Многоточечное штрафование симметричного процесса Леви

Абильдаев Темирлан Ергалиулы

ПОМИ РАН

9-ая Санкт-Петербургская молодежная конференция
по теории вероятностей и математической физике
17.11.2025

Структура доклада

1. Введение
2. Оператор $\mathcal{A}+\sum_{k=1}^{n}\mu_k\delta(x-a_k)$ и полугруппа $\{U_t\}$
3. Штрафование
4. Список литературы

Симметричные процессы Леви

Пусть $\xi(t)$ – одномерный симметричный процесс Леви. Это означает, что выполнены следующие условия.

Л$_1$) Почти наверное $\xi(0) = 0$.

Л$_2$) Для любого набора $\{t_j\}_{j=1}^n$, $0 \le t_1 < \ldots < t_n < \infty$, случайные величины $\xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы.

Л$_3$) Для любых t и s, $0 \le s \le t$, случайные величины $\xi(t - s)$ и $\xi(t) - \xi(s)$ имеют одно и то же распределение.

Л$_4$) Для любых $\varepsilon > 0$ и $t \ge 0$

$$\lim_{h \to 0} P(|\xi(t + h) - \xi(t)| > \varepsilon) = 0.$$

С) Для любого $t \ge 0$ случайные величины $\xi(t)$ и $-\xi(t)$ имеют одно и то же распределение.

Показатель Леви и полугруппа, порождаемая $\xi(t)$

Представление Леви-Хинчина характеристической функции $\xi(t)$ имеет вид

$$\mathbf{E}e^{ip\xi(t)} = e^{-t\Psi(p)}, \quad \Psi(p) = \frac{\sigma^2 p^2}{2} + \int\limits_{|y|>0} (1-\cos(py))\,\Pi(dy),$$

где $\sigma^2 \geq 0$, а Π – мера Леви процесса $\xi(t)$ – симметричная σ-конечная мера, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{|y|>0} \min(1, y^2)\,\Pi(dy) < \infty. \tag{1}$$

Обозначим $x - \xi(t)$ как $\xi_x(t)$. Процесс $\xi(t)$ порождает C_0-полугруппу операторов $\{T_t\}_{t\geq 0}$, действующих на $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ по правилу

$$(T_t f)(x) = \mathbf{E}f(\xi_x(t)). \tag{2}$$

Полугруппа $\{T_t\}$ продолжается до C_0-полугруппы в $(L_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ с генератором $\mathcal{A}$, действующим в Фурье-представлении как умножение на функцию $-\Psi$.

Локальное время $\xi(t)$

Локальным временем $L(t,\cdot)$ до момента времени t процесса $\xi(\tau)$ называется плотность его меры пребывания, то есть случайной меры μ_t: $\mu_t(\Gamma) = \mathrm{mes}\,\{\tau < t \,|\, \xi(\tau) \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, относительно меры Лебега, если только эта плотность существует.

Мы будем предполагать, что у $\xi(t)$ существует локальное время. Это равносильно условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dp}{1+\Psi(p)} < \infty. \tag{3}$$

Можно показать, что справедливо представление

$$L(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(\xi_x(\tau))\, d\tau. \tag{4}$$

Пределом $\mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x)/(2\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ в смысле обобщённых функций является дельта-функция Дирака $\delta(x)$, поэтому формально

$$L(t,x) = \int\limits_0^t \delta(\xi_x(\tau))\, d\tau. \tag{5}$$

Формула Фейнмана–Каца и распределение на траекториях $\xi_x(t)$

Теоретико-полугрупповой подход позволяет связать процесс $\xi(t)$ с задачей Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = (\mathcal{A}u)(t,x) + V(x)u(t,x), \quad u(0,x) = f(x), \tag{6}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$, а V принадлежит достаточно "хорошему" классу функций (например, $C_0^\infty(\mathbb{R})$). Согласно формуле Фейнмана-Каца, единственное решение данной задачи может быть представлено в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E} f(\xi_x(t))\, e^{\int\limits_0^t V(\xi_x(\tau))\,d\tau}, \tag{7}$$

где последнее выражение задаёт действие C_0-полугруппы с генератором $\mathcal{A} + V$.

Также потенциал V при некоторых условиях индуцирует на пространстве траекторий процесса $\xi_x(t)$ распределение $\mathbf{Q}_{T,x}^V$, такое, что

$$\mathbf{Q}_{T,x}^V(d\omega) = \frac{e^{\int\limits_0^T V(\omega(\tau))\,d\tau}}{\mathbf{E} e^{\int\limits_0^T V(\omega(\tau))\,d\tau}}\, \mathbf{P}_{T,x}(d\omega), \tag{8}$$

где $\mathbf{P}_{T,x}$ – распределение $\xi_x(t)$.

Потенциал типа линейной комбинации дельта-функций

Положим $V = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta(x - a_k)$, где $\mu_k > 0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \overline{1,n}$.
Формально, пользуясь формулой Фейнмана-Каца, мы получаем, что единственным решением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = (\mathcal{A}u)(t,x) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta(x - a_k) u(t,x), \quad u(0,x) = f(x), \tag{9}$$

является функция

$$u(t,x) = \mathbf{E} f(\xi_x(t))\, e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k \int\limits_0^t \delta(\xi_x(\tau) - a_k)\, d\tau} = \mathbf{E} f(\xi_x(t))\, e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k L(t, x - a_k)}, \tag{10}$$

а генератором соответствующей полугруппы является
$\mathcal{A} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta(x - a_k)$.
Соответствующее же распределение $Q_{T,x}^{\mu}$ на пространстве траекторий $\xi_x(t)$ задаётся тождеством

$$\mathbf{Q}_{T,x}^{\mu}(d\omega) = \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k L(t, x - a_k)}}{\mathbf{E} e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k L(t, x - a_k)}}\, \mathbf{P}_{T,x}(d\omega). \tag{11}$$

Это распределение экспоненциально притягивает траектории процесса $\xi_x(t)$ к точкам $a_1, \ldots, a_n$.

История вопроса

- В работе [1, 2014] M. Cranston, S. Molchanov и N. Squartini построили генератор с дельта-потенциалом и соответствующее распределение на пространстве траекторий для устойчивых процессов.
- В работе [2, 2024] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина и М. М. Фаддеев обобщили формулу Фейнмана-Каца для дельта-потенциала и потенциала типа обобщённой функции $|x|^{-1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$. В работе [3, 2024] теми же авторами был построен функционал вида

$$\int\limits_0^t q(x - w(\tau))\, d\tau,$$

где w – стандартный винеровский процесс, а q – удовлетворяющая некоторому условию обобщённая функция.

История вопроса (прод.)

- Работой [4, 2005] B. Roynette, P. Vallois и M. Yor открыли цикл работ посвящённый штрафующим мерам и их предельным свойствам. В самой работе [4, 2005] были исследованы распределения $Q_{T,x}^{V}$ для винеровского процесса.
- В работе [5, 2023] S. Takeda, K. Yano исследовали штрафование процессов Леви с локальным временем в случае $n = 1$ для отрицательного параметра μ.
- В работе [6, 2025] K. Iba, K. Yano исследовали штрафование процессов Леви с локальным временем в случае $n = 2$ для отрицательных параметров μ_1, μ_2.

Определение оператора $\mathcal{A}_\mu$

Определим $\mathcal{A}_\mu \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta(x - a_k)$, для чего сперва определим полуторалинейную форму a_μ. Возьмём в качестве области определения последней $\mathcal{D}[a_\mu]$ пространство

$$\{u \in L_2(\mathbb{R}) \mid \|\sqrt{\Psi}\widehat{u}\|_2 < \infty,\ u(a_k) = 0,\ k \in \overline{1, n}\} \tag{12}$$

и для любых $u, v \in \mathcal{D}[a_\mu]$ положим

$$a_\mu[u, v] = ((-\mathcal{A})^{1/2} u, (-\mathcal{A})^{1/2} v) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k u(a_k) \overline{v(a_k)}. \tag{13}$$

Теорема

Форма a_μ – замкнутая и полуограниченная снизу.

Следствие

Существует самосопряжённый ограниченный сверху оператор $\mathcal{A}_\mu$, такой, что

- $\mathcal{D}(A_\mu) \subset \mathcal{D}[a_\mu]$,
- *Для любых* $u \in \mathcal{D}(A_\mu)$, $v \in \mathcal{D}[a_\mu]$ *справедливо* $(A_\mu u, v) = a_\mu[u, v]$.

Семейство $\{\psi_\lambda\}$ и функция κ_ν

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Определим функцию ψ_λ, положив

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ipx}}{\Psi(p) + \lambda}\, dp. \tag{14}$$

Теорема

- *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. *Тогда*

$$(\mathcal{A} - \lambda)^{-1} f = -\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(\cdot - y) f(y)\, dy; \quad \psi_\lambda(x) = \mathbf{E} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\, L(dt, x).$$

- *Существуют* $\nu > 0$ *и положительные* $p_1, \ldots, p_n$, *такие, что*

$$\mathcal{A}_\mu \kappa_\nu = \nu \kappa_\nu, \quad \kappa_\nu \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} p_k \psi_\nu(\cdot - a_k).$$

Полугруппа Фейнмана-Каца $\{U_t\}$

Пусть $\{U_t\}_{t\geq 0}$ – семейство операторов, действующих на $C_b(\mathbb{R})$ по формуле

$$(U_t f)(x) = \mathbf{E} f(\xi_x(t)) e^{\sum_{k=1}^n \mu_k L(t,x-a_k)}. \qquad (15)$$

Теорема (формула Фейнмана-Каца)

- *Семейство $\{U_t\}$ задаёт C_0-полугруппу в $L_2(\mathbb{R})$ с генератором $\mathcal{A}_\mu$.*
- *Для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ функция $u = U_t f$ является единственным решением задачи Коши*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_\mu u, \quad u(0,x) = f(x), \qquad (16)$$

в классе $\{u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, t \mapsto u(t,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R})),$ $u(\cdot,x) \in C^1(\mathbb{R}),\ u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mu)\}$.

Мартингал $\eta_\nu(t,x)$ и предельная теорема для U_t

Обозначим через $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ фильтрацию, порождённую процессом $\xi(t)$.
Пусть

$$\eta_\nu(t,x)=e^{-\nu t}\,\frac{\kappa_\nu(\xi_x(t))}{\kappa_\nu(x)}\,e^{\sum_{k=1}^{n}\mu_k L(t,x-a_k)}. \qquad (17)$$

Теорема

Процесс $\eta_\nu(t,x)$ является $\mathcal{F}_t$-мартингалом со средним 1.

Теорема

Пусть $f\in L_2(\mathbb{R})$. Тогда

$$L_2\text{-}\lim_{t\to\infty} e^{-\nu t}\,\mathbf{E}f(\xi_x(t))e^{\sum_{k=1}^{n}\mu_k L(t,x-a_k)}=\frac{(f,\kappa_\nu)}{\|\kappa_\nu\|_2^2}\,\kappa_\nu.$$

Определение $\mathbf{Q}^{\mu}_{T,x}$

Распределение $\mathbf{P}_{T,x}$ процесса $\xi_x(t)$, $t \le T$, есть вероятностная мера на пространстве траекторий $\Omega_{T,x} = \{\omega \in \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}) \,|\, \omega(0) = x\}$, где $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R})$ – пространство Скорохода, то есть снабжённое метрикой Скорохода множество непрерывных справа и имеющих пределы слева вещественнозначных функций на $[0,T]$.

Пусть $p_\mu(t,x,y)$ – ядро оператора U_t. Положим

$$Z_\mu(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_\mu(t,x,y)\,dy. \tag{18}$$

Введём на $\Omega_{T,x}$ меру $\mathbf{Q}^{\mu}_{T,x}$, задаваемую на цилиндрических множествах формулой

$$\mathbf{Q}^{\mu}_{T,x}\{\omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_n) \in B_n\}$$
$$= \frac{1}{Z_\mu(T,x)} \int\limits_{B_1} \cdots \int\limits_{B_n} p_\mu(t_1,x,x_1) \dots p_\mu(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, Z_\mu(T - t_n, x_n)\,d\mathbf{x},$$

где $0 < t_1 < \dots < t_n \le T$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Предельная теорема для $\mathbf{Q}^{\mu}_{T,x}$

Лемма

Конечномерные распределения $\mathbf{Q}^{\mu}_{T,x}$ согласованы.

Обозначим через $\zeta(t)$ марковский процесс с переходной плотностью

$$\rho_\mu(t,x,y) = e^{-\nu t}\,\frac{\kappa_\nu(y)\,p_\mu(t,x,y)}{\kappa_\nu(x)} \tag{19}$$

и инвариантным распределением, задаваемым плотностью $\kappa_\nu^2/\|\kappa_\nu\|_2^2$.

Теорема

- *Конечномерные распределения $\mathbf{Q}^{\mu}_{T,x}$ при $T\to\infty$ сходятся по полной вариации к соответствующим конечномерным распределениям $\zeta(t)$.*
- *Распределения $\mathbf{Q}^{\mu}_{T,x}$ при $T\to\infty$ слабо сходятся к $\zeta(t)$ в $\mathbb{D}([0,\infty),\mathbb{R})$.*

Предельная теорема для $\omega(T)$

Рассмотрим распределение $\mathbf{R}^{\mu}_{T,x}$ случайной величины $\omega(T)$. Это распределение имеет смысл распределения точки, в которую перешла испытывающая притяжение траектория процесса $\xi_x(t)$ за время T.

Теорема

Распределение $\mathbf{R}^{\mu}_{T,x}$ сходится по полной вариации к распределению

$$\nu\kappa_\nu(y)\,dy.$$

[1] Cranston M., Molchanov S., and Squartini N.
Point potential for the generator of a stable process.
Journal of Functional Analysis, 3:1:1238–1256, 2014.

[2] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., and Фаддеев М. М.
О некоторых свойствах дробной производной броуновского локального времени.
Труды МИАН, 324:109–123, 2024.

[3] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., and Фаддеев М. М.
Одно замечание к формуле Ито.
Теория вероятн. и ее примен., 69:2:285–304, 2024.

[4] Roynette B., Vallois P., and Yor M.
Limiting laws associated with brownian motion perturbed by normalized exponential weights, i.
Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 43:2, 2005.

[5] Takeda S. and Yano K.
Local time penalizations with various clocks for lévy processes.
Electron. J. Probab., 28:1–35, 2023.

[6] Iba K. and Yano K.
Two-point local time penalizations with various clocks for lévy processes.
Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., 22:183–207, 2025.