Скорость сходимости в предельных теоремах о локальном времени пребывания случайного блуждания в точке $\mathbb{Z}^d$

Юшкова Ольга Владиславовна
Научный руководитель: Яровая Е.Б.

кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

Цель работы: Оценка скорости сходимости распределения времени пребывания случайного блуждания в точке в зависимости от размерности решетки в предположении конечной дисперсии и при условии, приводящем к бесконечной дисперсии скачков, к предельным распределениям, полученным в статье А. А. Апарина, Г. А. Попова и Е. Б. Яровой, с помощью метода Стейна в метрике Вассерштейна.

Содержание:

- описание модели случайного блуждания с непрерывным временем
- дискретная аппроксимация
- оценка скорости сходимости к экспоненциальному распределению
- оценка скорости сходимости к полунормальному распределению
- оценка скорости сходимости к распределению Миттаг-Леффлера

Определение (А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021)

Пусть ν*— некоторая вероятностная мера на* $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, *и матрица* $A = ||a(x,y)||_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$, *такова, что ее элементы обладают следующими свойствами:*
1) $a(x,y) \geq 0$ *при* $x \neq y$ *и* $a(x,x) < 0$ *для любого* x*;*
2) $\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y) = 0$ *для любого* x*;*
3)$sup_{x\in\mathbb{Z}^d}|a(x,x)| < \infty$.
Тогда случайный процесс $X_t = \{X_t, t \geq 0\}$ *с непрерывным временем, пространством состояний* $\mathbb{Z}^d$, *начальным распределением* ν *и генератором* A *называется стохастическим блужданием по* $\mathbb{Z}^d$.

Дополнительно потребуем, чтобы для X_t выполнялись следующие условия:

4) симметрия: $a(x, y) = a(y, x)$;

5) пространственная однородность: $a(x, y) = a(0, y - x)$;

6) однородность по времени: $P(X_t = y|X_s = x) = P(X_{t-s} = y|X_0 = x)$ для $\forall\ x, y \in \mathbb{Z}^d$ и $\forall\ t, s : t > s$;

7) неразложимость (неприводимость): $\forall\ x, y \in Z_d$ найдется момент $t > 0$ такой, что $P(X_t = y|X_0 = x) > 0$. Другими словами, все точки решетки $\mathbb{Z}^d$ достижимы.

Определение (А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021)

Переходную вероятность обозначим через $p(t,x,y) = P(X_t = y | X_0 = x)$.
В случае $x = 0$ *и* $y = 0$ *будем использовать* $p(t) := p(t,0,0)$.

Пусть

$$I_0(X_s) = \begin{cases} 1, & \text{в момент времени s блуждание находится в нуле,} \\ 0, & \text{в момент времени s блуждание не находится в нуле.} \end{cases}$$

Тогда случайная величина ξ_t, равная времени, которое блуждание проведет в точке $x = 0$ до момента $t \geq 0$, будет иметь следующее представление в виде интеграла Лебега:

$$\xi_t := \xi_t(\omega) = \int_0^t I_0(X_s)ds.$$

Из определения ξ_t имеем

$$E\xi_t = E\int_0^t I_0(X_s)ds = \int_0^t EI_0(X_s)ds = \int_0^t p(s)ds.$$

Случай конечной дисперсии скачков

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} ||x||^2 a(0, x) < \infty,$$

где $||.||$— некоторая норма в $\mathbb{Z}^d$.

Случай бесконечной дисперсии скачков

$$\lim_{||x|| \to \infty} a(0, x) ||x||^{d+\alpha} = H\left(\frac{x}{||x||}\right),$$

где $\alpha \in (0, 2)$, $||.||$— некоторая норма в $\mathbb{Z}^d$ и $H : S^{d-1} \to R$, $H(x) = H(-x)$, $x \in S^{d-1}$ - непрерывная положительная функция, определенная на сфере S^{d-1} размерности $d - 1$.

В случае конечной дисперсии скачков для переходной вероятности $p(t)$ для размерности $d \geq 1$ при $t \to \infty$ имеет место асимптотическое представление:

$$p(t, x, y) \sim \frac{\gamma_d}{t^{d/2}},$$

где γ_d некоторая известная константа.

Лемма (А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021)

При $t \to \infty$ верны следующие асимптотические равенства:

$$E\xi_t = \begin{cases} 2\gamma_1\sqrt{t} \quad \text{при } d = 1, \\ \gamma_2 \ln t \quad \text{при } d = 2, \\ C_d \quad \text{при } d \geq 3. \end{cases}$$

В случае бесконечной дисперсии скачков для переходной $p(t)$ для размерности $d \geq 1$ при $t \to \infty$, $\alpha \in (0, 2)$ имеет место асимптотическое представление

$$p(t) \sim h_{\alpha,d} t^{-d/\alpha}.$$

При этом справедлива следующая теорема.

Лемма (А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021)

При $t \to \infty$ верны следующие асимптотические равенства:

$$E\xi_t = \begin{cases} C_1^* \text{ при } d = 1 \text{ и } 0 < \alpha < 1, \\ h_{1,1} \ln t \text{ при } d = 1 \ \alpha = 1, \\ h_{\alpha,1} \frac{\alpha}{\alpha - 1} t^{1-1/\alpha} \text{ при } d = 1 \text{ и } 1 < \alpha < 2, \\ C_d^* \text{ при } d \geq 2 \text{ и } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Теорема (А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021)

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, *с конечной дисперсией скачков и носителем распределения* $x \in R_+$ *при* $t \to \infty$ *имеет место соотношение:*

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\xi_t}{E\xi_t} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2/4}dt \text{ при } d = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{\xi_t}{E\xi_t} \leq x\right) = 1 - e^{-x} \text{ при } d \geq 2.$$

Теорема (А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021)

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$,*с бесконечной дисперсией скачков и носителем распределения* $x \in R_+$ *при* $t \to \infty$ *имеет место соотношение:*

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{\xi_t}{\Gamma(1+\theta)E\xi_t} \leq x\right) = P(\zeta_\theta \leq x) \text{ при } d = 1,\ \alpha \in (1,2),$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{\xi_t}{E\xi_t} \leq x\right) = 1 - e^{-x} \text{ при } d = 1,\ \alpha \in (0,1] \text{ и при } d \geq 2,\ \alpha \in (0,2),$$

где ζ_θ *- случайная величина, имеющая распределение Миттаг- Леффлера для* $\theta = 1 - 1/\alpha$ *с плотностью*

$$g_\theta(y) = \frac{1}{\pi\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\sin(\pi\theta j)\Gamma(\theta j+1)y^{j-1}.$$

Метод Стейна - это метод, который позволяет количественно оценить ошибку в приближении одного распределения другим в различных метриках.

Определение (Nathan Ross, 2011)

$$d_H(\mu, \nu) = \sup_{h \in H} \left| \int_X h(x) d\mu(x) - \int_X h(x) d\nu(x) \right|$$

μ, ν - вероятностные меры на измеримом пространстве X,
W, Z - случайные величины с распределением μ и ν соответственно,
H - набор функций из X на множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Метрика Васерштейна:

$$d_W(W, Z) = \sup_{h \in H_w} |Eh(W) - Eh(Z)|$$

$H_w = \{h : R \to R : |h(x) - h(y)| \leq |x - y|\}$, или, другими словами, множество всех липшицевых функций на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ с константой Липшица 1.

Дискретная аппроксимация времени прибывания

Зафиксируем $t > 0$ и определим нормированное время пребывания

$$W_t = \frac{\xi_t}{E\xi_t}.$$

Введём дискретную аппроксимацию

$$G_t^n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} I_0\left(X_{\frac{i}{n}}\right),$$

где [ ] - целая часть, $n \in \mathbb{N}$.
Соответствующую нормированную величину обозначим

$$Y_n^t = \frac{G_t^n}{EG_t^n}.$$

Лемма 1

Для случайных величин G_t^n, ξ_t, Y_n^t, W_t, определенных выше, имеют место соотношения:

$$G_t^n \xrightarrow{L^1} \xi_t \text{ при } n \to \infty,$$

$$Y_n^t \xrightarrow{L^1} W_t \text{ при } n \to \infty,$$

$$\lim_{n \to \infty} d_W(Y_n^t, Z) = d_W(W_t, Z).$$

Теорема 1

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^2$, с конечной дисперсией скачков при $t \to \infty$ имеет место оценка

$$d_W(W_t, Z) \leq \frac{C_2}{(\ln t)^2},$$

где $W_t = \frac{\xi_t}{E\xi_t}$, $Z \sim Exp(1)$, а C_2 - некоторая константа, не зависящая от t.

Теорема 2

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3, d \in N$, с конечной дисперсией скачков при $t \to \infty$ имеет место оценка

$$d_W(W_t, Z) \leq C_d t^{-d/2+1},$$

где $W_t = \frac{\xi_t}{E\xi_t}$, $Z \sim Exp(1)$, а C_d - некоторая константа, не зависящая от t.

Теорема 3

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}$, с бесконечной дисперсией скачков, параметром $\alpha = 1$ при $t \to \infty$ имеет место оценка

$$d_W(W_t, Z) \leq \frac{C_{1,1}}{(\ln t)^2},$$

где $W_t = \frac{\xi_t}{E\xi_t}$, $Z \sim Exp(1)$, а $C_{1,1}$ - некоторая константа, не зависящая от t.

Теорема 4

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^d$, $d \in N$, с бесконечной дисперсией скачков при $t \to \infty$ имеет место оценка

$$d_W(W_t, Z) \leq C_{d,\alpha} t^{-d/\alpha+1} \text{ при } d = 1\ ,\ 0 < \alpha < 1 \text{ или } d \geq 2\ ,\ 0 < \alpha < 2.$$

Здесь $W_t = \frac{\xi_t}{E\xi_t}$, $Z \sim Exp(1)$, а $C_{d,\alpha}$ - некоторая константа, не зависящая от t.

Теорема 5

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}$, с конечной дисперсией скачков при $t \to \infty$ имеет место оценка

$$d_W(W_t, Z) \geq \frac{C_d^*}{(\ln t)^2},$$

где $W_t = \frac{\xi_t}{E\xi_t}$, $Z \sim Exp(1)$, а C_d^* - некоторая константа, не зависящая от t.

По определению

$$d_W(W_t, Z) = \sup_{h \in H_w} |Eh(W_t) - Eh(Z)|.$$

Рассмотрим функцию $h(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Тогда

$$d_W(W_t, Z) \geq |Ee^{-\frac{1}{2}W_t} - Ee^{-\frac{1}{2}Z}|.$$

Лемма (А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021)

Моменты величины $\frac{\xi_t}{E\xi_t}$ допускают следующее представление:

$$E\left[\frac{\xi_t}{E\xi_t}\right]^k = \frac{k!}{(E\xi_t)^k}\int_0^t f_k(s_k)ds_k,$$

где $f_k(s_k) := \int_0^{s_k} \dots \int_0^{s_2} p(s_k - s_{k-1})p(s_2 - s_1)p(s_1)ds_1 \dots ds_{k-1}$.

Применив известные нам асимптотические представления, получим оценку

$$EW_t^2 \leq 2!(1+\chi) - \frac{C}{ln^2(t)},$$

где χ - произвольная малая величина.
Кроме того, при доказательстве предельных теорем (см. А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, 2021) было показано, что

$$\lim_{t\to\infty} E\left[\frac{\xi_t}{E\xi_t}\right] = k!.$$

Таким образом,

$$d_W(W,Z) \geq |\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{\chi}{8} + \frac{C}{ln^2(t)}|$$

Теорема 6

Для симметричного, неприводимого и пространственно однородного стохастического блуждания по $\mathbb{Z}$ с бесконечной дисперсией скачков и параметром $\alpha = 1$ при $t \to \infty$ имеет место оценка снизу

$$d_W(W_t, Z) \geq \frac{C^*_{d,\alpha}}{(\ln t)^2},$$

где $W_t = \xi_t / E\xi_t$, $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$, а $C^*_{d,\alpha}$ - некоторая константа, не зависящая от t.

Пусть $X \sim N(0, \sigma^2)$.
Тогда случайная величина $Z = |X|$ будет иметь полунормальное распределение $HN(\sigma)$ с плотностью

$$f_Z(y, \sigma) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}.$$

Теорема 7

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}$ с конечной дисперсией скачков при $t \to \infty$ имеет место следующая оценка

$$d_W(W_t, Z) \leq \frac{C_1}{t^{1/2}},$$

где $W_t = \frac{2\xi_t}{\sqrt{\pi}E\xi_t}$, $Z \sim HN(\sigma)$, а C_1 - некоторая константа, не зависящая от t.

Теорема 8

Определим оператор $\mathbb{A}$ как

$$\mathbb{A}f(x) = \sigma^2 f'(x) - xf(x) + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0).$$

Если неотрицательная случайная величина Z имеет полунормальное распределение с параметром σ, то $E\mathbb{A}f(Z) = 0$ для любой абсолютно непрерывной функции $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ с $Ef'(Z) < \infty$.

Лемма 2

Рассмотрим измеримую на $[0,\infty)$ функцию h. Пусть Z имеет полунормальное распределение с параметром σ, тогда дифференциальное уравнение

$$\sigma^2 f_h'(w) - wf_h(w) + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} f_h(0) = h(w) - Eh(Z)$$

имеет единственное решение f_h, такое что $f_h(0) = 0$. Оно имеет вид

$$f_h(w) = \frac{1}{\sigma^2} e^{w^2/2\sigma^2} \int_w^\infty e^{-t^2/2\sigma^2}(Eh(Z) - h(t))dt.$$

Лемма 3

Пусть $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ измеримая функция. Если h - липшицева, то f_h непрерывно дифференцируема с липшицевой непрерывной производной, и верны следующие границы:

$a)||f_h||_\infty \leq \sigma||h'||_\infty$,

$b)||f_h'||_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}||h'||_\infty$,

$c)||f_h''||_\infty \leq 2\frac{1}{\sigma^2}||h'||_\infty$.

Таким образом, если W - неотрицательная случайная величина, а Z имеет распредление $HN(\sigma)$, то

$$d_W(W,Z) = \sup_{h\in H_w} |\mathbb{E}h(W) - \mathbb{E}h(Z)| = \sup_{h\in H_w} |\mathbb{E}[\sigma^2 f_h'(W) - Wf_h(W) + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} f_h(0)]|.$$

Определение (Nathan Ross, 2011)

Случайная величина W^s имеет сбалансированное по размеру распределение относительно случайной величины W, где $W \geq 0$ и $EW < \infty$, если для всех f таких, что $E|Wf(W)| < \infty$ справедливо

$$E(Wf(W)) = E(W)E(f(W^s)).$$

Определение (Nathan Ross, 2011)

Случайная величина W^e имеет равновесное распределение относительно случайной величины W, где $W \geq 0$, если

$$E(f(W)) - f(0) = E(W)E(f'(W^e))$$

для всех липшицевых функций f с константой Липшица 1.

Для функции $f_h(x)$ имеем

$$EWf_h(W) = EWEf_h(W^s) = EW(f_h(0) + EW^s Ef_h'((W^s)^e)),$$

где $(W^s)^e$ имеет равновесное распределение относительно W^s.
Следовательно,

$$\sigma^2 Ef_h'(W) - EWf_h(W) + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} f_h(0) =$$

$$= \sigma^2 Ef_h'(W) - EWEW^s Ef_h'((W^s)^e) - EWf_h(0) + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} f_h(0).$$

Используя теорему о среднем и следующие свойства

$$EW^s = \frac{EW^2}{EW} \text{ и } EW^e = \frac{EW^2}{2EW},$$

получим оценку

$$d_W(W, Z) \leq ||f_h''|||EWEW^2 - \frac{E(W)^3}{2}| + ||f_h'|||\sigma^2 - EW^2|.$$

Зафиксируем n и t.
Рассмотрим

$$W_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi_t}{E\xi_t} \quad \text{и} \quad Y_n^t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} I_0\left(X_{\frac{i}{n}}\right)}{E\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} I_0\left(X_{\frac{i}{n}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{G_t^n}{EG_t^n}.$$

Для введенной случайной величины W_t и случайной величины Z с распределением $HN(\sigma)$ справедливо, что

$$d_W(W_t, Z) = \lim_{n\to\infty} d_W(Y_n^t, Z).$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_t^n)^k = EW_t^k.$$

Мы уже знаем, что $p(t) \sim \gamma_1 t^{-1/2}$ и $E\xi_t \sim 2\gamma_1\sqrt{t}$.
Рассмотрим функцию

$$q_{c,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t < c \\ (1+\varepsilon)\gamma_1 t^{-1/2} \text{ при } t > c. \end{cases}$$

Тогда для $\forall \varepsilon \; \exists c$, такое что для $\forall t \; p(t) < q(t)$. Отсюда

$$\int_0^t \int_0^i p(i-j)p(j)djdi \le \int_0^t \int_0^i q_{c,\varepsilon}(i-j)q_{c,\varepsilon}(j)djdi.$$

Можно доказать, что

$$\int_0^t \int_0^i q_{c,\varepsilon}(i-j)q_{c,\varepsilon}(j)djdi = (1+\varepsilon)^2\gamma_1^2\pi t + O(t^{1/2}).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma^2 - E(Y_t^n)^2| \le |2 - \frac{4}{\pi}\frac{2}{4\gamma_1^2 t}((1+\varepsilon)^2\gamma_1^2\pi t + C^* t^{1/2})| = |2 - 2(1+\varepsilon)^2 + C^{**}t^{-1/2}|,$$

где C^*, C^{**} - константы, не зависящие от t.

Рассмотрим третий момент

$$\int_0^t \int_0^i \int_0^j p(i-j)p(j-k)p(k)dkdjdi \leq \int_0^t \int_0^i \int_0^j q_{c,\varepsilon}(i-j)q_{c,\varepsilon}(j-k)q_{c,\varepsilon}(k)dkdjdi.$$

Справедливо,

$$\frac{8}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{6}{8\gamma_1^3 t^{3/2}} \int_0^t \int_0^i \int_0^j q_{c,\varepsilon}(i-j)q_{c,\varepsilon}(j-k)q_{c,\varepsilon}(k)dsdk = (1+\varepsilon)^3 \frac{8}{\sqrt{\pi}} + O(t^{-1/2}).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} |EY_n^t E(Y_n^t)^2 - E(Y_n^t)^3 \frac{1}{2}| \leq |\frac{2}{\sqrt{\pi}}(2 + c^* t^{-1/2}) - \frac{1}{2}(\frac{8}{\sqrt{\pi}} + c^{**} t^{-1/2})|,$$

где c^*, c^{**} - константы, не зависящие от t.

Теорема 9

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}$ с бесконечной дисперсией скачков при $t \to \infty$ имеет место следующая оценка

$$d_W(W_t, Z) \le C_{1,\alpha} t^{1/\alpha - 1}, \ \alpha \in (1,2), \ \frac{\alpha}{\alpha - 1} \in \mathbb{N}$$

где $C_{1,\alpha}$ - некоторая константа, не зависящая от t, $W_t = \frac{\xi_t}{\Gamma(2-1/\alpha) E\xi_t}$, а случайная величина Z при $\theta = 1 - 1/\alpha$ имеет плотность

$$g_\theta(y) = \frac{1}{\pi\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \sin(\pi\theta j) \Gamma(\theta j + 1) y^{j-1}.$$

Заметим, что функция плотности $g_\theta(y)$ это функция М-Райта, введенная Франческо Майнарди в 1994.

$$g_\theta(y) = \frac{1}{\pi\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\sin(\pi\theta j)\Gamma(\theta j+1)y^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-y)^j}{j!}\frac{1}{\Gamma(1-\theta(j+1))} = M_\theta(y)$$

Известно, что $M_{\frac{1}{q}}(z)$ ($q \geq 2$ целое число) удовлетворяет дифференциальному уравнение порядка $q-1$

$$\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}M_{\frac{1}{q}}(z) + \frac{(-1)^q}{q}zM_{\frac{1}{q}}(z) = 0$$

при начальных условиях

$$M^{(h)}_{1/q}(0) = \frac{(-1)^h}{\Gamma(1-(h+1)/q)},$$

где $h = 0, 1, ..., q-2$.

Теорема 10

Определим оператор $\mathbb{A}$ как

$$\mathbb{A}f(x) = \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}f(x) - \frac{1}{q}xf(x) + \sum_{m=0}^{q-2} f^{(m)}(0)\frac{1}{\Gamma((m+1)/q)} = 0.$$

Если неотрицательная случайная величина Z при $\theta = 1/q$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 2$ имеет распределение с плотностью

$$g_\theta(y) = \frac{1}{\pi\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\sin(\pi\theta j)\Gamma(\theta j + 1)y^{j-1},$$

то $E\mathbb{A}f(Z) = 0$ для любой функции $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in C^n$ с $Ef^{(k)}(Z) < \infty$, при $k = 0, 1, ..., q-1$.

Лемма 4

Рассмотрим измеримую на $[0, \infty)$ функцию h. Пусть Z имеет распределение с плотностью $M_{1/q}$, тогда дифференциальное уравнение

$$\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} f_h(x) - \frac{1}{q} x f_h(x) = h(x) - Eh(Z)$$

имеет единственное ограниченное решение f_h, такое что $f_h^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ..., q-2$. Оно имеет вид

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{q-1} y_i(x) \int_0^x \frac{W_i(t)}{W(t)} (h(t) - Eh(Z)) dt,$$

где $\{y_1, y_2, ..., y_{q-1}\}$ решения соответствующего однородного уравнения, вида

$$y_k^+(x) = \int_0^\infty e^{-(-c)^{q-1} \frac{w^q}{q}} [e^{-cwx} - e^{-cwxa_k} cos(cwxb_k - \frac{2k\pi}{q})] dw,$$

$$y_k^-(x) = -\int_0^\infty e^{-(-c)^{q-1} \frac{w^q}{q} - cwxa_k} sin(cwxb_k - \frac{2k\pi}{q}) dw,$$

где $c = -1/q < 0$, натуральные $k \le q/2$ и $a_k = cos(2k\pi/q)$ и $b_k = sin(2k\pi/q)$.

Определение

Случайная величина W^{ek} *имеет k-равновесное распределение относительно случайной величины* W, *где* $W \geq 0$ *и* $E(W^i) < \infty$ *для* $i = 0, 1, \dots, k$, *если*

$$E(f(W)) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} E(W^i) = \frac{E(W)^k}{k!} E(f^{(k)}(W^{ek}))$$

для всех липшицевых функций $f \in C^k$.

Аналогично случаю с полунормальным распредлением для подходящей $f(x)$ имеем

$$EWf(W) = EW \left(\sum_{i=0}^{q-2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} E((W^s)^i) + \frac{E(W^s)^{q-1}}{(q-1)!} E(f^{(q-1)}((W^s)^{e(q-1)})) \right),$$

где $f(x) \in C^q$ неотрицательная функция, а $(W^s)^{eq}$ имеет q-равновесное распределение относительно W^s, которое имеет сбалансированное по размеру распределение относительно W.

Воспользовавшись свойствами равновесного и сбалансированного по размеру распределений, получим

$$E\left(\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}f(W)-\frac{1}{q}Wf(W)+\sum_{m=0}^{q-2}f^{(m)}(0)\frac{1}{\Gamma((m+1)/q)}\right)$$

$$\leq ||f^{(q)}||\left|\frac{EW^q}{q!}E(W-(W^s)^{e(q-1)})\right|+||f^{(q-1)}||\left|1-\frac{EW^q}{q!}\right|+$$

$$+\sum_{m=0}^{q-2}f^{(m)}(0)\left|\frac{1}{q}\frac{m+1}{\Gamma(1+(m+1)/q)}-\frac{1}{q}\frac{E(W^{m+1})}{m!}\right|.$$

Отсюда

$$d_W(W,Z)\leq ||f_h^{(q)}||\frac{1}{q!}\left|EW^qE(W)-\frac{EW^{q+1}}{q}\right|+||f_h^{(q-1)}||\left|1-\frac{EW^q}{q!}\right|.$$

Рассмотрим дискретную аппроксимацию. Для случайной величины

$$W_t = \frac{1}{\Gamma(1+\theta)} \frac{\xi_t}{E\xi_t},$$

где $\theta = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{q}$, $\alpha \in (1,2)$, $q \in \mathbb{N}$ положим

$$Y_n^t = \frac{1}{\Gamma(1+\theta)} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} I_0\left(X_{\frac{i}{n}}\right)}{E\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} I_0\left(X_{\frac{i}{n}}\right)} = \frac{1}{\Gamma(1+\theta)} \frac{G_t^n}{EG_t^n}.$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_t^n)^k = EW_t^k.$$

При $t \to \infty$ верна асимптотическая оценка $p(t) \sim h_{\alpha,1} t^{-1/\alpha}$, $E\xi_t \sim h_{\alpha,1} \frac{\alpha}{\alpha-1} t^{1-1/\alpha}$. Аналогично случаю полунормального распределения рассмотрим функцию

$$q_{c,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t < c \\ (1+\varepsilon) h_{\alpha,1} t^{-1/\alpha} \text{ при } t > c. \end{cases}$$

Рассмотрим момент k. Изменим порядок интегрирования в исходном интеграле

$$\int_0^t \int_0^{s_k} \dots \int_0^{s_2} q_{c,\varepsilon}(s_k - s_{k-1}) \dots q_{c,\varepsilon}(s_2 - s_1) q_{c,\varepsilon}(s_1) ds_1 \dots ds_k =$$

$$\int_0^t \int_{s_1}^t \dots \int_{s_{k-1}}^t q_{c,\varepsilon}(s_k - s_{k-1}) \dots q_{c,\varepsilon}(s_2 - s_1) q_{c,\varepsilon}(s_1) ds_k \dots ds_1.$$

Случай, когда все множители не равны 1, дает

$$(1+\varepsilon)^k h_{\alpha,1}^k \Gamma(1+\theta)^k \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^k t^{k(1-1/\alpha)}.$$

Пусть некоторый множитель $q_{c,\varepsilon}(s_k - s_{k-1})$ равен 1. Тогда получим интеграл, который при $t \to \infty$ имеет асимптотическую оценку $O(t^{(k-1)(1-1/\alpha)})$.
Таким образом, скорость сходимости EW_t^k к $\frac{k!}{\Gamma(1+k\theta)}$ при $t \to \infty$ равна $O(t^{1/\alpha-1})$.
Откуда получаем

$$d_W(W_t, Z) \leq ||f^{(q)}||\frac{1}{q!}|\frac{q!}{\Gamma(1+q\frac{1}{q})}\frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{q})} - \frac{1}{q}\frac{(q+1)!}{\Gamma(1+(q+1)\frac{1}{q})} + C^* t^{\frac{1}{\alpha}-1}|+$$

$$+||f^{(q-1)}||1 - \frac{q!}{q!\Gamma(2)} + C^{**} t^{\frac{1}{\alpha}-1}||.$$

где C^*, C^{**} константы, не зависящие от t.

Вопрос, связанный со случаем $\frac{\alpha}{\alpha - 1} \notin \mathbb{N}$, до сих пор остаётся открытым и может стать темой отдельных изысканий.

- Nathan Ross.
  Fundamentals of Stein's method.
  Probab. Surv., 8:210–293, 2011.
- А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая.
  О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки.
  Теория вероятн. и ее примен., 66:4 (2021), 657–675.
- Erol Peköz and Adrian Röllin.
  Exponential approximation for the nearly critical Galton-Watson process and occupation times of Markov chains.
  Electron. J. Probab., 16:no. 51, 1381–1393, 2011.
- Е. Б. Яровая.
  Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.
  Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 104 с., 2007.
- Е. Б. Яровая А. И. Рытова.
  Многомерная лемма Ватсона и ее применение.
  Матем. заметки, 2016, том 99,выпуск 3, 2016.

Christian Döbler.
Stein's method for the half-normal distribution with applications to limit theorems related to the simple symmetric random walk.
ALEA. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, 2015.

Francesco Mainardi.
On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation.
In Waves and stability in continuous media (Bologna, 1993), 1994.

Fabrizio Cinque and Enzo Orsingher.
General Airy-type equations, heat-type equations and pseudo-processes.
J. Evol. Equ., 25(1):Paper No. 17, 28, 2025.