

Размерность мер с преобразованием Фурье в L_p

19 Ноября 2025

9-я Санкт-Петербургская молодежная конференция по вероятностной и математической физике 17-20 Ноября

Постановка задачи

Гипотеза

Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ такой компакт, что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$. Пусть ξ такая обобщённая функция, что $\text{supp}(\xi) \subset S$ и $\hat{\xi} \in L_{\frac{2d}{\alpha}}(\mathbb{R}^d)$. Тогда $\xi = 0$.

Здесь $\mathcal{H}_\alpha$ это α -мера Хаусдорфа.

$$\mathcal{H}_\alpha(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\substack{F \subset \cup B_j \\ \text{diam}(B_j) < \delta}} \sum_j \text{diam}(B_j)^\alpha. \quad (1)$$

Теорема

Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ такой компакт, что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$. Пусть ξ такая обобщённая функция, что $\text{supp}(\xi) \subset S$ и $\hat{\xi} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ для $p < \frac{2d}{\alpha}$. Тогда $\xi = 0$

Случай $d = 1$ и ξ мера был рассмотрен Салемом в 1951.
Эдгар и Розенблатт разобрали случай $d - 1 \leq \alpha$ в 1979.

В 1984 Кахан доказал следующую теорему:

Теорема

Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ такой компакт, что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$. Пусть ξ такая обобщённая функция, что $\text{supp}(\xi) \subset S$ и $\xi \in W_2^{\frac{\alpha-d}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Тогда $\xi = 0$

$$\mathcal{F} : L_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow W_2^{\frac{d}{p} - \frac{d}{2} - \varepsilon}. \quad (2)$$

История

Предельный случай $\alpha = \frac{2d}{p}$

Предельный случай ($p = \frac{2d}{\alpha}$) был доказан в некоторых частных случаях.

Так Розенблатт показал что ненулевая обобщенная функция ζ , $\hat{\zeta} \in L_{\frac{2d}{d-1}}$, не может быть концентрирована на гладкой поверхности размерности $d - 1$.

Аграновский и Нараянан разобрали случай когда S это C^1 —гладкая поверхность.

Затем Сентил Раани доказала предельный случай теоремы для упаковочных мер.

Харе и Рогинская показали, что для такого заряда ξ , что $\|\xi\|_{W_2^{\frac{\alpha-d}{2}}} < \infty$, верно $\underline{\dim}_H(\xi) \geq \alpha$.

$$\alpha > \frac{2d}{p}$$

Пусть σ_{d-1} это мера Лебега на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\hat{\sigma}_{d-1} \in L_{\frac{2d}{d-1} + \varepsilon}$.

Теорема

Пусть $2 < p < \infty$. Тогда существует такой компакт $S \in \mathbb{R}^d$ и вероятностная мера μ , что $\text{supp}(\mu) \subset S$, $\hat{\mu} \in L_p$ и $\mathcal{H}_{\frac{2d}{p}}(S) = 0$.

Определение

Пусть $\mu_{M,r}$ случайная величина со значением в вероятностных мерах, заданная формулой

$$\mu_{M,r} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_j \frac{\lambda|_{[0,r]^d}}{r^d}. \quad (3)$$

Здесь $\lambda|_{[0,r]^d}$ — это мера Лебега на кубе $[0, r]^d$ и $\{S_j\}_{j=1}^M$ — это последовательность независимых случайных сдвигов равномерно распределённых на кубе $[0, 1 - r]^d$.

Лемма

Для всех $M \in \mathbb{N}$ и $r < \frac{1}{2}$ выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} |\hat{\mu}_{M,r}(x) - \mathbb{E} \hat{\mu}_{M,r}(x)|^p dx \lesssim M^{-\frac{p}{2}} r^{-d}. \quad (4)$$

Неравенство Марцинкевича-Зигмунда

Пусть $1 \leq p < \infty$ и $X_1, \dots, X_n$ последовательность независимых случайных величин с нулевым средним, тогда

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n X_j \right|^p \leq C_p \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n |X_j|^2 \right|^{\frac{p}{2}} \quad (5)$$

Зафиксируем $p_1 > p$

Лемма

Для $M \in \mathbb{N}$ and $0 < r < \frac{1}{2}$ можно выбрать такую меру, что $\nu_{M,r} = \mu_{M,r}(\omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\nu}_{M,r}(x) - \mathbb{E} \hat{\mu}_{M,r}(x)|^{p_1} dx \lesssim M^{-\frac{p_1}{2}} r^{-d}, \quad (6)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\nu}_{M,r}(x) - \mathbb{E} \hat{\mu}_{M,r}(x)|^p dx \lesssim M^{-\frac{p}{2}} r^{-d}. \quad (7)$$

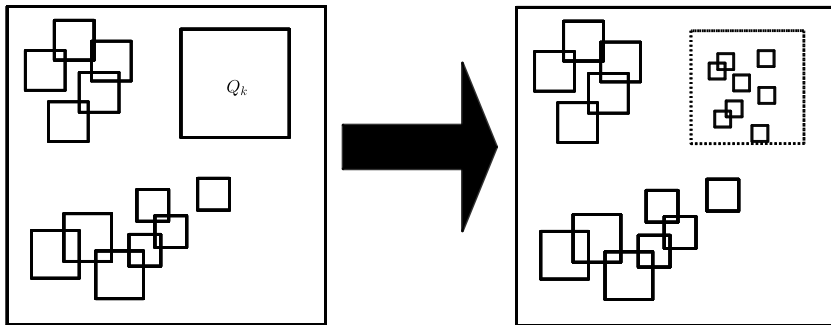


Рис.: Конструкция

Для последовательности $\mathcal{M} = \{M_0, \dots, M_k\}$ построим меру $\mu_{\mathcal{M}}$.

$$\mu_{\mathcal{M}_-} = \sum_{i=k}^{M_0+\dots+M_{k-1}} b(Q_i) \mu_{Q_i}. \quad (8)$$

$$r_k = \frac{M_k^{-\frac{p}{2d}} b(Q_k)^{\frac{p}{2d}}}{n(Q_k)}. \quad (9)$$

$$\mu_{\mathcal{M}} = \mu_{\mathcal{M}_-} - b(Q_k) \mu_{Q_k} + b(Q_k) \nu_{M_k, \frac{r_k}{l(Q_k)}, Q_k}. \quad (10)$$

$$b(Q_i) = \prod_{Q_j \text{ предок } Q_i} M_j^{-1} \leq 2^{-n(Q_i)}. \quad (11)$$

Оценим меру Хаусдорфа носителя с помощью покрытия кубами из одного слоя.

$$\begin{aligned} \sum_{n(Q_k)=n} \text{diam}(Q_k)^{\frac{2d}{p}} &\lesssim \sum_{n(Q_k)=n} l(Q_k)^{\frac{2d}{p}} = \sum_{n(Q_k)=n-1} M_k r_k^{\frac{2d}{p}} = \\ &\sum_{n(Q_k)=n-1} \frac{b(Q_k)}{(n-1)^{\frac{2d}{p}}} = \frac{1}{(n-1)^{\frac{2d}{p}}} \quad (12) \end{aligned}$$

Лемма

Пусть дана функция $f \in L_p$ и последовательность функций $g_j \in L_p$ такие, что $\limsup \|g_j\|_{L_p} \leq A$ и для некоторого $p_1 > p$ выполнено $\lim \|g_j\|_{L_{p_1}} = 0$. Тогда

$$\limsup \|f + g_j\|_{L_p}^p \leq \|f\|_{L_p}^p + A^p. \quad (13)$$

Лемма

Пусть $\mathcal{M}_- = \{M_0, M_1, M_2, \dots, M_{k-1}\}$ и $\mathcal{M} = \{M_0, M_1, M_2, \dots, M_k\}$. Зафиксируем $\mathcal{M}_-$, а M_k устремим к бесконечности. Тогда выполнены неравенства

$$\limsup \|\mathcal{F}(\mu_{\mathcal{M}} - \mu_{\mathcal{M}_-})\|_{L_p}^p \lesssim b(Q_k)^{\frac{p}{2}} n(Q_k)^d, \quad (14)$$

$$\lim \|\mathcal{F}(\mu_{\mathcal{M}} - \mu_{\mathcal{M}_-})\|_{L_{p_1}} = 0 \quad (15)$$

Для достаточно большого M_k выполнено неравенство

$$\|\hat{\mu}_{\mathcal{M}}\|_{L_p}^p \leq \|\hat{\mu}_{\mathcal{M}_-}\|_{L_p}^p + Cb(Q_k)^{\frac{p}{2}} n(Q_k)^d \quad (16)$$

Для достаточно быстро растущей последовательности $\mathcal{M} = \{M_0, M_1, M_2, \dots\}$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|\hat{\mu}_{\mathcal{M}}\|_{L_p}^p &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} b(Q_k)^{\frac{p}{2}} n(Q_k)^d = C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n(Q_j)=n} b(Q_j)^{\frac{p}{2}} n^d \leq \\ &C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n(Q_j)=n} b(Q_j) 2^{-n(\frac{p}{2}-1)} n^d = C \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(\frac{p}{2}-1)} n^d < \infty \quad (17) \end{aligned}$$