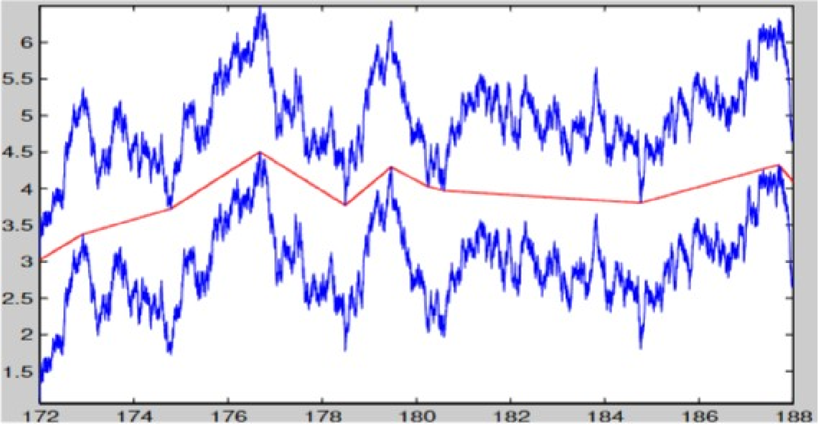
О минимальной интегральной энергии мажорант винеровского процесса

Сергей Никитин

ПОМИ РАН

17 ноября 2025 г.

Пример аппроксимации траектории при двустороннем ограничении



M. Lifshits, E. Setterqvist. Energy of taut string accompanying Wiener process. Stoch. Proc. Appl., 125, 401–427, (2015).

Случай двустороннего ограничения

Пусть $T, r > 0$.

Для выпуклой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и функции $h \in AC[0, T]$ рассмотрим энергетический функционал

$$|h|_T^\psi := \int_0^T \psi(h'(t))\mathrm{d}t.$$

Случай двустороннего ограничения

Пусть $T, r > 0$.

Для выпуклой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и функции $h \in AC[0, T]$ рассмотрим энергетический функционал

$$|h|_T^\psi := \int_0^T \psi(h'(t))\mathrm{d}t.$$

Множество допустимых аппроксимаций при двустороннем ограничении имеет вид

$$M_{T,r}^{\pm} := \left\{h \in AC[0, T] \,\middle|\, \forall t \in [0, T] : |h(t) - W(t)| \le r; h(0) = 0\right\}$$

Пусть $T, r > 0$.
Для выпуклой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и функции $h \in AC[0, T]$ рассмотрим энергетический функционал

$$|h|_T^{\psi} := \int_0^T \psi(h'(t))\mathrm{d}t.$$

Множество допустимых аппроксимаций при двустороннем ограничении имеет вид

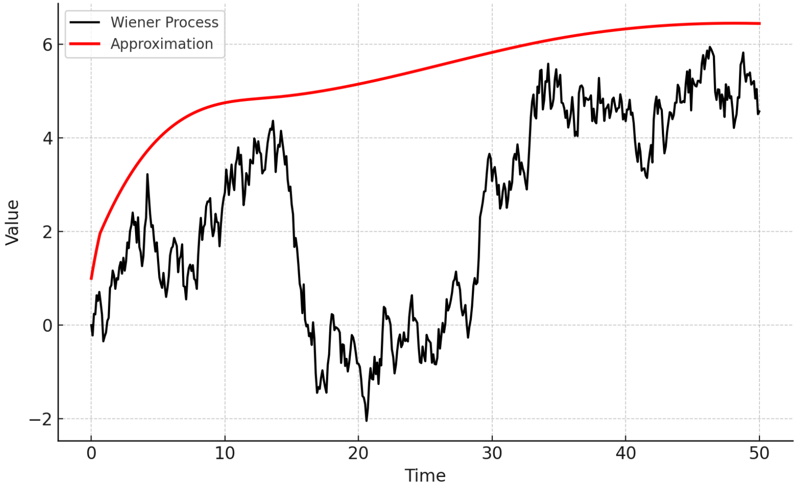
$$M_{T,r}^{\pm} := \left\{h \in AC[0, T] \,\middle|\, \forall t \in [0, T] : |h(t) - W(t)| \le r; h(0) = 0\right\}$$

Теорема (Лифшиц, Подчищайлов, 2024)

Для некоторой меры ν верно

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\inf\left\{|h|_T^{\psi} \mid h \in M_{T,r}^{\pm}\right\}}{T} \overset{\text{п.н.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \psi(u)\nu(\mathrm{d}u).$$

Пример аппроксимации траектории при одностороннем ограничении



Случай одностороннего ограничения

Пусть $T > 0$. Для выпуклой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и функции $h \in AC[0, T]$ рассмотрим энергетический функционал

$$|h|_T^\psi := \int_0^T \psi(h'(t))\mathrm{d}t.$$

Случай одностороннего ограничения

Пусть $T > 0$. Для выпуклой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и функции $h \in AC[0, T]$ рассмотрим энергетический функционал

$$|h|_T^\psi := \int_0^T \psi(h'(t))\mathrm{d}t.$$

Множество допустимых аппроксимаций с односторонним ограничением имеет вид

$$M_T := \left\{ h \in AC[0, T] \,\middle|\, \forall t \in [0, T] : h(t) \geq W(t); h(0) = 1 \right\}.$$

Пусть $T > 0$. Для выпуклой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и функции $h \in AC[0, T]$ рассмотрим энергетический функционал

$$|h|_T^\psi := \int_0^T \psi(h'(t))\mathrm{d}t.$$

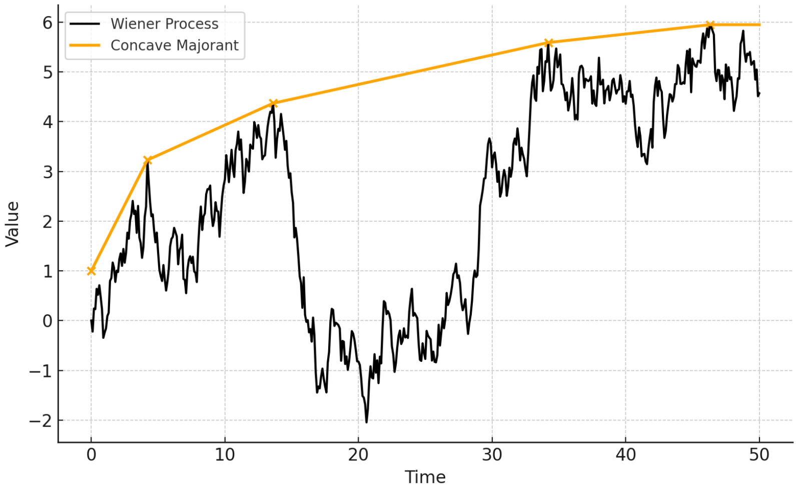
Множество допустимых аппроксимаций с односторонним ограничением имеет вид

$$M_T := \left\{h \in AC[0, T] \,\middle|\, \forall t \in [0, T] : h(t) \geq W(t); h(0) = 1\right\}.$$

Главный объект изучения – минимальная интегральная энергия

$$I_W^\psi(T) := \inf\left\{|h|_T^\psi \mid h \in M_T\right\}.$$

Оптимальная аппроксимация траектории



Теорема

Пусть $\psi(\cdot)$ – выпуклая функция, минимум которой равен 0 и достигается в точке 0. *Если выполняется условие*

$$\int_1^\infty a\psi(a^{-1})\mathrm{d}a < \infty,$$

то с вероятностью 1 величина $I_W^\psi(T)$ ограничена равномерно по T и монотонно возрастает к своему конечному пределу при $T \to \infty$.

Зависимость от ψ

Если минимум $\psi(\cdot)$ не равен 0 или достигается не в нуле, то оптимальная аппроксимация растёт линейно и детерминированно, начиная с некоторого момента.

Зависимость от ψ

Если минимум $\psi(\cdot)$ не равен 0 или достигается не в нуле, то оптимальная аппроксимация растёт линейно и детерминированно, начиная с некоторого момента.

Быстро убывающие около нуля функции, например $\psi(u) = u^{\varkappa}$ при $\varkappa > 2$ имеют ограниченную энергию.

Зависимость от ψ

Если минимум $\psi(\cdot)$ не равен 0 или достигается не в нуле, то оптимальная аппроксимация растёт линейно и детерминированно, начиная с некоторого момента.

Быстро убывающие около нуля функции, например $\psi(u) = u^{\varkappa}$ при $\varkappa > 2$ имеют ограниченную энергию.

Настоящий интерес представляют выпуклые $\varkappa$-правильно меняющиеся в нуле функции $\psi(\cdot)$, где $\varkappa \in [1, 2]$, то есть функции вида

$$\psi(u) = u^{\varkappa}\,\theta(u), \quad u > 0$$

для некоторой медленно меняющейся в нуле функции $\theta(\cdot)$, то есть

$$\lim_{u \to 0} \frac{\theta(cu)}{\theta(u)} = 1.$$

Зависимость от ψ

Если минимум $\psi(\cdot)$ не равен 0 или достигается не в нуле, то оптимальная аппроксимация растёт линейно и детерминированно, начиная с некоторого момента.

Быстро убывающие около нуля функции, например $\psi(u) = u^{\varkappa}$ при $\varkappa > 2$ имеют ограниченную энергию.

Настоящий интерес представляют выпуклые $\varkappa$-правильно меняющиеся в нуле функции $\psi(\cdot)$, где $\varkappa \in [1,2]$, то есть функции вида

$$\psi(u) = u^{\varkappa}\,\theta(u), \quad u > 0$$

для некоторой медленно меняющейся в нуле функции $\theta(\cdot)$, то есть

$$\lim_{u\to 0} \frac{\theta(cu)}{\theta(u)} = 1.$$

Поведение $I_W^{\psi}(T)$ существенно зависит от $\varkappa$

- $\varkappa \in [1,2)$,
- $\varkappa = 2$.

Случай $\varkappa = 2$, п.н. сходимость

Обозначим

$$m_\psi(b) := \int_1^b a\psi(a^{-1})\mathrm{d}a, \quad b \geq 1.$$

Теорема

Пусть $\psi(u) := u^2|\log u|^\alpha, u > 0$ *при* $\alpha > -1$, *тогда при* $T \to \infty$ *выполняется*

$$\frac{I_W^\psi(T)}{m_\psi\left(T^{1/2}\right)} = \frac{(1+\alpha)2^{1+\alpha} I_W^\psi(T)}{(\log T)^{1+\alpha}} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1\,.$$

В более общем случае для п.н. сходимости требуется

$$\lim_{b\to\infty} m_\psi(b) = \infty.$$

Нижняя оценка нижнего предела, $\varkappa \in [1,2)$

Теорема

Пусть $\psi(u) := u^{\varkappa}, u > 0$. *Пусть* $g(\cdot)$ *– медленно меняющаяся на бесконечности функция, такая, что для некоторых* $\xi_\circ > 2 - \varkappa > \xi^\circ > 0$ *при* $b \to \infty$ *верно*

$$(\log b)^{-\xi_\circ} \ll g(b) \ll (\log b)^{-\xi^\circ}$$

и

$$\int^{\infty} \frac{g(b)^{1/(2-\varkappa)}}{b} \, \mathrm{d}b < \infty.$$

Тогда выполняется

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{I_W^{\psi}(T)}{T\psi(T^{-1/2})g(T)} \overset{\text{п.н.}}{=} \infty.$$

Верхняя оценка нижнего предела, $\varkappa \in [1, 2)$

Теорема

Пусть $\psi(u) := u^{\varkappa}, u > 0$. *Пусть* $g(\cdot)$ *– медленно меняющаяся на бесконечности функция, такая, что для некоторых* $\xi_\circ > 2 - \varkappa > \xi^\circ > 0$ *при* $b \to \infty$ *верно*

$$(\log b)^{-\xi_\circ} \ll g(b) \ll (\log b)^{-\xi^\circ}$$

и

$$\int^{\infty} \frac{g(b)^{1/(2-\varkappa)}}{b} \, \mathrm{d}b = \infty.$$

Тогда выполняется

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{I_W^{\psi}(T)}{T\psi(T^{-1/2})g(T)} \overset{\text{п.н.}}{=} 0.$$

Интегральный тест Хирша, $\varkappa = 1$

Следствие

Пусть $g(\cdot)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция, такая, что для некоторых $\xi_\circ > 1 > \xi^\circ > 0$ при $b \to \infty$ верно

$$(\log b)^{-\xi_\circ} \ll g(b) \ll (\log b)^{-\xi^\circ}.$$

Тогда выполняется

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{\max_{0\le t\le T} W(t)}{T^{1/2} g(T)} \overset{\text{п.н.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } \int^{\infty} \frac{g(b)}{b}\, \mathrm{d}b = \infty, \\ \infty, & \text{если } \int^{\infty} \frac{g(b)}{b}\, \mathrm{d}b < \infty. \end{cases}$$

Оценки верхнего предела, $\varkappa \in [1,2)$

Теорема

Пусть $\psi(u) := u^{\varkappa}, u > 0$. *Тогда с вероятностью 1 выполняется*

$$\frac{2^{-\varkappa/2}}{1-\varkappa/2} \geq \limsup_{T\to\infty} \frac{I_W^{\psi}(T)}{T\psi\left(\sqrt{\frac{\log\log T}{T}}\right)} \geq 2^{\varkappa/2}.$$

Идея доказательства

- Оптимальная аппроксимация траектории $\sim$ её минимальная вогнутая мажоранта.

Идея доказательства

- Оптимальная аппроксимация траектории $\sim$ её минимальная вогнутая мажоранта.
- $\tau(a) := \arg\min\limits_{t>0} (W(t) - t/a)\},\qquad a > 0.$

Идея доказательства

- Оптимальная аппроксимация траектории $\sim$ её минимальная вогнутая мажоранта.
- $\tau(a) := \arg\min_{t>0} \left(W(t) - t/a)\right\}, \qquad a > 0.$
- Для $\overline{W}$ – глобальной минимальной вогнутой мажоранты W

$$\overline{W}'(t) \geq \frac{1}{a} \iff \tau(a) \geq t.$$

Идея доказательства

- Оптимальная аппроксимация траектории $\sim$ её минимальная вогнутая мажоранта.
- $\tau(a) := \arg\min_{t>0} (W(t) - t/a)\}, \qquad a > 0.$
- Для $\overline{W}$ – глобальной минимальной вогнутой мажоранты W
$$\overline{W}'(t) \geq \frac{1}{a} \iff \tau(a) \geq t.$$
- Согласно результату Грёнебома $\tau(\cdot)$ имеет явное интегральное представление по Пуассоновской случайной мере.

Идея доказательства

- Оптимальная аппроксимация траектории $\sim$ её минимальная вогнутая мажоранта.
- $\tau(a) := \arg\min_{t>0} (W(t) - t/a)\}, \qquad a > 0.$
- Для $\overline{W}$ – глобальной минимальной вогнутой мажоранты W

$$\overline{W}'(t) \geq \frac{1}{a} \iff \tau(a) \geq t.$$

- Согласно результату Грёнебома $\tau(\cdot)$ имеет явное интегральное представление по Пуассоновской случайной мере.
- Для выпуклых функций $\psi(\cdot)$ верно

$$\int_{\tau(1)}^{\tau(b)} \psi(\overline{W}'(t))\,\mathrm{d}t = \int_{(1,b]} \psi(a^{-1})\,\mathrm{d}\tau(a).$$

Идея доказательства

- Оптимальная аппроксимация траектории $\sim$ её минимальная вогнутая мажоранта.
- $\tau(a) := \arg\min_{t>0} (W(t) - t/a)\}, \qquad a > 0.$
- Для $\overline{W}$ – глобальной минимальной вогнутой мажоранты W

$$\overline{W}'(t) \geq \frac{1}{a} \iff \tau(a) \geq t.$$

- Согласно результату Грёнебома $\tau(\cdot)$ имеет явное интегральное представление по Пуассоновской случайной мере.
- Для выпуклых функций $\psi(\cdot)$ верно

$$\int_{\tau(1)}^{\tau(b)} \psi(\overline{W}'(t))\,\mathrm{d}t = \int_{(1,b]} \psi(a^{-1})\,\mathrm{d}\tau(a).$$

- Дальше переходим от случайного интервала к детерминированному.

Литература

- P. Groeneboom. The concave majorant of Brownian motion. Ann. Probab., 11:4, 1016–1027, (1983).
- M. Lifshits, E. Setterqvist. Energy of taut string accompanying Wiener process. Stoch. Proc. Appl., 125, 401–427, (2015).
- M.A. Lifshits, A.A.Podchishchailov. Asymptotic distribution of the derivative of the taut string accompanying Wiener process. Preptint https://arxiv.org/abs/2411.04690.
- М.А. Лифшиц, С.Е. Никитин. Энергетически эффективная аппроксимация винеровского процесса при односторонних ограничениях. Теория вероятн. и ее примен., 69:1, 76–90, (2024).
- S.E. Nikitin. On the minimal integral energy of majorants of the Wiener process. Preprint https://arxiv.org/abs/2507.17468.