Центральная предельная теорема для кулоновского газа с бесконечным числом частиц при больших температурах

С. М. Горбунов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

9-я Санкт-Петербургская молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике
17.11.2025

Круговым унитарным ансамблем называется мера на n-точечных подмножествах единичной окружности

$$d\mathbb{P}_\beta^n(\theta_1, \dots \theta_n) = Z^{-1} \prod_{1 \le l < k \le n} |e^{i\theta_l} - e^{i\theta_k}|^\beta d\theta_1 \dots d\theta_n, \quad \theta_j \in (-\pi, \pi).$$

Мера $\mathbb{P}_\beta^n$ — распределение Гиббса системы из n частиц со взаимодействием

$$U(\theta, \eta) = -\ln|e^{i\theta} - e^{i\eta}|, \quad d\mathbb{P}_\beta^n \propto \exp\left(-\beta \sum_{1 \le l < k \le n} U(\theta_k, \theta_l)\right).$$

В среднем расстояние между частицами $\sim \frac{2\pi}{n}$. Растянем частицы $\theta \mapsto n\theta$ и устремим $n \to \infty$.

Теорема-определение (Killip, Stoiciu, 2009)

Пусть f — гладкая функция с компактным носителем. Тогда случайная величина

$$\sum_{j=1}^{n} f(n\theta_j), \quad \{\theta_1, \dots \theta_n\} \sim \mathbb{P}_\beta^n$$

сходится по распределению при $n \to \infty$. Предельные распределения определяют меру на бесконечных локально конечных подмножествах $\mathbb{R}$ — синус-β процесс $\mathbb{P}_\beta$. Величина выше сходится к сумме

$$\sum_{x \in X} f(x), \quad X \sim \mathbb{P}_\beta$$

по случайному подмножеству.

Предельная теорема для аддитивных функционалов

Теорема (Szegő)

Пусть f — функция на $\mathbb{T}$, удовлетворяющая $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k||\hat{f}_k|^2 < +\infty$. Тогда верно

$$\mathbb{E}_2^n\left\{\prod_{j=1}^{n} e^{f(\theta_j)}\right\} = \exp\left(n\hat{f}_0 + \sum_{k\geq 1} k\hat{f}_k\hat{f}_{-k} + o(1)\right), \text{ при } n\to\infty.$$

Теорема (Johansson, 1988; Jiang, Matsumoto, 2015; Lambert, 2021; Г.)

Пусть f — функция на $\mathbb{T}$, удовлетворяющая $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k||\hat{f}_k|^2 < +\infty$. Тогда для $\beta \leq 2$ верно

$$\mathbb{E}_\beta^n\left\{\prod_{j=1}^{n} e^{f(\theta_j)}\right\} = \exp\left(n\hat{f}_0 + \frac{2}{\beta}\sum_{k\geq 1} k\hat{f}_k\hat{f}_{-k} + o(1)\right), \text{ при } n\to\infty.$$

Предельная теорема для аддитивных функционалов

Теорема (Сошников, 2000)

Пусть f *— квадратично-интегрируемая функция на* $\mathbb{R}$*, удовлетворяющая* $\int_{\mathbb{R}} |\omega||\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < +\infty$*. Тогда имеет место сходимость*

$$\sum_{x \in X} f(x/R) - \mathbb{E}_2 \left\{ \sum_{x \in X} f(x/R) \right\} \to \mathcal{N}(0, \sigma(f)), \ \textit{при } R \to \infty,$$

где $X \sim \mathbb{P}_2$*.*

Теорема (Г.)

Для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$*,* $f' \in L_2(\mathbb{R})$ *при* $\beta \leq 2$ *имеет место сходимость*

$$\sum_{x \in X} f(x/R) - \mathbb{E}_\beta \left\{ \sum_{x \in X} f(x/R) \right\} \to \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{\beta}\sigma(f)\right), \ \textit{при } R \to \infty,$$

где $X \sim \mathbb{P}_\beta$*. Если функция действительно-значная, то сходимость имеет место по метрике Колмогорова-Смирнова со скоростью* $1/\sqrt{\ln R}$*.*

Предложение (Петлевое уравнение; Johansson, 1998)

Для функций $w, g \in C^1(\mathbb{T})$ *верно*

$$\mathbb{E}_\beta^n \prod_{j=1}^n e^{w(\theta_j)} \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{p,q=1}^n \frac{g(\theta_p) - g(\theta_q)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_p - \theta_q}{2}\right)} + (1 - \frac{\beta}{2}) \sum_{j=1}^n g'(\theta_j) + \sum_{j=1}^n g(\theta_j) w'(\theta_j) \right\}.$$

Введем оператор на симметричных дифференцируемых функциях n переменных

$$\mathcal{H}_\beta^n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \partial_{\theta_j}^2 + \frac{\beta}{4} \sum_{1 \le j < k \le n} \frac{\partial_{\theta_j} - \partial_{\theta_k}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right)}.$$

Следствие

Для любой функции $f \in C^1(\mathbb{T})$ *верно*

$$\mathbb{E}_\beta^n \mathcal{H}_\beta^n \left\{ \prod_{j=1}^n e^{f(\theta_j)} \right\} = 0.$$

Петлевое уравнение, дайсоновское броуновское движение и многочлены Джека

Оператор $\mathcal{H}_\beta^n$ — генератор дайсоновского кругового броуновского движения — решения системы уравнений

$$d\theta_j(t) = \frac{\beta}{2} \sum_{k \neq j} \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right)} dt + dW_j(t),$$

где $\{W_j(t)\}_{j=1}^n$ — независимые стандартные броуновские движения.

- Процесс $\mathbb{P}_\beta^n$ — инвариантная мера дайсоновского броуновского движения.
- Более того, $\mathcal{H}_\beta^n$ существенно самосопряжен на $L_2(\mathbb{T}^n, \mathbb{P}_\beta^n)$.

Вопрос

Как выглядят собственные вектора $\mathcal{H}_\beta^n$?

Перепишем оператор Дайсона в координатах $z_j = e^{i\theta_j}$:

$$\mathcal{H}_\beta^n = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(z_j\partial_{z_j})^2 - \frac{\beta}{4}\sum_{1\le j<k\le n}\frac{z_j+z_k}{z_j-z_k}(z_j\partial_{z_j} - z_k\partial_{z_k}).$$

Наблюдение

Оператор $\mathcal{H}_\beta^n$ сохраняет степень симметрических многочленов.

Теорема (Loapointe, Vinet, 1995; Baker, Forrester, 1997)

Оператор $\mathcal{H}_\beta^n$, суженный на симметрические многочлены фиксированной степени, имеет простой спектр. Его собственные вектора параметризуются разбиениями — невозрастающими последовательностями $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l(\lambda)}, 0, \ldots)$, $\lambda_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, длины $l(\lambda)$ не более n и называются многочленами Джека. С точностью до нормировки их определяет условие

$$\mathcal{H}_\beta^n J_\lambda^\beta = -\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\beta}\lambda_j^2 + \frac{n+1-2j}{2}\right)\right\} J_\lambda^\beta.$$

Предложение

Свойства многочленов Джека:

- *Проективность:* $J^\beta_\lambda(z_1,\dots,z_n) = J^\beta_\lambda(z_1,\dots,z_n,0)$.
- *Формула для степени:* $\deg J^\beta_\lambda = \sum_{j\geq 1}\lambda_j$.
- *Коэффициенты этих многосленов лежат в* $\mathbb{Q}(2/\beta)$.
- *Ортогональность и формула для нормы*

$$\mathbb{E}^n_\beta J^\beta_\lambda(z_1,\dots,z_n)\overline{J^\beta_\mu(z_1,\dots,z_n)},\ \text{для } \lambda\neq\mu,$$

$$\mathbb{E}^n_\beta |J^\beta_\lambda(z_1,\dots,z_n)|^2 = N_\lambda(n)C_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda}\left(1-\frac{2-\beta}{\beta(n-i)-2j}\right)C_\lambda,$$

где C_λ *не зависит от* n.

Первое свойство означает, что J^β_λ определяет элемент алгебры симметрических многочленов Λ:

$$\Lambda\simeq\mathbb{C}[p_1,\dots],\quad p_k(x_1,\dots)=\sum_{l=1}^\infty x_l^k.$$

Пример: многочлены Шура

При $\beta = 2$ многочлены Джека совпадают с многочленами Шура

$$J_\lambda^\beta(x_1, \dots, x_N) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + N - j})_{i,j=1}^N}{\det(x_i^{N-j})_{i,j=1}^N}.$$

Для многочленов Шура верно тождество Коши

$$\sum_\lambda s_\lambda(x_1, \dots, x_N) s_\lambda(y_1, \dots, y_N) = \prod_{i,j=1}^N (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Для функции $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}_j z^j$ определим гомоморфизмы $\Lambda \to \mathbb{C}$:

$$\rho_\pm(p_j) = j \hat{f}_{\pm j}.$$

Теорема (Gessel, 1990)

Пусть функция f на $\mathbb{T}$ удовлетворяет условию $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j| |\hat{f}_j|^2 < +\infty$. Тогда для верна формула

$$e^{-n \hat{f}_0} \mathbb{E}_2^n \left\{ \prod_{j=1}^n e^{f(\theta_j)} \right\} = \sum_{\lambda : l(\lambda) \le n} \rho_+(s_\lambda) \rho_-(s_\lambda).$$

Теорема

Для многочленов Джека верно обобщение тождества Коши — равенство формальных степенных рядов

$$\sum_{\lambda} \frac{J_\lambda^\beta(x) J_\lambda^\beta(y)}{C_\lambda} = \prod_{i,j\geq 1} (1 - x_i y_j)^{-\beta/2} = \exp\left(\frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j(x) p_j(y)}{j}\right).$$

Для функции $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j z^j$ определим гомоморфизмы $\Lambda \to \mathbb{C}$:

$$\rho_\pm(p_j) = \frac{2}{\beta} j \hat{f}_{\pm j}.$$

Следствие (Г.)

Пусть функция f на $\mathbb{T}$ удовлетворяет условию $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |j| |\hat{f}_j|^2 < +\infty$. *Тогда для $\beta \leq 2$ верна формула*

$$e^{-n\hat{f}_0} \mathbb{E}_\beta^n \left\{ \prod_{j=1}^{n} e^{f(\theta_j)} \right\} = \sum_{\lambda : l(\lambda) \leq n} \frac{\rho_+(J_\lambda^\beta) \rho_-(J_\lambda^\beta)}{C_\lambda} N_\lambda(n).$$

Пусть функция f действительно-значная и удовлетворяет условию $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|j||\hat{f}_j|^2 < +\infty$. Мера Джека на множестве разбиений $\mathbb{Y}$ определена формулой

$$\mathcal{J}_f^\beta(\lambda) = Z^{-1}\frac{\rho_+(J_\lambda^\beta)\rho_-(J_\lambda^\beta)}{C_\lambda}.$$

Рассмотрим вложение

$$\Theta : \mathbb{Y} \to \mathrm{Conf}(\mathbb{R}), \quad \lambda \mapsto \{\lambda_j - 2j/\beta\}_{j\geq 0}$$

Теорема (Окуньков, 2001)

Образ $\Theta_*\mathcal{J}_f^2$ является детерминантным точечным процессом.

Теорема (Страхов, 2010)

Образ $\Theta_*\mathcal{J}_f^\beta$ является пфаффианным точечным процессом для $\beta = 1, 4$ и $f(x) = C\cos(\theta x)$.

Вопрос

При каких функциях верна теорема Страхова?

При больших n из двойственности в алгебре симметрических функций Λ можно получить, что

$$\mathbb{E}_{\beta}^{n}\left\{\prod_{j=1}^{n} e^{f(\theta_j)}\right\} \approx Z\mathcal{J}_f^{2/\beta}(\lambda : \lambda_0 \leq n) \approx Z\Theta_*\mathcal{J}_f^{2/\beta}(X : |X \cap [n, +\infty)| = 0).$$

Пусть f — гладкая функция с компактным носителем.

Вопрос

Существует ли предел процессов $\Theta_*\mathcal{J}_{f(n\cdot)}^{\beta}$ при одновременном скейлинге конфигураций:

$$\{\lambda_j - 2j/\beta\}_{j\geq 0} \mapsto \left\{\frac{\lambda_j - 2j/\beta}{n}\right\}_{j\geq 0}$$

при $n \to \infty$.

Теорема (Буфетов, 2024)

При $\beta = 2$ ответ на вопрос выше положительный.