

Детерминантные процессы и интерполяция функций по значениям в точках случайной конфигурации

Алексей Клименко

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
НИУ «Высшая школа экономики»

по совместной работе
с А.А. Боричевым, А.И. Буфетовым и Ж. Лином

9-я Санкт-Петербургская молодёжная конференция
по теории вероятностей и математической физике

19 ноября 2025 г.

Детерминантные точечные процессы: определение 1

- **Фазовое пространство** E : польское пространство с борелевской мерой (**reference measure**) μ .
- **Пространство конфигураций** $\text{Conf}(E)$: семейство всех дискретных (мульти)подмножеств E .
- **Борелевская σ -алгебра на $\text{Conf}(E)$** определяется функциями $\#_B$, $\#_B(X) = |X \cap B|$ для всех предкомпактных борелевских множеств $B \subset E$.
- **Вероятностная мера $\mathbb{P}$ на $\text{Conf}(E)$** определяется **корреляционными функциями**: для малых окрестностей $U_1, \dots, U_k$ точек $x_1, \dots, x_k \in E$, $x_i \neq x_j$ имеем

$$\frac{\mathbb{P}(\#_{U_1} \geq 1, \dots, \#_{U_k} \geq 1)}{\mu(U_1) \dots \mu(U_k)} \rightarrow \rho_k(x_1, \dots, x_k)$$

при $\text{diam } U_j \rightarrow 0$.

Детерминантные точечные процессы: определение 2

Оператор $K: L^2(E, \mu) \rightarrow L^2(E, \mu)$:

$$(Kf)(x) = \int_E K(x, y)f(y) d\mu(y).$$

Определение

Процесс $\mathbb{P}$ (мера на $\text{Conf}(E)$) называется **детерминантным** с ядром K , если

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det K(x_i, x_j)_{i,j=1, \dots, k}.$$

Теорема (О. Масчі, А.Б. Сошников)

Пусть K — эрмитово неотрицательное сжатие локально следового класса. Тогда существует детерминантный процесс с ядром K .

$$E = (\mathbb{R}, \text{Leb}).$$

$$K(x, y) = \frac{\sin \pi(x - y)}{\pi(x - y)}.$$

K — ортогональная проекция на пространство Пэли—Винера:

$$\mathcal{PW} = \mathcal{PW}_\pi = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subset [-\pi, \pi]\}.$$

Случайные эрмитовы матрицы

$$H = (h_{jk}), \quad h_{jk} = \overline{h_{kj}},$$

$$h_{jk} = (\xi_{jk} + i\eta_{jk})/\sqrt{2}, \quad 1 \leq j < k \leq N,$$

$$h_{jj} = \xi_{jj}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

все ξ_{jk}, η_{jk} независимы и $\mathcal{N}(0, 1)$.

Эквивалентно: $d\mathbb{P} = Z^{-1} \cdot \exp(-\operatorname{tr} H^2/2) \prod_{j,k=1}^N dh_{jk}$

Случайные эрмитовы матрицы

$$H = (h_{jk}), \quad h_{jk} = \overline{h_{kj}},$$

$$h_{jk} = (\xi_{jk} + i\eta_{jk})/\sqrt{2}, \quad 1 \leq j < k \leq N,$$

$$h_{jj} = \xi_{jj}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

все ξ_{jk}, η_{jk} независимы и $\mathcal{N}(0, 1)$.

Эквивалентно: $d\mathbb{P} = Z^{-1} \cdot \exp(-\operatorname{tr} H^2/2) \prod_{j,k=1}^N dh_{jk}$

$X = \operatorname{spec} H \in \operatorname{Conf}(\mathbb{R})$.

Большинство собственных значений порядка $O(\sqrt{N})$.

Случайные эрмитовы матрицы

$$H = (h_{jk}), \quad h_{jk} = \overline{h_{kj}},$$

$$h_{jk} = (\xi_{jk} + i\eta_{jk})/\sqrt{2}, \quad 1 \leq j < k \leq N,$$

$$h_{jj} = \xi_{jj}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

все ξ_{jk}, η_{jk} независимы и $\mathcal{N}(0, 1)$.

Эквивалентно: $d\mathbb{P} = Z^{-1} \cdot \exp(-\operatorname{tr} H^2/2) \prod_{j,k=1}^N dh_{jk}$

$X = \operatorname{spec} H \in \operatorname{Conf}(\mathbb{R})$.

Большинство собственных значений порядка $O(\sqrt{N})$.

Теорема (Dyson)

Случайная мера

$$\frac{1}{N} \sum_{x \in X} \delta_{x/\sqrt{N}}$$

сходится к **полукруговому закону Вигнера**:

$$\rho(x) = c \cdot \sqrt{1 - x^2}.$$

Масштабирование спектра

$$X = \{x_j\} = \text{spec } H.$$

$\{x_j/\sqrt{N}\}$ лежат в основном на $[-1, 1]$.

Зафиксируем $a \in (-1, 1)$ и рассмотрим $x_j/\sqrt{N} = a + c_a \cdot y_j/N$.

$x = a \mapsto y = 0$, расстояние между y_j порядка 1.

$$X = \{x_j\} = \text{спес } H.$$

$\{x_j/\sqrt{N}\}$ лежат в основном на $[-1, 1]$.

Зафиксируем $a \in (-1, 1)$ и рассмотрим $x_j/\sqrt{N} = a + c_a \cdot y_j/N$.

$x = a \mapsto y = 0$, расстояние между y_j порядка 1.

Теорема

$Y = \{y_j\}$ сходится по распределению к синус-процессу: для любых ограниченных интервалов $I_1, \dots, I_k$

$$\mathbb{P}\{\#_{I_1}(Y) = s_1, \dots, \#_{I_k}(Y) = s_k\} \rightarrow \mathbb{P}_{\text{Sine}}\{\#_{I_1}(Z) = s_1, \dots, \#_{I_k}(Z) = s_k\}$$

при $N \rightarrow \infty$.

- Частицы отталкивают друг друга: $\det K(x_i, x_j)_{i,j=1,\dots,n} \rightarrow 0$, если $x_s \rightarrow x_r$.

- Частицы отталкивают друг друга: $\det K(x_i, x_j)_{i,j=1,\dots,n} \rightarrow 0$, если $x_s \rightarrow x_r$.
- Частицы распределены весьма регулярно:

Теорема

Для синус-процесса для почти всех конфигураций X верно, что ряд $\sum_{x \in X} \frac{1}{x}$ сходится в смысле главного значения.

Гильбертовы пространства голоморфных функций

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство,
каждая функция $h \in \mathcal{H}$ голоморфна в области D .
Пусть $h \mapsto h(z_0)$ — ограниченный функционал: $h(z_0) = \langle h, k_{z_0} \rangle$.
 $k_{z_0}(x)$ — **воспроизводящее ядро** пространства $\mathcal{H}$.

Гильбертовы пространства голоморфных функций

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство,
каждая функция $h \in \mathcal{H}$ голоморфна в области D .
Пусть $h \mapsto h(z_0)$ — ограниченный функционал: $h(z_0) = \langle h, k_{z_0} \rangle$.
 $k_{z_0}(x)$ — **воспроизводящее ядро** пространства $\mathcal{H}$.

Пример

Любая $f \in \mathcal{PW}_a$ продолжается до целой функции:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-a,a]} \hat{f}(\zeta) e^{iz\zeta} d\zeta,$$

причём $|f(z)| = o(\exp(a|z|))$.

Здесь $\langle f, g \rangle_{\mathcal{PW}_a} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, $k_x(y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$ для $a = \pi$.

Теорема (Котельников, Shannon, Whittaker, ...)

Пусть $f \in \mathcal{PW}_a$. Тогда f однозначно задаётся своими значениями в точках $\{x_n = n \cdot \frac{\pi}{a}\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$.

Значение $f(x)$ выражается через $f(x_n)$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x_n) \frac{\sin a(x - n)}{a(x - n)}$$

Восстановление функции по значениям в точках случайной конфигурации

Вопрос

Пусть X — случайная конфигурация синус-процесса.

Определяется ли функция $f \in \mathcal{PW}$ своими значениями на X ?

Восстановление функции по значениям в точках случайной конфигурации

Вопрос

Пусть X — случайная конфигурация синус-процесса.

Определяется ли функция $f \in \mathcal{PW}$ своими значениями на X ?

Теорема (А.И. Буфетов)

Для почти всех конфигураций X верно следующее: если $f \in \mathcal{PW}$ такова, что $f|_X = 0$, то $f \equiv 0$.

Более того, для любой $q \in X$ верно, что если $f|_{X \setminus q} = 0$, то $f \equiv 0$.

Но для любых $p, q \in X$, $p \neq q$ существует $f \in \mathcal{PW}$, $f \not\equiv 0$, для которой $f|_{X \setminus \{p, q\}} = 0$.

Обобщение: эксцесс (избыток) точечного процесса

Для ряда других детерминантных процессов, определённых проекторами на пространства H голоморфных функций верно следующее:

Теорема

Существует такое число $d \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ (*эксцесс процесса*), что:

(a) для почти всех конфигураций X и любых различных $y_1, \dots, y_d \in X$ не существует ненулевых функций $f \in H$, для которых

$$f|_{X \setminus \{y_1, \dots, y_d\}} = 0,$$

(b) для почти всех конфигураций X и любых различных

$y_1, \dots, y_{d+1} \in X$ существует ненулевая функция $f \in H$, для которой

$$f|_{X \setminus \{y_1, \dots, y_{d+1}\}} = 0.$$

Вопрос

Как восстановить f по её значениям в точках $X' = X \setminus q$?

Вопрос

Как восстановить f по её значениям в точках $X' = X \setminus q$?

Восстановление похоже на **интерполяционный многочлен Лагранжа**:
определим **биортогональную систему**: $\{b_y\}_{y \in X'}$, $b_y \in H$,
 $\langle k_y, b_z \rangle = b_z(y) = \delta_{yz}$. Тогда можно ожидать, что

$$f(x) = \sum_{y \in X'} f(y) b_y(x) = \sum_{y \in X'} \langle f, k_y \rangle b_y(x) : \quad (*)$$

обе части дают одинаковые значения при $x \in X'$, поэтому если ряд сходится в H , из того, что X' — множество единственности, будет следовать (*).

Вопрос

Как восстановить f по её значениям в точках $X' = X \setminus q$?

Восстановление похоже на **интерполяционный многочлен Лагранжа**: определим **биортогональную систему**: $\{b_y\}_{y \in X'}$, $b_y \in H$, $\langle k_y, b_z \rangle = b_z(y) = \delta_{yz}$. Тогда можно ожидать, что

$$f(x) = \sum_{y \in X'} f(y) b_y(x) = \sum_{y \in X'} \langle f, k_y \rangle b_y(x) : \quad (*)$$

обе части дают одинаковые значения при $x \in X'$, поэтому если ряд сходится в H , из того, что X' — множество единственности, будет следовать (*).

Обозначим $\mathcal{H}^{(-N)} = \{f \in \mathcal{H} : z^N f(z) \in \mathcal{H}\}$.

Теорема (А.А. Боричев, А.И. Буфетов, А.К., Zhaofeng Lin)

Для достаточно большого N ряд (*) для любой функции $f \in \mathcal{H}^{(-N)}$ сходится в H почти наверное по X .

$$f(x) = \sum_{y \in X'} \langle f, b_y \rangle k_y(x), \quad f \in \mathcal{H}^{(-N)} = \{f \in \mathcal{H} : z^N f(z) \in \mathcal{H}\} \quad (*)$$

Теорема (А.А. Бори́чев, А.И. Буфетов, А.К., Zhaofeng Lin)

Для достаточно большого N ряд $()$ для любой функции $f \in \mathcal{H}^{(-N)}$ сходится в H почти наверное по X .*

- Доказать сходимость, если частицы «не образуют кластеров» и «достаточно равномерно распределены».
- Доказать, что эти условия выполнены $\mathbb{P}_{Sine}$ -почти наверное.

Условия сходимости

- Существуют последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ и числа $C_1, C_2, a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$, $b < 2a - 1$, для которых

$$L \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\omega_n, C_1(1 + |\omega_n|)^{-a}),$$

и $|g_{\Lambda}(\omega_n)| \geq C_2(1 + |\omega_n|)^{-b} \|k_{\omega_n}\|$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

- Существуют $\rho: L \rightarrow (0, 1)$ и числа $C_3, C_4 > 0$, $\delta \in (\max\{\frac{b+1}{2}, 0\}, a]$, для которых при всех $z \in L$,

$$(1 + |z|)^{-a+\delta} \leq C_3 \rho(z)$$

и существует такая гармоническая функция $H = H_{\mathcal{K}, D}$ на $D = D(z, \rho(z))$, что

$$\|\log \|k_z\| - H\|_{L^{\infty}(D)} \leq C_4.$$

- Существуют такие $C_5 > 0$ и $d \in \mathbb{R}$, что для для любого $\lambda \in \Lambda$,

$$\left\| \frac{g_{\Lambda}}{\cdot - \lambda} \right\| \leq C_5(1 + |\lambda|)^d.$$

$$f(x) = \sum_{y \in X'} \langle f, b_y \rangle k_y(x), \quad f \in \mathcal{H}^{(-N)} = \{f \in \mathcal{H} : z^N f(z) \in \mathcal{H}\} \quad (*)$$

Теорема (А.А. Боричев, А.И. Буфетов, А.К., Zhaofeng Lin)

Для достаточно большого N ряд $()$ для любой функции $f \in \mathcal{H}^{(-N)}$ сходится в H почти наверное по X .*

Гипотеза

N не слишком велико ($N = 1$ или 2 должно быть достаточно).

Гипотеза

Похожие результаты верны для процессов с ядрами Фока, Бесселя и Эйри. (Но в этих случаях мы не знаем точное значение эксцесса!)

Спасибо за внимание!