# Energy-casimir метод и нелинейная устойчивость в задачах физики плазмы

Беляева Юлия Олеговна[1,2]

[1]Российский университет дружбы народов (Москва)
[2] Институт прикладной математики и механики (Донецк)

Workshop "9-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics"

# Идея energy-Casimir или энергетического метода

Рассматривается система уравнений в некотором пространстве $X$:

$$\dot{\mathbf{u}} = A(\mathbf{u}), \quad A : D(\mathbf{A}) \mapsto X,$$

где $A$ - нелинейный оператор.

Пусть $u_0$ - стационарное решение, которое мы хотим исследовать на устойчивость.

# Идея energy-Casimir или энергетического метода

### Шаг 1.

Находим выражение, которое будет постоянным на любом решении $u(t)$ (это может называться по-разному: гамильтониан, первый интеграл).
Обозначим его $H$, $H : X \to \mathbb{R}$, и выполняется

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = 0,$$

на любом решении $u(t)$.

**Шаг 2.**

"Связываем" $u_0$ с функционалом $C$, $C : X \to \mathbb{R}$, таким образом, чтобы $u_0$ было критической точкой функционала

$$H_C = H + C,$$

то есть, чтобы

$$DH_c(u_0) = 0.$$

Функционал $C$ также должен быть постоянным на любом решении $u(t)$.

### Шаг 3.

Рассматриваем разложение $H_C$ в точке $u_0$:

$$H_c(u) = H_c(u_0) + DH_c(u_0)(u - u_0) + D^2H_c(u_0)(u - u_0) + \dots$$

Нужно показать, что квадратичная часть положительно определена, более того, нужно получить что-то, похожее на

$$H_c(u) - H_c(u_0) - DH_c(u_0)(u - u_0) \geq c\|u - u_0\|^2$$

где $u \in X$, $c > 0$ - некоторая положительная константа.

# Идея energy-Casimir или энергетического метода

## Шаг 4.

Находим $|||\cdot|||$ на $X$, относительно которой $H_C$ непрерывен в $u_0$. Тогда для любого решения $u(t)$ получим:

$$\|u(t) - u_0\|^2 \leq \frac{1}{c}\|H_c(u(0)) - H_c(u_0)\|.$$

Приходим к тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из неравенства $|||u(0) - u_0||| < \delta$ следует, что $\|u(t) - u_0\| < \varepsilon$, $t \geq 0$, то есть $u_0$ нелинейно устойчиво.

## Первоисточник идеи


1. Арнольд, В.И., Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости, Докл. Акад. Наук, 1965, том 162, № 5, с. 975–978.
2. Арнольд, В.И., Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости, Изв. вузов. Матем., 1966, № 5, с. 3–5.

### Подводные камни

1. Для многих задач нет теорем о существовании решений.
2. Построение стационарного решения $u_0$ может оказаться не менее сложной задачей.
3. Построение функционала $C$, постоянного на любом решении, весьма нетривиальная задача и если у системы нет известных первых интегралов - метод не сработает.

### Вопрос

Есть ли примеры реальных задач, с приложениями, когда метод работает?

### Ответ

Да, рассмотрим на примере уравнений Власова-Пуассона.

Постановка задачи. Для $t \in (0,T)$ в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$ и при $v \in \mathbb{R}^3$ будем рассматривать систему уравнений Власова-Пуассона:

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \left(v, \nabla_x f^\beta\right) + \frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c}[v, B(x)], \nabla_v f^\beta\right) = 0, \qquad (1)$$

$$-\Delta\varphi(x) = 4\pi e\rho, \;\; \rho = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm1} \beta f^\beta(x,v,t)dv, \qquad (2)$$

с начальными условиями и граничным условием Дирихле

$$f^\beta(x,v,0) = f^\beta_0(x,v), \qquad (3)$$

$$\varphi|_{\overline{\mathbb{R}^3_+}} = 0. \qquad (4)$$

- $f^\beta(x,v,t)$ — функции распределения заряженных частиц.
- $\varphi(x)$ — потенциал самосопряженного электрического поля.
- $B(x)$ — индукция внешнего магнитного поля.
- $c$, $e$, $m_\beta$ — скорость света, заряд электрона и масса заряженной частицы.

Классическое решение. Функции $\{\varphi, f^{+1}, f^{-1}\}$, где

- $\varphi \in C([0,T], C^{2+\sigma}(\overline{\mathbb{R}^3_+}))$,
- $f^\beta \in C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T])$,

будем называть классическим решением задачи (5)-(4) если они удовлетворяют уравнениям (5)-(4) и

- $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum\limits_{\beta=\pm 1} f^\beta(x,v,t)dv \in C([0,T], C^{2+\sigma}_\Omega(\overline{\mathbb{R}^3_+}))$, где $\Omega$ - ограниченная область, такая, что $\overline{\Omega} \subset \overline{\mathbb{R}^3_+}$,
- $\varphi(x,t) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для любых $t \in [0,T]$.


A. L. Skubachevskii, Y. Tsuzuki, Classical solutions of the Vlasov–Poisson equations with an external magnetic field in a half-space, Comput. Math. Math. Phys., 2017.

Yu. O. Belyaeva, A. L. Skubachevskii, Unique Solvability of the First Mixed Problem for the Vlasov–Poisson System in an Infinite Cylinder, Journal of Mathematical Sciences, 2020.

Стационарное решение. Функции $\{\varphi, f^{+1}, f^{-1}\}$, где

- $\varphi \in C^{2+\sigma}(\overline{\mathbb{R}^3_+})$,
- $f^\beta \in C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T])$,

будем называть стационарным решением задачи (5)-(4) если они удовлетворяют стационарной системе

$$\left(v, \nabla_x f^\beta\right) + \frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c}[v, B(x)], \nabla_v f^\beta\right) = 0, \tag{5}$$

$$-\Delta\varphi(x) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f^\beta(x,v)dv, \tag{6}$$

$$\varphi|_{\overline{\mathbb{R}^3_+}} = 0. \tag{7}$$


Yu. O. Belyaeva, Stationary solutions of the V-P system for two-component plasma under an external magnetic field in a half-space, Math. Model. Nat. Phenom., 2017.

Yu. O. Belyaeva, B. Gebhard, A. L. Skubachevskii, A general way to confined stationary V-P plasma configurations, Kinet. Relat. Models, 2021.

# Работы по нелинейной устойчивости


- D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein, Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, Phys. Rep., 1985.
- Yu. Yu. Arkhipov, V. V. Vedenjapin, On the Classification and Stability of Stationary Solutions of the Vlasov Equation on a Torus and in a Boundary Value Problem, Proc. Steklov Inst. Math., 1994.
- G. Rein, Non-linear stability for the Vlasov-Poisson system — the energy-Casimir method, Math. Methods Appl. Sci., 1994.
- P. Knopf, J. Weber, On the two and one-half dimensional Vlasov–Poisson system with an external magnetic field: Global well-posedness and stability of confined steady states, Nonlinear Anal. Real World Appl., 2022.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия существования классического решения:

A) $\varphi \in C([0,T], C^{2+\sigma}(\overline{\mathbb{R}^3_+}))$ и $\int\limits_0^T \|\varphi(\cdot,t)\|_{2+\sigma} dt \leq R$, где $R > 0$.

B) Пусть $B(x) = (0,0,h)$ для $\frac{\delta}{4} \leq x_1 \leq \varkappa$, где

$$\frac{16cm_{+1}}{e\delta}(d + \sqrt{3}eR) < h, \tag{8}$$

$\varkappa$, $\delta$, $d$, $R$, $h > 0$ не зависят от $x$ и $\frac{9\delta}{8} < \min\{\varkappa, 1\}$.

C) Пусть $f_0^\beta \in \dot{C}^{1+\sigma}(\mathbb{R}^6)$ и пусть $supp f_0^\beta \subset \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0$ — ограниченная облась, полностью содержащаяся в $\mathbb{R}_\delta \times B_d$.

## Построение стационарного решения.

Пусть магнитное поле удовлетворяет условию 2. Перепишем систему характеристик уравнений Власова в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} =$$
$$= \frac{dv_1}{\frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\varphi'_{x_1} + \frac{hv_2}{c}\right)} = \frac{dv_2}{\frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\varphi'_{x_2} - \frac{hv_1}{c}\right)} = \frac{dv_3}{-\frac{\beta e}{m_\beta}\varphi'_{x_3}}.$$

## Построение стационарного решения.

Для случая однородного внешнего магнитного поля в условиях отсутствия электрического поля известен эффект движения частиц по ларморовским траекториям. В данном случае, при $\varphi = 0$ мы будем иметь следующие первые интегралы (Belyaeva, 2017):

$$v_1^2 + v_2^2 = C_1, \;\; v_3 = C_2, \;\; \frac{\beta eh}{m_\beta} x_1 + v_2 = C_3,$$

$$\frac{\beta eh}{m_\beta} x_2 - v_1 = C_4, \;\; \frac{\beta eh}{m_\beta c} x_3 - v_3 arcsin \frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2} = C_5.$$

Разумеется, в предположении произвольности $\varphi$, приведенные выше соотношения уже не будут первыми интегралами.

Известно, например, что для любого $\varphi$ будет сохраняться энергия:

$$E = \frac{m_\beta |v|^2}{2} - \beta e \varphi.$$

Определенные предположения на структуру потенциала, зачастую, с учетом определенной симметрии рассматриваемой области, дают возможность получать новые первые интегралы. Например, для случая всего пространства или кругового циллиндра естественной является круговая симметрия. Соотвественно, предполагая, что потенциал зависит от радиуса $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а магнитное поле имеет структуру, согласованную с типом области можно получить новые первые интегралы, как в работах:


- Yu. O. Belyaeva, B. Gebhard, A. L. Skubachevskii, A general way to confined stationary Vlasov-Poisson plasma configurations, Kinet. Relat. Models, 2021.
- P. Knopf, Confined steady states of a Vlasov-Poisson plasma in an infinitely long cylinder, Math. Methods Appl. Sci., 2019.

## Условие D)

Пусть функция $\varphi(x,t)$ не зависит от переменной $x_2$.

Условие D) дает нам возможность получить первый интеграл вида

$$\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2 = C.$$

Введем срезающие функции $\Psi_1^\beta$, $\Psi_2^\beta \in C^\infty$ следующим образом:

A) $\Psi_1^\beta : [0,d] \to [0,\Psi_{1,\max}^\beta]$ и $(\Psi_1^\beta(\tau))' < 0$ для $\tau \in [0,d]$;

B) $supp\ \Psi_2^\beta \subset [-\xi,\xi]$, где $\xi := (\frac{4\delta_1}{\delta} - 1)d + \frac{4\delta_1}{\delta}\sqrt{3}eR$, $\frac{\delta_1}{\delta} > 1$;

C) $\Psi_i^{+1}(\tau) = \Psi_i^{-1}(\tau)$ для i=1,2.

### Лемма 1

Пусть выполнены условия A)-B). Тогда функция $(0, \mathring{f}^{\beta})$, где

$$\mathring{f}^{\beta}(x, v) = \Psi_1^{\beta}\left(\frac{m_{\beta}|v|^2}{2}\right)\Psi_2^{\beta}\left(\frac{eh}{cm_{\beta}}x_1 + \beta v_2\right),$$

является стационарным решением системы (1)-(4) и $supp\Psi^{\beta} \subset \mathbb{R}_{\delta} \times B_d$ .

Определим теперь множество $X$ возмущений начальных данных. Обозначим $X$ множество неотрицательных функций $g^\beta \in C^1_\Omega(\overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^3)$ таких, что

$$\frac{g^\beta}{\Psi_2^\beta\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)} \in L_1(\overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^3),$$

а также

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^3_+}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta g^\beta dv dx = \int\limits_{\overline{\mathbb{R}^3_+}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f_0^\beta dv dx.$$

Введем следующие множества:

$$Q_1^\beta := \{(x,v) \in \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3 : \left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right) \in [-\xi, \xi]\},$$

$$Q_0^\beta := \{(x,v) \in \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3 : \left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right) \notin [-\xi, \xi]\}.$$

# Основной результат

Теорема. Пусть условия A)-D) выполняются и $f^\beta$ единственное классическое решение задачи (1)-(4) с начальными функциями $f^\beta(0,x,v) = f_0^\beta(x,v) \in X$, а $\{0, \mathring{f}^\beta\}$ стационарное решение, построенное в лемме 1. Тогда существует константа $C$, зависящая только от $\Psi_1^\beta$ и $\Psi_2^\beta$, такая, что для всех $f_0^\beta \in X$ и $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\sum_\beta \int\limits_{Q_1^\beta} \frac{(f^\beta(t) - \mathring{f}^\beta)^2}{\Psi_2^\beta(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2)} dxdv \leq$$

$$\leq C\left( \sum_\beta \int\limits_{Q_1^\beta} |f_0^\beta - \mathring{f}^\beta| \left(1 + \frac{\max(f_0^\beta)}{\Psi_2^\beta(\sigma)}\right) dxdv + \sum_\beta \int\limits_{Q_0^\beta} |f_0^\beta - \mathring{f}^\beta| dxdv + \right.$$

$$\left. + \sum_\beta \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} |f_0^\beta - \mathring{f}^\beta| \frac{m_\beta |v|^2}{2} dxdv + \sum_\beta \|\rho_0^\beta - \mathring{\rho}^\beta\|_{L_{6/5}(\mathbb{R}^3_+)} \right).$$

.

# Еще немного об энергетическом методе

- На первом шаге мы используем полную энергию:

$$H(f^\beta) := \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sum_{\beta=\pm 1}\frac{m_\beta}{2}|v|^2 f^\beta dxdv + \int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla_x\varphi|^2 dx$$

  и ее свойство быть постоянной на любом классическом решении уравнений Власова.
- На втором шаге мы построим функционал $C$, который также будет постоянным на любом классическом решении, а также такой, что исследуемое нами стационарное решение будет критической точкой функционала $H_C := H + C$.
- Далее, на третьем и четвертом шаге мы получим оценки сверху и снизу для $H_C$. Оценка снизу даст нам положительную определенность второй вариации функционала $H_C$, а оценка сверху даст нам норму, в соответствии с которой будет определяться нелинейная устойчивость решения.

# Еще немного об энергетическом методе

Построим функционал

$$C(f^\beta) := \sum_\beta \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi^\beta(f^\beta, \psi^\beta) dxdv, \qquad (9)$$

таким образом, чтобы его производная в точке $\mathring{f}^\beta$ совпадала с линейной частью разложения

$$H(f^\beta) - H(\mathring{f}^\beta) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3_+} \sum_{\beta=\pm 1} \frac{m_\beta}{2} |v|^2 \left( f^\beta - \mathring{f}^\beta \right) dxdv + \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla_x \varphi|^2 dx.$$

Отметим, что при любом выборе функций $\Phi^\beta$ из подходящего класса функций, и при выполнении условия 4, функционал (9) будет постоянным по времени на любом классическом решении $f^\beta$. Таким образом, функция $\Phi^\beta$ может быть выбрана произвольным образом, главное, чтобы она была дважды дифференцируемой и удовлетворяла условию $\Phi(0) = 0$.

# Еще немного об энергетическом методе

Будем рассматривать функцию $\Psi_1^\beta$ из леммы 1 как отображение отрезка $[0, d]$ на $[0, \Psi_{1,max}^\beta]$. Так как $\Psi_1^\beta$ монотонно убывает, существует $(\Psi_1^\beta)^{-1} : [0, \Psi_{1,max}^\beta] \to [0, d]$. В связи с тем, что функция $\Psi_2^\beta$ равна нулю вне интервала $[-\xi, \xi]$, мы имеем следующие множества:

$$Q_1^\beta = \{(x, v) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}^3 : \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2\right) \in [-\xi, \xi]\},$$

$$Q_0^\beta = \{(x, v) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}^3 : \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2\right) \notin [-\xi, \xi]\}.$$

Будем задавать теперь $C(f^\beta)$ следующим образом:

$$C(f^\beta) = \sum_\beta \int\limits_{Q_1^\beta} \Phi_1^\beta(f^\beta, \psi^\beta) dx dv + \sum_\beta \int\limits_{Q_0^\beta} \Phi_2^\beta(f^\beta, \psi^\beta) dx dv.$$

# Еще немного об энергетическом методе

Для $\tau \in [0, \Psi^{\beta}_{1,max}\Psi^{\beta}_{2}(\sigma)]$ определим $\Phi^{\beta}_{1}(f^{\beta}, \psi^{\beta})$ по формуле

$$\Phi^{\beta}_{1}(\tau, \sigma) = \Psi^{\beta}_{2}(\sigma) \int\limits_{0}^{\frac{\tau}{\Psi^{\beta}_{2}(\sigma)}} (\Psi^{\beta}_{1})^{-1}(s)ds.$$

Тогда $\Phi^{\beta}_{1}(\cdot, \sigma) \in C^1([0, \Psi^{\beta}_{1,max}]) \cap C^2((0, \Psi^{\beta}_{1,max}])$, при этом

$$\frac{\partial \Phi^{\beta}_{1}}{\partial \tau}(\tau, \sigma) = -(\Psi^{\beta}_{1})^{-1}\left(\frac{\tau}{\Psi^{\beta}_{2}(\sigma)}\right)$$

для $\tau \in [0, \Psi^{\beta}_{1,max}\Psi^{\beta}_{2}(\sigma)]$.

# Еще немного об энергетическом методе

Пусть теперь $\tau > \Psi^{\beta}_{1,max}\Psi^{\beta}_{2}(\sigma)$. Продолжим функцию $\Phi^{\beta}_{1}(\tau,\sigma)$ до функции класса $C^1([0,\infty),Q^{\beta}_{1}])$, так, чтобы $\Phi^{\beta}(\cdot,\sigma) \in C^2((0,\infty))$. Это можно сделать определив $\Phi^{\beta}_{2}(f^{\beta},\psi^{\beta})$ следующим образом:

$$\Phi^{\beta}_{1}(\tau,\sigma) := -\frac{(\tau - \Psi^{\beta}_{1,max}\Psi^{\beta}_{2}(\sigma))^2}{2(\Psi^{\beta}_{1})'(\Psi^{\beta}_{1,min})\Psi^{\beta}_{2}(\sigma)} -$$

$$-\Psi^{\beta}_{1,min}(\tau - \Psi^{\beta}_{2}(\sigma)) - \Psi^{\beta}_{2}(\sigma)\int_{0}^{\Psi^{\beta}_{1,max}}(\Psi^{\beta}_{1})^{-1}(s)ds.$$

Определим теперь нашу функцию на $Q_0^\beta$ по формуле:

$$\Phi_2^\beta := \tau, \tau \geq 0. \qquad (10)$$

В этом случае $\Phi_2^\beta \in C^\infty([0,\infty),\mathbb{R}^3])$.
Введем функционал $H_C(f^\beta)$, действующий по формуле

$$H_C(f^\beta) = H(f^\beta) + C(f^\beta).$$

Тогда в окрестности стационарного решения $\{0, \mathring{f}^\beta\}$ мы получим

$$H_C(f^\beta) - H_C(\mathring{f}^\beta) =$$

$$= \sum_\beta \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3_+} (\Phi^\beta(f^\beta, \psi^\beta) - \Phi^\beta(\mathring{f}^\beta, \psi^\beta) +$$

$$+ (f^\beta - \mathring{f}^\beta) \frac{m_\beta |v|^2}{2}) dx dv + \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

# Конец

Спасибо за внимание!