Условные меры совершенных мер совершенны

Соколов Игорь
Научный руководитель: Буфетов Александр Игоревич

МФТИ

Workshop "9-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics", Санкт-Петербург, 2025

План доклада

- Совершенные меры в смысле Ольшанского
- Меры Пальма (частный случай)
- Условные меры

Основные обозначения

$\mathfrak{X}$ – некоторое счётное множество (в основном, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ или $\mathbb{Z}_{\geq 0}$).
По необходимости будем снабжать $\mathfrak{X}$ линейным порядком $(\mathfrak{X}, >)$ и/или требовать конечности интервалов в нём.
$\Omega := \{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$ (иногда будем обозначать $\mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$).
$\mathcal{P}(\Omega)$ – пространство вероятностных борелевских мер на пространстве Ω.
$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathfrak{X})$ – группа финитных перестановок $\mathfrak{X}$.

Любая мера $\mathcal{P}(\Omega)$ однозначно определяется (возможно бесконечным) набором $\rho_1, \rho_2, \ldots$ корреляционных функций.
Для любого $n = 1, 2, \ldots$ ρ_n – симметричная функция n попарно различных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{X}$.
$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = M(\mathrm{Cyl}(x_1, \ldots, x_n)) = M(\{\omega \in \Omega : \omega(x_1) = \cdots = \omega(x_n) = 1\})$

Определение

Будем говорить, что мера $M \in \mathcal{P}(\Omega)$ является детерминантной, если существует комплекснозначная функция $K(x, y)$ на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ такая, что для любого n и любого набора n попарно различных аргументов $(x_1, \ldots, x_n)$

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j \in \overline{1,n}}. \tag{1.1}$$

Определение

Пусть $\ell^2(\mathfrak{X})$ – комплексное гильбертово пространство с счётным ортонормированным базисом $\{e_x\}_{x\in\mathfrak{X}}$, состоящим из дельта-функций. Оператор на $\ell^2(\mathfrak{X})$ называется положительным сжатием, если $K = K^*$ и $0 \leq K \leq 1$.

Матрица $K(x, y) := \langle K e_y, e_x\rangle$ является корреляционным ядром для (обязательно уникальной) детерминантной меры, которую мы будем обозначать в дальнейшем M_K или $\mathbb{P}_K$.
Иногда нам понадобится смотреть на K как на ССО проектор на замкнутое подпространство $L := \mathrm{Ran}(K) \subseteq \ell^2(\mathfrak{X})$.

Обозначим $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{X})$ унитальную $*-$алгебру, которая порождается элементами $\{a_x^+, a_x^-\}_{x\in\mathfrak{X}}$ со следующими определяющими соотношениями (CAR – canonical anticommunication relations):

$$\begin{cases} a_x^+ a_y^+ + a_y^+ a_x^+ = 0; \\ a_x^- a_y^- + a_y^- a_x^- = 0; \\ a_x^+ a_y^- + a_y^- a_x^+ = \delta_{xy}; \\ (a_x^+)^* = a_x^-, \end{cases} \qquad x, y \in \mathfrak{X}. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^0(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{A}$ – её $*$-подалгебра, которая порождается элементами вида $\{a_x^+ a_y^-\}_{x,y\in\mathfrak{X}}$ (GICAR – gauge invariant canonical anticommunication relations).

Определение

Пусть K – положительное сжатие на $\ell^2(\mathfrak{X})$ и. Квазисвободное состояние на $\mathfrak{A}^0$, соответствующее сжатию K, есть линейный функционал $\varphi[K] : \mathfrak{A}^0 \to \mathbb{C}$, который однозначно определяется следующими условиями:

1. $\varphi[K](1) = 1$;
2. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любых двух наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\varphi[K](a^+_{x_n} \ldots a^+_{x_1} a^-_{y_1} \ldots a^-_{y_n}) = \det[K(y_i, x_j)]_{i,j\in\overline{1,n}}. \qquad (1.3)$$

В ряде работ было показано, что это определение корректно, а также то, что $\varphi[K]$ действительно является состоянием.

Связь между детерминантными мерами и квазисвободными состояниями

$C(\Omega)$ с поточечными операциями – коммутативная подалгебра $\mathfrak{A}^0$, которая порождается элементами вида $\{a_x^+ a_x^-\}_{x\in\mathfrak{X}}$.
Например, $\chi_{\mathrm{Cyl}(x_1,\dots,x_n)} \rightleftarrows (a_{x_1}^+ a_{x_1}^-)\dots(a_{x_n}^+ a_{x_n}^-)$.
Пусть K – положительное сжатие, а $\varphi[K]|_{C(\Omega)}$ – сужение квазисвободного состояния на подалгебру $C(\Omega)$. Существует взаимооднозначная связь между $\mathcal{P}(\Omega)$ и состояниями на $C(\Omega)$ – математическое ожидание:

$$\mathbb{E}_M(f) := \int\limits_\Omega f(\omega)M(\mathrm{d}\omega), \quad f \in C(\Omega). \tag{1.4}$$

Мера, соответствующая состоянию $\varphi[K]|_{C(\Omega)}$ – детерминантная мера M^K. Тем самым устанавливается естественное соответствие:

квазисвободное состояние $\to$ детерминантная мера, $\quad \varphi[K] \mapsto M^K$.

Идея работы Г.И. Ольшанского [3] инвертировать это соответствие: найти способ однозначно определить каноническое корреляционное ядро для M.

Приведём кратко реализацию этой идеи.

Действие $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ на $\mathfrak{X}$ в естественном смысле порождает действие на $C(\Omega)$ гомеоморфизмами. Также $C(\Omega)$ – это коммутативная унитальная $*$-алгебра, на которую группа $\mathcal{S}$ действует автоморфизмами. Это позволяет корректно определить (полное) скрещенное произведение $C(\Omega) \rtimes \mathcal{S}$ – это $*-$алгебра в смысле

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ – сепарабельная унитальная $*-$алгебра, G – конечная или счётная группа её автоморфизмов.

$\mathbf{1}$. Ковариантное представление пары $(\mathcal{A}, G)$ – это пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, где $\mathcal{T}_1$ – представление алгебры $\mathcal{A}$, а $\mathcal{T}_2$ – унитарное представление G.

Эти представления действуют на обычном сепарабельном гильбертовом пространстве так, что

$$\mathcal{T}_2(g)\mathcal{T}_1(f)\mathcal{T}_2(g^{-1}) = \mathcal{T}_1({}^g f), \qquad f \in \mathcal{A}, \quad g \in G, \tag{1.6}$$

где ${}^g f \equiv g(f) = gf$ – результат действия $g \in G$ на элемент f.
2. Существует (унитальная и сепарабельная) $*-$алгебра $\mathcal{B}$, снабжённая морфизмом $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, и морфизм, переводящий группу G в унитарную группу $\mathcal{B}$ такие, что:

1. эти морфизмы согласованы (в естественном смысле) с действием G на A ($\equiv$ морфизмы и действие элемента группы G перестановочны);
2. образы A и G порождают $\mathcal{B}$;
3. любое ковариантное представление $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ пары $(\mathcal{A}, G)$ «факторизуется» через представление $\mathcal{B}$.

Более того, алгебра $\mathcal{B}$ уникальная с точностью до эквивалентности. Она называется (полным) скрещённым произведением алгебры $\mathcal{A}$ и группы G, которое обозначается как $\mathcal{A} \rtimes G$.

$\mathbf{1}$. Итак, мы рассматриваем $\mathcal{S}-$квазиинвариантную меру $M \in \mathcal{P}(\Omega)$ и строим пару представлений $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\ell^2(\Omega, M)$, $*-$алгебры $C(\Omega)$ и $\mathcal{S}$ соответственно.

Элементы $f \in C(\Omega)$ действуют как операторы умножения на соответствующую функцию:

$$\mathcal{T}_1(f)h = fh, \qquad h \in \ell^2(\Omega, M). \tag{1.7}$$

Унитарное представление $\mathcal{T}_2$ группы $\mathcal{S}$ даётся представлением купмановского типа (Koopman-type construction):

$$(\mathcal{T}_2(s)h)(\omega) = h(s^{-1}(\omega)) \left(\frac{\mathrm{d}(M \circ s)}{\mathrm{d}M}(\omega) \right)^{1/2}, \qquad h \in \ell^2(\Omega, M), \quad \omega \in \Omega, \quad s \in \mathcal{S}.$$

Такая пара удовлетворяет определению 1.4 – и оно поднимается до представления $C(\Omega) \rtimes \mathcal{S}$, которое мы обозначаем $\mathcal{T}[M]$.
$\mathbf{2}$. Далее положим, что $(\mathfrak{X}, <)$ имеет линейный порядок и конечные интервалы. С учётом этого условия строится сюръективный гомоморфизм $C(\Omega) \rtimes \mathcal{S} \to \mathfrak{A}^0$ и проверяется, что представление $\mathcal{T}[M]$ «факторизуется» через него. Таким образом, мы получаем представление алгебры $\mathfrak{A}^0$, которое мы обозначаем $T[M]$.
$\mathbf{3}$. Наконец, определяется состояние $\tau[M]$ на алгебре $\mathfrak{A}^0$ по формуле

$$\tau[M] = \langle T[M](a)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_{\ell^2(\Omega, M)}, \quad a \in \mathfrak{A}^0. \tag{1.8}$$

По построению состояние $\tau[M]$ хранит всю информацию об исходной мере.
Возникает вполне естественный вопрос: «Когда состояние $\tau[M]$ $\mathcal{S}$-квазиинвариантной меры M равно квазисвободному состоянию $\varphi[K]$?» Г.И. Ольшанский [3] даёт для таких мер название – совершенные.

Определение

Пусть M – $\mathcal{S}-$квазиинвариантная вероятностная мера на Ω. Мы говорим, что M – *совершенная мера*, если состояние $\tau[M]$ есть квазисвободное состояние $\varphi[K]$ для некоторого положительного сжимающего оператора K на $\ell^2(\mathfrak{X})$. Более того, ядро $K(x, y) := \langle Ke_x, e_y \rangle$ будем называть *каноническим корреляционным ядром* M.

Вопрос

Устойчиво ли свойство совершенности при переходе от $\mathcal{S}-$квазиинвариантной детерминантной совершенной меры $M_K = \mathbb{P}_K$ к её условным мерам?

Меры Пальма

Здесь мы будем рассматривать корреляционное ядро K совершенной детерминантной меры $\mathbb{P}_K$ как оператор ортогонального проецирования на замкнутое подпространство $L = \mathrm{Ran}(L) \subseteq \ell^2(\mathfrak{X})$.
Мера Пальма $\mathbb{P}_K^p$ допускает следующее описание. Рассмотрим условную меру $\mathbb{P}_K$ на подпространстве конфигураций, содержащих точку в позиции p. Затем мы убираем точку из позиции p. Более формально, $\mathbb{P}_K^p$ – push-forward условной меры под действием «стирающего отображения», сопоставляющему конфигурации X конфигурацию $X \setminus \{p\}$.
Пусть теперь $\mathbb{P}^{\hat{q}}$ – условная мера $\mathbb{P}_K$ по условию того, что в позиции q нет частицы. Более формально, определим

$$\hat{\Omega}(p) = \{\omega \in \Omega : \{q\} \notin \omega\}.$$

Определим

$$\mathbb{P}_K^{\hat{q}} = \frac{\mathbb{P}_K|_{\hat{\Omega}(q)}}{\mathbb{P}_K(\hat{\Omega}(q))}. \tag{2.1}$$

Корреляционные ядра таких мер даются следующими

Теорема (2.16, [1])

Пусть $p \in \mathfrak{X}$, $\mu(\{p\}) > 0$. Тогда оператор ортогонального проецирования на подпространство $L(p) = \{\varphi \in L : \varphi(p) = 0\}$ имеет ядро K^p, имеющее вид:

$$K^p(x,y) = \begin{cases} K(x,y) - \frac{K(p,y)K(x,p)}{K(p,p)}, & x, y \neq p, \\ 0, \textit{иначе.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Теорема (Proposition 2.17, [1])

Пусть $q \in \mathfrak{X}$, $\mu(\{q\}) > 0$. Тогда оператор ортогонального проецирования на подпространство $\chi_{\mathfrak{X}\setminus\{q\}}L$ имеет ядро $K^{\hat{q}}$, имеющее вид:

$$K^{\hat{q}}(x,y) = \begin{cases} K(x,y) + \frac{K(q,y)K(x,q)}{1-K(q,q)}, & x,y \neq q, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Фиксацию частиц и дырок можно продолжать и далее. Так, пусть $p_1, \ldots, p_l$ – различные точки $\mathfrak{X}$ и

$$L(p_1, \ldots, p_l) = \{\varphi \in L : \varphi(p_1) = \varphi(p_2) = \cdots = \varphi(p_l) = 0\}. \tag{2.4}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема (Shirai, Takahashi, [4])

Для любого $l \in \mathbb{N}$ и для ρ_l-п.в. l различных точек $p_1, \ldots, p_l \in \mathfrak{X}$, итерированная мера Пальма $\mathbb{P}_K^{p_1,\ldots,p_l}$ даётся формулой

$$\mathbb{P}_K^{p_1,\ldots,p_l} = \mathbb{P}_{K^{p_1,\ldots,p_l}}, \tag{2.5}$$

где $K^{p_1,\ldots,p_l} = (\ldots(((K)^{p_1})^{p_2})\ldots)^{p_l}$.

Аналогично пусть $l \in \mathbb{N}$, $m < l$ и $(p_1, \ldots, p_l)$ – различные точки в $\mathfrak{X}$. Определим

$$L(p_1, \cdots p_m, \hat{p}_{m+1}, \ldots, \hat{p}_l) = \{\chi_{\mathfrak{X}\setminus\{p_{m+1},\ldots,p_l\}} : \varphi \in L,\ \varphi(p_1) = \cdots = \varphi(p_m) = 0\}.$$

Оператор ортогонального проецирования на соответствующее подпространство обозначим $K^{p_1,\ldots,p_m,\hat{p}_{m+1},\ldots,\hat{p}_l}$.

Тогда справедливо следующая

Теорема (Proposition 2.18, [1])

Рассмотрим нормированное сужение $\mathbb{P}_K$ на $\mathrm{Cyl}(p_1, \ldots, p_m, \hat{p}_{m+1}, \ldots, \hat{p}_l)$. Push-forward этого нормированного сужения на цилиндр $\mathrm{Cyl}(\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m, \hat{p}_{m+1}, \ldots, \hat{p}_l)$ под действием «стирающего отображения» есть мера $\mathbb{P}_{K^{p_1,\ldots,p_m,\hat{p}_{m+1},\ldots,\hat{p}_l}}$, где $K^{p_1,\ldots,p_m,\hat{p}_{m+1},\ldots,\hat{p}_l} = (\ldots((\ldots(K)^{p_1})^{p_2}\ldots)^{p_m})^{\hat{p}_{m+1}})\ldots)^{\hat{p}_l}$.

Заметим, что из утверждений выше можно сделать следующий вывод:

Лемма

Пусть K – ортогональный проектор на замкнутое подпространство в $\ell^2(\mathfrak{X})$ с $\mathrm{Ran}(K) = L \subseteq \ell^2(\mathfrak{X})$, $p \neq q$ – различные точки $\mathfrak{X}$. Тогда взятие «условия по дырке» в позиции q и взятие «условия по частице» в позиции p коммутируют:

$$(K^{\hat{p}})^q = (K^q)^{\hat{p}}. \tag{2.6}$$

Фиксируем произвольное натуральное число $N \in \mathbb{N}$, множество $(\mathfrak{X}, <)$ положим подмножеством $\mathbb{R}$ с наследуемым из него порядком. Пусть $|\mathfrak{X}| > N$ в случае конечного $\mathfrak{X}$; в случае бесконечного $\mathfrak{X}$ наложим дополнительное требование конечности интервалов $(\mathfrak{X}, <)$. Обозначим $\Omega_N \subset \Omega$ – множество всех $N-$точечных подмножеств Ω. Пусть K_N – оператор ортогонального проецирования на $N-$мерное подпространство в $\ell^2(\mathfrak{X})$, а $\mathbb{P}_{K_N}$ – соответствующая $\mathcal{S}-$квазиинвариантная совершенная мера (например, $N-$точечный дискретный ортогональный ансамбль [Theorem 5.1, [3]]).
Рассмотрим гильбертово пространство $\ell^2(\Omega_N)$ с его ортонормированным базисом $\{\delta_\omega : \omega \in \Omega_N\}$. Пусть T_N – представление алгебры $\mathfrak{A}^0$ на этом пространстве, ассоциированное с считающей мерой на Ω_N.

Оператор умножения на функцию $(\mathbb{P}_{K_N}(\cdot))^{1/2}$ определяет изометрию пространства $\ell^2(\Omega_N, \mathbb{P}_{K_N})$ и пространства $\ell^2(\Omega_N)$, связывает представления $T[M_N]$ и T_N, а также переводит вектор $\mathbf{1} \in \ell^2(\Omega_N, M_N)$ в вектор

$$\bar{\mathbf{1}} := \sum_{\omega\in\Omega_N} (M_N(\omega))^{1/2}\delta_\omega \in \ell^2(\Omega_N).$$

Введем обозначение:

$$\operatorname{sgn}(x_1,\ldots,x_l;y_1,\ldots,y_l;\omega) := \begin{cases} \prod\limits_{u\in\omega\setminus\{y_1,\ldots,y_l\}} \prod\limits_{i=1}^{l} \operatorname{sgn}(x_i-u)\operatorname{sgn}(y_i-u)\cdot \\ \cdot \prod\limits_{1\le i<j\le l} \operatorname{sgn}(x_i-x_j)\operatorname{sgn}(y_i-y_j), \\ \text{если } \omega\supseteq\{y_1,\ldots,y_l\}\text{и} \\ (\omega\setminus\{y_1,\ldots,y_l\})\cap\{x_1,\ldots,x_l\}=\varnothing; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Для доказательства также нужна следующая техническая

Лемма (Proposition 4.8, [3])

Для любого $\omega \in \Omega_N$ *верно*

$$T\left(a^+_{x_n} \dots a^+_{x_1} a^-_{y_1} \dots a^-_{y_n}\right) \delta_\omega = \operatorname{sgn}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; \omega) \times \\ \times \delta_{(\omega \setminus \{y_1, \dots, y_n\}) \cup \{x_1, \dots, x_n\}}.$$

В силу $\mathcal{S}-$квазиинвариантности исходной меры состояние на алгебре $\mathfrak{A}^0$ корректно определено и в соответствии с (1.8):

$$\tau[M_N](a) = \langle T_N(a)\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{1}}\rangle, \qquad a \in \mathfrak{A}^0,$$

где в правой части скалярное произведение понимается в смысле скалярного произведения в пространства $\ell^2(\Omega_N)$.

Вопрос

Верно ли, что условие (??) для корреляционного ядра K_N^p при $a := a^+_{x_n} \dots a^+_{x_1} a^-_{y_1} \dots a^-_{y_n}$ следует из того же условия для корреляционного ядра $K(x,y)$ при $a^p := a^+_{x_n} \dots a^+_{x_1} a^+_p a^-_p a^-_{y_1} \dots a^-_{y_n}$?

$\mathbf{1}$. В случае одной частицы необходимо записать с учётом сказанного выше определение (1.8), а затем произвести элементарные преобразования столбцов и строк в определителе.

$\mathbf{2}$. Необходимо применить $\mathbf{1}$. последовательно ка корреляционным ядрам в соответствии с теоремой 2.5.

Таким образом, оказывается верна следующая

Теорема

При наложенных выше условиях справедливы следующие утверждения:

1. *Детерминантная мера* $\mathbb{P}_{K_N^p}$ *с корреляционным ядром, определённым в* 2.1*, является совершенной.*
2. *Итерированная мера Пальма, определённая в теореме* 2.5*, является совершенной.*

Для $\omega \in \Omega$ определим $\omega^\circ := \Omega \setminus \omega$ (тогда, конечно, $(\omega^\circ)^\circ = \omega$). Отображение $\omega \mapsto \omega^\circ$ есть гомеоморфизм Ω, который называется инволюцией дырка/частица. Это отображение индуцирует инволютивное преобразование мер $M \mapsto M^\circ$ мер в пространстве $\mathcal{P}(\Omega)$. Инволюция «дырка-частица» коммутирует с действием группы $\mathcal{S}$ и потому сохраняет множество $\mathcal{S}-$квазиинвариантных мер.
Оказывается верна следующая

Теорема (Proposition 4.14, [3])

Пусть $\mathbb{P}_K$ – совершенная мера и $K(x,y)$ – её корреляционное ядро. Тогда мера M°, полученная из M с помощью инволюции дырка/частица также является совершенной и её корреляционное ядро есть

$$K^\circ(x,y) := \delta_{xy} - (-1)^{\nu(x)-\nu(y)} K(x,y), \qquad x, y \in \mathfrak{X}. \tag{2.7}$$

Непосредственная проверка с учётом этой теоремы показывает, что процедура фиксации дырки в позиции p с точки зрения корреляционных ядер в исходном пространстве эквивалента следующей: применение инволюции дырка/частица, фиксация частицы в позиции p в преобразованном пространстве, применение инволюции дырка/частица. Переход к мере Пальма «по частице» сохраняет совершенство – то же верно и для инволюции дырка/частица. Значит, как композиция отображений, сохраняющих совершенство меры, мера Пальма «по дырке» также сохраняет её.

Наконец, лемма 2.5 говорит о независимости результирующего ядра (и соответствующей детерминантной меры) от порядка фиксации дырок и частиц.

Таким образом, доказана следующая

Теорема

Пусть $\mathbb{P}_K$ *– совершенная детерминантная мера с корреляционным ядром* K*. Тогда мера* $\mathbb{P}_{K^{p_1,\ldots,p_m,\hat{p}_{m+1},\ldots,\hat{p}_l}}$*, определённая в теореме* 2.4*, также совершенна.*

Условные меры

Рассмотрим более общую конструкцию для условных мер.
В этом разделе мы рассматриваем $\mathbb{P}_K \in \mathcal{P}(\Omega)$ – детерминантную совершенную меру на пространстве $\Omega = \mathrm{Conf}(\mathbb{Z})$ (начиная с этого момента мы рассматриваем $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$, а также для удобства обозначений меняем $\{0,1\}^{\mathfrak{X}}$ на $\mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$). Будем рассматривать $(\mathfrak{X}, <)$ с порядком, наследуемым из $\mathbb{R}$.
Фиксируем $X \in \mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$ – некоторую (возможно бесконечную) конфигурацию, а также $I = [a, b] \subset \mathfrak{X}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Нас интересует мера $\mathbb{P}(\cdot | X; \mathbb{Z} \setminus I) \equiv \mathbb{P}(K; I)$ – условная мера $\mathbb{P}_K$ при условии, что в $\mathbb{Z} \setminus I$ зафиксирована конфигурация X. Мера $\mathbb{P}(K; I)$, таким образом, есть борелевская мера на $\mathrm{Conf}(I)$.

Реализуем такую меру с помощью классической конструкции. Рассмотрим $\pi_{\mathbb{Z}\setminus I} : \mathrm{Conf}(Z) \to \mathrm{Conf}(\mathbb{Z} \setminus I)$ – сюръективное отображение, сопоставляющее множеству $Z \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z}))$ множество $Z \cap (\mathbb{Z} \setminus I) \equiv Z|_{\mathbb{Z}\setminus I} \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z} \setminus I)$. Слои этого отображения (для $Y \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z} \setminus I)$) есть множества вида $\pi^{-1}(Y) = \{E \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z})) : E|_{\mathbb{Z}\setminus I} = Y\}$. Видим, что они могут быть отождествлены с $\mathrm{Conf}(I)$, коль скоро конфигурация вне $\mathbb{Z} \setminus I$ зафиксирована. Таким образом, мера $\mathbb{P}_K(K; I)$ на $\mathrm{Conf}(I)$ есть условная $\mathbb{P}_K$ при условии того, что ограничение конфигурации совпадает с $\pi_{\mathbb{Z}\setminus I}(X)$.

Более формально, такая мера есть условная мера в смысле Рохлина [5], которая определена на измеримом разбиении $\mathbb{Z} \setminus I$, порождённом отображением $\pi_{\mathbb{Z}\setminus I}$.

Более конкретно, на основе вероятностного пространства $(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}), \mathcal{F}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})), \mathbb{P}_K)$ определим вероятностное пространство $(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}), \hat{\mathcal{F}}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})), \hat{\mathbb{P}}_K)$ по следующим правилам:

$$E \in \hat{\mathcal{F}}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})) \Longleftrightarrow \pi^{-1}_{\mathbb{Z}\setminus I}(E) \in \mathcal{F}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})).$$

$$\hat{\mathbb{P}}_K(E) = \mathbb{P}_K(\pi^{-1}(E)) \quad \forall E \in \hat{\mathcal{F}}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})).$$

Семейство $P := \{P_\omega\}_{\omega \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z}\setminus I)} = \{Y \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z}) : Y|_{\mathbb{Z}\setminus I} = \omega\}$ – разбиение пространства $\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})$ на слои отображения $\pi_{\mathbb{Z}\setminus I}$.
Нам понадобится следующее вспомогательное

Определение

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – два разбиения пространства $\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})$. Будем говорить, что разбиение $\mathcal{P}$ тоньше, чем разбиение $\mathcal{Q}$, и писать, что $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$, если для любого $p \in \mathcal{P}$ существует $q \in \mathcal{Q}$: $p \subseteq q$.

Нам понадобится измеримое разбиение $\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})$.

Определение

Разбиение P пространства $\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}))$ на измеримые множества называется $\mathbb{P}_K-$измеримым, если существует $\Omega_0 \subset \mathrm{Conf}(\mathbb{Z})$ такое, что $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}) \setminus \Omega_0) = 0$, и последовательность счётных разбиений $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что

1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ разбиение P_n содержит измеримые множества;
2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $P_n \preceq P_{n+1}$;
3. $P \cap \Omega_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} P_n$;
4. Для любого $P_\omega \in P$ существует последовательность $p_n \in P_n$ такая, что $P_\omega = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$.

В нашем случае мы определяем $J_n := (\mathbb{Z} \setminus I) \cap [-n, n]$,
$P_{n,\omega} := \{Y \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z}) : Y|_{J_n} = \omega, \omega \in \mathrm{Conf}(J_n)\}$ и
$P_n = \{P_{\omega,n}\}_{\omega\in\mathrm{Conf}(J_n)}$.
Непосредственно проверяется, что справедливо

Предложение

Разбиение $P = \{P_\omega\}_{\omega\in\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}\setminus I)}$ *измеримо.*

Наличие измеримого разбиения пространства согласно [5] обеспечивает существование канонической системы мер.

Определение

Рассмотрим $(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}), \hat{\mathcal{F}}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})), \mathbb{P}_K)$ – вероятностное пространство? P – его измеримое разбиение. Семейство вероятностных мер $\{\mathbb{K}, \omega : \mathbb{P}_\omega \in \mathbb{P}$ на $\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})$ называется дезинтеграцией меры $\mathbb{P}_K$ относительно разбиения P, если

1. $\mathbb{P}_{K,\omega}(P_\omega) = 1$ для $\hat{\mathbb{P}}_K$-почти всех $P_\omega \in P$.

$\mathbf{2}$. Для любого $E \in \mathcal{F}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}))$ отображение $P_\omega \mapsto \mathbb{P}_{K,\omega}(E)$ $\hat{\mathcal{F}}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}))-$измеримо.
$\mathbf{3}$. Для любого $E \in \mathcal{F}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z}))$ верно, что $\mathbb{P}_K(E) = \int\limits_P \mathbb{P}_{K,\omega} \mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}_K(E)$.

Дальнейшее рассмотрение показывает, что искомая мера $\mathbb{P}(K;I)$ реализуется следующим образом:

$$\mathbb{P}(K;I)(E) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{P}_K(E \cap P_n(X))}{\mathbb{P}_K(P_n(X))} \qquad \forall E \in \mathcal{F}(\mathrm{Conf}(\mathbb{Z})), \tag{3.1}$$

где предел в правой части сходится на множестве полной меры, а $P_n(X) = P_{n,X|_{J_n}} = \{Z \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z}) : Z|_{J_n} = X|_{J_n}\}$.

Заметим следующее важно обстоятельство. Рассмотрим $\mathcal{S}(I)$ – группа конечных перестановок I ($s(x) = x \ \forall s \in \mathcal{S}(I)$ и $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus I$). Тогда для любого $Y \in \mathrm{Conf}(\mathbb{Z})$ верно, что $\pi_{\mathbb{Z}\setminus I}(s(Y) = \pi_{\mathbb{Z}\setminus I}(Y)$, то есть группа $\mathcal{S}(I)$ действует внутри каждого слоя, сохраняя его. Значит, такие перестановки сохраняют фактор-меру $\hat{\mathbb{P}}_K$ и каждый элемент измеримого разбиения.
Ввиду этого нам полезна следующая

Теорема

X – пространство Лебега с мерой M, ξ – измеримое разбиение пространства Лебега X, G – счетная группа, сохраняющая каждый элемент разбиения.
Тогда:
$\mathbf{1}$. *M – $G-$квазиинвариантна $\Longleftrightarrow$ любая условная мера M является $G-$квазиинвариантна.*

$\mathbf{2}$. Для любого $g \in G$ производные Радона-Никодима условной меры M и самой меры M совпадают $\hat{M}-$почти всюду.
Эта теорема даёт нам $\mathcal{S}|_I = \mathcal{S}(I)-$квазиинвариантность как допредельных, так и предельной мер, а также тождественно равенство их прозводных Радона-Никодима $\hat{\mathbb{P}}_K-$почти всюду. Значит, в силу определения 1.8 состояния на соответствующих подалгебрах $\mathfrak{A}^0$ корректно определены.
Сходимость ядер таких условных мер была подробно изучена в работе [2][Lemma 1.11, Lemma 1.14, Proposition 5.1] – соответствующие ядра сходятся друг к другу поточечно $\mathbb{P}_K-$почти всюду. Отсюда мы получаем сходимость квазисвободных состояний допредельных мер к квазисвободному состоянию предельной $\mathbb{P}_K-$почти всюду.

Всё это позволяет сформулировсть следующую

Теорема

При наложенных выше условиях

1. *Допредельные меры являются совершенными.*
2. *Предельная мера является совершенной.*

Библиография I

- Alexander I. Bufetov.
  Quasi-symmetries of determinantal point processes, 2016.
- Alexander I. Bufetov, Yanqi Qiu, and Alexander Shamov.
  Kernels of conditional determinantal measures and the proof of the lyons-peres conjecture, 2018.
- Grigori Olshanski.
  Determinantal point processes and fermion quasifree states.
  Communications in Mathematical Physics, 378(1):507–555, March 2020.
- Tomoyuki Shirai and Yoichiro Takahashi.
  Random point fields associated with certain fredholm determinants i: fermion, poisson and boson point processes.
  Journal of Functional Analysis, 205(2):414–463, 2003.

Библиография II

В. А. Рохлин.
Об основных понятиях теории меры.
Математический Сборник, 25(67)(1):107–150, 1949.