

Пространственно-временная структура простого симметричного ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}$

Гусаров Александр

МГУ имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Яровая Елена Борисовна

18.11.2024

Содержание

- 1 Описание модели
- 2 Функция Грина
- 3 Предельная теорема для численности частиц
- 4 Однородная среда
- 5 Литература

Описание модели в неоднородной среде

Будем рассматривать однородное по времени ветвящиеся случайное блуждание (ВСБ) с непрерывным временем, которое задаётся генератором простого симметричного случайного блуждания и генератором ветвления в нуле. То есть блуждание задаётся оператором $\kappa\Delta$, $\kappa > 0$, который действует в пространстве $l^2(Z^d)$ следующим образом

$$(\kappa\Delta g)(x) = \kappa \sum_{x': |x'-x|=1} (g(x') - g(x)).$$

Ветвление в нуле задаётся инфинитезимальной функцией $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $f(1) = 0$. Будем считать, что у инфинитезимальной функции существуют первые две производные в единице $\beta = f'(1) < \infty$ и $\beta_2 = f''(1) < \infty$.

Описание модели в неоднородной среде

Будем предполагать, что в начальный момент времени на решетке есть только одна частица в точке x .

Как показано, например, в монографии Яровой Е. Б. (2025), математическое ожидание численности частиц $m_1(t, x, y)$ в точке y в момент времени t удовлетворяет уравнению

$$\frac{m_1(t, x, y)}{\partial t} = \mathcal{H}m_1(t, x, y),$$

с начальным условием $m_1(0, x, y) = \delta_0(x - y)$, где $\mathcal{H} = \kappa\Delta + \beta\delta_0\delta_0^T$ и δ_0 — дельта-символ Кронекера.

Нас будут интересовать поведение численности частиц в точке при $t \rightarrow \infty$.

Функция Грина

Переходные вероятности удовлетворяют уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = \kappa \Delta p(t, x, y), \quad p(0, x, y) = \delta_0(x - y),$$

где δ — дельта-символ Кронекера.

Функцией Грина будем называть преобразование Лапласа переходных вероятностей

$$G_\lambda(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt.$$

Как показано, например, в монографии Яровой Е. Б. (2025), для функции Грина верно альтернативное представление

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta(x-y)}}{\lambda + 2\kappa(1 - \cos \theta)} d\theta = G_\lambda(x - y, 0) = G_\lambda(x - y).$$

Надкритический процесс

Будем говорить, что ВСБ надкритическое, если у оператора H существует положительное собственное значение λ_0 , что означает, что существует экспоненциальный рост частиц. Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{\beta_{cr}} = G_0(0) = \int_0^{+\infty} p(t, 0, 0) dt.$$

Как показано, например, в монографии Яровой Е. Б. (2025), для всех $\beta > \beta_{cr} = 0$ ВСБ надкритическое, оператор $\mathcal{H}$ имеет единственное старшее собственное значение λ_0 , которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\beta} = G_\lambda(0).$$

Позже мы увидим, что $\lambda_0 = \sqrt{\beta^2 + 4\kappa^2} - 2\kappa$.

Функция Грина

Теорема. (Молчанов С.А., Яровая Е.Б., 2012)

Для каждого фиксированного $\lambda > 0$ функция Грина $G_\lambda(y)$ при $|y| \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое представление вида

$$G_\lambda(y) = \frac{e^{-|y|r_\lambda(y/|y|)}}{|y|^{\frac{d-1}{2}}} R_\lambda(y/|y|) (1 + o(1)),$$

где функции r_λ и R_λ определяются в точках $v = (v_1, v_2, \dots, v_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$ и выражаются следующим образом: $r_\lambda(v) = \sum_{j=1}^d v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{s_0}$,

$R_\lambda(v) = \frac{d(2\pi)^{\frac{1-d}{2}}}{2\pi} \left(\prod_{j=1}^d (s_0^2 + v_j^2) \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=1}^d \frac{v_j^4}{s_0^4(s_0^2 + v_j^2)} \right)^{-\frac{1}{4}}$, где $s_0 > 0$ является

решением уравнения $\sum_{j=1}^d \sqrt{1 + \left(\frac{v_j}{s_0} \right)^2} = \frac{\lambda}{2\pi} + d$.

Функция Грина

Рассмотрим случай $d = 1$. Тогда интересующие нас функции выражаются следующим образом:

$$r_\lambda(v) = \operatorname{arcsch} \frac{1}{s_0},$$
$$R_\lambda(v) = \frac{1}{2\pi} ((s_0^2 + 1))^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{s_0^4(s_0^2 + 1)} \right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{s_0}{2\pi}.$$

Здесь $s_0 > 0$ является решением уравнения

$$\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} = \frac{\lambda}{2\pi} + 1.$$

Функция Грина

Решая последнее уравнение, получаем

$$s_0 = \frac{2\kappa}{\sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}};$$

Подставляя s_0 и воспользовавшись равенством $\operatorname{arcsch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, получаем

$$r_\lambda(v) = \operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}}{2\kappa} = \ln \left(\frac{\lambda + 2\kappa + \sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}}{2\kappa} \right);$$

$$R_\lambda(v) = \frac{2\kappa}{2\kappa \sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}}.$$

Функция Грина

Подставив s_0 , r_λ и R_λ в

$$G_\lambda(y) = \frac{e^{-|y|r_\lambda(y/|y|)}}{|y|^{\frac{d-1}{2}}} R_\lambda(y/|y|) (1 + o(1)),$$

для $d = 1$ получаем

$$G_\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}} \left(\frac{\lambda + 2\kappa + \sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}}{2\kappa} \right)^{-|y|} (1 + o(1)).$$

Следствие.

В размерности $d = 1$ в предыдущем представлении $o(1) \equiv 0$.

Функция Грина

Доказательство

В размерности $d = 1$ функция Грина может быть найдена явно. Воспользуемся следующим представлением:

$$G_\lambda(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(y\theta)}{\lambda + 2\kappa - 2\kappa \cos \theta} d\theta.$$

В работе Филичкиной и Яровой (2024) данный интеграл найден явно

$$\begin{aligned} G_\lambda(y) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}} \left(\frac{\lambda + 2\kappa - \sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}}{2\kappa} \right)^{|y|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}} \left(\frac{\lambda + 2\kappa + \sqrt{\lambda(\lambda + 4\kappa)}}{2\kappa} \right)^{-|y|}. \end{aligned}$$

Предельная теорема для численности частиц

Теорема

Пусть $\beta > 0$, $\varkappa > 0$. Тогда для численности частиц $\mu_{t,x}(y)$ в фиксированной точке $y \in \mathbb{Z}$ при условии $\mu_{0,x}(y) = \delta(y - x)$ верно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}} E \left(e^{-\lambda_0 t} \mu_{t,x}(y) - \lambda_0 G_{\lambda_0}(y) \xi_x \right)^2 = 0,$$

где $\lambda_0 = \sqrt{\beta^2 + 4\varkappa^2} - 2\varkappa$ — старшее собственное значение оператора H , ξ_x — невырожденная случайная величина, у которой

$$E \xi_x = \lambda_0 G_{\lambda_0}(x), \quad E \xi_x^2 = \frac{\beta_2 (\lambda_0 G_{\lambda_0}(0))^2}{(1 - \beta G_{2\lambda_0}(0))} G_{2\lambda_0}(x).$$

Предельная теорема для численности частиц

Доказательство

Так как у нас существует простое старшее собственное значение λ_0 при $\beta > 0$, существуют первые две производные инфинитезимальной функции в единице, а источник ветвления только в нуле, то можно воспользоваться результатом статьи Смородиной Н.В. и Яровой Е.Б (2023), где показывается соответствующая сходимость в среднеквадратическом $e^{\lambda_0 t} \mu_{t,x}(y)$ к произведению некоторого предельного мартингала и собственную функцию, отвечающую старшему собственному значению λ_0 оператора H , в точке y . В монографии Яровой Е.Б. (2025) показано, что собственная функция в точке y равняется $\lambda_0 G_{\lambda_0}(y)$. Кроме того, в той же монографии показана сходимость моментов $e^{\lambda_0 t} \mu_{t,x}(y)$ в случае существования соответствующей производно инфинитезимальной функции в единице. Результат для первых двух моментов был приведён на предыдущем слайде.

Предельная теорема для численности частиц

Заметим, что в размерности $d = 1$ функция Грина может быть найдена явно, поэтому получаем

$$\lambda_0 G_{\lambda_0}(y) = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\kappa^2} - 2\kappa}{\beta} \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\kappa^2}}{2\kappa} \right)^{-|y|},$$

$$E_{\xi_x} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\kappa^2} - 2\kappa}{\beta} \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\kappa^2}}{2\kappa} \right)^{-|x|},$$

$$E_{\xi_x^2} = \frac{2\beta_2 \lambda_0^2 \sqrt{\lambda_0(\lambda_0 + 2\kappa)}}{\beta^2(2\sqrt{\lambda_0(\lambda_0 + 2\kappa)} - \beta)} \left(\frac{\lambda_0 + \kappa + \sqrt{\lambda_0(\lambda_0 + 2\kappa)}}{\kappa} \right)^{-|x|}.$$

Предельная теорема для численности частиц

Теорема 1

Если $\beta > 0$, $\varkappa > 0$, $0 \leq \alpha < 1$ и функция $y(t)$, принимающая значения в $\mathbb{Z}$, такова, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y(t)|}{t^\alpha} = c > 0$, то для численности частиц $\mu_{t,x}(y)$ в точке $y = y(t) \in \mathbb{Z}$ при условии $\mu_{0,x}(y) = \delta(y - x)$ верно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}} E \left(\frac{e^{-\lambda_0 t} \mu_{t,x}(y(t))}{\lambda_0 G_{\lambda_0}(ct^\alpha)} - \xi_x \right)^2 = 0,$$

где $\lambda_0(\beta) = \sqrt{\beta^2 + 4\varkappa^2} - 2\varkappa$ и ξ_x — невырожденная случайная величина, у которой

$$E\xi_x = \lambda_0 G_{\lambda_0}(x), \quad E\xi_x^2 = \frac{\beta_2 (\lambda_0 G_{\lambda_0}(0))^2}{(1 - \beta G_{2\lambda_0}(0))} G_{2\lambda_0}(x).$$

Предельная теорема для численности частиц

Доказательство

В предыдущей теореме поделим на $\lambda_0 G_{\lambda_0}(y)$ и заменим y на $y(t)$. Далее проверим, что остаточные члены в доказательстве теоремы 4 в статье Н.В. Смородины и Е.Б. Яровой (2023) стремятся к нулю экспоненциально с показателем $-c_0 t$ при $t \rightarrow \infty$, где c_0 — некоторая положительная константа. Из явного вида функции Грина видно, что $G_{\lambda_0}(ct^\alpha)$ ведёт себя как $e^{-c_1 t^\alpha}$ при $t \rightarrow \infty$, где c_1 — некоторая положительная константа. Значит при делении остаточных членов на $G_{\lambda_0}(ct^\alpha)$, они будут сходиться к нулю экспоненциально с показателем $-c_0/1 t^{1-\alpha}$ при $t \rightarrow \infty$. Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y_t|}{ct^\alpha} = 1$, получаем, что $\frac{e^{-\lambda_0 t} \mu_{t,x}(y(t))}{\lambda_0 G_{\lambda_0}(ct^\alpha)}$ сходится в среднеквадратичном к ξ_x .

Описание модели в однородной среде

Теперь рассмотрим ВСБ в однородной ветвящейся среде, в основе которого лежит простое симметричное случайное блуждание, а источники ветвления в каждой точке имеют равную интенсивность $\beta > 0$. Как показано, например, в статье Д.М. Балашовой, Е.Б. Яровой (2022) таком ВСБ математическое ожидание численности частиц $m_1(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} = \kappa \Delta m_1 + \beta m_1,$$

с начальным условием $m_1(0, x, y) = \delta_x(y)$, где $\delta_x(y)$ — дельта-символ Кронекера. Решение данного уравнения находится явно

$$m_1(t, x, y) = e^{\beta t} p(t, x, y)$$

и проверяется непосредственной подстановкой $m_1(t, x, y)$.

Теорема. (Молчанов С.А., Яровая Е.Б., 2012)

Для переходной вероятности случайного блуждания справедливо представление

$$p_d(t, x, y) = e^{H_d(2\kappa t, y-x)} h_d(2\kappa t, y-x),$$

где $H_d(t, z) = \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{t^2 + z_j^2} - t - z_j \operatorname{arcsch} \frac{z_j}{t} \right)$,

$$h_d(t, z) \leq \min \left\{ 1, \prod_{j=1}^d \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2 + z_j^2)^{1/4}} \right\}.$$

Функция $h_d(t, z)$ имеет вид $h_d(t, z) = h_d^*(t, z)(1 + \nu_d(t, z))$; где

$h_d^*(t, z) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} (\prod_{j=1}^d (t^2 + z_j^2))^{1/4}}$ и $\nu_d(t, z) \rightarrow 0$ при выполнении для каждой из координат z_j вектора $z = (z_1, \dots, z_d)$ соотношения $t^2 + z_j^2 \rightarrow \infty$. При этом $0 < 1 + \eta_d(t, z) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^d$, $z \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$.

Однородная среда

Рассмотрим размерность $d = 1$. Тогда

$$H_1(t, z) = H(t, z) = \sqrt{t^2 + z^2} - t - z \operatorname{arcsch} \frac{z}{t} = t \left(\sqrt{1 + \left(\frac{z}{t}\right)^2} - 1 - \frac{z}{t} \operatorname{arcsch} \frac{z}{t} \right),$$

$$\begin{aligned} h_1(t, z) = h(t, z) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (t^2 + z^2)^{1/4}} (1 + \nu_d(t, z)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z} \left(1 + \left(\frac{z}{t}\right)^2\right)^{1/4}} (1 + \nu_1(t, z)), \end{aligned}$$

где $\nu_1(t, z) \rightarrow 0$ при $t^2 + z^2 \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} p_1(t, x, y) &= p(t, x, y) = e^{H_d(2\kappa t, y-x)} h_d(2\kappa t, y-x) = \\ &= \frac{e^{2\kappa t \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y-x}{2\kappa t} \right)^2} - 1 - \frac{y-x}{2\kappa t} \operatorname{arcsch} \frac{y-x}{2\kappa t} \right)}}{\sqrt{4\pi\kappa t} \left(1 + \left(\frac{y-x}{2\kappa t} \right)^2 \right)^{1/4}} (1 + \nu_1(t, y-x)) = p(t, 0, y-x) = p(t, x-y). \end{aligned}$$

Однородная среда

Воспользуемся формулами Тейлора:

$$\operatorname{arcsch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{x^{2k+1}}{2^{2k}},$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \frac{(2k)!}{k!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Получаем

$$p(t, x-y) = \frac{e^{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{(y-x)^{2k+2}}{(4\kappa t)^{2k+1}}}}{\sqrt{4\pi\kappa t} \left(1 + \left(\frac{y-x}{2\kappa t}\right)^2\right)^{1/4}} (1 + \nu_1(t, y-x)).$$

Теорема 2

Если $\beta > 0$, $\varkappa > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ и функция $y(t)$, принимающая значения в $\mathbb{Z}$, такова, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y(t) - x|}{t^\alpha} = c > 0$, то для математического численности частиц $m(t, x, y)$ в точке $y = y(t) \in \mathbb{Z}$ при начальном условии $m(0, x, y) = \delta(y - x)$ при $t \rightarrow +\infty$ верно:

при $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$

$$m(t, x, y) \sim \frac{e^{\beta t}}{\sqrt{4\pi\varkappa t}};$$

Однородная среда

для всех $n \in \mathbb{N}$, при $\frac{2n-1}{2n} \leq \alpha < \frac{2n+1}{2n+2}$

$$m(t, x, y) \sim \frac{e^{\beta t + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{c^{2k+2}}{(4\kappa)^{2k+1}} t^{(2k+2)\alpha - (2k+1)}}}{\sqrt{4\pi\kappa t}};$$

при $\alpha = 1$

$$m(t, x, y) \sim \frac{e^{t(\beta + \sqrt{4\kappa^2 + c^2} - 2\kappa - c \operatorname{arcsch} \frac{c}{2\kappa})}}{\sqrt{2\pi t} (4\kappa^2 + c^2)^{1/4}};$$

1. С. А. Молчанов, Е. Б. Яровая “Предельные теоремы для функции Грина решетчатого лапласиана при больших отклонениях случайного блуждания” // Изв. РАН. Сер. матем., 2012, т. 76, вып. 6, с. 265–268.
2. Д. М. Балашова, Е. Б. Яровая “Структура популяции частиц для ветвящегося случайного блуждания в однородной среде”, Труды МИАН, 2022, т. 316, с. 64–78
3. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая “Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий” // Теория вероятн. и ее примен., 2023, т. 68, вып. 4, с. 779–795.
4. E. Filichkina, E. Yarovaya “Branching random walks on $\mathbb{Z}$ with one particle generation center and symmetrically located absorbing sources” // Methodol. Comput. Appl. Probab., 2024, т. 26, вып. 3, 28.
5. Е. Б. Яровая “Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде” // М.: МЦНМО, 2025.