Стохастическая динамика вблизи критических точек в стохастическом градиентном спуске

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

9-th St. Petersburg Youth Conference in Probability
and Mathematical Physics
Ноябрь 17 – 20, 2025

Д. В. Дудукалов

Совместная работа с

А. В. Логачев, В. И. Лотов, Т. В. Прасолов, Е. И. Прокопенко, А. С. Тарасенко

Стохастический градиентный спуск

Ставится задача

$$f(x) := \mathbb{E}_{\eta\sim\mathcal{D}}\left[f_\eta(x)\right] \longrightarrow \min_{x\in\mathbb{R}^d}.$$

Решается с помощью СГС

$$x_n = x_{n-1} - \varepsilon_n g_n(x_{n-1}),$$

где $g_n(x)$ – стохастический градиент такой, что

$$\mathbb{E}\left[g_n(x)\right] = \nabla f(x).$$

Шум

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \varepsilon_n\left(\nabla f(x_{n-1}) - \left(\nabla f(x_{n-1}) - g_n(x_{n-1})\right)\right) \\ &= x_{n-1} - \varepsilon_n\left(\nabla f(x_{n-1}) - \xi_n(x_{n-1})\right). \end{aligned}$$

Объект исследования

$$x_n^{\varepsilon} = x_{n-1}^{\varepsilon} - \varepsilon \left(f^{'} \left(x_{n-1}^{\varepsilon} \right) - \xi_n \right),$$

где

- $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\{\xi_n\}$ – н.о.р.с.в, $\mathbb{E}\xi_n = 0$;
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Условие на шум

Обозначим

$$\mathrm{H}_{+}(\mathrm{u}) := \mathbb{P}\left(\xi_1 > \mathrm{u}\right),$$
$$\mathrm{H}_{-}(\mathrm{u}) := \mathbb{P}\left(\xi_1 < -\mathrm{u}\right),$$
$$\mathrm{H}(\mathrm{u}) := \mathrm{H}_{+}(\mathrm{u}) + \mathrm{H}_{-}(\mathrm{u}) = \mathbb{P}\left(|\xi_1| > \mathrm{u}\right).$$

[H] $\mathrm{H}(\mathrm{u}) \in \mathcal{RV}_{-\alpha}(+\infty)$ для некоторого $\alpha \in (1, 2)$ и

$$\lim_{\mathrm{u}\to\infty} \frac{\mathrm{H}_{+}(\mathrm{u})}{\mathrm{H}_{-}(\mathrm{u})} = \kappa \in (0, \infty).$$

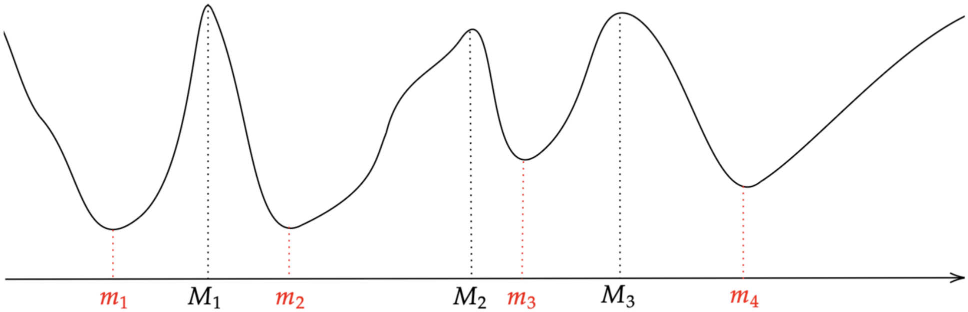
Условия на f

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – является $\mathbb{C}^2$ функцией и

- Существуют $d \geq 1$ локальных минимумов $m_1, m_2, \ldots, m_d$ и $d-1$ локальных максимумов $M_1, M_2, \ldots, M_{d-1}$ таких, что

$$M_0 < m_1 < M_1 < \ldots < m_d < M_d,$$

где $M_0 = -\infty$, $M_d = \infty$;
- Причем $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{m_1, M_1, \ldots, m_d\}$.



Метастабильность

Theorem (Wang, 2021[1])

Пусть выполнены описанные выше условия на функцию и условие на распределение [H] ($\alpha > 1$). Тогда

$$x^{\varepsilon}_{\lfloor \frac{t}{H(1/\varepsilon)} \rfloor} \xrightarrow{d} Y_t \text{ при } \varepsilon \downarrow 0,$$

где Y_t – непрерывный по времени Марковский процесс с фазовым пространством $\{m_1, \ldots, m_d\}$ и сходимость в смысле конечно-мерных распределений.

[1] Wang, X., Oh, S., and Rhee, C.-H. Eliminating sharp minima from sgd with truncated heavy-tailed noise. arXiv preprint arXiv:2102.04297, 2021.

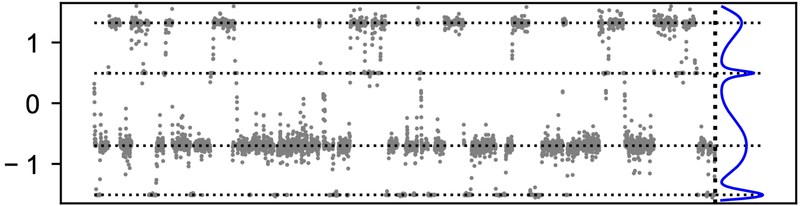
Метастабильность

Theorem (Wang, 2021[1])

Пусть выполнены описанные выше условия на функцию и условие на распределение [H] ($\alpha > 1$). Тогда

$$x^{\varepsilon}_{\lfloor \frac{t}{H(1/\varepsilon)} \rfloor} \xrightarrow{d} Y_t \text{ при } \varepsilon \downarrow 0,$$

где Y_t – непрерывный по времени Марковский процесс с фазовым пространством $\{m_1, \ldots, m_d\}$ и сходимость в смысле конечно-мерных распределений.

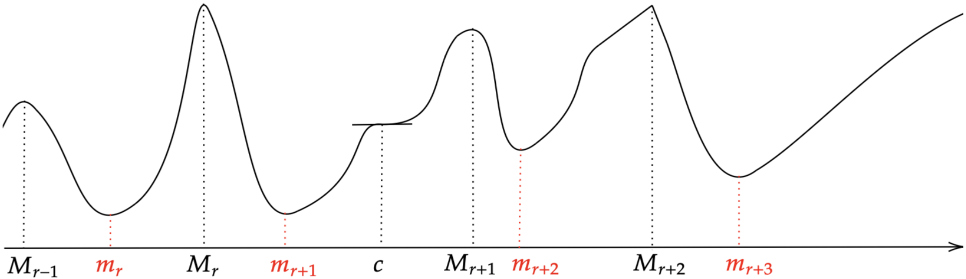


[1] Wang, X., Oh, S., and Rhee, C.-H. Eliminating sharp minima from sgd with truncated heavy-tailed noise. arXiv preprint arXiv:2102.04297, 2021.

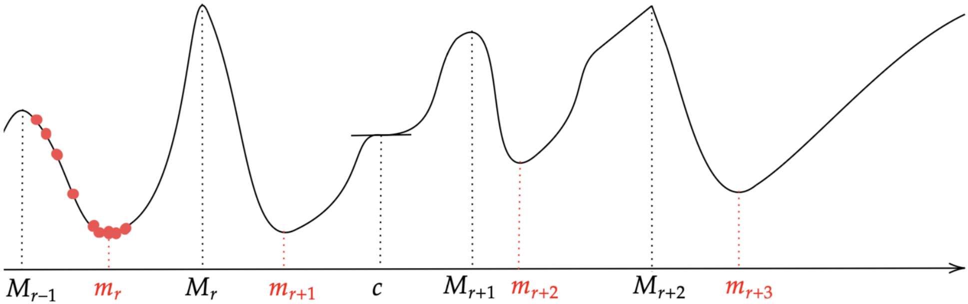
Условия на f

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

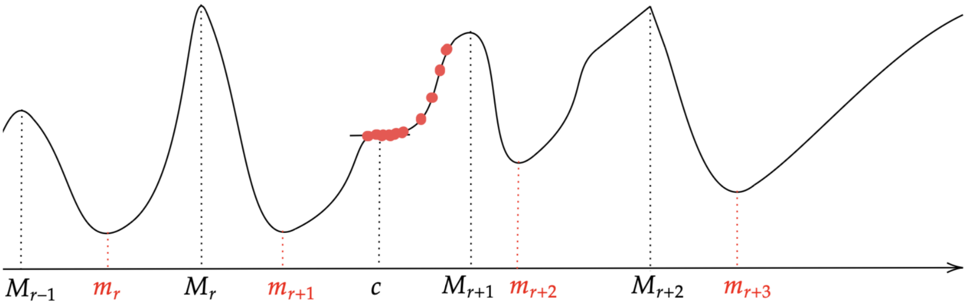
- Существуют $d \geq 1$ локальных минимумов $m_1, m_2, \ldots, m_d$ и $d - 1$ локальных максимумов $M_1, M_2, \ldots, M_{d-1}$ таких, что
$$M_0 < m_1 < M_1 < \ldots < m_d < M_d,$$
где $M_0 = -\infty$, $M_d = \infty$;
- Производная f' ограничена и непрерывна справа, причем скачки допускаются только при $x \in \{m_1, M_1, \ldots, m_d\}$.



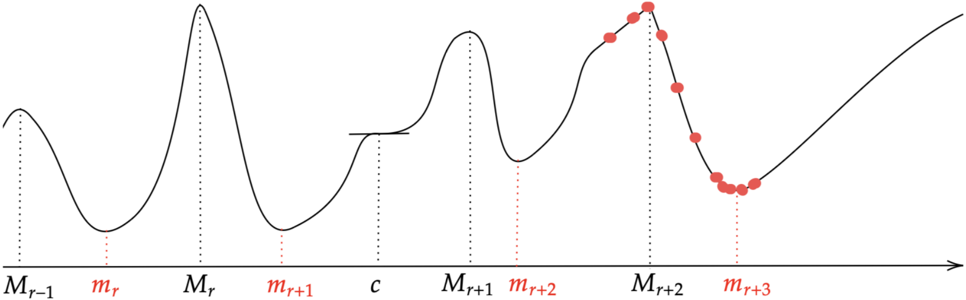
Сходимость



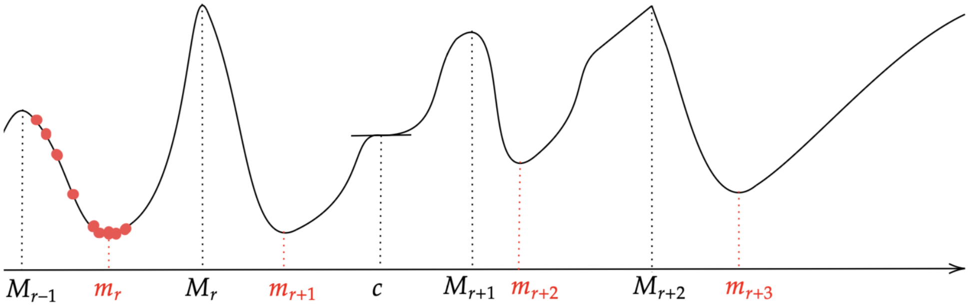
Прилипание



Покидание



Сходимость

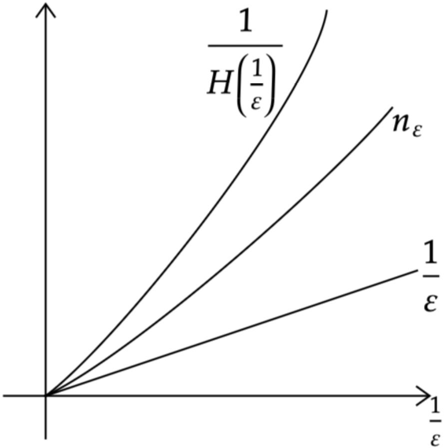


Сходимость

$$\mathcal{N} = \{\mathrm{n}_{\varepsilon} \geqslant 0 : \mathrm{n}_{\varepsilon} - \text{ монотонная и } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{n}_{\varepsilon} = \infty,\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{H}\left(1/\boldsymbol{\varepsilon}\right) \mathrm{n}_{\varepsilon} = 0\}.$$

Сходимость

$$\mathcal{N} = \{\mathrm{n}_\varepsilon \geqslant 0 : \mathrm{n}_\varepsilon - \text{ монотонная и } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \mathrm{n}_\varepsilon = \infty,\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{H}\left(1/\varepsilon\right) \mathrm{n}_\varepsilon = 0\}.$$



Сходимость

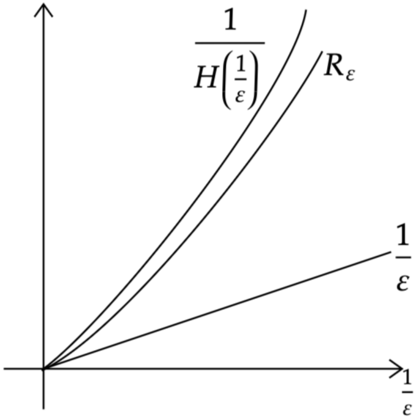
Theorem

Пусть выполнено [H], $f^{'}(x) \neq 0$ для всех $x \in (M_{r-1}, M_r) \setminus \{m_r\}$.
Тогда если $x_0 \in (M_{r-1} + \Delta, M_r - \Delta)$ для некоторого $\Delta > 0$, то

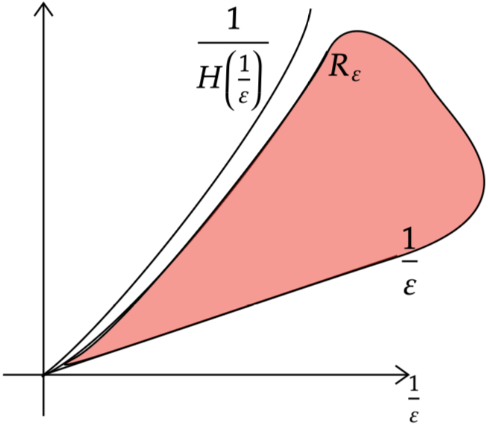
(1) Для любого $n_\varepsilon \in \mathcal{N}$

$$x^{\varepsilon}_{\lfloor n_\varepsilon \rfloor} \xrightarrow{p} m_r \text{ при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Сходимость


$\frac{1}{H\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$
R_ε
$\frac{1}{\varepsilon}$
$\frac{1}{\varepsilon}$

Сходимость



$\frac{1}{H\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$
R_ε
$\frac{1}{\varepsilon}$
$\frac{1}{\varepsilon}$

Сходимость

Theorem

Пусть выполнено [H], $f^{'}(x) \neq 0$ для всех $x \in (M_{r-1}, M_r) \setminus \{m_r\}$.
Тогда если $x_0 \in (M_{r-1} + \Delta, M_r - \Delta)$ для некоторого $\Delta > 0$, то

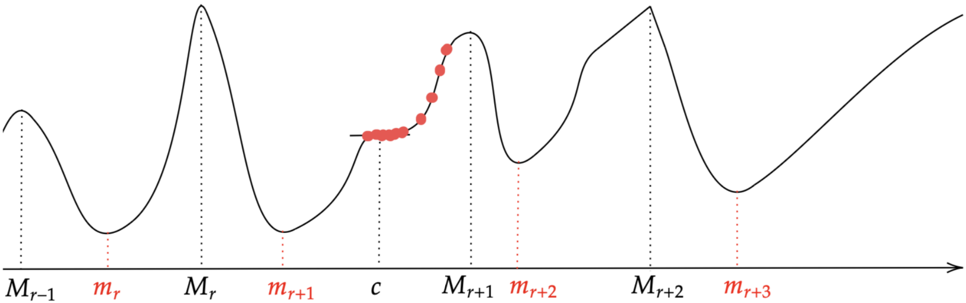
(1) Для любого $n_\varepsilon \in \mathcal{N}$

$$x^{\varepsilon}_{\lfloor n_\varepsilon \rfloor} \xrightarrow{p} m_r \text{ при } \varepsilon \downarrow 0.$$

(2) Пусть $L(u) \geqslant 0$ – м.м.ф. такая, что $uL(u)$ монотонно возрастает для $u \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\left[|\xi_1|^\alpha L^\alpha(|\xi_1|)\right] < \infty$, положим $R_\varepsilon := \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\alpha L^\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{N}$, тогда для $n_\varepsilon = R_\varepsilon$ и для любого $n_\varepsilon \in \mathcal{N}$ такого, что $n_\varepsilon = o\left(R_\varepsilon\right)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ выполнено

$$x^{\varepsilon}_{\lfloor n_\varepsilon \rfloor} \xrightarrow{a.s.} m_r \text{ при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Прилипание



Прилипание

Definition

- $c \in \mathbb{R}$ – K-критическая точка f если $f^k(c) = 0$ для всех $k = 1, \ldots, K$, $f^{K+1}(c) \neq 0$ и $\exists \Delta > 0$ такое, что
$$\sup_{c-\Delta \leqslant x \leqslant c+\Delta} |f^{(K+1)}(x)| < \infty.$$
- $\approx$ – равно с точностью до умножения на некоторую м.м.ф.

Прилипание

Theorem

Пусть выполнено [H] и c – K-критическая точка f. Положим

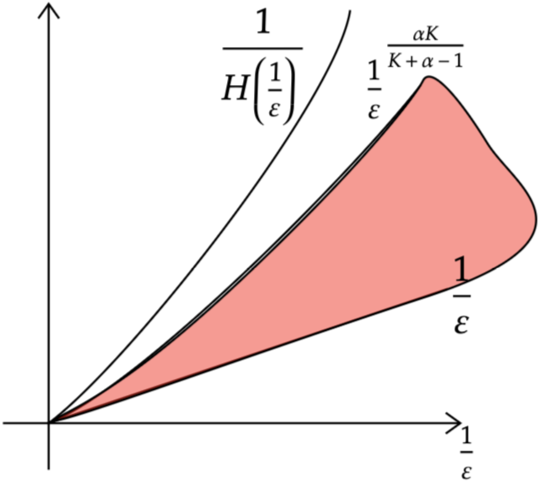
$$\delta(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha-1+K}} \text{ и } h(\varepsilon) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha K}{\alpha-1+K}}.$$

Тогда для любого $t > 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\sup_{n \leqslant t h(\varepsilon)} |x_n^{\varepsilon} - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \text{ п.н.}$$

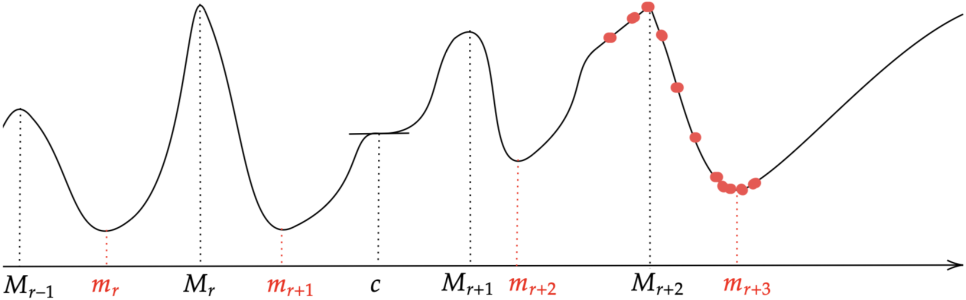
выполнено равномерно по $x_0 : |x_0 - c| < \frac{1}{3}\delta(\varepsilon)$.

Прилипание



$\frac{1}{H\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$
$\frac{1}{\varepsilon}^{\frac{\alpha K}{K+\alpha-1}}$
$\frac{1}{\varepsilon}$
$\frac{1}{\varepsilon}$

Покидание



Покидание

Пусть $M_{r+2} = 0$ и для некоторого $\delta > 0$ и некоторых $c_l, c_r > 0$

$$f'(x) = \begin{cases} c_l, x \in (-\delta, 0), \\ -c_r, x \in [0, \delta). \end{cases}$$

СГС

$$x_n^\varepsilon = x_0^\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \left(\xi_{i+1} - f'\left(x_i^\varepsilon\right)\right), \ x_0^\varepsilon \in [0, \delta).$$

Введем момент остановки

$$N^\varepsilon := \inf\left\{n \geqslant 1 : x_n^\varepsilon \notin [-\delta, \delta]\right\}.$$

Интересует

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}\left(x_{N^\varepsilon}^\varepsilon < -\delta \right) = ?, \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}\left(x_{N^\varepsilon}^\varepsilon > \delta \right) = ?$$

Покидание

Пусть $M_{r+2} = 0$ и для некоторого $\delta > 0$ и некоторых $c_l, c_r > 0$

$$f'(x) = \begin{cases} c_l, x \in (-\delta, 0), \\ -c_r, x \in [0, \delta). \end{cases}$$

СГС

$$x_n^\varepsilon = x_0^\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \left(\xi_{i+1} - f'\left(x_i^\varepsilon\right)\right), \;\; x_0^\varepsilon \in [0, \delta).$$

Введем момент остановки

$$N^\varepsilon := \inf\left\{n \geqslant 1 : x_n^\varepsilon \notin [-\delta, \delta]\right\}.$$

СГС

$$\varepsilon^{-1} x_n^\varepsilon = \varepsilon^{-1} x_0^\varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\xi_{i+1} - f'\left(x_i^\varepsilon\right)\right).$$

Покидание

Определим случайное блуждание: $X_0 := 0$,

$$X_n := \begin{cases} X_{n-1} + (\xi_n - c_l), & X_{n-1} < 0, \\ X_{n-1} + (\xi_n + c_r), & X_{n-1} \geqslant 0. \end{cases}$$

и моменты пересечения нуля для него

$$\tau_0^{\uparrow} = 0,\ \tau_{2k-1}^{\downarrow} = \inf\left\{j > \tau_{2k-2}^{\uparrow} : X_j < 0\right\},$$

$$\tau_{2k}^{\uparrow} = \inf\left\{j > \tau_{2k-1}^{\downarrow} : X_j \geqslant 0\right\}.$$

Если $x_0^{\varepsilon} = 0$, то до N^{ε} эти моменты пересечения совпадают с аналогичными для

$$x_n^{\varepsilon} = \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \left(\xi_{i+1} - f'\left(x_i^{\varepsilon}\right)\right).$$

Покидание

Theorem

Пусть $x_0^\varepsilon \geqslant 0$, $x_0^\varepsilon = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{P}\left(x_{N^\varepsilon}^\varepsilon > \delta \right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty \right) = \sum_{k\geqslant 0} \left(\mathbb{P}\left(\tau_{2k}^{\uparrow} < \infty \right) - \mathbb{P}\left(\tau_{2k+1}^{\downarrow} < \infty \right) \right),$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{P}\left(x_{N^\varepsilon}^\varepsilon < -\delta \right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty \right) = \sum_{k\geqslant 0} \left(\mathbb{P}\left(\tau_{2k+1}^{\downarrow} < \infty \right) - \mathbb{P}\left(\tau_{2k+2}^{\uparrow} < \infty \right) \right).$$

Покидание

Corollary

Пусть также выполнены условия теоремы о сходимости к минимуму, где начальное условие заменено на $x_0^\varepsilon \geq M_{r+2}, |x_0^\varepsilon - M_{r+2}| = o(\varepsilon)$. Тогда для любого $\delta' > 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}\left(|x^\varepsilon_{\lfloor n_\varepsilon \rfloor} - m_{r+2}| < \delta' \right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} X_n = -\infty \right).$$

Литература

D. Dudukalov, A. Logachov, V. Lotov, T. Prasolov, E. Prokopenko & A. Tarasenko (2025). Convergence, Sticking and Escape: Stochastic Dynamics Near Critical Points in SGD. arXiv preprint arXiv:2505.18535.

Спасибо!