Времена встречи, коалесценции и консенсуса случайных блужданий на случайных графах

Васильев Р.А.

МГУ им. М. В. Ломоносова

17 ноября 2025 г.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. В. В. Ульянов

Базовые объекты

Пусть $G_n = (V_n, E_n)$ — случайный неориентированный граф, $|V_n| = n$.

Случайные модели:

- случайный d-регулярный граф;
- модель Эрдёша–Рэни $G(n, p)$, $p = d/n$;
- конфигурационная модель с заданным распределением степеней.

Случайное блуждание. На G_n рассматриваем простое случайное блуждание $(X_t)_{t \geq 0}$:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = u \mid X_t = v) = \frac{1}{\deg(v)} \text{ при } (v, u) \in E_n, \quad 0 \text{ иначе.}$$

Стационарная мера:

$$\pi(v) = \frac{\deg(v)}{2|E_n|}.$$

Основные случайные времена

Рассматриваем два и более независимых случайных блужданий на G_n, из произвольных начальных вершин

1. Время встречи двух блужданий. Для двух независимых блужданий (X_t) и (Y_t):

$$T_{\mathrm{meet}} = \inf\{t \geq 0 : X_t = Y_t\}.$$

2. Время коалесценции. Запускаем m независимых блужданий; при встрече пары траекторий они сливаются. Обозначим:

$$T_{\mathrm{coal}} = \inf\{t : \text{осталась одна частица}\}.$$

3. Время консенсуса. В модели голосования каждая вершина носит мнение; консенсус наступает, когда все мнения совпали:

$$T_{\mathrm{cons}} = \inf\{t : \text{все вершины имеют одно мнение}\}.$$

Что было известно ранее

Ориентированные случайные графы (Luca Avena и коллеги, 2024):

- доказан экспоненциальный предел для T_{meet};
- установлено, что $E[T_{\mathrm{meet}}]$ растёт линейно по n.

Неориентированные модели:

- для случайных d-регулярных графов и $G(n,p)$ были известны только грубые оценки

$$E[T_{\mathrm{meet}}] = \Theta(n);$$

- предельное распределение T_{meet} не было установлено;
- явные константы в асимптотике также отсутствовали.

Таким образом, поведение времени встречи на неориентированных случайных графах оставалось неясным.

Основные результаты

1. **Экспоненциальный предел.** Для всех трёх моделей случайных графов:

$$\frac{T_{\mathrm{meet}}}{E[T_{\mathrm{meet}}]} \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1).$$

2. **Явные асимптотики для среднего времени встречи.**
   - d-регулярные графы и $G(n,p)$:

$$E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$

   - Конфигурационная модель с тяжёлыми хвостами:

$$E[T_{\mathrm{meet}}] = o(n).$$

3. **Следствия.**
   - асимптотика времени коалесценции:

$$E[T_{\mathrm{coal}}] \sim \frac{n}{d} \log m;$$

   - время консенсуса в модели голосования:

$$T_{\mathrm{cons}} \asymp T_{\mathrm{coal}}.$$

Логика доказательства экспоненциального предела

1. Стабилизация распределения. Существует момент $t_0 = t_0(n)$ такой, что при $t \geq t_0$ распределения X_t и Y_t близки к стационарной мере π, а

$$t_0 \ll E[T_{\mathrm{meet}}].$$

2. Фиксированная вероятность встречи. При $t \geq t_0$ вероятность встречи не зависит от времени:

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \lambda_n := \sum_v \pi(v)^2.$$

3. Геометрическая структура. После момента t_0 время до встречи имеет геометрическую структуру с параметром λ_n:

$$E[T_{\mathrm{meet}}] \approx \frac{1}{\lambda_n}.$$

4. Предел.

$$\frac{T_{\mathrm{meet}}}{E[T_{\mathrm{meet}}]} \Rightarrow \mathrm{Exp}(1).$$

Случайные d-регулярные графы

Пусть G_n — случайный d-регулярный граф, $d \geq 3$. Рассмотрим два независимых блуждания из произвольных вершин.

Теорема.

$$\frac{T_{\mathrm{meet}}}{E[T_{\mathrm{meet}}]} \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1), \qquad E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$

Интуиция.

- стационарная мера равномерна: $\pi(v) = 1/n$;
- вероятность встречи в стационаре: $\lambda_n = \sum_v \pi(v)^2 = 1/n$;
- после времени перемешивания $t_{\mathrm{mix}} \asymp \frac{\log n}{d}$ распределения X_t, Y_t близки к π;
- шаги становятся независимыми примерно раз в t_{mix} шагов;
- следовательно, независимые попытки встречи возникают с частотой $\asymp d$;
- поэтому $E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{1}{\lambda_n d} = \frac{n}{d}$;
- экспоненциальный предел — предел геометрического распределения.

Модель Эрёдша–Рэни $G(n,p)$

Рассматриваем $G(n,p)$ в сверхкритическом режиме

$$p = \frac{d}{n}, \quad d > 1,$$

и работаем на гигантской компоненте.

Теорема.

$$\frac{T_{\mathrm{meet}}}{E[T_{\mathrm{meet}}]} \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1), \qquad E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$

Интуиция.

- степени случайны: $\deg(v) \sim \mathrm{Poi}(d)$; локально гигант $\approx$ дерево Гальтона–Уотсона;
- гигант — хороший экспандер: $t_{\mathrm{mix}} \asymp \log n$;
- стационарная мера почти равномерна (степени концентрируются вокруг d): $\pi(v) \approx 1/n$;
- поэтому $\lambda_n = \sum_v \pi(v)^2 \asymp 1/n$;
- независимые попытки встречи возникают раз в t_{mix} шагов;
- средняя степень d задаёт частоту этих попыток, отсюда $E[T_{\mathrm{meet}}] \sim n/d$;
- экспоненциальный предел — предел геометрического.

Конфигурационная модель: тяжёлые хвосты

Пусть G_n — конфигурационная модель со степенным распределением:

$$\mathbb{P}(\deg(v) \geq k) \sim Ck^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in (2,3).$$

Теорема.

$$\frac{T_{\mathrm{meet}}}{E[T_{\mathrm{meet}}]} \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1), \qquad E[T_{\mathrm{meet}}] = o(n).$$

Интуиция.

- тяжёлый хвост: максимальная степень вершины v_* имеет порядок
$$\deg(v_*) \asymp n^{1/(\alpha-1)};$$
- стационарная мера пропорциональна степени: $\pi(v) \approx \deg(v)/n$;
- вклад вершины v_* в $\lambda_n = \sum_v \pi(v)^2$:
$$\pi(v_*)^2 \approx \frac{\deg(v_*)^2}{n^2} = n^{\frac{2}{\alpha-1}-2} \gg \frac{1}{n};$$
- поэтому λ_n доминируется вершинами больших степеней:
$$\lambda_n \gg 1/n;$$
- следовательно
$$E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{1}{\lambda_n} = o(n);$$

Масштаб $E[T_{\mathrm{meet}}]$ в трёх моделях

1. d-регулярные графы.

$$\pi(v) = \frac{1}{n}, \qquad \lambda_n = \sum_v \pi(v)^2 = \frac{1}{n}, \qquad E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$

2. $G(n,p)$, $p = d/n$. Степени концентрируются вокруг d, стационарная мера близка к равномерной:

$$\lambda_n \asymp \frac{1}{n}, \qquad E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$

3. Конфигурационная модель с $\alpha \in (2,3)$. Мера π концентрируется на вершинах больших степеней:

$$\lambda_n = \sum_v \pi(v)^2 \gg \frac{1}{n}, \qquad E[T_{\mathrm{meet}}] = o(n).$$

Время коалесценции

Запускаем m независимых случайных блужданий на G_n. При встрече частицы сливаются (coalescing random walks).

Определение.

$$T_{\mathrm{coal}} = \inf\{t : \text{осталась одна частица}\}.$$

Результаты.

- d-**регулярные графы,** $G(n,p)$**:**

$$E[T_{\mathrm{coal}}] \sim \frac{n}{d} \log m.$$

- **Тяжёлые хвосты в конфигурационной модели:**

$$E[T_{\mathrm{coal}}] = o(n \log m).$$

Интуиция. Коалесценция — это последовательность $m-1$ встреч независимых пар; масштаб определяется $E[T_{\mathrm{meet}}]$.

Время консенсуса

Рассматриваем voter model: каждая вершина имеет мнение; в каждый момент времени вершина принимает мнение случайного соседа.

Определение.

$$T_{\mathrm{cons}} = \inf\{t : \text{все вершины имеют одно мнение}\}.$$

Дуальность. Время консенсуса распределено как время коалесценции системы блужданий, запущенных из всех вершин.

Следствия.

- d**-регулярные графы,** $G(n,p)$**:**

$$T_{\mathrm{cons}} \sim \frac{n}{d} \log n.$$

- **Тяжёлые хвосты:**

$$T_{\mathrm{cons}} = o(n \log n).$$

Научная новизна

- Впервые установлен экспоненциальный предел для времени встречи T_{meet} на неориентированных случайных графах.
- Получены явные асимптотики для среднего времени встречи:

$$E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{n}{d} \quad \text{в регулярных графах и } G(n,p).$$

- Показано ускорение в конфигурационной модели с тяжёлыми хвостами:

$$E[T_{\mathrm{meet}}] = o(n).$$

- Выведены следствия для времени коалесценции и времени консенсуса:

$$T_{\mathrm{coal}},\ T_{\mathrm{cons}} \text{ наследуют масштаб } E[T_{\mathrm{meet}}].$$

Итоги

- Получена единая картина поведения времени встречи T_{meet} для трёх классов случайных графов.
- Во всех моделях:
$$\frac{T_{\mathrm{meet}}}{E[T_{\mathrm{meet}}]} \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1).$$
- Для регулярных графов и $G(n,p)$:
$$E[T_{\mathrm{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$
- В конфигурационной модели с тяжёлыми хвостами:
$$E[T_{\mathrm{meet}}] = o(n).$$
- Из результатов следуют точные масштабы для T_{coal} и T_{cons}.

Спасибо за внимание

Вопросы можно отправлять на почту:

r.a.vasiliev1998@gmail.com