Уравнение Колмогорова–Чепмена и его связь с марковским свойством процесса

Филичкина Елена Михайловна

кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ имени М. В. Ломоносова

9-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics

18 ноября 2025

Основные понятия

Определение

Случайный процесс $X = \{X_t\}_{t\in T}$*, принимающий при каждом* $t \in T$ *значения в борелевском пространстве* $(S_t, \mathcal{B}_t)$*, называется* ***марковским****, если для любого* $m \geq 1$ *и всех* $s_1 < \cdots < s_m < s \leqslant t$*, а также для произвольной ограниченной* $\mathcal{B}_t$*-измеримой функции* f *выполняется соотношение*

$$\mathrm{E}(f(X_t)|X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_s) = \mathrm{E}(f(X_t)|X_s).$$

Определение

Случайный процесс $X = \{X_t\}_{t\in T}$ *называется* ***цепью Маркова****, если для любого* $m \geqslant 1$*, всех точек* $s_1 < \cdots < s_m < s \leqslant t$ *и любых* $i, j, i_1, \ldots, i_m$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{P}(X_t = j|X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_m} = i_m, X_s = j) = \mathrm{P}(X_t = i|X_s = j).$$

Основные понятия

Уравнения Колмогорова-Чепмена

Переходные веротяности марковской цепи для всех $s \leqslant u \leqslant t$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{P}(X_t = j | X_s = i) = \sum_k \mathrm{P}(X_u = k | X_s = i)\, \mathrm{P}(X_t = j | X_u = k),$$

$$p_{ij}(s, t) = \sum_k p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t).$$

Теорема (см., напр., [2])

Конечномерные распределения марковской цепи однозначно определяются переходными вероятностями $p_{ij}(s, t)$ и начальным распределением.

Основные понятия

Теорема (см., напр., [2])

Пусть $0 \in T \subseteq [0, \infty)$, а некоторые непустые множества $S_s \subseteq S, s \in T$, где S — конечно или счетно. Пусть задан набор $p_i(0) > 0, i \in S_0$, такой, что $\sum_{i \in S_0} p_i(0) = 1$, и заданы функции $p_{ij}(s,t)$ при $s \leqslant t$, $(s, t \in T)$, $i \in S_s, j \in S_t$, для которых выполнены условия

- $p_{ij}(s,t) \geqslant 0$ для любых $i \in S_s, j \in S_t$ и $s \leqslant t$,
- $\sum_{j \in S_t} p_{ij}(s,t) = 1$ для любых $i \in S_s$ и $s \leqslant t$,
- $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}$ для любых $i \in S_s, j \in S_t$,
- $p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u)p_{kj}(u,t)$ для любых $i \in S_s, j \in S_t$ и всех $s \leqslant u \leqslant t$.

Тогда на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ существует марковская цепь $X = \{X_t\}_{t \in T}$ с пространством состояний S_t при каждом $t \in T$ (т.е. $X_t(\omega) \in S_t$ при любом $t \in T$ для всех $\omega \in \Omega$), такая, что справедливы соотношения

$$p_i(0) = \mathsf{P}(X_0 = i), i \in S,$$

$$p_{ij}(s,t) = \mathsf{P}(X_t = j | X_s = i), s \leqslant t, i \in S_s, j \in S_j.$$

Основные понятия

Уравнение Колмогорова-Чепмена для марковского процесса

Для функции переходных вероятностей $P(s, x, t, B)$ марковского процесса $X = \{X_t\}_{t \in T}$, заданной для $s \leqslant t$, $s, t \in T, x \in S, B \in \mathcal{B}_t$, т.е.

$$P(s, x, t, B) = P(X_t \in B | X_s = x),$$

при всех $s \leqslant u \leqslant t, x \in S_s, B \in \mathcal{B}_t$ выполняется **уравнение Колмогорова-Чепмена**

$$P(s, x, t, B) = \int\limits_{S_u} P(s, x, u, dy) P(u, y, t, B).$$

Конечномерные распределения марковского процесса однозначно определяются переходной функцией и начальным распределением.

Влечет ли выполнение уравнений Колмогорова-Чепмена марковость процесса?

J. L. Doob: "My inclination has always been to look for general theories and to avoid computation. A discussion I once had with Feller in a New York subway illustrates this attitude and its limitations. We were discussing the Markov property and I remarked that the Chapman-Kolmogorov equation did not make a process Markovian. This statement satisfied me, but not Feller, who liked computation and examples as well as theory. It was characteristic of our attitudes that at first he did not believe me but then went to the trouble of constructing a simple example to prove my assertion."[3]

Пример Феллера

W. Feller. Non-Markovian processes with the semigroup property. Ann. Math. Statist. 30, pp. 1252-1253, 1959.

Утверждение

Для $N \geqslant 3$ существует немарковский процесс с N состояниями, переходные вероятности которого удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена.

Рассмотрим множество $\mathfrak{G}$, состоящее из $N! + N$ последовательностей длины N следующего вида:

- $(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) : x^{(i)} = \nu$ для некоторого фиксированного $1 \leqslant \nu \leqslant N$ и всех $1 \leqslant i \leqslant N$ с вероятностью $1/N \cdot 1/N$,
- $(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ – произвольная перестановка множества $(1, \dots, N)$ с вероятностью $1/N! \cdot (1 - 1/N)$.

Пример Феллера

- $(x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}) : x^{(i)} = \nu$ для некоторого фиксированного $1 \leqslant \nu \leqslant N$ и всех $1 \leqslant i \leqslant N$ с вероятностью $1/N \cdot 1/N$,
- $(x^{(1)}, \ldots, x^{(N)})$ – произвольная перестановка множества $(1, \ldots, N)$ с вероятностью $1/N! \cdot (1 - 1/N)$.

Тогда

$$\mathrm{P}(x^{(i)} = \nu) = 1/N, \quad \mathrm{P}(x^{(i)} = \nu, x^{(j)} = \mu) = 1/N^2, \quad i \neq j.$$

Действительно,

- $\mathrm{P}(x^{(i)} = \nu) = \dfrac{1}{N}\dfrac{1}{N} + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\dfrac{(N-1)!}{N!} = \dfrac{1}{N}$,
- $\mathrm{P}(x^{(i)} = \nu, x^{(j)} = \nu) = \dfrac{1}{N}\dfrac{1}{N}$,
- $\mathrm{P}(x^{(i)} = \nu, x^{(j)} = \mu) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\dfrac{(N-2)!}{N!} = \dfrac{1}{N^2}$ при $\mu \neq \nu$.

Пример Феллера

$$P(x^{(i)} = \nu) = 1/N, \quad P(x^{(i)} = \nu, x^{(j)} = \mu) = 1/N^2, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$P(x^{(i)} = \nu | x^{(j)} = \mu) = 1/N.$$

Однако, например

$$P(x^{(3)} \neq 1 | x^{(2)} = 1, x^{(1)} = 1) = 0.$$

Следовательно, построенный процесс не является марковским.

Пример Феллера. Построение процесса с $T = \mathbb{Z}$

Рассматриваем бесконечные в обе стороны последовательности — независимые копии описанных.
То есть в качестве пространства состояний рассматриваем

$$\dots \times \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \times \dots$$

с мерой прямого произведения.
Точки этого пространства представляют собой последовательности $x = \{x^{(i)}\}$, такие, что для любого $r \in \mathbb{Z}$ блок размера N вида

$$(x^{(rN+1)}, x^{(rN+2)}, ..., x^{(rN+N)})$$

является проекцией x на $\mathfrak{G}$.
Переходные вероятности этого процесса остаются такими же. Например,

$$\mathsf{P}(x^{(N)} = \nu, x^{(N+1)} = \mu) = \mathsf{P}(x^{(N)} = \nu)\mathsf{P}(x^{(N+1)} = \mu) = 1/N \cdot 1/N$$

в силу независимости.
Получили процесс со стационарными переходными вероятностями.

Пример Феллера. Построение процесса с непрерывным временем

Рассмотрим процесс Пуассона $\{N(t), t \geqslant 0\}$ с интенсивностью $\lambda = 1$ и определим новый процесс $\{x(t), t \geqslant 0\}$ по формуле

$$x(t) = x^{(N(t))}.$$

Для такого процесса

$$\mathsf{P}(x(t) = \nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(t) = i)\mathsf{P}(x^{(i)} = \nu) = 1/N.$$

Пример Феллера. Построение процесса с непрерывным временем

Совместная вероятность для $0 \leqslant s < t$:

$$P(x(s+t)=\nu, x(s)=\nu) = P(N(s+t)=N(s))\frac{1}{N}+$$

$$+P(N(s+t)\neq N(s))\sum_{j>i} P(N(s)=i, N(s+t)=j)P(x^{(i)}=\nu, x^{(j)}=\nu) =$$

$$= e^{-t}\frac{1}{N} + (1-e^{-t})\frac{1}{N^2}.$$

При $\nu \neq \mu$:

$$P(x(s+t)=\mu, x(s)=\nu) =$$

$$= P(N(s+t)\neq N(s))\sum_{j>i} P(N(s)=i, N(s+t)=j)P(x^{(i)}=\nu, x^{(j)}=\mu) =$$

$$= (1-e^{-t})\frac{1}{N^2}.$$

Откуда

$P_{\nu\nu}(t) = P(x(s+t)=\nu | x(s)=\nu) = e^{-t} + (1-e^{-t})\frac{1}{N}$,
$P_{\nu\mu}(t) = P(x(s+t)=\mu | x(s)=\nu) = (1-e^{-t})\frac{1}{N}$, при $\nu \neq \mu$.

Пример Феллера. Построение процесса с непрерывным временем

$$\mathsf{P}_{\nu\nu}(t) = \mathsf{P}(x(s+t) = \nu | x(s) = \nu) = e^{-t} + (1 - e^{-t})\tfrac{1}{N},$$
$$\mathsf{P}_{\nu\mu}(t) = \mathsf{P}(x(s+t) = \mu | x(s) = \nu) = (1 - e^{-t})\tfrac{1}{N}, \text{ при } \nu \neq \mu.$$

Используя полученные выражения, можно убедиться, что

$$\mathsf{P}_{\nu\mu}(s+t) = \sum_{\lambda=1}^{N} \mathsf{P}_{\nu\lambda}(s)\mathsf{P}_{\lambda\mu}(t).$$

Пример с $N = 2$

Chan K.C., Lenard C.T., Mills T.M., 97.49 On Markov chains. The Mathematical Gazette. 97(540):515-520, 2013.

Рассмотрим $\Omega = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$ и определим на нем случайные величины $X_i : \Omega \to \{0,1\}, i = 0,1,2$, следующим образом

$$X_0((i,j,k)) = i, X_1((i,j,k)) = j, X_2((i,j,k)) = k.$$

$$\mathrm{P}(X_n = i) = 1/2, i = 0,1, n = 0,1,2,$$

$$\mathrm{P}(X_m = i, X_n = j) = 1/4, m \neq n,$$

рассматриваемые величины являются попарно независимыми. Определим случайный процесс $X = \{X_n, n = 0,1,2,...\}$. X_0, X_1, X_2 определены как выше, а все следующие тройки определяются аналогично, независимо от предыдущих.

Пример с $N = 2$

$$\Omega = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$$

$$X_0((i,j,k)) = i, X_1((i,j,k)) = j, X_2((i,j,k)) = k.$$

$$X = (X_0, X_1, X_2, \ldots).$$

При $s \geqslant 3$ величины X_n и X_{n+s} независимы.
Для всех n:

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathrm{P}(X_{n+1} = j) = 1/2,$$

$$\mathrm{P}(X_{n+s} = j | X_n = i) = \mathrm{P}(X_{n+s} = j) = 1/2,$$

то есть $P = P^{(s)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ и, соответственно, $P^{(t+s)} = P^{(t)} P^{(s)}$, то есть для процесса выполнены уравнения Колмогорова-Чепмена.

Пример с $N = 2$

$$\Omega = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$$

$$X_0((i,j,k)) = i, X_1((i,j,k)) = j, X_2((i,j,k)) = k.$$

$$X = (X_0, X_1, X_2, ...).$$

Рассматриваемый процесс не является марковским.

$$\mathsf{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0, X_0 = 0) = 1,$$

$$\mathsf{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) = 1/2.$$

Попарная независимость и независимость в совокупности

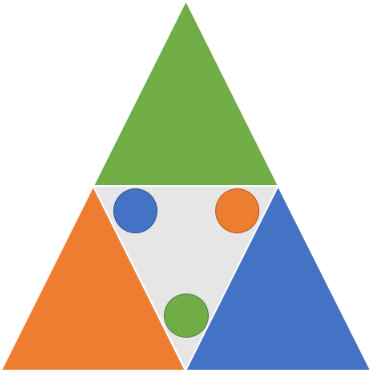
Попарная независимость случайных величин $X = \{X_t\}_{t \in T}$ обеспечивает выполнение уравнений Колмогорова-Чепмена.

$$\mathrm{P}(X_t = j | X_s = i) = \mathrm{P}(X_t = j),$$

$$\sum_k \mathrm{P}(X_u = k | X_s = i)\, \mathrm{P}(X_t = j | X_u = k) = \sum_k \mathrm{P}(X_u = k)\, \mathrm{P}(X_t = j) = \mathrm{P}(X_t = j).$$

Отсутсвие взаимной независимости ''портит'' марковость процесса.

Пример Бернштейна



Рассматриваются события:

- Выпавший при броске цвет — синий (A),
- Выпавший при броске цвет — зеленый (B),
- Выпавший при броске цвет — оранжевый (C).

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C).$$

Пример с $N = 2$

$$\Omega = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$$

$$X_0((i,j,k)) = i, \quad X_1((i,j,k)) = j, \quad X_2((i,j,k)) = k.$$

$$X = (X_0, X_1, X_2, \ldots).$$

Это и есть пример Бернштейна.
(X_0, X_1, X_2) — один бросок кубика.

- X_0 — присутствует ли на выпавшей грани синий цвет,
- X_1 — присутствует ли на выпавшей грани зеленый цвет,
- X_2 — присутствует ли на выпавшей грани оранжевый цвет.

$(X_{3k}, X_{3k+1}, X_{3k+2})$ — $(k+1)$-й бросок кубика.

Пример Стоянова

Й. Стоянов, Контрпримеры в теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2014.

Рассматривается урна, содержащая четыре шара, занумерованные числами 1,2,3,4. Случайным образом выбираем из нее шар, записываем номер и возвращаем его в урну. Повторяем процедуру много раз. Обозначим ξ_n — число на n-м выбранном шаре, а для $j = 1, 2, 3$ введем события $A_j^{(n)} = \{$либо $\xi_n = j,$ либо $\xi_n = 4\}$.
Рассматриваем процесс $X_{3(m-1)+j} = I(A_j^{(m)}), m = 1, 2, \ldots$.

$$\mathrm{P}(X_n = k_1) = \mathrm{P}(X_n = k_2 | X_m = k_3) = 1/2, n > m,$$

$$\mathrm{P}(X_{3m} = 1 | X_{3m-2} = 1, X_{3m-1} = 1) = 1.$$

Неоднозначность определения процесса

Теорема

Конечномерные распределения произвольного процесса неоднозначно определяются переходными вероятностями $p_{ij}(s,t)$ и начальным распределением.

Для простоты рассмотрим процесс (X_1, X_2, X_3), принимающий значения $0, 1$.
Обозначим $p_{ijk} = P(X_3 = i, X_2 = j, X_1 = k)$, выразим их через "двойные" совместные вероятности, используя соотношения:

$$p_{0jk} + p_{1jk} = P(X_2 = j, X_1 = k), j, k = 0, 1,$$

$$p_{i0k} + p_{i1k} = P(X_3 = i, X_1 = k), i, k = 0, 1,$$

$$p_{ij0} + p_{ij1} = P(X_3 = i, X_2 = j), i, j = 0, 1.$$

Рассматриваемая система состоит из 12 уравнений с 8 неизвестными.

Неоднозначность определения процесса

$$p_{0jk} + p_{1jk} = P(X_2 = j, X_1 = k), j, k = 0, 1,$$

$$p_{i0k} + p_{i1k} = P(X_3 = i, X_1 = k), i, k = 0, 1,$$

$$p_{ij0} + p_{ij1} = P(X_3 = i, X_2 = j), i, j = 0, 1.$$

Рассматриваемая система состоит из 12 уравнений с 8 неизвестными. Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Неоднозначность определения процесса

Заметим, что $\operatorname{rk} A = 7$.
То есть получено 7 уравнений необходимых и достаточных для определения процесса, которые содержат 8 неизвестных.
Так как существует марковский процесс, конечномерные распределения которого удовлетворяют рассматриваемой системе, то решений бесконечно много (однопараметрическое семейство решений).

Гауссовские процессы

Теорема

Пусть $T \subseteq \mathbb{R}$ — интервал и $\{X_t, t \in T\}$ — невырожденный гауссовский процесс, тогда $\{X_t, t \in T\}$ является марковским в том и только том случае, когда его функция переходных вероятностей удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чемпена.

Схема доказательства:
Шаг 1. Гауссовский процесс $\{X_t, t \in T\}$ является марковским тогда и только тогда, когда для любых $s < h < t$, $s, h, t \in T$, справедливо равенство

$$cov(X_s, X_t) cov(X_h, X_h) = cov(X_s, X_h) cov(X_h, X_t).$$

Шаг 2. Равенство

$$cov(X_s, X_t)cov(X_h, X_h) = cov(X_s, X_h)cov(X_h, X_t)$$

эквивалентно уравнению

$$p(s,x,t,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(s,x,h,z)p(h,z,t,y)dz,$$

где $p(s,x,t,y)$ — переходная плотность процесса, то есть
$p(s,x,t,y) = \mathrm{p}_{X_t|X_s}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{ts}^2)\sigma_t^2}} exp\left\{-\frac{(y-m(x))^2}{2\sigma_t^2(1-\rho_{ts}^2)}\right\}.$
Здесь $m(x) = m_t + \frac{\sigma_t}{\sigma_s}\rho_{ts}(x - m_s), \rho_{ts} = cor(X_t, X_s), m_s = EX_s, m_t = EX_t, \sigma_t^2 = DX_t, \sigma_s^2 = DX_s$

Гауссовские процессы

Подставляя в уравнение

$$p(s,x,t,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(s,x,h,z)p(h,z,t,y)dz$$

явный вид переходной плотности процесса, получим соотношение

$$\rho_{ht}\rho_{hs} = \rho_{st}.$$

Домножая его на $\sigma_h^2\sigma_s\sigma_t$, получим

$$cov(X_h, X_t)cov(X_h, X_s) = cov(X_h, X_h)cov(X_s, X_t).$$

Определение

Процессом Орнштейна-Уленбека *с параметрами* $\alpha, \beta > 0$ *называется процесс, задаваемый формулой*

$$V_t = e^{-\beta t} W(\alpha e^{2\beta t}), t \in \mathbb{R},$$

где $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ *— стандартное броуновское движение.*
Ковариационная функция процесса: $r(t, s) = \alpha e^{-\beta |t-s|}$.

Теорема (Дуб, [7])

Процесс Орнштейна–Уленбека является единственным невырожденным стационарным гауссовским марковским процессом. С точностью до линейных преобразований пространственных и временных переменных.

Спасибо за внимание!

- Ширяев А.Н. Вероятность. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.
- Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
- Snell J. “A Conversation with Joe Doob,” Stat. Sci. 12, 301, 1997.
- Feller W. Non-Markovian processes with the semigroup property. Ann. Math. Statist. 30, pp. 1252-1253, 1959.
- Chan K.C., Lenard C.T., Mills T.M. 97.49 On Markov chains. The Mathematical Gazette. 97(540):515-520, 2013.
- Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2014.
- Doob, J. L. “The Brownian Movement and Stochastic Equations.” Annals of Mathematics 43, no. 2: 351–369, 1942.