функцией выполнение уравнения Колмогорова–Чепмена для его переходных плотностей эквивалентно марковости процесса.

- [1] Feller W., *Non-Markovian processes with the semigroup property*, Ann. Math. Statist., 30 (1959).

Энтропийный анализ распределений устойчивых процессов Леви

Хамзин Виктор Олегович

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург,

ММИ имени Эйлера, г. Санкт-Петербург

viktorkhamzinwork@gmail.com

mm -энтропией метрического пространства с мерой называется величина, показывающая, какое число шаров одинакового радиуса необходимо взять, чтобы покрыть множество нужной меры. Она была определена еще в классической работе К.Шеннона [2], но до недавнего времени практически не изучалась. А. М.Вершик и М. А.Лифшиц в работе [1] нашли значение mm -энтропии банахова пространства с гауссовской мерой. Доклад будет посвящен последним результатам, полученным в негауссовском случае: мы рассмотрим пространство траекторий α -устойчивого процесса Леви и найдем его mm -энтропию.

- [1] Вершик А. М., Лифшиц М. А., *О mm -энтропии банахова пространства с гауссовской мерой*, Теория вероятн. и ее примен. – 2023. – Т. 68, № 3. – С. 532–543.
- [2] Шеннон К., *Математическая теория связи*, В кн.: *Работы по теории информации и кибернетике*, М.: Изд-во иностр. лит. – 1963. – С. 243–332.

На что нужно умножить ограниченную случайную величину, чтобы ограниченной стала также и её мартингальная квадратичная функция?

Целищев Антон Сергеевич

ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург

celis_anton@pdmi.ras.ru

Ответ на вопрос из заголовка очевиден — на 0. Поэтому опишем задачу несколько подробнее.

Пусть f — функция на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с фиксированной дискретной фильтрацией $(\mathcal{F}_n)$, $0 \leq f \leq 1$ п.в. Хорошо известно, что мартингальная квадратичная функция $S(f)$ в таком случае лежит во всех пространствах L^p , $1 < p < \infty$, но ограниченной она быть не обязана.

Тем не менее, мы покажем, как *явно построить* другую функцию (“мультипликатор”) m , такую что $0 \leq m \leq 1$, у произведения $m \cdot f$ мартингальная квадратичная функция уже ограничена: $\|S(m \cdot f)\|_\infty \leq C$, но при этом это произведение “не слишком мало”: $\mathbb{E}(f) \geq c\mathbb{E}(m \cdot f)$.

Случай фильтрации с непрерывным временем, а также случай дискретной диадической фильтрации были рассмотрены ранее Питером Джонсом и Паулем Мюллером. Мы немного расскажем об истории этой задачи, а также о двух подходах к её решению для случая произвольной дискретной фильтрации: конструктивном, при котором для функции m можно написать более-менее явную формулу, и совершенно не конструктивном, который позволяет добиться большего, но имеет свои недостатки.

Новые результаты о распределении Миттаг-Леффлера

Чернышенко Екатерина Глебовна

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

ekaterina.chernyshenko@math.msu.ru

В стохастических моделях с тяжелыми хвостами распределение Миттаг-Леффлера часто выступает в качестве предельного закона. На примере трех различных случайных процессов демонстрируется, что имеет место сходимость почти наверное к данному распределению. В частности, в модели, известной как процесс китайского ресторана (см. [1]), анализируются случайные разбиения конечного множества $1, 2, \dots, n$. При устремлении размера множества n к бесконечности, количество образующихся блоков разбиения почти наверное сходится к случайной величине, имеющей распределение Миттаг-Леффлера, что установлено в работе [4]. Затем рассматривается аналогичная модель для непрерывного времени — процесс Юла чистого рождения (см. [2]). В данной модели окрашивание частиц подчиняется следующему алгоритму: исходно в системе присутствует единственная частица, обладающая уникальным цветом. Каждая вновь появляющаяся частица с заданной вероятностью либо наследует цвет своей родительской частицы, либо приобретает абсолютно новый цвет, ранее не существовавший в популяции. В [2] установлено, что при стремлении t к бесконечности, число образовавшихся различных цветов сходится почти наверное к величине, имеющей распределение Миттаг-Леффлера. Мы продемонстрируем, как распределение Миттаг-Леффлера описывает предельное распределение времени пребывания в начальной точке для симметричного однородного случайного блуждания по одномерной решетке в условиях бесконечной дисперсии скачков (см. [3]). Затем мы усилим этот результат, доказав сходимость почти наверное.

[1] Pitman J., *Exchangeable and partially exchangeable random partitions*, Probab. Theory Relat. Fields – 1995. – Vol. 102. – P. 145–158.

[2] Pitman J., *Combinatorial stochastic processes*, Lect. Notes in Math. 1875. Springer, Berlin (2006).

- [3] Апарин А. А., Попов Г. А., Яровая Е. Б., *О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки*, Теория вероятн. и ее примен. – 2021. – Т. 66, № 4. – С. 657–675.
- [4] Bercu B., Favaro S., *A martingale approach to Gaussian fluctuations and laws of iterated logarithm for Ewens-Pitman model*, Stoch. Proc. Appl. – 2024. – Vol. 178. – P. 1–19.

Предельная теорема для количества частиц второго типа в ветвящемся процессе с мутациями в одном гене

Швайков Михаил Дмитриевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

mikhail.shvaikov@math.msu.ru

В докладе будет рассматриваться схема серий для бесконечнотипного ветвящегося процесса. На каждом этапе фиксируется число n – длительность существования ветвящегося процесса, а также зависящие от n вероятности p_n и q_n . Каждая частица при рождении может с заданной вероятностью p_n изменить свой тип на следующий, более высокий, или с вероятностью q_n на предыдущий, более низкий. Процесс начинается с одной частицы первого типа, которая имеет математическое ожидание числа потомков $\mu_1 > 1$. Частицы каждого типа независимы и одинаково распределены, но частицы более высокого типа имеют большее математическое ожидание числа потомков: $\mu_{i+1} > \mu_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Всегда считается, что $q_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, исследуется предельное распределение количества частиц каждого типа в зависимости от порядка малости p_n .

Подобный процесс (в случайной среде) описан в работе В.А. Ватутина [1], однако его модель отлична от исследуемой, в частности он рассматривает конечное число типов, и частицы могут лишь повысить свой тип. В литературе встречаются смежные проблемы. В частности, Marek Kimmel и David E. Axelrod рассматривают (см. [2]) общие свойства бесконечнотипных ветвящихся процессов с геномом (вероятности p_n и q_n можно интерпретировать как мутацию гена). Встречаются статьи (см. [3]), в которых исследуются двуполые процессы подобного вида. В свою очередь в данном докладе рассматривается специфическая задача исследования моментов первого появления частиц каждого типа и изучения их предельного распределения.

В настоящей работе выясняется, что при значениях $p_n \sim C\mu_1^{-n}$, при $n \rightarrow \infty$, где C – это некоторая константа, можно свести задачу к процессу, в котором значения типов могут только увеличиваться. Показывается, что за некоторое конечное время до завершения процесса появляются частицы второго типа, и количество частиц второго типа в этом случае имеет некоторое невырожденное распределение, кроме того, выводится явный вид этого распределения.

Список литературы:

- [1] Vatutin V. A., *The structure of the decomposable reduced branching processes. I. Finite-dimensional distributions*, Theory Probab. Appl. – 2015. – Vol. 59, No. 4. – P. 641–662.
- [2] Kimmel M., Axelrod D. E., *Branching processes in biology*, Springer New York, NY, (2015).

- [3] González M., Hull D. M., Martínez R., Mota M., *Bisexual branching processes in a genetic context: the extinction problem for Y-linked genes*, Math Biosci, (2006).

О вероятностях позднего вырождения в надкритических процессах с ветвлением

Шкляев Александр Викторович

Математический институт имени В.А. Стеклова, г. Москва,

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

ashklyae@gmail.com

Надкритический ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, как правило, вырождается в самом начале, в противном случае размножаясь с экспоненциальной скоростью. Однако, что случится, если мы потребуем, чтобы процесс выродился в отдаленный момент, то есть позднее n , где n неограниченно растет?

Оказывается (и это достаточно простой факт), что вероятность такого события имеет порядок ca^n для некоторых констант c и a , а условное поведение траектории процесса при этом совпадает с поведением невырождающегося докритического процесса.

Для ветвящихся процессов в случайной среде аналогичный вопрос значительно более сложен. Прежде всего, надкритический случай распадается на три различных подтипа, из которых родственное описанному выше поведению, демонстрирует лишь один – так называемый строго надкритический процесс. Однако, и его изучение оказывается достаточно сложным, первые результаты в этом направлении получены лишь в 2024 году В.И. Афанасьевым ([1]) в частном случае, когда распределение числа потомков одной частицы является геометрическим.

На наш взгляд, проблема заключается в том, что обусловленный поздним вырождением процесс, рассматриваемый до момента n , представляет собой не докритический ветвящийся процесс в случайной среде, а некоторую другую марковскую цепь, являющуюся, впрочем, положительно возвратной. Соответственно, его исследование требует скорее не работы с производящими функциями, а опоры на хорошо развитую теорию предельных теорем для марковских цепей.

Используя общую теорию R -положительности (см. [2]), удастся обобщить результат В.И. Афанасьева на общее распределение числа потомков, накладывая на него лишь моментные условия.

Более конкретно, показано, что вероятность позднего вырождения ветвящегося процесса в случайной среде также имеет вид cR^n для некоторых констант R, c . Известно, что в случае геометрического количества потомков одной частицы

$$R = \mathbf{E} \frac{1}{\mu},$$

где μ – случайная величина, обозначающая среднее число потомков одной частицы при фиксации среды, а c – некоторая константа.

В докладе мы обсудим описанные выше результаты, а также мотивацию к исследованию задачи о позднем вырождении надкритических процессов.

- [1] Афанасьев В. И., *Сильно надкритический ветвящийся процесс в случайной среде при условии отдаленного вырождения*, Дискрет. матем. – 2024. – Т. 36, № 1. – С. 3–14.
- [2] Ferrari P. A., Kesten H., Martínez S., *R-positivity, quasi-stationary distributions and ratio limit theorems for a class of probabilistic automata*, Ann. Appl. Probab. – 1996. – Vol. 6, No. 2. – P. 577–616.

Скорость сходимости в предельных теоремах о локальном времени пребывания случайного блуждания в точке $\mathbb{Z}^d$

Юшкова Ольга Владиславовна

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

olga.ushkova@math.msu.ru

В [1] были доказаны предельные теоремы о распределении времени пребывания случайного блуждания в точке в зависимости от размерности решетки в предположении конечной дисперсии и при условии, приводящем к бесконечной дисперсии скачков. В данной работе доказаны теоремы об оценке скорости сходимости к полученным предельным распределениям методом Стейна в метрике Вассерштейна. С помощью дискретной аппроксимации времени пребывания, асимптотических свойств переходных вероятностей случайного блуждания и обобщенных гипер-функций Эйри, рассмотренных в [2-3], получены новые результаты при различных предположениях о дисперсии скачков случайного блуждания.

В случае конечной дисперсии скачков и размерности $d = 1$ оценка скорости сходимости к полунормальному распределению равна $O(t^{-1/2})$. В случае же бесконечной дисперсии скачков в размерности $d = 1$ при значении параметра $\alpha \in (1, 2)$ имеет место сходимость к распределению Миттаг-Леффлера, и при условии $\frac{\alpha}{\alpha-1} \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $O(t^{1/\alpha-1})$.

- [1] Aparin A. A., Popov G. A., Yarovaya E. B., *On the sojourn time distribution of a random walk at a multidimensional lattice point*, Theory Probab. Appl. – 2022.
- [2] Mainardi F., *On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1994).
- [3] Cinque F., Orsingher E., *General Airy-type equations, heat-type equations and pseudo-processes*, J. Evol. Equ. (2025).

Новое условие однозначной определенности распределения абсолютно непрерывной случайной величины своими моментами

Яковенко Максим Анатольевич

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

maksim.iakovenko@math.msu.ru

Рассматриваются две случайные величины: $X \sim F$ со значениями в $\mathbf{R}$ и $Y \sim G$ со значениями в $\mathbf{R}_+$. Предполагается, что F и G абсолютно непрерывны с плотностями f и

g соответственно. Все моменты случайных величин X и Y предполагаются конечными. В работе [1] вводятся условия на плотности f и g таким образом, чтобы выполнялось условие Карлемана, из которого немедленно вытекает M -детерминированность случайных величин X и Y . Данные условия на плотности могут быть ослаблены, что приводит к обобщению результата. Демонстрируются явные примеры плотностей для граничных случаев.

- [1] Wei Y., Zhang R., *A new moment determinacy condition for probability distributions*, Теория вероятн. и ее примен. – 2025. – Т. 70, № 1. – С. 155–168.

Характеризация геометрического распределения по его сильным рекордам

Яковлев Богдан Владимирович

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
bogdanrnd1@gmail.com

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – набор независимых одинаково распределенных случайных величин (распределенных как X), где $P(X_1 < n) < 1$ для любого n .

Пусть

$$L(0) = 1,$$

$$L(n+1) = \min\{j > L(n) | X_j > X_{L(n)}\}.$$

Определим $R_n(X) = X_{L(n)}$ как n -тый сильный рекорд и $geom(\beta)$ – геометрическое распределение с носителем натуральных числа с 0.

Пусть $A_k(\beta)$ – распределение, которое порождает k -тый рекорд распределения $geom(\beta)$. Тогда справедливы результаты:

- 1) Пусть $k \geq 2$, X – случайная величина с носителем натуральных чисел с 0, тогда

$$R_k(X) \sim A_k(\beta_1), \quad R_{k-1}(X) \sim A_{k-1}(\beta_2),$$

$$\beta_1 = \beta_2, X \sim geom(\beta_1).$$

- 2) Описан класс распределений X таких, что $R_1(X) = A_1(\beta)$ для фиксированного β .

Адаптивный критерий хи-квадрат для гипотезы принадлежности семейству сдвига-масштаба

Якупов Руслан Альбертович

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
ruslan.iakupov@math.msu.ru

Классический критерий хи-квадрат используется для проверки гипотезы согласия наблюдаемого распределения с теоретическим в случае дискретных (категориальных) распределений. Для применения критерия к непрерывным распределениям на $\mathbb{R}$ обычно выполняют дискретизацию: множество наблюдений разбивается на несколько блоков, и подсчитываются частоты попадания в каждый из них. Однако в стандартной постановке границы блоков задаются заранее, до получения выборки. Это приводит к тому, что критерий фактически проверяет не исходную гипотезу о совпадении распределений, а

лишь совпадение вероятностей попадания в заранее выбранные блоки. При этом возможные локальные особенности или аномалии реальных данных могут не отражаться в выбранном разбиении.

В настоящей работе рассматривается вариация критерия хи-квадрат, в которой используется *адаптивное* построение разбиений выборки. Границы блоков первоначально определяются по квантилям, после чего рассматриваются различные объединения этих блоков. Такой подход позволяет учитывать структуру данных и сохранять чувствительность критерия к форме эмпирического распределения. Проверяется гипотеза принадлежности наблюдаемого распределения параметрическому семейству сдвига-масштаба.

Построение критерия проводится следующим образом. Сначала выборка разбивается на N блоков по эмпирическим уровням i/N . Далее для полученного дискретизированного распределения подбираются параметры сдвига и масштаба методом максимального правдоподобия. Функция правдоподобия в этом случае строится на основе частот попадания наблюдений в блоки и отражает степень согласия эмпирических и теоретических вероятностей. Максимизация этой функции позволяет определить параметры, при которых теоретическое распределение наилучшим образом описывает наблюдаемые данные.

После этого строится сама статистика критерия. Для заданного числа блоков N рассматриваются все возможные объединения этих блоков по k ячеек. Для каждого такого набора вычисляется статистика хи-квадрат, характеризующая отклонение эмпирических частот от теоретических. Итоговая статистика критерия представляет собой сумму всех полученных значений по различным разбиениям на k ячеек.

Основным результатом работы является получение предельного распределения построенной статистики. Показано, что статистика имеет предельное взвешенное хи-квадрат распределение. Этот результат позволяет использовать предложенную конструкцию в качестве асимптотического критерия проверки принадлежности распределения семейству сдвига-масштаба.

ОРГАНИЗАТОРЫ

- Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН
- Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера
- Санкт-Петербургский государственный университет
- Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук»
- Математический институт им. В. А. Стеклова РАН



*Leonhard Euler
International Mathematical Institute
in Saint Petersburg*



**Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН**

наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023



SIMC

Steklov International Mathematical Center



**Санкт-Петербургский
государственный
университет**



Мероприятие проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России, грант на создание и развитие МЦМУ «Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера» соглашения № 075–15–2025–343, № 075–15–2025–344 и грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2025-303.