

Связь структуры спектра эволюционного оператора ветвящегося блуждания по \mathbb{Z} с конфигурацией источников ветвления

Кротов Михаил

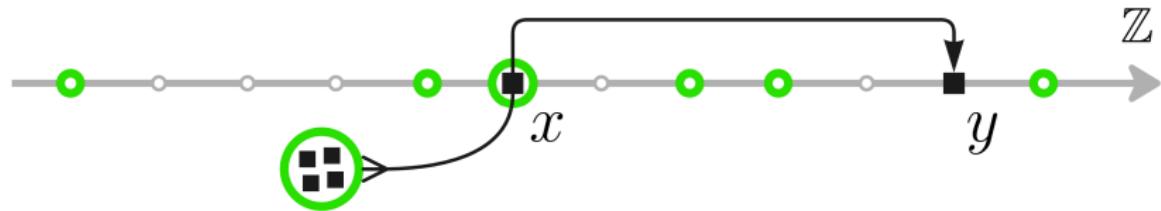
Студент 5-го курса кафедры теории вероятностей
Научный руководитель: Яровая Е.Б.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

19 ноября 2025

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) с непрерывным временем и конечным числом источников ветвления на решетке \mathbb{Z} .

В начальный момент в точке $x \in \mathbb{Z}$ находится одна частица. Ветвление, т.е. размножение и гибель частиц, происходит в выделенных узлах решетки, называемых источниками ветвления.



В работе Е.Б.Яровой и Н.В.Смородиной [1] были доказаны предельные теоремы при экспоненциальном росте численности частиц для неоднородных сред.

В монографии Е.Б.Яровой [2] был изучен случай одного источника ветвления.

Е.М.Филичкина и Е.Б.Яровая в [3] изучили модель с одним источником генерации и симметричными поглотителями.

Описание модели: случайное блуждание

Случайное блуждание задается генератором $\mathcal{A} = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}}$:

- $a(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$, $a(x, x) < 0$, $\sum_y a(x, y) = 0$ (*регулярность*)
- $a(x, y) = a(y, x)$ (*симметричность*)
- $a(x, y) = a(0, y - x) =: a(y - x)$ (*однородность*)
- $\forall z \in \mathbb{Z}$ - точка решетки - \exists траектория $\{z_1, \dots, z_m\} \subset \mathbb{Z}$, такая что $z = \sum_i z_i$, и $a(z_i) \neq 0 \forall i = 1, \dots, m$ (*неприводимость*)

Будем рассматривать *простое симметричное случайное блуждание*:

$$a(z) = \begin{cases} -\varkappa, & z = 0 \\ \frac{\varkappa}{2}, & |z| = 1 \\ 0, & |z| \geq 2 \end{cases}$$

где $\varkappa > 0$ - *интенсивность блуждания*.

Описание модели: конфигурация источников

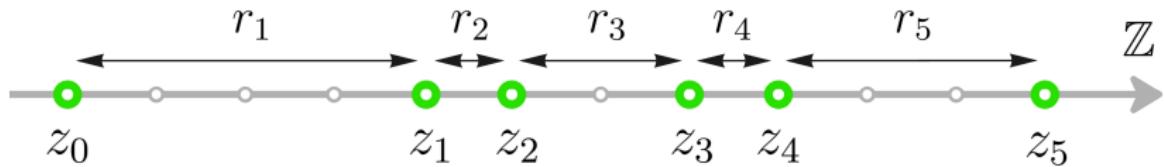
Рассматриваются конфигурации конечного числа $N = n + 1$ источников ветвления.

Зададим конфигурацию источников вектором промежутков между источниками:

$$R = (r_1, r_2, \dots, r_n), \quad r_j \in \mathbb{N}.$$

Координаты расположения источников $Z = (z_0, \dots, z_n)$ без ограничения общности:

$$z_0 = 0, \quad z_k = \sum_{i=1}^k r_i.$$



Описание модели: случайное ветвление

Ветвление задается для каждого источника $y \in Z$ производящей функцией:

$$f_*(y, u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(y) u^k,$$

где $0 \leq u \leq 1$, $b_k(y) \geq 0$ при $k \neq 1$, $b_1(y) \leq 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(y) = 0$, $y \in \mathbb{Z}$.

Введем функции $\beta(y)$ и $\beta^{(2)}(y)$ на \mathbb{Z} , где $\beta(y)$ - интенсивность ветвления в $y \in \mathbb{Z}$:

$$\beta(y) = f'_*(y, 1) \cdot \mathbb{I}_Z(y), \quad \beta^{(2)}(y) = f''_*(y, 1) \cdot \mathbb{I}_Z(y), \quad \mathbb{I}_Z(y) = \begin{cases} 1, & y \in Z, \\ 0, & y \notin Z. \end{cases}$$

Будем требовать:

$$\beta(y) = \beta \cdot \mathbb{I}_Z(y) < \infty, \quad \sum_{y \in \mathbb{Z}} |\beta^{(2)}(y)| < \infty.$$

Описание модели: динамика

Линейная часть переходных вероятностей $p(\Delta t, z)$ скачков на вектор z при $\Delta t \downarrow 0$ выражается через элементы \mathcal{A} :

$$p(\Delta t, z) = \begin{cases} a(z)\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } z \neq 0, \\ 1 + a(0)\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Переходные вероятности ветвления для каждой частицы в точке y : $p_*(\Delta t, y, m)$ выражаются через элементы $\{b_n(y)\}_{n=0}^\infty$:

$$p_*(\Delta t, y, m) = \begin{cases} b_m(y)\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } m \neq 1, \\ 1 + b_1(y)\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } m = 1. \end{cases}$$

В начальный момент времени существует ровно одна частица в точке x . В любой момент времени $t \geq 0$ каждая из частиц за малое время Δt может одно из:

- | | |
|--|---|
| $\left\{ \begin{array}{l} \text{совершить скачок на вектор } z \\ \text{в точке } y \text{ разделиться на } m \text{ частиц} \\ \text{в точке } y \text{ остаться в исходном состоянии} \end{array} \right.$ | $\begin{array}{l} \text{с вероятностью } p(\Delta t, z) \\ \text{с вероятностью } p_*(\Delta t, y, m) \\ \text{с вероятностью } p(\Delta t, 0) \cdot p_*(\Delta t, y, 1) \end{array}$ |
|--|---|

Эволюционный оператор

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}: l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ - операторы блуждания и ветвления соответственно:

$$[\mathcal{A}\psi](x) = (a * \psi)(x); \quad [\mathcal{B}\psi](x) = \beta(x)\psi(x).$$

Теорема (Яровая, 2007)

Первые моменты $m_1(t, y)$ численностей частиц удовлетворяют задаче Коши:

$$\frac{dm_1(t, y)}{dt} = \mathcal{H}m_1(t, y), \quad m_1(0, y) = \delta_x(y),$$

где $\mathcal{H}: l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ - эволюционный оператор средней численности частиц:

$$\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

Цель работы – исследовать зависимость строения спектра оператора \mathcal{H} от геометрической конфигурации источников.

Структура спектра \mathcal{H}

Теорема (Яровая, 2007)

Существенный спектр оператора \mathcal{A} однородного случайного блуждания:

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = [-S, 0], \quad -S := \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} \sum_{x \in \mathbb{Z}} a(x) \cos(x, \theta).$$

Для простого симметричного случайного блуждания:

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(\varkappa \Delta) = [-2\varkappa, 0].$$

Оператор \mathcal{B} - компактен. Следовательно, по критерию Вейля

$$\sigma_{ess}(\mathcal{H}) = \sigma_{ess}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = [-2\varkappa, 0].$$

Теорема (Яровая, 2024)

При $\beta \geq 0$ компактное возмущение $B = \beta \sum_{i=1}^N \Delta_{z_i}$ оператора \mathcal{A} может привести только к появлению не более чем N положительных собственных значений с учётом кратности.

Определение

ВСБ называется надкритическим, если наблюдается экспоненциальный рост численностей частиц в точках решетки.

В работах [4], [5] Е. Б. Яровой показано, что надкритичность ВСБ равносильна наличию у оператора \mathcal{H} положительных собственных значений.

Определение

Величины $\tilde{\beta}_0 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \dots \leq \tilde{\beta}_{N-1}$ назовем критическими интенсивностями \mathcal{H} , если $\forall k = 0, \dots, N$ оператор \mathcal{H} имеет при $\beta < \tilde{\beta}_k$ не более k и при $\beta > \tilde{\beta}_k$ не менее $k + 1$ положительных собственных значений с учетом кратности.

Таким образом, при конечной дисперсии скачков и возвратности блуждания процесс будет надкритическим при $\beta > \tilde{\beta}_0 = 0$.

Дискретный спектр \mathcal{H}

Определим функцию Грина однородного ВСБ:

$$G_\lambda(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t, z) dt$$

Теорема (Яровая, 2012)

λ принадлежит дискретному спектру оператора ВСБ \Leftrightarrow система уравнений

$$V_i - \beta \sum_{j=1}^N G_\lambda(z_i - z_j) V_j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

относительно переменных $\{V_i\}_{i=1}^N$ имеет нетривиальное решение.

Задача поиска критических интенсивностей сводится к вычислению собственных значений матрицы:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} G_\lambda(z_1 - z_1) & G_\lambda(z_1 - z_2) & \dots & G_\lambda(z_1 - z_N) \\ G_\lambda(z_2 - z_1) & G_\lambda(z_2 - z_2) & \dots & G_\lambda(z_2 - z_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_\lambda(z_N - z_1) & G_\lambda(z_N - z_2) & \dots & G_\lambda(z_N - z_N) \end{pmatrix}$$

Функция Грина на прямой

Зафиксируем параметр $\varkappa > 0$.

Утверждение

Функция Грина простого случайного блуждания интенсивности $\varkappa > 0$ на прямой \mathbb{Z} вычисляется по формуле:

$$G_\lambda(r) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda + \varkappa)^2 - \varkappa^2}} \cdot U^{|r|}(\lambda),$$

где

$$U(\lambda) = \frac{(\lambda + \varkappa) - \sqrt{(\lambda + \varkappa)^2 - \varkappa^2}}{\varkappa}.$$

Подставив выражение для функции Грина в матрицу M_λ , получим:

$$M_\lambda = \frac{1}{\sqrt{(\lambda + \varkappa)^2 - \varkappa^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & U^{r_1} & U^{r_1+r_2} & \dots & U^{r_1+\dots+r_n} \\ U^{r_1} & 1 & U^{r_2} & \dots & U^{r_2+\dots+r_n} \\ U^{r_1+r_2} & U^{r_2} & 1 & \dots & U^{r_3+\dots+r_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U^{r_1+\dots+r_n} & U^{r_2+\dots+r_n} & U^{r_3+\dots+r_n} & \dots & 1 \end{pmatrix} (\lambda)$$

Вид обратной матрицы к M_λ

Собственные числа обратной матрицы M_λ^{-1} – значения интенсивности ветвления β , при которых $\lambda \geq 0$ принадлежит дискретному спектру оператора \mathcal{H} .

Лемма

Обратная матрица к M_λ имеет вид:

$$M_\lambda^{-1} = \sqrt{(\lambda + \varkappa)^2 - \varkappa^2} \cdot \begin{pmatrix} D_0 & -B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -B_1 & D_1 & -B_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & D_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{n-1} & -B_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -B_n & D_n \end{pmatrix} (\lambda),$$

$$D_0(\lambda) = \frac{1}{1 - U^{2r_1}}, \quad D_n(\lambda) = \frac{1}{1 - U^{2r_n}},$$

$$D_k(\lambda) = \frac{1 - U^{2(r_k + r_{k+1})}}{(1 - U^{2r_k})(1 - U^{2r_{k+1}})}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

$$B_k(\lambda) = \frac{U^{r_k}}{1 - U^{2r_k}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Фазовые переходы: лемма

Для нахождения критических интенсивностей найдем собственные значения

$$M_0^{-1} := \lim_{\lambda \rightarrow 0+} M_\lambda^{-1} \quad (\text{поэлементно})$$

Подставив асимптотический вид $D_k(\lambda)$ и $B_k(\lambda)$ в матрицу M_λ^{-1} , получим:

$$M_\lambda^{-1} = \frac{\kappa}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & -\frac{1}{r_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_n} & -\frac{1}{r_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{r_n} & \frac{1}{r_n} \end{pmatrix} + O(\lambda^{\frac{1}{2}})W_{n+1},$$

где W_{n+1} - трехдиагональная матрица с единицами на диагоналях.

Таким образом, справедлива лемма:

Лемма

Границы фазовых переходов поведения дискретного спектра оператора \mathcal{H} для конфигурации источников ветвления $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, определяются набором критических интенсивностей $\{\tilde{\beta}_j\}_{j=0}^n$, являющихся собственными значениями трехдиагональной симметричной матрицы:

$$\mathcal{M}_R = \frac{\kappa}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & -\frac{1}{r_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_n} & -\frac{1}{r_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{r_n} & \frac{1}{r_n} \end{pmatrix}.$$

Следствие

Критическая интенсивность $\tilde{\beta}_0 = 0$, т.е. процесс надкритический при положительной интенсивности ветвления.

Следствие

Все критические интенсивности $\{\tilde{\beta}_j\}_{j=0}^n$ лежат на отрезке

$$\left[0, \varkappa \cdot \max \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_{k+1}} \right) \right].$$

Следствие

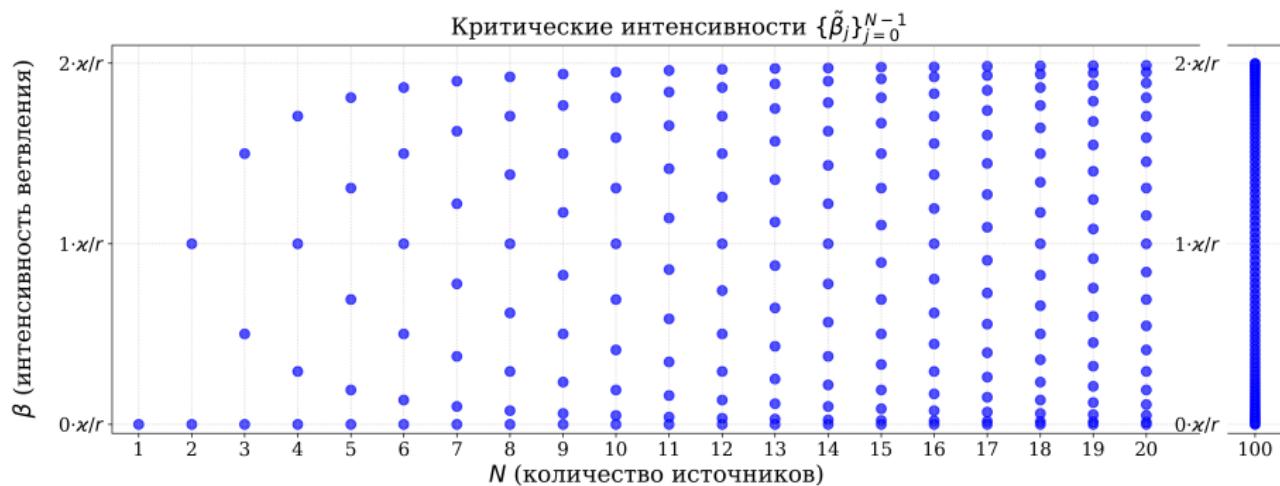
При $\gamma \in \mathbb{N}$ критические интенсивности $\{\tilde{\beta}_j^*\}_{j=0}^n$ для конфигурации $\gamma R = \{\gamma r_1, \gamma r_2, \dots, \gamma r_n\}$ имеют вид:

$$\tilde{\beta}_j^* = \frac{\tilde{\beta}_j}{\gamma}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Теорема

Фазовые переходы в дискретном спектре оператора \mathcal{H} для случая N источников интенсивности β на \mathbb{Z} , расположенных подряд с промежутком $r \geq 1$, определяются критическими значениями интенсивностей $\{\tilde{\beta}_j\}_{j=0}^{N-1}$:

$$\tilde{\beta}_j = \frac{\varkappa}{r} \left(1 - \cos \frac{\pi j}{N} \right), \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$



Островная структура конфигурации источников

Определение

Островом источников назовем последовательность из $k \geq 1$ подряд расположенных источников ветвления.

Для конфигурации источников $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ введем обозначения:

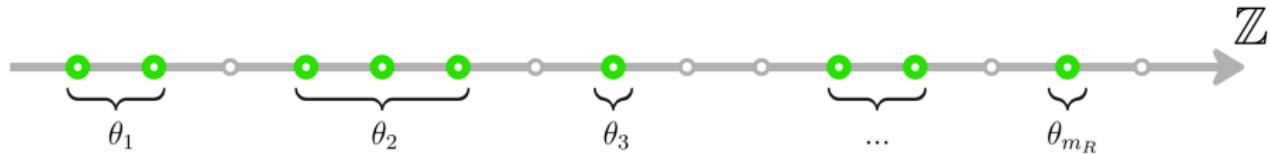
- m_R - количество островов в конфигурации источников
- $m_R(k)$ - количество островов длины k .

Определение

Назовем **островной структурой** конфигурации источников ветвления вектор

$$\Theta_R = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{m_R}),$$

где $\theta_k \geq 1$ - длина k -ого острова.



Поведение собственных значений

Изучим поведение собственных значений \mathcal{H} при растущей интенсивности ветвления $\beta \rightarrow \infty$.

Рассмотрим поведение элементов матрицы M_λ^{-1} при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Элементы матрицы M_λ^{-1} при $\lambda \rightarrow +\infty$ имеют вид:

$$D_k(\lambda) = \lambda + \varkappa + O(\lambda^{-1}), \quad k = 0, \dots, n.$$

$$B_k(\lambda) = \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{r_k} \cdot \lambda^{1-r_k} + O(\lambda^{-r_k}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Упростив, получим:

$$B_k(\lambda) = \begin{cases} \frac{\varkappa}{2} + O(\lambda^{-1}), & r_k = 1, \\ O(\lambda^{1-r_k}), & r_k > 1, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n.$$

Лемма

Имеет место разложение M_λ^{-1} в виде суммы матриц $(n+1) \times (n+1)$:

$$M_\lambda^{-1} = \lambda \cdot I_{n+1} + \frac{\varkappa}{2} Q_R + O(\lambda^{-1}) W_{n+1}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где

- W_{n+1} - трехдиагональная матрица с единицами на диагоналях,
- Q_R - трехдиагональная матрица вида:

$$Q_R = \begin{pmatrix} 2 & -\delta_1(r_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\delta_1(r_1) & 2 & -\delta_1(r_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_1(r_2) & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -\delta_1(r_n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\delta_1(r_n) & 2 \end{pmatrix},$$

$$\delta_1(r) = \begin{cases} 1, & r = 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Поведение собственных значений: структура \mathcal{Q}_R

Введем матрицу размерности $\theta \times \theta$ вида:

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица \mathcal{Q}_R имеет блочно-диагональную структуру:

$$\mathcal{Q}_R = \begin{pmatrix} Q_{\theta_1} & & & & \\ & Q_{\theta_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Q_{\theta_{m_R}} & \end{pmatrix}.$$

Спектр \mathcal{Q}_R имеет вид:

$$\sigma(\mathcal{Q}_R) = \bigcup_{k=1}^{m_R} \sigma(Q_{\theta_k}) \quad (\text{с учетом кратностей}).$$

Поведение собственных значений: теорема

Собственные значения $\{x_j\}_{j=1}^\theta$ матрицы Q_θ (J. F. Elliott, R. T. Gregory, D. Carney):

$$x_j = 2 - 2 \cdot \cos \frac{\pi j}{\theta + 1}, \quad j = 1, \dots, \theta.$$

Тогда j -ое собственное значение матрицы M_λ^{-1} , соответствующее k -ому острову:

$$\beta_{kj} = \varkappa - \varkappa \cdot \cos \frac{\pi j}{\theta_k + 1} + \lambda + O(\lambda^{-1}).$$

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема

Пусть источники ветвления интенсивности β на прямой \mathbb{Z} расположены с промежутками $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Тогда элементы дискретного спектра оператора \mathcal{H} растут линейно, а сам дискретный спектр имеет вид:

$$\sigma_d(\mathcal{H}) = \bigcup_{k:m_R(k)>0} \left\{ \lambda_{js}^{(k)}(\beta, \varkappa), \quad j = 1, \dots, k, \quad s = 1, \dots, m_R(k) \right\},$$

$$\lambda_{js}^{(k)}(\beta) = \beta - \varkappa + \varkappa \cos \frac{\pi j}{k + 1} + O\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad \beta \rightarrow +\infty.$$

Следствие

Пусть источники ветвления интенсивности β на прямой \mathbb{Z} расположены с промежутками $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ и выполняется:

$$r = \min R \geq 2.$$

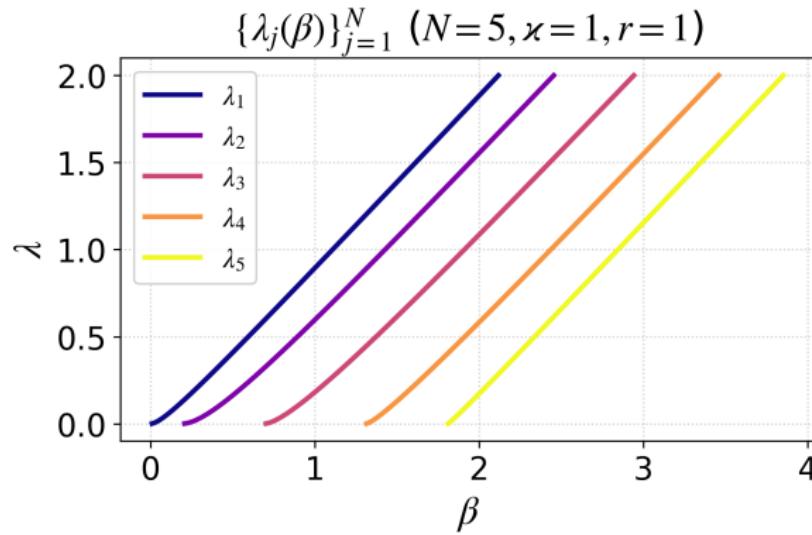
Тогда собственные значения $\{\lambda_j(\beta)\}_{j=0}^n$ оператора \mathcal{H} имеют вид:

$$\lambda_j(\beta) = \beta - \varkappa + O\left(\frac{1}{\beta^{r-1}}\right) \quad j = 0, \dots, n, \quad \beta \rightarrow +\infty.$$

Следствие

Собственные значения $\{\lambda_j^N(\beta)\}_{j=1}^N$ оператора \mathcal{H} для случая N источников интенсивности β на \mathbb{Z} , расположенных с равными промежутками $r = 1$, имеют вид:

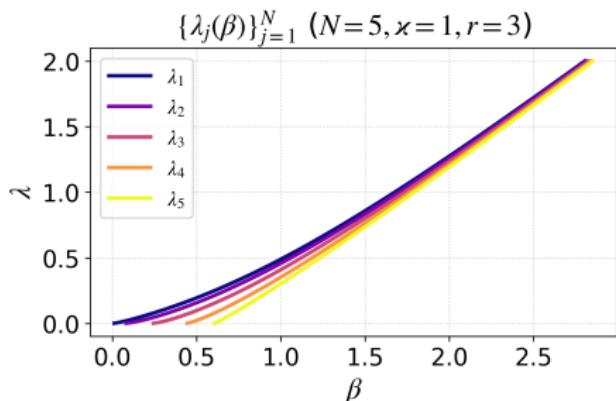
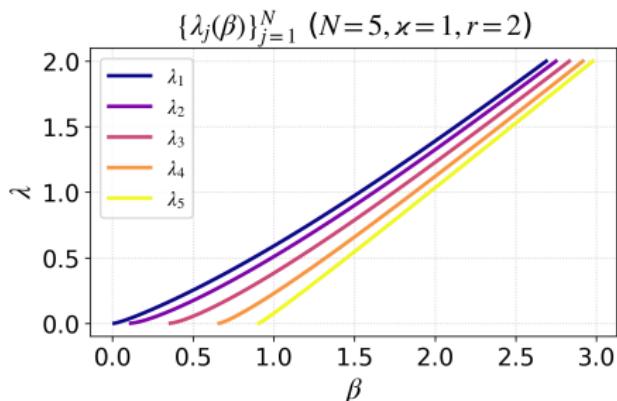
$$\lambda_j^N(\beta) = \beta - \varkappa + \varkappa \cos \frac{\pi j}{N+1} + O\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad \beta \rightarrow +\infty.$$



Следствие

Собственные значения $\{\lambda_j^N(\beta)\}_{j=1}^N$ оператора \mathcal{H} для случая N источников интенсивности β на \mathbb{Z} , расположенных с равными промежутками $r \geq 2$, имеют вид:

$$\lambda_j^N(\beta) = \beta - \varkappa + O\left(\frac{1}{\beta^{r-1}}\right), \quad \beta \rightarrow +\infty.$$



Для конфигурации конечного числа источников равной интенсивности доказано утверждение, позволяющее находить фазовые переходы в поведении дискретного спектра эволюционного оператора. Изучено асимптотическое поведение собственных значений \mathcal{H} при различных островных структурах конфигурации источников.

Для конфигурации конечной цепочки источников с промежутками равной длины доказаны аналогичные теоремы, фазовых переходов вычислены в явном виде. Выявлены новые эффекты в поведении дискретного спектра \mathcal{H} .

Рассмотрение простого симметричного блуждания на прямой позволяет явно вычислить и визуализировать спектральные эффекты при различных геометрических конфигурациях источников ветвления.

Спасибо за внимание!

Список литературы

-  Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий, Теория вероятн. и ее примен., 68:4 (2023), 779–795
-  Е. Б. Яровая, Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: Центр прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, 2007.
-  Filichkina, E., Yarovaya, E. Branching Random Walks on with One Particle Generation Center and Symmetrically Located Absorbing Sources. Methodol Comput Appl Probab 26, 28 (2024)
-  Е. Б. Яровая, Спектральные методы и их применения в анализе ветвящихся случайных блужданий, Теория вероятн. и ее примен., 69:4 (2024), 695–711
-  Е. Б. Яровая, Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий, Математические заметки. 2012. Т. 92. Вып. 1-2. С. 115-131.
-  Е. А. Антоненко, Е. Б. Яровая, Расположение собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании, Современные проблемы математики и механики, 10:3 (2015), 9–22.
-  J. F. Elliott, The characteristic roots of certain real symmetric matrices, Mater thesis, Univ. of Tennessee, 1953.
-  R. T. Gregory, D. Carney, A Collection of Matrices for Testing Computational Algorithm. Wiley-Interscience, New York, 1969.

Теорема (Смородина, Яровая, [1])

Пусть у \mathcal{H} существует старшее простое собственное значение $\lambda_0 > 0$, которому соответствует собственная функция $f_0 \geq 0$ и выполняются условия:

① $\lim_{||y|| \rightarrow \infty} \beta(y) = 0$

② $\exists C < \infty \quad \forall y \in \mathbb{Z} : \quad \beta^{(2)}(y) \leq C$

③ $\sup_{\|h\|=1} \{(\mathcal{H}h, h)\} > 0$

Тогда верна среднеквадратическая сходимость нормированных субпопуляций частиц $\mu_x(t, y)$ в каждой точке y :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}} E(e^{-\lambda_0 t} \mu_x(t, y) - f_0(y) \eta(\infty, x))^2 = 0,$$

где - $\eta(\infty, x)$ - предельная случайная величина мартингала:

$$\eta(t, x) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{y \in X_t} f_0(y) \quad \eta(0, x) = f_0(x)$$