Энтропийный анализ распределений устойчивых процессов Леви

Хамзин Виктор Олегович

ММИ им. Леонарда Эйлера,
"Лаборатория вероятностных методов в анализе"

18 ноября 2025 г.

План доклада

1. Введение
2. Случай конечномерного пространства
3. Процесс Леви
4. Устойчивый процесс Леви
5. План доказательства верхней оценки

Введение

Определение

Пусть $(\mathcal{X}, d, P)$ – метрическое пространство с борелевской мерой, определим величины:

$$N^{mm}(\varepsilon, \delta) := \min\{n : \exists x_1, x_2 \ldots, x_n : P(\mathcal{X} \setminus \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)) < \delta\}.$$

$$H^{mm}(\varepsilon, \delta) := \ln N^{mm}(\varepsilon, \delta).$$

Величина $H^{mm}(\varepsilon, \delta)$ называется *mm*-энтропией пространства.

Введение

Определение

Пусть $(\mathcal{X}, d, P)$ – метрическое пространство с борелевской мерой, определим величины:

$$N^{mm}(\varepsilon, \delta) := \min\{n : \exists x_1, x_2 \ldots, x_n : P(\mathcal{X} \setminus \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)) < \delta\}.$$

$$H^{mm}(\varepsilon, \delta) := \ln N^{mm}(\varepsilon, \delta).$$

Величина $H^{mm}(\varepsilon, \delta)$ называется *mm*-энтропией пространства.

- Определение *mm*-энтропии, фактически, было введено К.Шенноном.
- А.М.Вершик предложил использовать *mm*-энтропию, как нетривиальный инвариант метрический пространств с мерой.

Асимптотика mm-энтропии в $\mathbb{R}^n$

Пусть P – вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$ с плотностью p. Введем множества максимальной плотности и множества уровня для плотности p следующим образом: для каждого $z > 0$ обозначим

$$M(z) := \{x : p(x) > z\},$$

$$L(z) := \{x : p(x) = z\}.$$

Теорема

Рассмотрим пространство $(\mathbb{R}^n, l_\infty, P)$. При фиксированном $\delta > 0$ положим $z_\delta = \sup\{z : P(M(z)) > 1 - \delta\}$.
Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$N^{mm}(\varepsilon, \delta) \geq \frac{|M(z_\delta)| - \frac{P(M(z_\delta)) - (1-\delta)}{z_\delta}}{(2\varepsilon)^n}$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$N^{mm}(\varepsilon, \delta) \sim \frac{|M(z_\delta)| - \frac{P(M(z_\delta)) - (1-\delta)}{z_\delta}}{(2\varepsilon)^n}.$$

Процесс Леви

Определение

Процесс $X(t)$, $t \geq 0$, называется **процессом Леви**, если

1. $X(0) = 0$ п.н.
2. $X(t)$ – **процесс с независимыми приращениями**: для всех $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ величины $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы
3. $X(t)$ – **процесс со стационарными приращениями**: для любых $s < t$ верно $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t-s}$
4. $X(t)$ **непрерывен по вероятности**: Для любых $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$ верно $\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0$

Определение

Процесс $X(t)$, $t \geq 0$, называется **процессом Леви**, если

1. $X(0) = 0$ п.н.
2. $X(t)$ – **процесс с независимыми приращениями**: для всех $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ величины $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы
3. $X(t)$ – **процесс со стационарными приращениями**: для любых $s < t$ верно $X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t-s}$
4. $X(t)$ **непрерывен по вероятности**: Для любых $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$ верно $\lim_{h \to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0$

Естественно, пространство траекторий снабдим метрикой Скорохода.

Пространство Скорохода

Определение

Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ относится к классу **càdlàg**, если она непрерывна справа и имеет все левые пределы, т.е. для любой точки $t \in [0,1]$

$$1) \lim_{s \to t+} f(s) = f(t),$$

$$2) \exists \lim_{s \to t-} f(s).$$

Такие функции образуют пространство $\mathbb{D}[0,1]$, называемое **пространством Скорохода**.

Пространство Скорохода

Определение

Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ относится к классу **càdlàg**, если она непрерывна справа и имеет все левые пределы, т.е. для любой точки $t \in [0,1]$

$$1) \lim_{s \to t+} f(s) = f(t),$$

$$2) \exists \lim_{s \to t-} f(s).$$

Такие функции образуют пространство $\mathbb{D}[0,1]$, называемое **пространством Скорохода**.

J-расстояние Скорохода $\rho_{\mathbb{D},J}$ между двумя функциями càdlàg f,g определяется как

$$\rho_{\mathbb{D},J}(f,g) := \inf_{u \in U_J} \Big[\sup_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(u(t))| + \sup_{0 \le t \le 1} |t - u(t)| \Big],$$

где U_J – класс всех возрастающих непрерывных отображений из $[0,1]$ на себя.

Устойчивый процесс Леви

Определение

Процесс Леви $X(t)$ называется α-**устойчивым**, если величина $X(1)$ является α-устойчивой случайной величиной.

Устойчивый процесс Леви

Определение

Процесс Леви $X(t)$ называется α-**устойчивым**, если величина $X(1)$ является α-устойчивой случайной величиной.

Теорема

Пусть $X(t), t \in [0,1]$ – α-устойчивый процесс Леви с параметром устойчивости $0 < \alpha < 1$.
Для пространства его траекторий, снабженного J-расстоянием Скорохода, при фиксированном $\delta > 0$ и достаточно малом ε верно

$$B_-(\alpha, \delta) |\log \varepsilon| \varepsilon^{-\alpha} \le H^{mm}(\varepsilon, \delta) \le B_+(\alpha, \delta) |\log \varepsilon|^{1+\alpha} \varepsilon^{-\alpha}.$$

План доказательства верхней оценки

План доказательства верхней оценки

Будем считать, что данному процессу соответствует триплет Леви $(a, 0, \nu)$, где

$$\nu(dx) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \frac{d_1}{x^{1+\alpha}} + \mathbb{1}_{\{x<0\}} \frac{d_2}{|x|^{1+\alpha}} dx.$$

План доказательства верхней оценки

Будем считать, что данному процессу соответствует триплет Леви $(a, 0, \nu)$, где

$$\nu(dx) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \frac{d_1}{x^{1+\alpha}} + \mathbb{1}_{\{x<0\}} \frac{d_2}{|x|^{1+\alpha}} dx.$$

Процесс с данным триплетом имеет представление

$$X(t) = at + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|>1\}} u N(du, ds) + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u \widetilde{N}(du, ds),$$

где $\mathcal{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, N – пуассоновская случайная мера на $\mathcal{R}$ с мерой интенсивности $\mu(du, ds) = \nu(du)ds$, $\widetilde{N}$ – соответствующая N центрированная пуассоновская случайная мера.

Поскольку параметр $\alpha \in (0,1)$, функция $f := \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u$ удовлетворяет условию $\int_{\mathcal{R}} |f| d\mu < \infty$, поэтому мы можем вынести из интеграла по центрированной пуассоновской мере $\widetilde{N}$ линейный член:

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u \widetilde{N}(du, ds) = \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u N(du, ds) - t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u \, \nu(du).$$

Поскольку параметр $\alpha \in (0,1)$, функция $f := \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u$ удовлетворяет условию $\int_{\mathcal{R}} |f| d\mu < \infty$, поэтому мы можем вынести из интеграла по центрированной пуассоновской мере $\widetilde{N}$ линейный член:

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u \widetilde{N}(du, ds) = \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u N(du, ds) - t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u \, \nu(du).$$

Таким образом, процесс $X(t)$ имеет представление

$$X(t) = \left(a - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u \, \nu(du)\right) t + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} u N(du, ds). \tag{1}$$

Для краткости записи обозначим за

$$a' := a - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|u|<1\}} u \, \nu(du),$$

тем самым

$$X(t) = a' t + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} u N(du, ds). \tag{2}$$

План доказательства верхней оценки

Разобьем процесс $X(t)$ на две части:

$$X(t) = X_\ell(t) + X^\ell(t),$$

где

$$X^\ell(t) := a' t + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{|u| > \ell} u N(du, ds), \tag{3}$$

$$X_\ell(t) := \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{|u| \le \ell} u N(du, ds). \tag{4}$$

Разобьем процесс $X(t)$ на две части:

$$X(t) = X_\ell(t) + X^\ell(t),$$

где

$$X^\ell(t) := a't + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{|u| > \ell} u N(du, ds), \tag{3}$$

$$X_\ell(t) := \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{|u| \le \ell} u N(du, ds). \tag{4}$$

Обозначение

Для функции f и числа $a > 0$ обозначим модуль непрерывности за

$$\omega(f, a) := \sup_{|x-y| \le a} |f(x) - f(y)|.$$

Разобьем процесс $X(t)$ на две части:

$$X(t) = X_\ell(t) + X^\ell(t),$$

где

$$X^\ell(t) := a't + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{|u| > \ell} u N(du, ds), \tag{3}$$

$$X_\ell(t) := \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{|u| \le \ell} u N(du, ds). \tag{4}$$

Обозначение

Для функции f и числа $a > 0$ обозначим модуль непрерывности за

$$\omega(f, a) := \sup_{|x-y| \le a} |f(x) - f(y)|.$$

Лемма

Пусть $x_1, y_1, x_2 \in \mathbb{D}$, $y_2 \in \mathbb{C}$, тогда

$$\rho_{\mathbb{D},J}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \le \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1) + ||x_2 - y_2||_\infty + \omega(y_2, \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1)).$$

План доказательства верхней оценки

Доказательство верхней оценки опирается на 3 основные леммы:

Лемма (Общая)

Пусть $x_1, y_1, x_2 \in \mathbb{D}$, $y_2 \in \mathbb{C}$, тогда

$$\rho_{\mathbb{D},J}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1) + ||x_2 - y_2||_\infty + \omega(y_2, \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1)).$$

План доказательства верхней оценки

Доказательство верхней оценки опирается на 3 основные леммы:

Лемма (Общая)

Пусть $x_1, y_1, x_2 \in \mathbb{D}$, $y_2 \in \mathbb{C}$, тогда

$$\rho_{\mathbb{D},J}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \le \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1) + ||x_2 - y_2||_\infty + \omega(y_2, \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1)).$$

Лемма (О больших скачках)

Для произвольного $B > 0$ существует такая конечная сеть Y^ℓ объема не более $\exp(K_1 \ell^{-\alpha} |\log \ell|)$, что

$$\mathbb{P}\Big(\min_{y^\ell \in Y^\ell} \rho_{\mathbb{D},J}(X^\ell, y^\ell) > \ell^B\Big) \le \frac{\delta}{3}.$$

План доказательства верхней оценки

Доказательство верхней оценки опирается на 3 основные леммы:

Лемма (Общая)

Пусть $x_1, y_1, x_2 \in \mathbb{D}$, $y_2 \in \mathbb{C}$, тогда

$$\rho_{\mathbb{D},J}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \le \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1) + ||x_2 - y_2||_\infty + \omega(y_2, \rho_{\mathbb{D},J}(x_1, y_1)).$$

Лемма (О больших скачках)

Для произвольного $B > 0$ существует такая конечная сеть Y^ℓ объема не более $\exp(K_1 \ell^{-\alpha} |\log \ell|)$, что

$$\mathbb{P}\big(\min_{y^\ell \in Y^\ell} \rho_{\mathbb{D},J}(X^\ell, y^\ell) > \ell^B\big) \le \frac{\delta}{3}.$$

Лемма (О малых скачках)

Существует такая конечная сеть непрерывных траекторий Y_ℓ объема не более $\exp(K_2 \ell^{-\alpha})$ и такие случайные элементы $y_\ell \in Y_\ell$, что

$$\mathbb{P}\big(||X_\ell - y_\ell||_\infty > C\ell |\log \ell|\big) \le \frac{\delta}{3},$$

и

$$\lim_{\ell \to 0} \mathbb{P}(\omega(y_\ell, \ell^B) > \ell |log \ell|) = 0.$$

План доказательства верхней оценки

Из трех основных лемм мы получаем, что с большой вероятностью верно

$$\rho_{\mathbb{D},J}(X^\ell + X_\ell, y^\ell + y_\ell) \leq I^B + C\ell|\log \ell| + \ell|\log \ell| \leq \tilde{K}\ell|\log \ell|,$$

причем размер сети $(y^l + y_l)$ не больше

$$\exp(K_1\ell^{-\alpha}|\log \ell| + K_2\ell^{-\alpha}|) \leq \exp(B_+ I^{-\alpha}|\log \ell|).$$

Итоговая оценка получается при выборе такого ℓ, что $\ell|\log \ell| = \varepsilon$, что и дает дополнительный множитель $|\log \ell|^\alpha$.

Лемма (О больших скачках)

Для произвольного $B > 0$ существует такая конечная сеть Y^ℓ объема не более $\exp(K_1 \ell^{-\alpha} |\log \ell|)$, что

$$\mathbb{P}\left(\min_{y^\ell \in Y^\ell} \rho_{\mathbb{D},J}(X^\ell, y^\ell) > \ell^B\right) \leq \frac{\delta}{3}.$$

Процесс $X^\ell(t)$ имеет вид

$$X^\ell(t) = a' t + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \mathbb{1}_{|u| > \ell} u N(du, ds).$$

Поскольку $\int_{|u|>\ell} \nu(du) < \infty$, процесс $X^\ell(t)$ имеет конечную интенсивность, поэтому он является комбинацией сложного пуассоновского процесса и линейной части и имеет представление

$$X^l(t) = a' t + \sum_{i=1}^{K_l(t)} V_l^i, \tag{5}$$

где $K_l(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью, равной $G(l)$, $\{V_l^i\}_{i=1}^\infty$ – независимые случайные величины с распределением $\mathcal{P}_l(du) = \frac{\mathbb{1}_{|u|>l} \nu(du)}{G(l)}$.

Лемма (О больших скачках)

Для произвольного $B > 0$ существует такая конечная сеть Y^ℓ объема не более $\exp(K_1 \ell^{-\alpha} |\log \ell|)$, что

$$\mathbb{P}\left(\min_{y^\ell \in Y^\ell} \rho_{\mathbb{D},J}(X^\ell, y^\ell) > \ell^B\right) \le \frac{\delta}{3}.$$

Процесс $X^\ell(t)$ имеет вид

$$X^\ell(t) = a' t + \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\{s \le t\}} \mathbb{1}_{|u|>\ell} u N(du, ds).$$

Поскольку $\int_{|u|>\ell} \nu(du) < \infty$, процесс $X^\ell(t)$ имеет конечную интенсивность, поэтому он является комбинацией сложного пуассоновского процесса и линейной части и имеет представление

$$X^l(t) = a' t + \sum_{i=1}^{K_l(t)} V_l^i, \tag{5}$$

где $K_l(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью, равной $G(l)$, $\{V_l^i\}_{i=1}^\infty$ – независимые случайные величины с распределением $\mathcal{P}_l(du) = \frac{\mathbb{1}_{|u|>l}\nu(du)}{G(l)}$.
При этом среднее число скачков равно $\int_{|u|>\ell} \nu(du) = \tilde{c} \int_{|u|>\ell} \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} = \tilde{c}' \ell^{-\alpha}$

Стоит отметить

Теорема (Комлош-Майор-Тушнади, 1975)

Пусть $X = \{X_j\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечный экспоненциальный момент, т.е. при некотором $z > 0$ $\mathbb{E}\exp\{z|X_j|\} < \infty$. Тогда существуют такие положительные постоянные C_1, C_2, зависящие от общего распределения F величин X_j, что для любого n можно построить на некотором вероятностном пространстве последовательность $\tilde{X} = \{\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n\}$, равнораспределенную с последовательностью $\{X_1, \ldots, X_n\}$, и последовательность независимых гауссовских величин $\{\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_n\}$, имеющих те же математические ожидания и диспресии, таким образом, чтобы для разности $\Delta_n(\tilde{X}, \tilde{Y})$, определенной как

$$\Delta_n(\tilde{X}, \tilde{Y}) := \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{j=1}^{k} \tilde{X}_j - \sum_{j=1}^{k} \tilde{Y}_j \right|,$$

было выполнено

$$\mathbb{E}\exp\{C_1 \Delta_n(\tilde{X}, \tilde{Y})\} \le 1 + C_2 n^{1/2}.$$

Лемма

При подходящем выборе винеровского процесса $W(t)$ и констант C_1, K_1 верно

$$\lim_{l \to 0} \mathbb{P}\Big(\sup_{0 \le t \le 1} \big| X_\ell(t) - \big(\sigma(\ell) W(t) + C_1 \cdot \ell^{1-\alpha} \cdot t\big) \big| > K_1 \cdot \ell |\log \ell| \Big) = 0,$$

где $\sigma^2(\ell) = \mathbb{D}(X_\ell)$.

Спасибо за внимание!