О законе повторного логарифма для случайных блужданий по многомерной решетке

Низамова Элина Ильсуровна
5 курс, кафедра теории вероятностей
Научный руководитель: Яровая Е.Б.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

2025

План

- Вспомогательные результаты
- О функциональном законе повторного логарифма
- О сильной аппроксимации скачкообразного процесса винеровским процессом
- Непрерывное по времени случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$
- Закон повторного логарифма для непрерывного по времени симметричного случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$

Вспомогательные результаты о законе повторного логарифма

Одной из первых теорем, называемых законом повторного логарифма, стал результат Хинчина 1924 года, доказанный для случая суммы независимых бернуллиевских случайных величин.

Теорема (Закон повторного логарифма Хинчина)

Пусть ξ_1, ξ_2, ... *независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха* $p, 0 < p < 1$, *и неудачи* $q = 1 - p$. *Определим* $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. *Тогда имеем*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_n \frac{|S_n - np|}{\sqrt{2pqn \ln \ln n}} = 1\right) = 1.$$

Историческая справка

Рассмотрим простое случайное блуждание S_n по $\mathbb{Z}$, которое является суммой независимых бернуллиевских случайных величин ξ_1, ..., ξ_n, принимающих значения 1 и -1 с вероятностью $p = q = \frac{1}{2}$. Для этого случайного блуждания получены следующие теоремы.

- Первая предельная теорема, связанная со случайными блужданиями, появились в трактате Якоба Бернулли "Ars Conjectandi" ("Искусство предположений"; 1713 г.). Она утверждает, что $\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, по вероятности.
- В 1909 году Э. Борель установил, что $\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, п.н.
- В 1913 году Ф. Хаусдорф показал, что почти наверное для любого $\epsilon>0$ $\frac{S_n}{\sqrt{n}n^\epsilon} \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$. При этом п.н. $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow \infty$, $n \longrightarrow \infty$.
- В 1914 году Г. Харди и Дж. Литтльвуд доказали, что п.н. при $n \longrightarrow \infty$ $S_n = O(\sqrt{n \ln n})$.
- В 1923 году А. Я. Хинчин показал, что $S_n = O(\sqrt{n \ln \ln n})$, $n \longrightarrow \infty$, п.н.

- В 1924 году Хинчин доказал, что предыдущая оценка не улучшаема, а именно вывел закон повторного логарифма для случая Бернулли: $\lim_{n\to\infty} \sup_n \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1$, п.н.
- В 1929 году результат Хинчина был обобщён Колмогоровым на широкий класс последовательностей независимых случайных величин.

Теорема (Закон повторного логарифма Колмогорова)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечными дисперсиями. Определим $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i^2$. Если $B_n \to \infty$ и существует последовательность $\{M_n\}$ такая, что $|\xi_n| < M_n$ п.н. и $M_n = o(\sqrt{\frac{B_n}{\log \log B_n}})$, тогда

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_n \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \ln \ln B_n}} = 1\right) = 1.$$

Историческая справка(продолжение)

- В 1936 году Хинчин доказал закон повторного логарифма для винеровского процесса.

Определение

Винеровским процессом, или броуновским движением, называется случайный процесс $w = \{w(t), t \geq 0\}$ *такой, что*
1) Выходит из нуля: $w(0) = 0$ *п.н.*
2) Процесс w *имеет независимые приращения,*
3) Величины $w(t) - w(s) \sim N(0, t - s)$ *при всех* $0 \leq s < t < \infty$, *то есть имеют гауссовское распределение с параметрами 0 и* $t - s$,
4) Процесс w *имеет непрерывные траектории п.н.*
И d*-мерное броуновское движение есть* $W(t) = \{w^{(1)}(t), ..., w^{(d)}(t)\}$.

Теорема (Закон повторного логарифма ($d = 1$))

Пусть $w(t)$ *- винеровский процесс. Тогда*

$$P(\lim_{t\to\infty} \mathop{sup}_{t} \frac{|w(t)|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1) = 1.$$

Напомню классическую формулировку закона повторного логарифма для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Впервые в таком виде она встречается в статье Штрассена 1964 года 'An invariance principle for the law of the iterated logarithm', где автор ссылается на результаты Хартмана-Винтнера.

Теорема (Классический закон повторного логарифма)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимые случайные величины с одинаковым распределением, нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 < \infty$. Определим $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Тогда

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_n \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \ln\ln n}} = 1\right) = 1, \quad P\left(\lim_{n\to\infty} \inf_n \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \ln\ln n}} = -1\right) = 1.$$

Функциональный закон повторного логарифма Штрассена

Штрассеном в 1964 году был доказан функциональный закон повторного логарифма, описывающий множество предельных точек последовательности $g_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$, $t \in [0;1]$, $n = 3, 4, \ldots$ в пространстве $C[0,1] \times \ldots \times C[0,1]$ с нормой $||x(\cdot)|| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$ для векторов $x(t) = \{x^{(1)}(t), \ldots, x^{(d)}(t)\}$.

Теорема (Функциональный закон повторного логарифма)

Множество предельных точек последовательности $g_n(t)$ с вероятностью единица совпадает с множеством K, состоящим из таких функций $x(t)$, что $x^{(j)}(0) = 0$, $x^{(j)}$ абсолютно непрерывны при j = 1, ..., d и $\int_0^1 (\frac{dx}{dt})^2 dt \leq 1$. (здесь $(\frac{dx}{dt})^2 = (\frac{dx^{(1)}}{dt})^2 + \ldots + (\frac{dx^{(d)}}{dt})^2$, а производные $\frac{dx}{dt}$ берутся в смысле Радона—Никодима)

Дальнейшее обобщение закона повторного логарифма

В 1980 г. А. В. Булинский обобщил нормировочную функцию до класса неубывающих функций. Обозначим за Φ класс таких неубывающих функций $\phi(t), t > 0$, что $\phi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.
Рассмотрим случайные функции $f_n(t) = \frac{W_{nt}}{\sqrt{n}\phi(n)}$, где $\phi(\cdot)$ — произвольная неубывающая функция такая, что $\phi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.
Рассматривая функции $\phi(n)$ натурального аргумента, удобнее считать их сужениями на множество $\mathbb{N}$ функций $\phi(t)$, заданных на положительной полуоси. Если предположить, что каждая функция $\phi(t)$ определена на своем собственном промежутке $[q_\phi, \infty)$, но удобнее в таком случае доопределить $\phi(t)$ на интервале $(0, q_\phi)$ значением $\phi(q_\phi)$.

Для формулировки результата А. В. Булинского используются слудующие обозначения.

Функционал $I(\phi, r, c) = \sum\limits_k e^{-\frac{r\phi^2(n_k)}{2}}$, где $n_k = [c^k]$, $c > 1$, $[\cdot]$ означает целую часть числа. Для $\phi \in \Phi$ определим $R^2(\phi) = inf\{r > 0 : I(\phi, r, c) < \infty\}$ ($R(\phi) = \infty$, если не существует такого конечного r, что $I(\phi, r, c) < \infty$).

Пусть $C_0[0,1]$ — подпространство таких функций $x(t) \in C[0,1]$, что $x(0) = 0$ и K_r — замыкание (по норме $||x(\cdot)|| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$) множества таких функций $x(t) = \{x^{(1)}(t), ..., x^{(d)}(t)\}$, что $x^{(j)}(t) \in C_0[0,1]$, $x^{(j)}$ абсолютно непрерывны при j = 1, ..., d и $\int_0^1 (\frac{dx}{dt})^2 dt \leq r^2$.

Теорема (Теорема 1, А. В. Булинский, 1980)

Для $\phi \in \Phi$ множество предельных точек последовательности $f_n(t)$ с вероятностью единица совпадает с K_R, где $R = R(\phi)$ определяется формулой выше.

Дальнейшее обобщение закона повторного логарифма

Также в работе Булинского отмечается, что дискретность параметра n несущественна. Так, введём функционал $I(\phi, r) = \int\limits_1^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} e^{-\frac{r\phi^2(t)}{2}} dt$.

Теорема (Теорема 2, А. В. Булинский, 1980)

Для $\phi \in \Phi$ множество предельных точек последовательности $f_n(t)$ с вероятностью единица совпадает с K_R, где $R^2(\phi) = inf\{r > 0 : I(\phi, r) < \infty\}$.

В доказательстве отмечается, что тот же радиус R определяется функционалом $\widetilde{I}(\phi, r) = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t} e^{-\frac{r\phi^2(t)}{2}} dt$.

Следствие

Для любой $\phi \in \Phi$ такой, что $R(\phi) < \infty$ и описанного выше винеровского процесса $P(\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_t \frac{W_t}{\sqrt{t\phi(t)}} = R(\phi)) = 1$.

Аналогичный результат был доказан Булинским для сумм независимых одинаково распределённых случайных величин.
Пусть X_n - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с нулевым средним и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$.

Теорема (Теорема 5, А. В. Булинский, 1980)

Для любой $\phi \in \Phi$ такой, что $R(\phi) < \infty$ и описанной выше последовательности частичных сумм $P(\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{X_n}{\sigma\sqrt{n}\phi(n)} = R(\phi)) = 1$

О сильной аппроксимации скачкообразного процесса винеровским процессом

Сформулируем результат Е. Баштовой и А. Шашкина 2022 г., который используется при доказательстве закона повторного логарифма для непрерывного по времени случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{S_t, t \geq 0\}$ - сепарабельный случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^d$. Для вектора $z \in \mathbb{R}^d$ обозначим за $|z|$ максимальную норму.

Требуются следующие условия:

- Условие (A). Существует п.н. возрастающая случайная последовательность $\{T_n,\ n \geq 0\}$ такая, что $T_0{=}0$, и случайные элементы $\{(T_j - T_{j-1}, S_{T_{j-1+t}} - S_{T_{j-1}}, t \in (0, T_j - T_{j-1}]), j \geq 1\}$ независимы и одинаково распределены.
- Условие (Bp). Существует действительное $p > 2$ такое, что $E\tau_1^p < \infty$ и $E\nu_1^p < \infty$,

Здесь $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, $\xi_k {=} S_{T_k} - S_{T_{k-1}}$, $\nu_k = \max\limits_{0<t\leq\tau_k} |S_{T_{k-1}+t} - S_{T_{k-1}}|$ при $k \geq 1$.

О сильной аппроксимации скачкообразного процесса винеровским процессом

Теорема (Теорема 2.3, Баштова и Шашкин, 2022)

Если процесс $\{S_t, t \geq 0\}$ удовлетворяет условиям (A) и (Bp), то определив $\{S_t, t \geq 0\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\ F,\ P)$, на котором также определён стандартный d-мерный винеровский процесс $\{W_t, t \geq 0\}$, получим, что п.н. при $t \longrightarrow \infty$

$$\sup_{u \leq t} |S(u) - \kappa u - \sigma W_u| = o(t^{\frac{1}{p}}), \quad \text{где } \kappa = \frac{E\xi_1}{E\tau_1},\ \sigma^2 = \frac{Var(\xi_1 - \kappa\tau_1)}{E\tau_1}$$

Цель работы

По-видимому, закон повторного логарифма рассматривается либо для модели дискретного времени, либо для винеровского процесса. Целью работы является обобщение закона повторного логарифма на непрерывные по времени случайные блуждания по решетке $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$.

Непрерывное по времени случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$

Случайное блуждание S_t непрерывное по времени со множеством состояний $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$. Предполагается, что это марковская цепь с матрицей переходных интенсивностей (генератором) случайного блуждания $A = (a(x,y))_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющая условиям:

1) $a(x,y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $a(x,x) < 0$,
2) $\sum\limits_{y} a(x,y) = 0$,
3) симметричность: $a(x,y) = a(y,x)$,
4) пространственная однородность: $a(x,y) = a(0, y-x)$,
5) конечный момент порядка $2+\gamma$, $\gamma>0$: $-\frac{1}{a(0,0)} \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^{2+\gamma} a(0,x) < \infty$.

Непрерывное по времени случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$

6) неприводимость, то есть все точки $x \in \mathbb{Z}$ достижимы,
Через $p(t, x, y)$ обозначим переходную вероятность случайного блуждания, то есть вероятность того, что в момент t ≥ 0 частица находится в точке y, при условии, что в момент t=0 она находилась в точке x. Тогда асимптотически при h $\downarrow 0$ она с вероятностью $p(h, x, y) = a(x, y)h + o(h)$ при $y \neq x$, $p(h, x, x) = 1 + a(x, x)h + o(h)$.
7) однородность по времени: переходная вероятность за время $[s, t]$ совпадает с $p(t - s, x, y)$.
Более широкий класс блужданий в подобной постановке, а именно с конечным вторым моментом, рассматривается в работах Яровой Е.Б.

Закон повторного логарифма для непрерывного по времени симметричного случайного блуждания по решетке $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$

Далее рассматриваем случайное блуждание, удовлетворяющее условиям 1)-7). Второй момент, домноженный на $-a(0,0)$ обозначим за $\sigma^2 = \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^2 a(0,x)$.

Теорема

Пусть $\{S_t, t \geq 0\}$ - непрерывное по времени симметричное однородное неприводимое случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$, с конечным моментом порядка $2+\gamma$, $\gamma > 0$. Тогда для S_t и стандартного d-мерного винеровского процесса $\{W_t, t \geq 0\}$, определённого на том же вероятностном пространстве, что и S_t, получим, что п.н.

$$\sup_{u \leq t} |S(u) - \sigma W_u| = o(t^{\frac{1}{2+\gamma}}) \text{ при } t \longrightarrow \infty.$$

Приведём основные идеи доказательства.

Идеи доказательства теоремы

Достаточно показать, что S_t удовлетворяет условиям (A) и (Bp). Далее утверждение теоремы следует из теоремы 2.3. Баштовой и Шашкина 2022 г.

- В силу пространственной однородности времена нахождения в каждом состоянии цепи имеют экспоненциальное распределение с одинаковым параметром $-a(0,0)$.
- Если J_i - случайная величина, описывающая время нахождения в состоянии цепи после $i-1$-ого скачка, то пусть $T(0)=0$, $T(n)=\sum_{i=1}^{n} J_i$ - время n-ого прыжка.
- Тогда для t ≥ 0 $N_t := max\{n \geq 0 : T(n) \leq t\}$ имеет пуассоновское распределение с параметром $-a(0,0)t$.

- За время $h \downarrow 0$ вероятность $P($совершит скачок в точку $y \mid$ совершит скачок из точки $x) \simeq \frac{p(h,x,y)}{1-p(h,x,x)} \to -\frac{a(x,y)}{a(x,x)} = -\frac{a(0,y-x)}{a(0,0)}$.
- Все скачки, описываемые случайной величиной ξ, распределены по закону $P(\xi = y) = -\frac{a(0,y)}{a(0,0)}$. Пусть ξ_i - i-ый скачок. В силу марковости и однородности по пространству скачки ξ_1, ξ_2, ... независимы между собой. Тогда случайный процесс S_t можно представить как $S_{N_t} = \sum\limits_{i=1}^{N_t} \xi_i$.
- Пусть последовательность $\{T_n, n \geq 0\}$ из (A) совпадает с $T(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} J_i$. Для каждого j $(T(j) - T(j-1) = J_j \sim Exp(-a(0,0))$ и независимы между собой. Далее при t $\in$ (0, T(j) - T(j-1)) $S_{T(j-1)+t} - S_{T(j-1)} = 0$, а при t $=$ T(j) $S_{T(j-1)+t} - S_{T(j-1)} = \xi_j$. Значит, наш процесс удовлетворяет условию (A).

Идеи доказательства теоремы

Остаётся показать, что процесс S_t удовлетворяет условию (Вр). Воспользуемся обозначениями из работы Баштовой и Шашкина 2022 года. Тогда:

- $\tau_1 = T_1 - T_0 = J_1 \sim Exp(-a(0,0))$,
- $\nu_1 = \max\limits_{0<t\leq\tau_1} |S_{T(0)+t} - S_{T(0)}| = \max\limits_{0<t\leq T_1} |S_t| = |\xi_1|$,
- $E\tau_1 =$ -$\frac{1}{a(0,0)}$,
- $E\xi_1 =$ -$\frac{1}{a(0,0)} \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} xa(0,x) = 0$ по условиям 3) и 5),
- $\kappa = \frac{E\xi_1}{E\tau_1} = 0$,
- $\sigma^2 = \frac{Var(\xi_1)}{E\tau_1} = \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} x^2 a(0,x) < \infty$ по условию 5).
- Вычислим $E\tau_1^p = \frac{p!}{\lambda^p}$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Существует $\gamma > 0$ такое, что $E\nu_1^{2+\gamma} = E|\xi_1|^{2+\gamma} =$ -$\frac{1}{a(0,0)} \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} |x|^{2+\gamma} a(0,x) < \infty$ по условию 5).

  Значит, процесс S_t удовлетворяет условию (Вр).

Закон повторного логарифма для непрерывного по времени случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$

Теорема

Пусть $\{S_t, t \geq 0\}$ *- непрерывное по времени симметричное однородное неприводимое случайное блуждание с конечным моментом порядка 2+*γ*,* $\gamma > 0$ *на* $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$*. Для неубывающей функции* $\phi(t)$ *такой, что* $\phi(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *введем функционал* $I(\phi, r) = \int\limits_1^\infty \frac{\phi(t)}{t} e^{-\frac{r\phi^2(t)}{2}} dt$ *и* $R^2(\phi) = inf\{r > 0 : I(\phi, r) < \infty\}$*. Тогда для любой* $\phi(t)$ *такой, что* $R(\phi) < \infty$ *выполнено*

$$P(\lim_{t \to \infty} \sup_t \frac{S_t}{\sigma\sqrt{t}\phi(t)} = R(\phi)) = 1.$$

Отсюда, в частности, следует закон повторного логарифма, если за $\phi(t)$ *принять функцию* $\sqrt{2 \ln \ln t}$*.*

Приведу доказательство, которое основано на теоремах из работы А. В. Булинского 1980 г. и работе Е. Баштовой и А. Шашкина 2022 г.

Доказательство теоремы

- По теореме выше п.н. при $t \longrightarrow \infty$: $\sup\limits_{u\leq t}|S(u)-\sigma W_u| = o(t^{\frac{1}{2+\gamma}})$.
- Разделим всё на $\sqrt{t}\phi(t)$: $\sup\limits_{t}|\frac{S_t}{\sqrt{t}\phi(t)} - \sigma\frac{W_t}{\sqrt{t}\phi(t)}| = o(\frac{t^{\frac{1}{2+\gamma}}}{\sqrt{t}\phi(t)})$. Значит точно $\sup\limits_{t}|\frac{S_t}{\sqrt{t}\phi(t)}| - \sigma\sup\limits_{t}|\frac{W_t}{\sqrt{t}\phi(t)}| \leq o(\frac{1}{t^{\frac{\gamma}{2(2+\gamma)}}\phi(t)})$. Но при t $\longrightarrow \infty$ правая часть стремится к $o(1)$, а второе слагаемое к $\sigma R(\phi)$.
- Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t}\frac{|S_t|}{\sigma\sqrt{t}\phi(t)} \leq R(\phi)$ п.н. При этом процесс $\{S_t, t\geq 0\}$ содержит в себе дискретный процесс $\{S_{N_t}, t\geq 0\}$, для которого выполнена теорема 5 из работы А. В. Булинского, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t}\frac{|S_{N_t}|}{\sigma\sqrt{t}\phi(t)} = R(\phi)$ п.н.. А значит $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t}\frac{|S_t|}{\sigma\sqrt{t}\phi(t)} \geq R(\phi)$ п.н. Первая часть теоремы доказана.
- Примем за $\phi(t)$ функцию $\sqrt{2\ln\ln t}$ с областью определения $t\geq e$. Тогда $\widetilde{I}(\phi, r) = \int\limits_e^\infty \frac{1}{t}e^{-r\ln\ln t}dt = \int\limits_e^\infty \frac{1}{t}(\ln t)^{-r}dt = \int\limits_e^\infty (\ln t)^{-r}d(\ln t) = \int\limits_1^\infty y^{-r}d(y)$. Интеграл сходится при $r>1$, значит $R(\phi)=1$. $\square$

Список литературы

- Булинский А. В. Замечание о нормировке в законе повторного логарифма, Теория вероятн. и ее примен., 1977, том 22, выпуск 2, 407–409
- Булинский А. В. Новый вариант функционального закона повторного логарифма, Теория вероятн. и ее примен., 1980, том 25, выпуск 3, 502–512.
- А. Я. Хинчин, "Асимптотические законы теории вероятностей" , Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР, 1936, с.94.
- Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: НОЦ, 2025, с.
- Bashtova Elena, Shashkin Alexey "Strong Gaussian approximation for commulative processes" Stochastic Processes and their Applications, v. 150, 2022, c. 1-18.
- Borel E., "Sur les probabilites denombrables et leurs applications arithmetiques" , Rend. Circ. Mat. Palermo, т. 26, 1909, с. 247–261.

Список литературы

- Geoffrey Grimmett, David Stirzaker "Probability and Random Processes" , OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2001, c. 575
- Jacobi Bernoulli, "Ars Conjectandi" , Basileae, Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713.
- Khintchine A., "Uber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung" , Fundamentall Mathematica, т. 6, 1924, с. 9–20.
- Kolmogorov, N., "Uber des Gesetz des iterierten Logarithmus" , Mathematische Annalen, т. 101, 1929, с. 126–139.
- V. Strassen, An invariance principle for the law of the iterated logarithm, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geh., 3, 3 (1964), 211—226