Новое условие однозначной определенности распределения абсолютно непрерывной случайной величины своими моментами.

Яковенко Максим Анатольевич

9-ая Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике

МГУ им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

17 ноября 2025г.

Содержание

Проблема моментов

В работе рассматривается классическая **проблема моментов Гамбургера**. Пусть задана последовательность вещественных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$. Требуется определить необходимые и достаточные условия, при которых существует такая случайная величина X с функцией распределения $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$, что данная последовательность $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью ее моментов, то есть

$$m_n = \mathbf{E}X^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x), \quad \mathbf{E}|X^n| < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

А также условия, при которых эта величина будет определена однозначно.

Проблема моментов

Кроме того, мы рассмотрим также **проблему моментов Стилтьеса**, когда последовательность $\{\tilde{m}_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит уже из неотрицательных чисел и необходимо найти условия для существования и уникальности такой неотрицательной случайной величины $\tilde{X}$ с функцией распределения $\tilde{F}(x) = \mathsf{P}(\tilde{X} \le x)$, что

$$\tilde{m}_n = \mathbf{E}\tilde{X}^n = \int\limits_0^{+\infty} x^n d\tilde{F}(x), \quad \mathbf{E}|\tilde{X}^n| < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

M-определенность

Определение

*В случае однозначного определения распределения по последовательности моментов принято говорить, что проблема моментов имеет единственное решение, случайная величина X и распределение F называются M-**определенными** (M-determinate).*

*Если же существует более одного распределения с указанной последовательностью моментов, то в таком случае говорят, что проблема моментов не имеет единственного решения, а все распределения с указанной последовательностью моментов называются M-**неопределенными** (M-indeterminate).*

Теорема Карлемана

Основные результаты работы опираются на теорему Карлемана:

Теорема 1 (Carleman)

a) Пусть $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– моменты некоторого распределения вероятностей, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m_{2n})^{1/2n}} = \infty.$$

Тогда они определяют распределение вероятностей однозначно.
b) Если $\{\tilde{m}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– моменты распределения, сосредоточенного на* $[0, \infty)$*, то для однозначности достаточно потребовать, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{m}_n)^{1/2n}} = \infty.$$

Приведем формулировку одной из ключевых теорем, связанных с М-определенностью и М-неопределенностью.

Теорема 2 (Достаточное условие Крейна)

(а) Предположим, что F – абсолютно непрерывная функция распределения с плотностью $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть также F имеет конечные моменты всех порядков и выполнено следующее условие:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\ln f(x)}{1+x^2}\, dx < \infty.$$

Тогда распределение F не определяется однозначно последовательностью своих моментов $\left\{ m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x) \right\}$, то есть существует другое распределение G, отличное от F, имеющее такую же последовательность моментов.

Достаточное условие Крейна

Продолжение теоремы

(b) Предположим, что $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, *– абсолютно непрерывная функция распределения на полуоси* $[0, +\infty)$, *то есть* $F(0) = 0$, *а ее плотность* $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$. *Пусть* F *имеет моменты всех порядков и пусть для некоторого* $a \geq 0$ *выполнено следующее условие:*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{-\ln f(x)}{1 + x^2} dx < \infty.$$

Тогда распределение F *не определяется однозначно последовательностью своих моментов* $\left\{ m_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x) \right\}$.

Постановка задачи

Пусть заданы две случайные величины: X с функцией распределения F, принимающей значения в $\mathbb{R}$, и Y с функцией распределения G, принимающей значения в $\mathbb{R}_+$. Предполагается также, что они абсолютно непрерывны с плотностями $f = F'$ и $g = G'$ и все моменты конечны.

Основные результаты

Yixi Wei и Rui Zhang в своей работе предложили критерий M-определенности для абсолютно непрерывной величины в случае ее распределения как на всей вещественной оси, так и на положительной полуоси.

Теорема 3 (Yixi Wei, Rui Zhang)

Пусть заданы $a > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ и случайная величина X с функцией распределения F, $F' = f$, и все ее моменты конечны. Предположим, что плотность f непрерывна и строго положительна вне интервала $(-x_1, x_1)$, $x_1 > 1$, так, что

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x + a \cdot sgn(x)(\ln|x|)^{\alpha})}{f(x)} < 1.$$

Тогда величина X удовлетворяет условию Карлемана, а значит, является M-определенной.

Основные результаты

Теорема 4 (Yixi Wei, Rui Zhang)

Пусть заданы $a > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ и случайная величина Y с функцией распределения G, $G' = g$, и все ее моменты конечны. Предположим, что плотность g непрерывна и строго положительна на интервале (x_1, ∞), $x_1 > 1$, так, что

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{g(x + a(\ln x)^{\alpha})}{g(x)} < 1.$$

Тогда величина Y удовлетворяет условию Карлемана, а значит, является M-определенной.

Основные результаты

Мы обобщаем эти результаты и формулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5

Пусть заданы $a > 0$, $\beta \in [0,1]$ *и случайная величина* X *с функцией распределения* F, $F' = f$, *и все ее моменты конечны. Предположим, что плотность* f *непрерывна и строго положительна вне интервала* $(-x_1, x_1)$, $x_1 > e$, *так, что*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f\left(x + a \cdot sgn(x) \ln|x|(\ln\ln|x|)^{\beta}\right)}{f(x)} < 1.$$

Тогда величина X *удовлетворяет условию Карлемана, а значит, является M-определенной.*

Замечание

Поскольку теорема 5 усиливает результаты из работы Yixi Wei и Rui Zhang, то обобщенный критерий можно сформулировать в виде теоремы 6.

Теорема 6

Пусть заданы $a > 0$, $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$ *и случайная величина* X *с функцией распределения* F, $F' = f$, *и все ее моменты конечны. Предположим, что плотность* f *непрерывна и строго положительна вне интервала* $(-x_1, x_1)$, $x_1 > e$, *так, что*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f\left(x + a \cdot sgn(x)(\ln|x|)^{\alpha}(\ln\ln|x|)^{\beta}\right)}{f(x)} < 1.$$

Тогда величина X *удовлетворяет условию Карлемана, а значит, является М-определенной.*

Гипотеза. Теорема 6 будет справедлива и в том случае, когда в числителе находится

$$f\left(x + a \cdot sgn(x)(\ln|x|)^{\alpha_1} \cdots (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{k \text{ раз}}|x|)^{\alpha_k}\right),$$

где k *– произвольное натуральное число,* $a > 0$, $\alpha_i \in [0, 1] \quad \forall\, i = \overline{1, k}$, *при подходящем* x_1.

Однако в силу непростого доказательства уже при $k = 2$ мы не беремся за проверку данного утверждения для $k > 2$.

Контрпример между теоремами 3 и 5

Утверждение 1

Для плотности $f(x) = c \cdot \exp\{-k(x)\}$, *где* $k(x) = \dfrac{|x|}{|\ln|x|| \cdot |\ln|\ln|x|||}$, $x \in \mathbb{R}$,

$f(\pm 1) = f(\pm e) = f(\pm e^{-1}) = 0$, $f(0) = c$, $c > 0$ *– нормирующая константа,*

теорема 3 не может выявить М-определенность, а теорема 5 при этом верна.

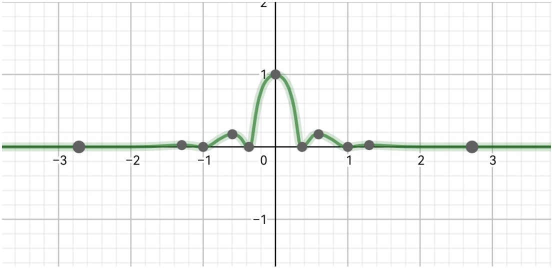


Рис.: График плотности f(x)

Контрпример для случая $\beta > 1$

Утверждение 2

Для плотности $f(x) = c \cdot \exp\{-k(x)\}$, *где* $k(x) = \dfrac{|x|}{|\ln|x|| \cdot |\ln|\ln|x|||^b}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$f(\pm 1) = f(\pm e) = f(\pm e^{-1}) = 1, \quad f(0) = c, \quad c > 0 \text{ – нормирующая константа},$$

выполняется условие Крейна. То есть величина не является М-определенной и использование теоремы 5 при $\beta = b > 1$, $a = 1$ *недопустимо.*

Список литературы

[1] Ахиезер Н. И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* М.: Физматгиз, 1961, 310 с.

[2] Стоянов Й. *Контрпримеры в теории вероятностей. 2-е изд.* М.: МЦНМО, 2012, 296 с.

[3] Ширяев А. Н. *Вероятность-1.* М.: МЦНМО, 2021, 552 с.

[4] Krein M. G. *The ideas of P. L. Čebyšev and A. A. Markov in the theory of limiting values of integrals and their further development.* Amer. Math. Soc. Transl., Series 2, 12, 1959, pp. 1-122.

[5] Lin G. D. *Recent developments on the moment problem.* Journal of Statistical Distributions and Applications, 4:5, 2017.

[6] Shohat J. A., Tamarkin J. D. *The Problem of Moments.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1943, 144 pp.

Список литературы

[7] Stoyanov J. *Krein Condition in Probabilistic Moment Problems.* Bernoulli, Vol. 6, No. 5, 2000, pp. 939-949.

[8] Stoyanov J., Lin G. D. *Hardy's condition in the moment problem for probability distributions.* Theory of Probability and Its Application, 57(4), pp. 600-708.

[9] Wei Y., Zhang R. *A new moment determinacy condition for probability distributions*. Теория вероятн. и ее примен., 70:1 (2025), pp. 155–168

Приложение 1 (Контрпример для случая $\alpha > 1$)

Известно, что при $\alpha > 1$ теорема 3 уже неверна. В работе Yixi Wei, Rui Zhang для этого была взята случайная величина X с симметричной плотностью

$$f(x) = c \cdot \exp\{-k(x)\}, \quad k(x) = \frac{|x|}{|\ln|x||^b}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 1,$$

$c > 0$ – нормирующая константа. В случае $\alpha = b > 1$ отношение плотностей дает $f(x + a(\ln x)^b)/f(x) \to 1/e$, $x \to \infty$, но X не является M-определенной.

Приложение 1 (Контрпример для случая $\beta > 1$)

Проанализируем случай $\beta > 1$. Рассмотрим следующую функцию плотности случайной величины X

$$f(x) = c \cdot \exp\left\{-k(x)\right\}, \quad k(x) = \frac{|x|}{|\ln|x|| \cdot |\ln|\ln|x|||^b}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f(0) = c, \quad f(\pm 1) = f(\pm e) = f(\pm e^{-1}) = 1, \quad c > 0 \text{ — нормирующая константа.}$$

Кроме того, $\beta = b > 1$, $a = 1$. В таком случае, начиная с $x = e^e$, выполняется

$$\frac{f\left(x + \ln x (\ln\ln x)^b\right)}{f(x)} = \exp\{-\ln x(\ln\ln x)^b k'(\xi)\} \quad \left(\xi \in (x, x + \ln x(\ln\ln x)^b)\right),$$

$$k'(x) = \frac{1}{\ln x (\ln\ln x)^b}\left(1 - \frac{1}{\ln x} - \frac{b}{\ln x \ln\ln x}\right),$$

Приложение 1

$$\frac{f\left(x+\ln x(\ln\ln x)^{b}\right)}{f(x)} \le \exp\left\{-\frac{\ln x}{\ln\left(x+\ln x(\ln\ln x)^{b}\right)}\cdot\left(\frac{\ln\ln x}{\ln\ln\left(x+\ln x(\ln\ln x)^{b}\right)}\right)^{b}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-(\ln\xi)^{-1}-b(\ln\xi\ln\ln\xi)^{-1}\right)\right\}\xrightarrow{x\to\infty}\exp\{-1\}<1.$$

Согласно условию Крейна, для отсутствия M-определенности случайной величины X с плотностью $f(x)$ и конечными моментами достаточно потребовать

$$K(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-\ln f(x)}{1+x^{2}}dx<\infty.$$

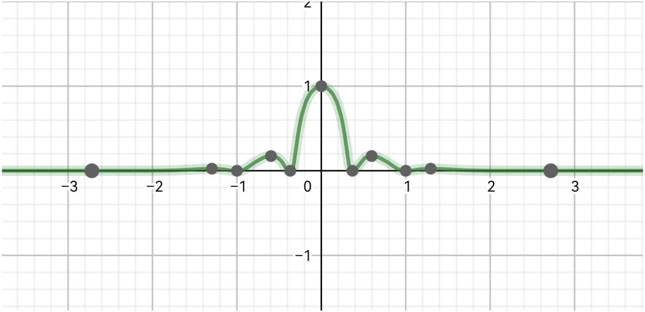
В работе доказывается, что для введенной ранее величины X с плотностью $f(x)$ условие Крейна выполняется. То есть величина не является M-определенной и использование теоремы 5 при $\beta>1$ недопустимо.

Приложение 2 (Контрпример между теоремами 3 и 5)

Представим пример, для которого теорема 3 не может выявить M-определенность, а теорема 5 при этом верна. Рассмотрим аналог функции плотности из предыдущего примера

$$f(x) = c \cdot \exp\{-k(x)\}, \quad k(x) = \frac{|x|}{|\ln|x|| \cdot |\ln|\ln|x|||}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f(0) = c, \quad f(\pm 1) = f(\pm e) = f(\pm e^{-1}) = 0, \quad c > 0 \text{ — нормирующая константа.}$$



Приложение 2

Сначала рассмотрим при $x > e^e$, $x \to +\infty$ (для отрицательных x аналогично) логарифм дроби из теоремы 3 ($a > 0$, $\alpha \in [0, 1]$):

$$\ln \frac{f\left(x + a \cdot sgn(x)(\ln|x|)^{\alpha}\right)}{f(x)} =$$

$$= -\frac{x + a(\ln x)^{\alpha}}{\ln\left(x + a(\ln x)^{\alpha}\right) \cdot \ln\ln\left(x + a(\ln x)^{\alpha}\right)} + \frac{x}{\ln x \cdot \ln\ln x} =$$

$$= -\frac{x + a(\ln x)^{\alpha}}{\left(\ln x + \ln\left(1 + a\frac{(\ln x)^{\alpha}}{x}\right)\right) \cdot \ln\left(\ln x + \ln\left(1 + a\frac{(\ln x)^{\alpha}}{x}\right)\right)} + \frac{x}{\ln x \cdot \ln\ln x} =$$

$$= -\frac{x + a(\ln x)^{\alpha}}{\ln x \ln\ln x\left[1 + a\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x} + o\left(\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x}\right)\right]\cdot\left[1 + a\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x\ln\ln x} + o\left(\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x\ln\ln x}\right)\right]} +$$

$$+ \frac{x}{\ln x \cdot \ln\ln x} = \left[-\left(1 + a\frac{(\ln x)^{\alpha}}{x}\right)\left(1 - a\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x} + o\left(\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1 - a\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x\ln\ln x} + o\left(\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x\ln\ln x}\right)\right) + 1\right]\cdot\frac{x}{\ln x\cdot\ln\ln x} =$$

$$= \left[-a\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{\ln\ln x} + o\left(\frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{\ln\ln x}\right)\right] \to 0, \qquad x\to\infty.$$

Значит, теорема 3 ничего не может сказать о случайной величине, поскольку

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x + a\cdot sgn(x)(\ln|x|)^{\alpha})}{f(x)} = 1.$$

Приложение 2

Теперь при $x > e^e$, $x \to +\infty$ (для отрицательных x аналогично) изучим логарифм дроби из теоремы 5 ($a > 0$, $\beta \in [0, 1]$):

$$\ln \frac{f(x + a \cdot sgn(x) \ln |x| (\ln \ln |x|)^{\beta})}{f(x)} =$$

$$= -\frac{x + a(\ln x)(\ln \ln x)^{\beta}}{\ln\left(x + a(\ln x)(\ln \ln x)^{\beta}\right) \cdot \ln \ln\left(x + a(\ln x)(\ln \ln x)^{\beta}\right)} + \frac{x}{\ln x \cdot \ln \ln x} =$$

$$= -\frac{x + a(\ln x)(\ln \ln x)^{\beta}}{\left(\ln x + \ln\left(1 + a\frac{(\ln x)(\ln \ln x)^{\beta}}{x}\right)\right) \cdot \ln\left(\ln x + \ln\left(1 + a\frac{(\ln x)(\ln \ln x)^{\beta}}{x}\right)\right)} +$$

$$+ \frac{x}{\ln x \cdot \ln \ln x} = \frac{x}{\ln x \cdot \ln \ln x} -$$

$$- \frac{x + a(\ln x)(\ln \ln x)^{\beta}}{\ln x \ln \ln x \left[1 + a\frac{(\ln \ln x)^{\beta}}{x} + o\left(\frac{(\ln \ln x)^{\beta}}{x}\right)\right] \cdot \left[1 + a\frac{(\ln \ln x)^{\beta - 1}}{x} + o\left(\frac{(\ln \ln x)^{\beta - 1}}{x}\right)\right]} =$$

Приложение 2

$$= \left[-\left(1 + a\frac{(\ln x)(\ln\ln x)^{\beta}}{x}\right)\left(1 - a\frac{(\ln\ln x)^{\beta-1}}{x} + o\left(\frac{(\ln\ln x)^{\beta-1}}{x}\right)\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - a\frac{(\ln\ln x)^{\beta}}{x} + o\left(\frac{(\ln\ln x)^{\beta}}{x}\right)\right) + 1\right] \cdot \frac{x}{\ln x \cdot \ln\ln x} =$$

$$= \left[-\frac{a}{(\ln\ln x)^{1-\beta}} + o\left(\frac{1}{(\ln\ln x)^{1-\beta}}\right)\right] \to -a \qquad \text{при } \beta = 1,\ x \to \infty.$$

Таким образом, при $\beta = 1$ и любых $a\,(>0)$ теорема 5 дает однозначный положительный ответ об M-определенности случайной величины, поскольку

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f\left(x + a \cdot sgn(x)(\ln|x|)(\ln\ln|x|)^{\beta}\right)}{f(x)} = e^{-a} < 1.$$

Приложение 3 (Вспомогательные утверждения)

При доказательстве теоремы сыграли важную роль два вспомогательных утверждения.

Будем использовать выражение $f(x) \asymp g(x)$ для обозначения того, что две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на одном и том же множестве и удовлетворяют следующему двойному неравенству:

$$c_- f(x) \leq g(x) \leq c_+ f(x),$$

где c_- и c_+ – положительные константы, не зависящие от x.

Утверждение 3

Пусть $a > 0$ и $\beta > 0$. Если $y = x + a\ln x(\ln\ln x)^\beta$, $x \in (\hat{x}_0, \infty)$, то его обратная функция $x = y - \varphi(y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(y) \asymp \ln y(\ln\ln y)^\beta, \quad \varphi'(y) \asymp (\ln\ln y)^\beta / y, \quad y \in (\hat{y}_0, \infty),$$

где $\hat{x}_0 = \max\left\{\exp\left(\exp\left(a([\beta]+2)!(2\beta)^{[\beta]+2}\right)\right), \exp\left(\exp\left(\frac{1}{a^{1/\beta}}\right)\right), e^{a\cdot([\beta]+2)!}, e^e\right\}$, $\hat{y}_0 = \hat{x}_0 + a\ln\hat{x}_0(\ln\ln\hat{x}_0)^\beta$.

Приложение 3

Утверждение 4

Пусть заданы две константы $0 < \varepsilon < 1$ *и* $y_0 > e$. *Если вероятностная плотность* $f(x)$ *имеет конечные моменты, то для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $n > 4/\varepsilon^2$ *верно*

$$n \int_{y_0}^{\infty} y^{n-1} \ln y \ln\ln y f(y) dy \leq 4 \cdot n \ln n \ln\ln n \int_{y_0}^{\infty} y^{n-1} f(y) dy + \\ + \varepsilon \int_{y_0}^{\infty} y^{n} f(y) dy.$$

Приложение 3 (Схема доказательства теоремы)

Приведем схематичное доказательство основного результата – теоремы 5.

Теорема 5

Пусть заданы $a > 0$, $\beta \in [0,1]$ и случайная величина X с функцией распределения F, $F' = f$, и все ее моменты конечны. Предположим, что плотность f непрерывна и строго положительна вне интервала $(-x_1, x_1)$, $x_1 > e$, так, что

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f\left(x + a \cdot sgn(x) \ln|x|(\ln\ln|x|)^{\beta}\right)}{f(x)} < 1.$$

Тогда величина X удовлетворяет условию Карлемана, а значит, является М-определенной.

Приложение 3

Обозначим $m_k = \mathbf{E}|X|^k$ для удобства. Без ограничения общности предполагаем, что $\int_{-x}^{0} |t|^n f(t)dt \le \int_0^x |t|^n f(t)dt$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Из условий теоремы следует существование таких $x_0(> \max\{\hat{x}_0, x_1\})$ и $\hat{\gamma}(< 1)$, что

$$\frac{f\left(x + a \ln x (\ln\ln x)^{\beta}\right)}{f(x)} < \hat{\gamma}, \quad x \ge x_0,$$

что влечет $f(x) - f\left(x + a \ln x (\ln\ln x)^{\beta}\right) > (1 - \hat{\gamma}) f(x)$ для $x \in (x_0, \infty)$. Наша основная цель – подтвердить справедливость оценок

$$m_n \le c(n \ln n \ln\ln n) m_{n-1} + b^n, \quad n = 3, 4, \dots,$$

где c и b – положительные константы.

Приложение 3

При помощи утверждений 3 и 4 доказывается, что изначально желаемые оценки выполняются с

$$\hat{c} = \frac{8c_+}{\gamma_0}, \quad \hat{b} = \max\{1, (2 - \hat{\gamma})/\gamma_0\} y_0, \quad \text{для } n > 4/\varepsilon^2,$$

где c_+ из утверждения 3, ε из утверждения 4, а $(1 - \hat{\gamma})/2 - 2c_+\varepsilon =: \gamma_0 > 0$.

Однако видно, что существуют такие положительные константы c и b, что неравенства справедливы и для $n = 3, 4, \ldots$

Приложение 3

Обозначим $(n\ln n\ln\ln n)! = (n\ln n\ln\ln n)\cdots(3\ln 3\ln\ln 3)$. Тогда для определенных выше c и b заключаем

$$
\begin{aligned}
m_n &\le c(n\ln n\ln\ln n)\left(c(n-1)\ln(n-1)\ln\ln(n-1)m_{n-2} + b^{n-1}\right) + b^n = \\
&= c^2(n\ln n\ln\ln n)\left((n-1)\ln(n-1)\ln\ln(n-1)\right)m_{n-2} + \\
&+ c(n\ln n\ln\ln n)b^{n-1} + b^n \le \\
&\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&\le c^{n-2}(n\ln n\ln\ln n)!\Bigg(m_2 + \frac{c^{-1}b^3}{(3\ln 3\ln\ln 3)!} + \frac{c^{-2}b^4}{(4\ln 4\ln\ln 4)!} + \cdots + \\
&+ \frac{c^{-(n-2)}b^n}{(n\ln n\ln\ln n)!}\Bigg) \le \\
&\le dc^n(n\ln n\ln\ln n)!,
\end{aligned}
$$

где $d = m_2/c^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\left(b^k c^{-k}/(k\ln k\ln\ln k)!\right) < \infty$, так как ряд сходится.

Заметим, что

$$\sqrt[n]{m_n} \leq c\sqrt[n]{d}\sqrt[n]{(n \ln n \ln \ln n)!} \leq c\sqrt[n]{d}(n \ln n \ln \ln n).$$

Это влечет

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}} \geq \frac{1}{c} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \ln(2n) \ln \ln(2n)} = \infty,$$

что в точности соответствует условию Карлемана в случае Гамбургера (теорема 1), следовательно, величина X является M-определенной.