Вероятностно-статистические свойства случайного графа с независимыми весами вершин

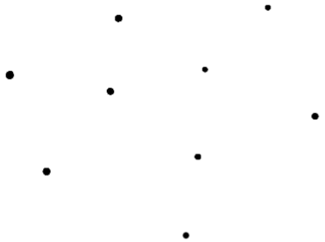
Котова Анна

18 ноября 2025 г.

Научный руководитель: Лифшиц Михаил Анатольевич

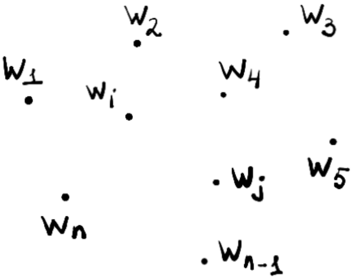
Модель случайного графа с независимыми весами вершин

- Граф G с множеством вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$



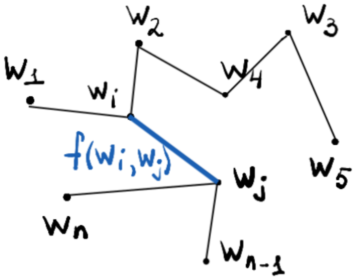
Модель случайного графа с независимыми весами вершин

- Граф G с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- Каждой вершине v_j присваиваем случайный вес (fitness) w_j, где w_j i.i.d. $\sim w$.



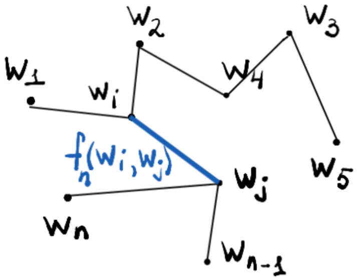
Модель случайного графа с независимыми весами вершин

- Граф G с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- Каждой вершине v_j присваиваем случайный вес (fitness) w_j, где w_j i.i.d. $\sim w$.
- $\mathbb{P}(e_{i,j} = 1) = f(w_i, w_j)$, где f некоторая симметричная функция со значениями в $[0, 1]$. Рёбра проводятся независимо.



Модель случайного графа с независимыми весами вершин

- Граф G_n с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- Каждой вершине v_j присваиваем случайный вес (fitness) w_j, где w_j i.i.d. $\sim w$.
- $\mathbb{P}(e_{i,j} = 1) = f_n(w_i, w_j)$, где f_n некоторая симметричная функция со значениями в $[0, 1]$, зависящая от n. Рёбра проводятся независимо.



Интересующие вопросы

- Предельные теоремы для степеней вершин в случаях с фиксированной функцией ребра f и меняющейся f_n.
- Статистические оценки на параметры модели (в частности на функцию распределения случайной величины w).

Известные модели случайных графов с независимыми весами вершин

Модель Эрдёша — Реньи $G(n, p)$

- w — любое распределение.
- $f(x, y) = p$ для любых x, y.

- $w = \sqrt{p}$ — константная случайная величина.
- $f(x, y) = xy$ для любых x, y.

Известные модели случайных графов с независимыми весами вершин

Модель с билинейной функцией ребра f

- $w \in [0, 1]$ — любое распределение из заданного диапазона.
- $f(x, y) = xy$.

- $w \in [0, 1]$ — любое распределение из заданного диапазона.
- $f_n(x, y) = \frac{xy}{n}$.

Известные модели случайных графов с независимыми весами вершин

Пороговая модель Кальдарелли (частный случай)

- w имеет экспоненциальное распределение (с плотностью $p(u) = e^{-u}$, где $u \in [0, +\infty)$).
- $f_n(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y > \log n, \\ 0, & x + y \leq \log n. \end{cases}$

Основные результаты для предельных распределений

Для фиксированной функции ребра f.

Введём обозначения

- $\frac{\deg_{n+1} v_j}{n}$ — усреднённая степень вершины v_j в графе на $n+1$ вершине.
- $X_j = \mathbb{E}(e_{j,0}|w_j) = \mathbb{E}(f(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f(w_j, w_0)$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.

Теорема

$$\frac{\deg_{n+1} v_1}{n} \xrightarrow{п.н.} X_1 \text{ при } n \to \infty.$$

Основные результаты для предельных распределений

Для фиксированной функции ребра f.

Введём обозначения

- $\frac{\deg_{n+1} v_j}{n}$ — усреднённая степень вершины v_j в графе на $n+1$ вершине.
- $X_j = \mathbb{E}(e_{j,0}|w_j) = \mathbb{E}(f(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f(w_j, w_0)$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.

Теорема

$$\frac{\deg_{n+1} v_1}{n} \xrightarrow{п.н.} X_1 \text{ при } n \to \infty.$$

Интуиция

$$\frac{\sum_{j=2}^{n} e_{1,j}}{n} \to \mathbb{E}(e_{1,2}|w_1).$$

Основные результаты для предельных распределений

Для фиксированной функции ребра f.

Введём обозначения

- $\frac{\deg_{n+1} v_j}{n}$ — усреднённая степень вершины v_j в графе на $n+1$ вершине.
- $X_j = \mathbb{E}(e_{j,0}|w_j) = \mathbb{E}(f(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f(w_j, w_0)$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.

Теорема

$$\frac{\deg_{n+1} v_1}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} X_1 \text{ при } n \to \infty.$$

Лемма

Случайные величины $e_{1,j} - X_1$ для $j = 2, \ldots, n$ ортогональны.

Основные результаты для предельных распределений

Оценки распределения случайной величины X_1 по графу

- $X_j = \mathbb{E}(f(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f(w_j, w_0)$.
- $$Q_n(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{1}(\frac{\deg_n v_j}{n} \leq t)}{n+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{1}(\deg_n v_j \leq tn)}{n+1}.$$

Основные результаты для предельных распределений

Оценки распределения случайной величины X_1 по графу

- $X_j = \mathbb{E}(f(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f(w_j, w_0)$.
- $$Q_n(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{1}(\frac{\deg_n v_j}{n} \leq t)}{n+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{1}(\deg_n v_j \leq tn)}{n+1}.$$

Теорема

Пусть t является точкой непрерывности функции распределения случайной величины X_1, тогда

$$Q_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{P}(X_1 \leq t).$$

Результат теорем на частных примерах

Модель Эрдёша — Реньи $G(n, p)$

- $X_1 = \mathbb{E}(p|w_1) = p.$

Теорема

$$\frac{\deg_{n+1} v_1}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} p \text{ при } n \to \infty.$$

Результат теорем на частных примерах

Модель с билинейной функцией ребра

- $w \in [0, 1]$.
- $f(x, y) = xy$.
- $X_1 = \mathbb{E}(f(w_1, w_0)|w_1) = \mathbb{E}(w_1 w_0|w_1) = w_1 \mathbb{E} w_0 = w_1 \mathbb{E} w_1$.

Теорема

$$\frac{\deg_{n+1} v_1}{n} \xrightarrow{п.н.} w_1 \mathbb{E} w_1 \text{ при } n \to \infty.$$

Основные результаты для предельных распределений

Для функции ребра f_n, зависящей от n.

- $X_j^{(n)} = \mathbb{E}(f_n(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f_n(w_j, w_0)$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.

Основные результаты для предельных распределений

Для функции ребра f_n, зависящей от n.

- $X_j^{(n)} = \mathbb{E}(f_n(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f_n(w_j, w_0)$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.

  Предположим, что

- $nf_n(x, y) \to f(x, y)$ для любых x, y из области определения.
- Существует интегрируемая функция $g(x, y)$ такая, что $nf_n(x, y) \leq g(x, y)$.

Основные результаты для предельных распределений

Для функции ребра f_n, зависящей от n.

- $X_j^{(n)} = \mathbb{E}(f_n(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f_n(w_j, w_0)$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.
- $nf_n(x, y) \to f(x, y)$ для любых x, y из области определения.
- Существует интегрируемая функция $g(x, y)$ такая, что $nf_n(x, y) \leq g(x, y)$.
- $X_j = \mathbb{E}(f(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f(w_j, w_0) \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{n\to\infty} nX_j^{(n)}$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.

Основные результаты для предельных распределений

Для функции ребра f_n, зависящей от n.

- $X_j^{(n)} = \mathbb{E}(f_n(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f_n(w_j, w_0)$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.
- $nf_n(x, y) \to f(x, y)$ для любых x, y из области определения.
- Существует интегрируемая функция $g(x, y)$ такая, что $nf_n(x, y) \leq g(x, y)$.
- $X_j = \mathbb{E}(f(w_j, w_0)|w_j) = \mathbb{E}_{w_0} f(w_j, w_0) \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{n\to\infty} nX_j^{(n)}$, где $w_0 \sim w$, w_0 и w_j независимы.

Теорема

$$\deg_n v_1 \xrightarrow{d} P(X_1),$$

где $P(X_1)$ — пуассоновская случайная величина со случайным параметром $\lambda = X_1$.

Результат теорем на частных примерах

Модель с билинейной функцией ребра

- $w \in [0, 1]$.
- $f_n(x, y) = \frac{xy}{n}$.
- $X_1^{(n)} = \mathbb{E}(f_n(w_1, w_0)|w_1) = \mathbb{E}(\frac{f_1(w_1, w_0)}{n}|w_1) = \frac{1}{n} w_1 \mathbb{E} w_1$.
- $nX_1^{(n)} = w_1 \mathbb{E} w_1$.

Теорема

$$\deg_n v_1 \xrightarrow{d} P(w_1 \mathbb{E} w_1).$$

Результат теорем на частных примерах

Модель с билинейной функцией ребра

- $w \in [0, 1]$.
- $f_n(x, y) = \frac{xy}{n}$.
- $X_1^{(n)} = \mathbb{E}(f_n(w_1, w_0)|w_1) = \mathbb{E}(\frac{f_1(w_1,w_0)}{n}|w_1) = \frac{1}{n}w_1\mathbb{E}w_1$.
- $nX_1^{(n)} = w_1\mathbb{E}w_1$.

Теорема

$$\deg_n v_1 \xrightarrow{d} P(w_1\mathbb{E}w_1).$$

Модель Эрдёша — Реньи $G(n, p)$

- $w = \sqrt{p}$.
- $f(x, y) = \frac{xy}{n}$.

Теорема

$$\deg_n v_1 \xrightarrow{d} P(p).$$

Пороговая модель Кальдарелли

- $w \sim \exp(1)$.
- $f_n(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y > \log n, \\ 0, & x + y \leq \log n, \end{cases}$

Результат теорем на частных примерах

Пороговая модель Кальдарелли

- $w \sim \exp(1)$.
- $f_n(x,y) = \begin{cases} 1, & x+y > \log n, \\ 0, & x+y \le \log n, \end{cases}$
- $$\begin{aligned} X_1^{(n)} &= \int_0^{\infty} (\mathbb{1}(w_1 + w_0 > \log n) e^{-w_0} dw_0) \\ &= \mathbb{1}(w_1 > \log n) + \mathbb{1}(w_1 \le \log n) \int_{\log n - w_1}^{+\infty} e^{-w_0} dw_0 \\ &= \mathbb{1}(w_1 > \log n) + \mathbb{1}(w_1 \le \log n) e^{w_1 - \log n}. \end{aligned}$$

Результат теорем на частных примерах

- $nX_1^{(n)} = \begin{cases} n, & w_1 > \log n, \\ ne^{w_1 - \log n} = e^{w_1}, & w_1 \leq \log n. \end{cases}$
- $nX_1^{(n)} \to e^{w_1}$ п.н.

Результат теорем на частных примерах

- $nX_1^{(n)} = \begin{cases} n, & w_1 > \log n, \\ ne^{w_1 - \log n} = e^{w_1}, & w_1 \le \log n. \end{cases}$
- $nX_1^{(n)} \to e^{w_1}$ п.н.
- Случайная величина e^w, где $w \sim \exp(1)$, имеет плотность $q(t) = t^{-2}$ на $[1, +\infty)$.

Результат теорем на частных примерах

- $nX_1^{(n)} = \begin{cases} n, & w_1 > \log n, \\ ne^{w_1 - \log n} = e^{w_1}, & w_1 \le \log n. \end{cases}$
- $nX_1^{(n)} \to e^{w_1}$ п.н.
- Случайная величина e^w, где $w \sim \exp(1)$, имеет плотность $q(t) = t^{-2}$ на $[1, +\infty)$.

Теорема

$$\deg_n v_1 \xrightarrow{d} P(t),$$

где t — случайная величина с плотностью $q(t) = t^{-2}$ на $[1, +\infty)$.

Результат теорем на частных примерах

$X = P(t)$.
Для $k > 2$

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_1^{+\infty} e^{-t} \frac{t^k}{k!} t^{-2} dt$$

$$= \frac{1}{k!} \int_1^{\infty} e^{-t} t^{k-2} dt = \frac{\Gamma(k-1)}{k!} - \frac{\int_0^1 e^{-t} t^{k-2} dt}{k!}$$

$$= \frac{1}{k(k-1)} - \frac{\int_0^1 e^{-t} t^{k-2} dt}{k!} \sim \frac{1}{k^2}.$$

Статистические оценки

Из предельного распределения степеней вершин знаем

Теорема

$$\frac{\deg_{n+1} v_1}{n} \xrightarrow{п.н.} X_1 \text{ при } n \to \infty.$$

Из предельного распределения степеней вершин знаем

Теорема

$$\frac{\deg_{n+1} v_1}{n} \xrightarrow{п.н.} X_1 \textit{ при } n \to \infty.$$

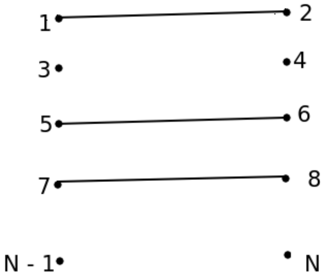
Для билинейной функции ребра

$$\mathbb{E}_x f(x, y) = f(\mathbb{E}x, y).$$

$$X_1 = f(\mathbb{E}w, w_1)$$

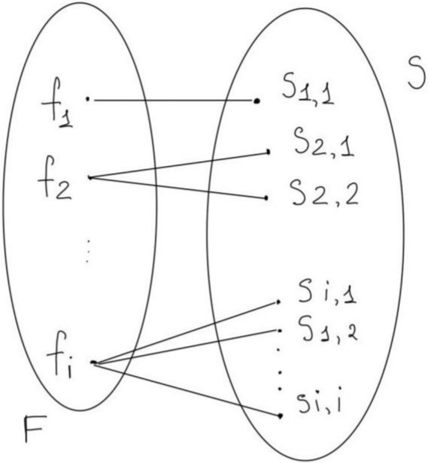
Статистические оценки

- Всего вершин $N = \frac{n(n+3)}{2}$.
- $w \in [A, B]$.
- f — симметричная билинейная функция $([A, B] \times [A, B] \to [0, 1])$.
- $Y_N = \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} e_{2i-1,2i}$.



Статистические оценки

- Всего вершин $N = \frac{n(n+3)}{2}$.
- $w \in [A, B]$.
- f — симметричная билинейная функция $([A, B] \times [A, B] \to [0, 1])$.
- $Y_N = \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} e_{2i-1,2i}$.
- $Y^{(i)} = \sum_{j=1}^{i} e_{f_i, s_{i,j}}$.



Статистические оценки

- $f(x, \cdot)$ – линейная функция для любого $x \in [A, B]$
- $h(x, y) = f^{-1}(x, y)$, то есть $f(h(x, y), y) = x$.
- $g(x) = f^{-1}(x, x)$, то есть $f(g(x), g(x)) = x$.

Теорема

Пусть функция F_w непрерывна на отрезке $[a, b] \subset [A, B]$, тогда верна сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{r\in[a,b]} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left(h\left(\frac{Y^{(i)}}{i}, g\left(\frac{2Y_N}{N}\right)\right) < r\right)}{n} - F_w(r) \right| = 0 \text{ п.н.},$$

где $N = \frac{n(n+3)}{2}$ — суммарное количество вершин в группах, соответствующих $Y^{(i)}$.

Примеры для конкретных функций f

- $w \in [0,1]$
- $f(x,y) = xy$
- $h(x,y) = \frac{x}{y}$
- $g(x) = \sqrt{x}$

Теорема

Пусть функция F_w непрерывна на отрезке $[a,b] \subset [0,1]$, тогда верна сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{r\in[a,b]} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\left(\frac{Y^{(i)}}{i}\sqrt{\frac{N}{2Y_N}} < r\right)}{n} - F_w(r) \right| = 0 \text{ п.н.},$$

где $N = \frac{n(n+3)}{2}$ — суммарное количество вершин в группах, соответствующих $Y^{(i)}$.

Важность точек непрерывности

- $f(x, y) = xy$
  - $w \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$
  - $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y^{(2k)}}{2k\mathbb{E}w} < 1\right) = \frac{3}{4}.$
- $f(x, y) = x + y$
  - $w \sim \begin{cases} 0, \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{cases}.$
  - $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y^{(2k)}}{2k} - \mathbb{E}w < \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

Дальнейшая работа

- Расширить класс функций, для которых мы умеем решать статистическую задачу
- Доказать сходимость почти наверное в теореме для сходимости $Q_n(t)$.
- Используя теоремы для предельных распределений степеней вершин что-то понять про другие характеристика графа (средняя длина пути, связность и т.п.).

Литература

Boguña M. and Pastor-Satorras R. Class of correlated random networks with hidden variables. Phys. Rev. E, 68:036112, 2003.

Caldarelli G., Capocci A., Rios P., and M.A.Muñoz Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness. Phys. Rev. Lett., 89 (25): 258702, 2002

Chung F. and Lu L. The average distances in random graphs with given expected degrees. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 99(25):15879–15882, 2002.

Stegehuis C. and Zwart B. Scale-free graphs with many edges. Electron. Commun. Probab., 28:1–11, 2023.

Заключение

Спасибо за внимание!