Динамическое построение GFF на графе

Даниил Панов

Санкт-Петербургский государственный университет

9-ая Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике
18 ноября 2025

Мотивация

В статье [HN] Håkan Hedenmalm и Pekka J. Nieminen динамически построили гауссовское свободное поле на расширяющихся областях в $\mathbb{C}$ из белого шума при помощи вариационной формулы Адамара.

[HN] Haakan Hedenmalm, Pekka J. Nieminen, *The Gaussian free field and Hadamard's variational formula*, Probab. Theory Related Fields 159 (2014), 61-73

Непрерывный контекст: определения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ - ограниченная область с гладкой границей.

Определим функцию Грина G_Ω как решение системы ($w \in \Omega$):

$$\begin{cases} \Delta_z G_\Omega(z, w) = -\delta_w(z), \ z \in \Omega, \\ G_\Omega(z, w) = 0, \ z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Введем также ядро Пуассона P_Ω:

$$P_\Omega(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial n(\zeta)} G_\Omega(z, \zeta), \ z \in \Omega, \zeta \in \partial\Omega.$$

Будем считать, что $P_\Omega(\zeta, z) = 0$ при $\zeta \in \partial\Omega, z \in \mathbb{C} \setminus cl(\Omega)$.

Непрерывный контекст: определения

Будем рассматривать пространство Соболева $H_0^1(\Omega)(=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ со скалярным произведением Дирихле:

$$\langle f, g\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \nabla f, \nabla g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \; dA.$$

Через $H^{-1}(\Omega)$ будем обозначать двойственное к $H_0^1(\Omega)$ (двойственность индуцирована скалярным произведением в $L^2(\Omega)$).

Непрерывный контекст: формула Адамара

Рассмотрим семейство $\{\Omega_t\}_{0<t\leq 1}$ расширяющихся ограниченных областей с гладкой границей в $\mathbb{C}$, такое что:

(1) $cl(\Omega_t)$ лежит в $\Omega_{t'}$ при $t < t'$;

(2) границы областей 'гладко' зависят от t;

(3) пересечение всех областей имеет меру 0.

Функцию Грина и ядро Пуассона области Ω_t будем обозначать через G_t и P_t соответственно. Тогда вариационная формула Адамара выглядит как:

$$G_t(z,w) = \int_0^t \int_{\partial\Omega_\tau} P_\tau(\zeta,z)P_\tau(\zeta,w)\rho(\zeta)\ ds(\zeta)\ d\tau,$$

где $\rho(\zeta)$ - это скорость, с которой граница движется в точке ζ вдоль направления единичной внешней нормали. На самом деле:

$$\int_{\Omega_t} f\ dA = \int_0^t \int_{\partial\Omega_\tau} f\rho\ ds\ d\tau$$

Непрерывный контекст: оператор Адамара

Для п.в. точек $\zeta \in \Omega_1$ определим $\tau(\zeta)$ - такое единственное число t, что $\zeta \in \partial\Omega_t$. Введем оператор Адамара Q_t:

$$Q_t f(z) = \int_{\Omega_t} P_{\tau(\zeta)}(\zeta, z) f(\zeta)\, dA(\zeta).$$

Также введем сопряженный оператор Адамара Q_t^*:

$$Q_t^* f(\zeta) = \mathbb{1}\{\zeta \in \Omega_t\} \int_{\Omega_t} P_{\tau(\zeta)}(\zeta, z) f(z)\, dA(z).$$

Обозначим через Δ_t оператор Лапласа области Ω_t. Тогда верно:

Предложение

Операторы $(-\Delta_t)^{\frac{1}{2}} Q_t$ и $Q_t^*(-\Delta_t)^{\frac{1}{2}}$ унитарны на $L^2(\Omega_t)$. В частности, операторы $Q_t : L^2(\Omega_t) \to H_0^1(\Omega_t)$ и $Q_t^* : H^{-1}(\Omega_t) \to L^2(\Omega_t)$ – изометрические изоморфизмы.

Непрерывный контекст: случайные поля

Гауссовский белый шум Φ_t на Ω_t формально определяется как

$$\Phi_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k,$$

где $\{\xi_k\}$ - $i.i.d. \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\{\phi_k\}$ – ортонормированный базис $L^2(\Omega_t)$.

Гауссовское свободное поле Ψ_t на Ω_t определяется как:

$$\Psi_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \psi_k,$$

где $\{\xi_k\}$ - $i.i.d. \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\{\psi_k\}$ – ортонормированный базис $H_0^1(\Omega_t)$.

Непрерывный контекст: основной результат

Теорема

Пусть Φ – белый шум на Ω_1. Для $0 < t \leq 1$ определим случайное поле $\Psi_t = Q_t \Phi$. Тогда Ψ_t - это гауссовское свободное поле на Ω_t. Более того, процесс Ψ_t $(0 < t \leq 1)$ имеет независимые приращения.

Дискретный контекст

Мы рассматриваем бесконечный связный граф Γ (локально конечный). Будем считать, что если $e = (x, y) \in E(\Gamma)$, то и $(y, x) \in E(\Gamma)$ (и обозначается $(-e)$). Также считаем, что на ребрах Γ задан положительный симметричный вес c.

Расширяющиеся подграфы

Введем семейство непустых конечных подграфов $\{\gamma_t\}_{t\geq 0}$:

(1) Для $t_1 \neq t_2$: $V(\gamma_{t_1}) \cap V(\gamma_{t_2}) = \emptyset$.

(2) Соседями в Γ вершин $V(\gamma_0)$ могут быть только вершины из $V(\gamma_0)$ и $V(\gamma_1)$.

(3) При $t \geq 1$: соседями в Γ вершин $V(\gamma_t)$ могут быть только вершины из $V(\gamma_{t-1})$, $V(\gamma_t)$ и $V(\gamma_{t+1})$.

(4) $E(\gamma_t)$ – это все ребра в Γ между вершинами из $V(\gamma_t)$.

(5) $\bigcup\limits_{t\geq 0} V(\gamma_t) = V$.

Аналогом областей $\{\Omega_t\}$ будет семейство подграфов $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$:

$$\Gamma_t = \bigcup_{0\leq s\leq t} \gamma_s.$$

Обозначим через E_t множество всех ребер в Γ, у которых хотя бы один из концов лежит в $V(\Gamma_t)$.

Гильбертовы пространства

С графом Γ ассоциируются следующие гильбертовы пространства:

Определение

$\ell^2(\Gamma_t) = \{f : V(\Gamma) \to \mathbb{R}, supp(f) \subset V(\Gamma_t)\}$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle_{\ell^2(\Gamma_t)} = \sum_{x \in V(\Gamma_t)} f(x)g(x)$.

Определение

$\ell^2_-(E_t) = \{\phi : E(\Gamma) \to \mathbb{R}, supp(\phi) \subset E_t, \phi(\cdot) = -\phi(-\cdot)\}$ со скалярным произведением $\langle \phi, \psi\rangle_{\ell^2_-(E_t)} = \frac{1}{2} \sum_{e \in E_t} \phi(e)\psi(e)$.

Дискретное пространство Соболева

Введем аналог дифференциала - оператор d, действующий из функций на $V(\Gamma)$ в антисимметричные функции на $E(\Gamma)$ и определяемый как

$$df((x, y)) = \sqrt{c(x, y)} \cdot (f(x) - f(y)).$$

Определение

$H_0^1(\Gamma_t) = \{f : V(\Gamma) \to \mathbb{R}, supp(f) \subset V(\Gamma_t)\}$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle_{H_0^1(\Gamma_t)} = \langle df, dg\rangle_{\ell^2_-(E_t)}$.

Функция Грина и ядро Пуассона

Рассмотрим на Γ случайное блуждание, соответствующее весу c, то есть вероятность пройти по ребру (x, y) равна $\frac{c(x,y)}{\sum_{z \sim x} c(x,z)}$.

Определение

Функция Грина 'области' Γ_t:
$G_t(z, \zeta) = \mathbb{E}^z\{$количество посещений ζ перед выходом из $\Gamma_t\}$.

Определение

Ядро Пуассона 'области' Γ_t:
$P_t(x, z) = \mathbb{P}^z\{x =$ первая вершина из $V(\gamma_t)$, посещенная блужданием в $V(\Gamma_t)\}$ для $x \in V(\gamma_t)$.

Изометрия $\ell^2(\Gamma_t) \to H_0^1(\Gamma_t)$

Хотим построить изометрию $Q_t : \ell^2(\Gamma_t) \to H_0^1(\Gamma_t)$ с 'хорошими' динамическими свойствами. Мы хотим, чтобы она удовлетворяла следующим свойствам:

(1) $(Q_{t+1}f - Q_t f)$ гармонична на $V(\Gamma_t)$;

(2) $Q_t f = 0$, если $f = 0$ на $V(\Gamma_t)$;

(3) $Q_{t+1}f$ гармонична на $V(\Gamma_t)$, если $f = 0$ на $V(\Gamma_t)$.

Дискретная формула Адамара

Предложение (Вариация функции Грина)

$$G_{t+1}(z,\zeta) - G_t(z,\zeta) = \sum_{x \in V(\gamma_{t+1})} P_{t+1}(x,z) \cdot G_{t+1}(x,\zeta) \ (z,\zeta \in V(\Gamma))$$

Лемма (Вариационная формула Адамара)

Для любых $z, \zeta \in V(\Gamma)$

$$\frac{G_t(z,\zeta)}{\sum_{w \sim \zeta} c(w,\zeta)} = \sum_{\xi \in V(\Gamma_t)} K(\zeta,\xi) \cdot K(z,\xi),$$

где для $\xi \in \gamma_s$ мы определяем

$$K(y,\xi) = \sum_{x \in V(\gamma_s)} P_s(x,y) \rho_s(x,\xi)$$

($\rho_s : V(\gamma_s) \times V(\gamma_s) \to \mathbb{R}$ – некоторый вес)

Оператор Адамара

Определим теперь оператор Адамара $Q_t : \ell^2(\Gamma_t) \to \ell^2(\Gamma_t)$ следующим равенством:

$$Q_t f(z) = \sum_{x \in V(\Gamma_t)} K(z,x) f(x).$$

Предложение

Q_t - изометрия $\ell^2(\Gamma_t) \to H^1_0(\Gamma_t)$.

Случайные поля

Определение

Гауссовский белый шум на Γ_t – это $\Phi_t = \sum_j \xi_j \cdot \phi_j$, где

$\{\xi_k\}$ - $i.i.d. \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\{\phi_k\}$ – ортонормированный базис $\ell^2(\Gamma_t)$.

Определение

Дискретное гауссовское свободное поле на Γ_t – это $\Psi_t = \sum_j \xi_j \cdot \psi_j$,

где $\{\xi_k\}$ - $i.i.d. \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\{\psi_k\}$ – ортонормированный базис $H_0^1(\Gamma_t)$.

Основной результат

Пусть N - натуральное число или 0.

Теорема

Пусть Φ - гауссовский белый шум на Γ_N. Для $0 \le t \le N$ определим случайное поле $\Psi_t = Q_t \Phi$. Тогда Ψ_t – гауссовское свободное поле на Γ_t. Более того, процесс Ψ_t $(0 \le t \le N)$ имеет независимые приращения.

Спасибо за внимание!