Мартингальные преобразования и минимальные бивогнутые функции

Михаил Новиков, ПОМИ РАН

19.11.2025

9-ая Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике.

Мартингальное преобразование

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$.

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1 \chi_1 + \ldots + \alpha_n \chi_n$, где

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n$, где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

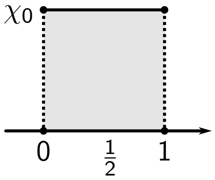
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n$, где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.



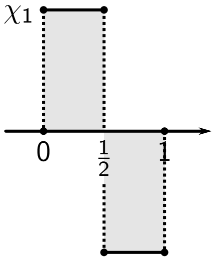
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n$, где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.



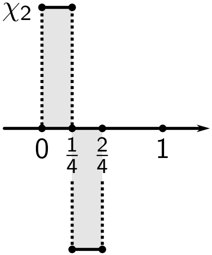
Мартингальное преобразование

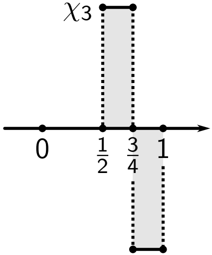
Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}: \ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$$\varphi_n = \alpha_1 \chi_1 + \ldots + \alpha_n \chi_n, \quad \text{где } \{\chi_n\} \text{ — система Хаара.}$$





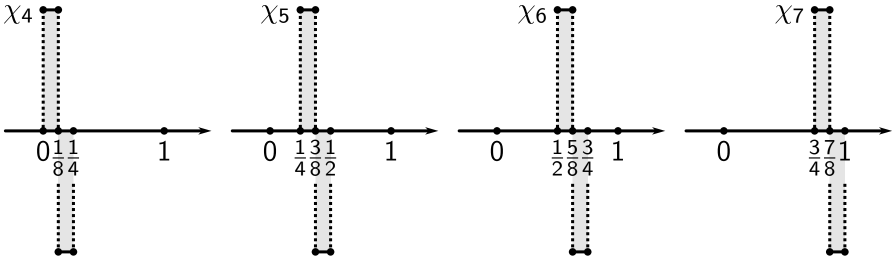
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n,$ где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.



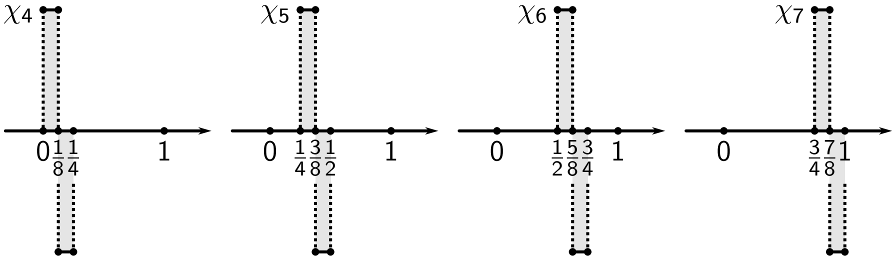
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n, \quad \text{где } \{\chi_n\} = \{1\} \cup \left\{2^{\frac{m}{2}}\chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\right\}_{m,k}.$$



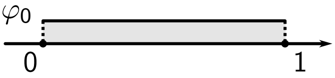
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n, \quad \text{где } \{\chi_n\} = \{1\} \cup \{2^{\frac{m}{2}}\chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\}_{m,k}.$$



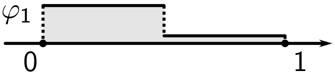
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n, \quad \text{где } \{\chi_n\} = \{1\} \cup \{2^{\frac{m}{2}}\chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\}_{m,k}.$$



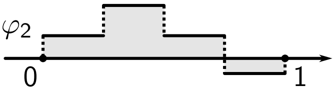
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n, \quad \text{где } \{\chi_n\} = \{1\} \cup \{2^{\frac{m}{2}}\chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\}_{m,k}.$$



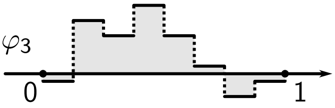
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n$, где $\{\chi_n\} = \{1\} \cup \{2^{\frac{m}{2}}\chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\}_{m,k}$.



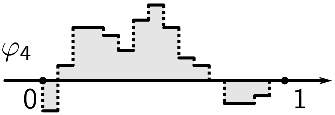
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}: \ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$$\varphi_n = \alpha_1 \chi_1 + \ldots + \alpha_n \chi_n, \quad \text{где } \{\chi_n\} = \{1\} \cup \{2^{\frac{m}{2}} \chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\}_{m,k}.$$



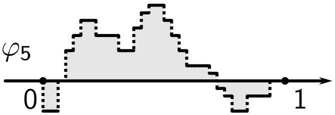
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \;\; \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$$\varphi_n = \alpha_1 \chi_1 + \ldots + \alpha_n \chi_n, \quad \text{где } \{\chi_n\} = \{1\} \cup \{2^{\frac{m}{2}} \chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\}_{m,k}.$$



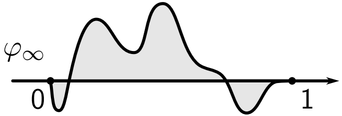
Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n$, где $\{\chi_n\} = \{1\} \cup \{2^{\frac{m}{2}}\chi_{[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]}\}_{m,k}$.



Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n$, где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n,$ где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

Введём ψ — мартингальное преобразование, мартингала φ

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1 \chi_1 + \ldots + \alpha_n \chi_n,$ где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

Введём ψ — мартингальное преобразование, мартингала φ, а именно

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1 \chi_1 + \ldots + \alpha_n \chi_n,$ где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

Введём ψ — мартингальное преобразование, мартингала φ, а именно

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}: \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (1984, D. L. Burkholder)

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1 \chi_1 + \ldots + \alpha_n \chi_n$, где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

Введём ψ — мартингальное преобразование, мартингала φ, а именно

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (1984, D. L. Burkholder)

Если $|\varphi_\infty| \leqslant 1$ *и* $\varphi_0 = \psi_0 = 0$,

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n,$ где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

Введём ψ — мартингальное преобразование, мартингала φ, а именно

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (1984, D. L. Burkholder)

Если $|\varphi_\infty| \leqslant 1$ *и* $\varphi_0 = \psi_0 = 0$, *то* $\mathbb{E}|\psi_\infty|^p \leqslant \frac{1}{2}\Gamma(p+1)$, *где* $p > 2$.

Мартингальное преобразование

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть семейством таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Введём простой мартингал $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ и его предельное значение φ_∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_n = \mathbb{E}\left(\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \varphi_N = \varphi_{N+1} = \ldots = \varphi_\infty.$$

Пример

$\varphi_n = \alpha_1\chi_1 + \ldots + \alpha_n\chi_n$, где $\{\chi_n\}$ — система Хаара.

Введём ψ — мартингальное преобразование, мартингала φ, а именно

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (1984, D. L. Burkholder)

Если $|\varphi_\infty| \leqslant 1$ *и* $\varphi_0 = \psi_0 = 0$, *то* $\mathbb{E}|\psi_\infty|^p \leqslant \frac{1}{2}\Gamma(p+1)$, *где* $p > 2$.
При этом, данное неравенство является точным.

Бивогнутые функции

Бивогнутые функции

Определение

Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Пример

Бивогнутые функции

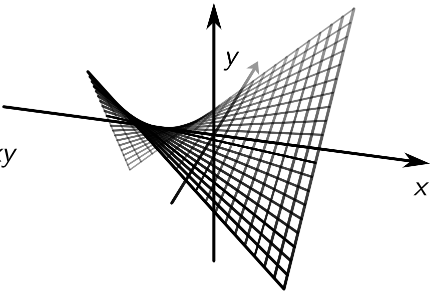
Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Пример

Функция $g(x, y) = xy$ бивогнута, но не вогнута ($g(x, x) = x^2$).

$\varphi(x, y) = xy$



Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Введём область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ по следующей формуле:

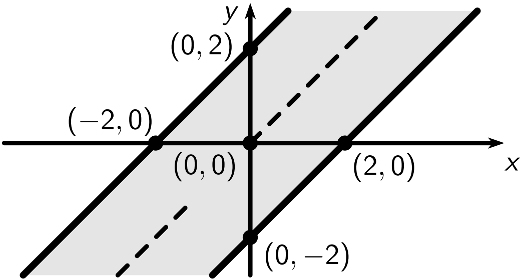
Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Введём область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ по следующей формуле:

$$\mathfrak{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2\right\}.$$



Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Введём область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ по следующей формуле:

$$\mathfrak{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2\right\}.$$

Определение

Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t,a)$ и $t \to g(a,t)$ вогнуты.

Введём область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ по следующей формуле:

$$\mathfrak{S} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x-2 \leqslant y \leqslant x+2\right\}.$$

Определение

Бивогнутая функция $\mathcal{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется минимальной, если $B \geqslant \mathcal{B}$ для любой бивогнутой функции $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, т. ч. $B|_{\partial\mathfrak{S}} \geqslant \mathcal{B}$.

Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Введём область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ по следующей формуле:

$$\mathfrak{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2\right\}.$$

Определение

Бивогнутая функция $\mathcal{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется минимальной, если $B \geqslant \mathcal{B}$ для любой бивогнутой функции $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, т. ч. $B|_{\partial\mathfrak{S}} \geqslant \mathcal{B}$.

Лемма

Бивогнутые функции

Определение

Функция $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется бивогнутой, если для всех чисел $a \in \mathbb{R}$ отображения $t \to g(t, a)$ и $t \to g(a, t)$ вогнуты.

Введём область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ по следующей формуле:

$$\mathfrak{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2\right\}.$$

Определение

Бивогнутая функция $\mathcal{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется минимальной, если $B \geqslant \mathcal{B}$ для любой бивогнутой функции $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, т. ч. $B|_{\partial\mathfrak{S}} \geqslant \mathcal{B}$.

Лемма

Для любой функции f существует минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f]$, т. ч. $\mathcal{B}[f](x+1, x-1) = f(x)$, $\mathcal{B}[f](x-1, x+1) = g(x)$.

Функция Беллмана

Функция Беллмана

Определение

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

почти наверное $\quad \varphi_0 = y$

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x$$

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1$$

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы. Определим функцию Беллмана

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x,y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1,1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы. Определим функцию Беллмана

$$\mathbf{B}[f,g]\colon \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R}$$

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы. Определим функцию Беллмана

$$\mathbf{B}[f, g](x, y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi, \psi) \in M(x, y)\right\},$$

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x, y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы. Определим функцию Беллмана

$$\mathbf{B}[f, g](x, y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi, \psi) \in M(x, y)\right\},$$

где $H(x, -1) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$. Тогда

Функция Беллмана

Определение

Пусть $M(x,y)$ — множество пар мартингалов φ, ψ , таких что

$$\text{почти наверное} \quad \varphi_0 = y, \quad \psi_0 = x, \quad |\varphi_\infty| = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon \in \{-1,1\} : \quad (\psi_{n+1} - \psi_n) = \varepsilon(\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы. Определим функцию Беллмана

$$\mathbf{B}[f,g](x,y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi,\psi) \in M(x,y)\right\},$$

где $H(x,-1) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. Тогда

$$\mathbf{B}[f,g]\,(x,y) = \mathcal{B}[f,g](x+y, x-y).$$

Функция Беллмана

Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы. Определим функцию Беллмана

$$\mathbf{B}[f,g](x,y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty,\varphi_\infty),\ (\varphi,\psi) \in M(x,y)\right\},$$

где $H(x,-1) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. Тогда

$$\mathbf{B}[f,g]\,(x,y) = \mathcal{B}[f,g](x+y,x-y).$$

Функция Беллмана

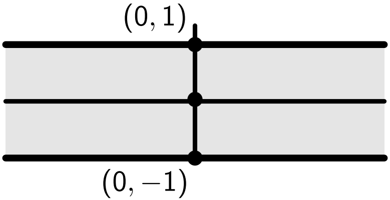
Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *измеримы. Определим функцию Беллмана*

$$\mathbf{B}[f,g](x,y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi,\psi) \in M(x,y)\right\},$$

где $H(x,-1) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. *Тогда*

$$\mathbf{B}[f,g]\,(x,y) = \mathcal{B}[f,g](x+y, x-y).$$



Функция Беллмана

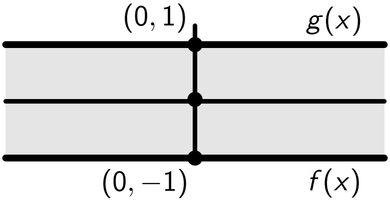
Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *измеримы. Определим функцию Беллмана*

$$\mathbf{B}[f,g](x,y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi,\psi) \in M(x,y)\right\},$$

где $H(x,-1) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. *Тогда*

$$\mathbf{B}[f,g]\,(x,y) = \mathcal{B}[f,g](x+y, x-y).$$



Функция Беллмана

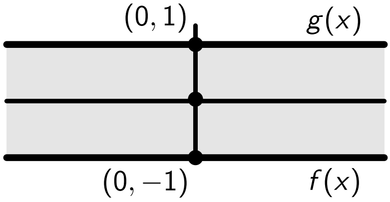
Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

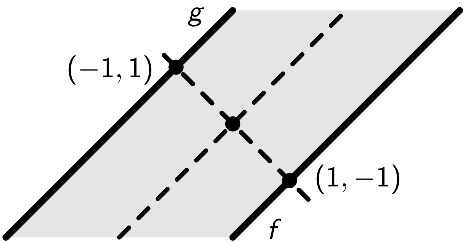
Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы. Определим функцию Беллмана

$$\mathbf{B}[f,g](x,y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi,\psi) \in M(x,y)\right\},$$

где $H(x,-1) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. Тогда

$$\mathbf{B}[f,g]\,(x,y) = \mathcal{B}[f,g](x+y, x-y).$$





Функция Беллмана

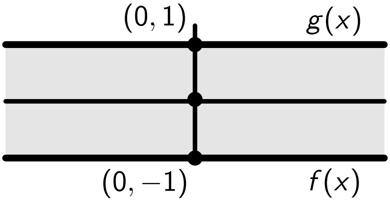
Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

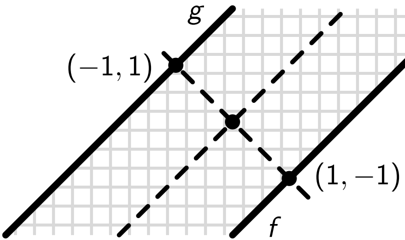
Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *измеримы. Определим функцию Беллмана*

$$\mathbf{B}[f,g](x,y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi,\psi) \in M(x,y)\right\},$$

где $H(x,-1) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. *Тогда*

$$\mathbf{B}[f,g]\,(x,y) = \mathcal{B}[f,g](x+y, x-y).$$





Функция Беллмана

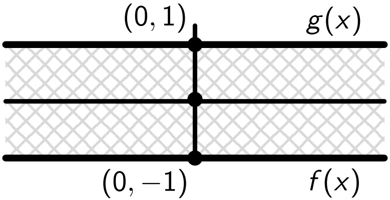
Теорема (по мотивам работ Д. Буркхольдера)

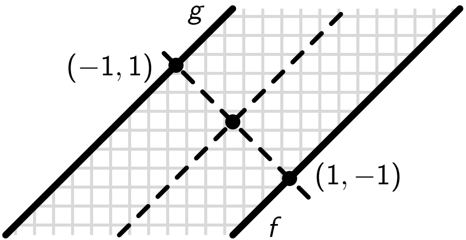
Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *измеримы. Определим функцию Беллмана*

$$\mathbf{B}[f,g](x,y) = \sup\left\{\mathbb{E}H(\psi_\infty, \varphi_\infty),\ (\varphi,\psi) \in M(x,y)\right\},$$

где $H(x,-1) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. *Тогда*

$$\mathbf{B}[f,g]\,(x,y) = \mathcal{B}[f,g](x+y, x-y).$$





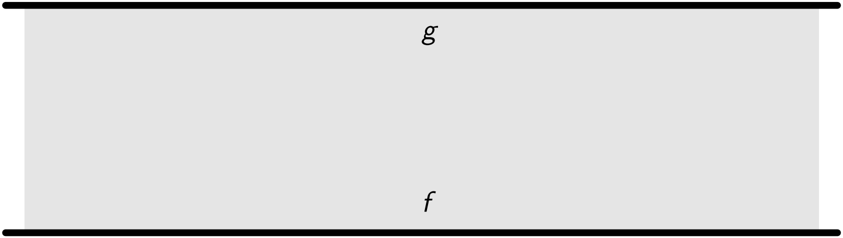
Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

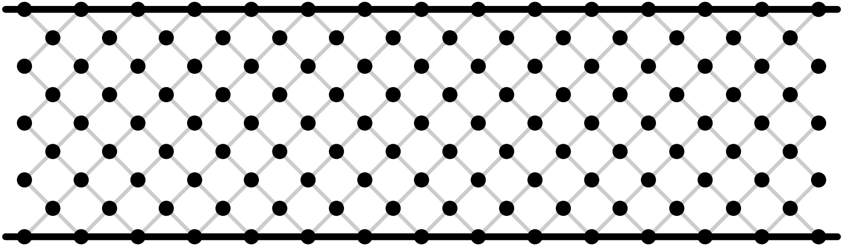
Пусть функции f, g непрерывны.



Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g *непрерывны. Введём функции* $B_n^k : \mathfrak{S} \cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$*:*

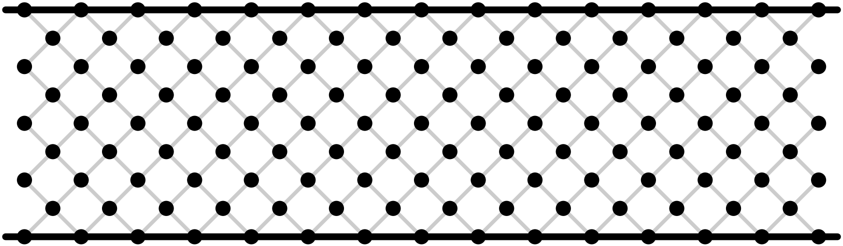


Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g непрерывны. Введём функции $B_n^k\colon \mathfrak{S} \cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$:

- $B_n^0(x+1, x-1) = f(x)$, $B_n^0(x-1, x+1) = g(x)$ *и* $B_n^0\big|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = -\infty$;

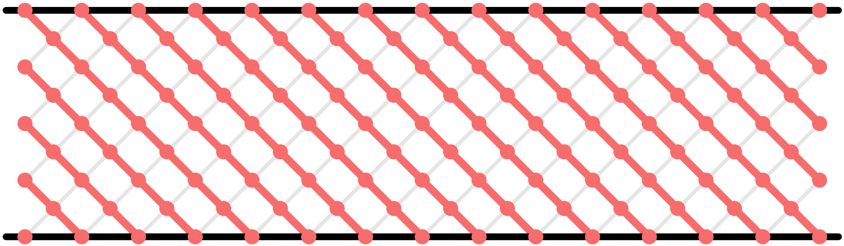


Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g непрерывны. Введём функции $B_n^k\colon \mathfrak{S} \cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$:

- $B_n^0(x+1, x-1) = f(x)$, $B_n^0(x-1, x+1) = g(x)$ *и* $B_n^0\big|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = -\infty$;
- B_n^{2k+1} *— минимальная вогнутая по x функция, т. ч.* $B_n^{2k+1} \geqslant B_n^{k2k}$;

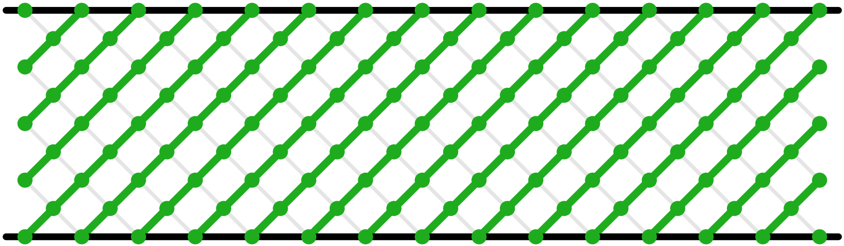


Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g непрерывны. Введём функции $B_n^k\colon \mathfrak{S} \cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$:

- $B_n^0(x+1, x-1) = f(x)$, $B_n^0(x-1, x+1) = g(x)$ *и* $B_n^0\big|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = -\infty$;
- B_n^{2k+1} — *минимальная вогнутая по* x *функция, т. ч.* $B_n^{2k+1} \geqslant B_n^{k2k}$;
- B_n^{2k} — *минимальная вогнутая по* y *функция, т. ч.* $B_n^{2k} \geqslant B_n^{2k-1}$.



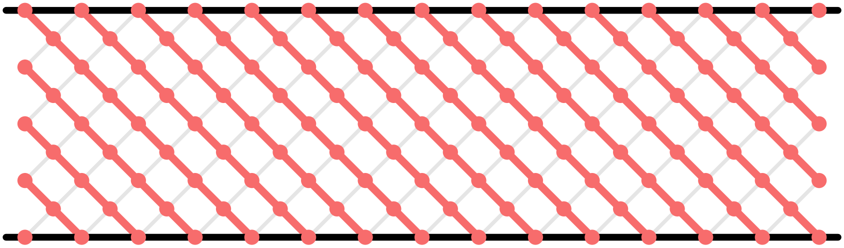
Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g непрерывны. Введём функции $B_n^k\colon \mathfrak{S} \cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$:

- $B_n^0(x+1, x-1) = f(x)$, $B_n^0(x-1, x+1) = g(x)$ *и* $B_n^0\big|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = -\infty$;
- B_n^{2k+1} *— минимальная вогнутая по x функция, т. ч.* $B_n^{2k+1} \geqslant B_n^{k2k}$;
- B_n^{2k} *— минимальная вогнутая по y функция, т. ч.* $B_n^{2k} \geqslant B_n^{2k-1}$.

Тогда $\mathfrak{B}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} B_n^k(x, y)$ *для любой точки* $(x, y) \in \frac{1}{2^m}\mathbb{Z}^2$.



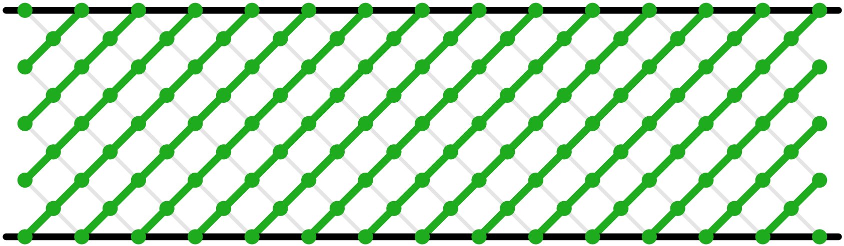
Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g непрерывны. Введём функции $B_n^k\colon \mathfrak{S} \cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$:

- $B_n^0(x+1, x-1) = f(x)$, $B_n^0(x-1, x+1) = g(x)$ *и* $B_n^0\big|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = -\infty$;
- B_n^{2k+1} *— минимальная вогнутая по x функция, т. ч.* $B_n^{2k+1} \geqslant B_n^{k2k}$;
- B_n^{2k} *— минимальная вогнутая по y функция, т. ч.* $B_n^{2k} \geqslant B_n^{2k-1}$.

Тогда $\mathfrak{B}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} B_n^k(x, y)$ *для любой точки* $(x, y) \in \frac{1}{2^m}\mathbb{Z}^2$.



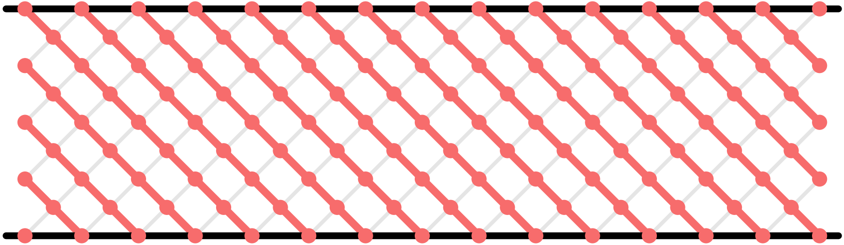
Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g непрерывны. Введём функции $B_n^k\colon \mathfrak{S}\cap\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}$:

- $B_n^0(x+1,x-1)=f(x)$, $B_n^0(x-1,x+1)=g(x)$ *и* $B_n^0\big|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}}=-\infty$;
- B_n^{2k+1} *— минимальная вогнутая по x функция, т. ч.* $B_n^{2k+1}\geqslant B_n^{k2k}$;
- B_n^{2k} *— минимальная вогнутая по y функция, т. ч.* $B_n^{2k}\geqslant B_n^{2k-1}$.

Тогда $\mathfrak{B}(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}B_n^k(x,y)$ *для любой точки* $(x,y)\in\frac{1}{2^m}\mathbb{Z}^2$.



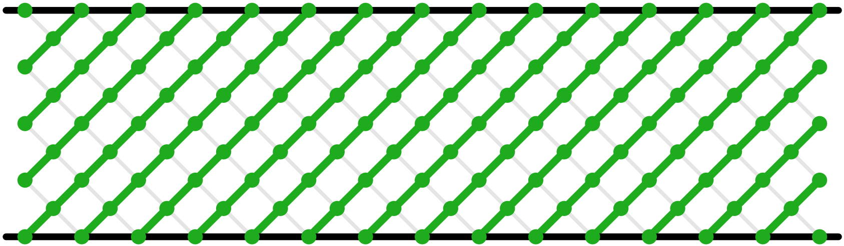
Профиль минимальной бивогнутой функции

Лемма

Пусть функции f, g непрерывны. Введём функции $B_n^k\colon \mathfrak{S}\cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$:

- $B_n^0(x+1,x-1) = f(x)$, $B_n^0(x-1,x+1) = g(x)$ *и* $B_n^0\big|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = -\infty$;
- B_n^{2k+1} *— минимальная вогнутая по x функция, т. ч.* $B_n^{2k+1} \geqslant B_n^{k2k}$;
- B_n^{2k} *— минимальная вогнутая по y функция, т. ч.* $B_n^{2k} \geqslant B_n^{2k-1}$.

Тогда $\mathfrak{B}(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} B_n^k(x,y)$ *для любой точки* $(x,y)\in \frac{1}{2^m}\mathbb{Z}^2$.



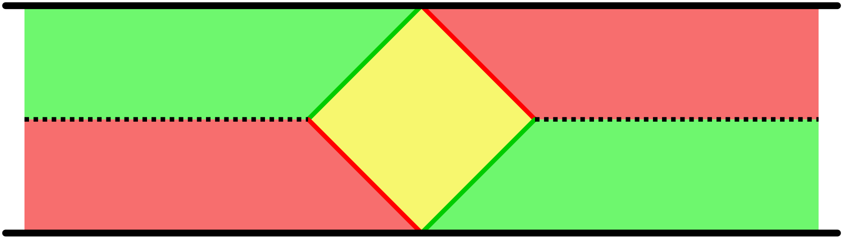
Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

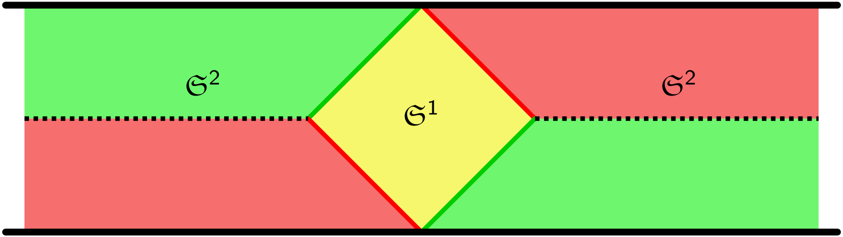
Для любого $p \in (2, +\infty)$ имеет место равенство $\mathfrak{B}[|t|^p, |t|^p](x, y) =$



Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

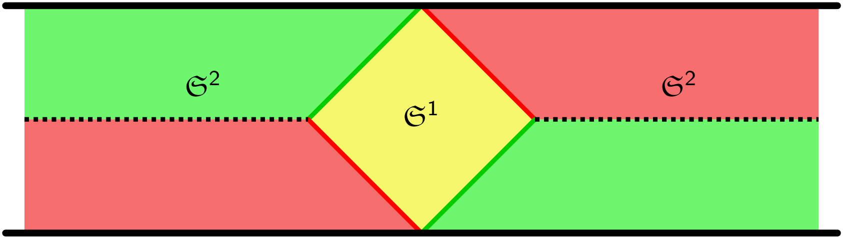
Для любого $p \in (2, +\infty)$ *имеет место равенство* $\mathfrak{B}[|t|^p, |t|^p](x, y) =$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1 + xy)\Gamma(p+1), & \textit{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{1}{2}|x - y| \cdot f_1(|x| \vee |y| - 1) + (1 - \frac{1}{2}|x - y|)g(|x| \vee |y| - 1), & \textit{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^2, \end{cases}$$



Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

Для любого $p \in (2, +\infty)$ *имеет место равенство* $\mathfrak{B}[|t|^p, |t|^p](x, y) =$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1 + xy)\Gamma(p + 1), & \text{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{1}{2}|x - y| \cdot f_1(|x| \vee |y| - 1) + (1 - \frac{1}{2}|x - y|)g(|x| \vee |y| - 1), & \text{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^2, \end{cases}$$
где $g(t) = e^t \int_t^{+\infty} s^p e^{-s}\,\mathrm{d}s$.



Профиль минимальной бивогнутой функции

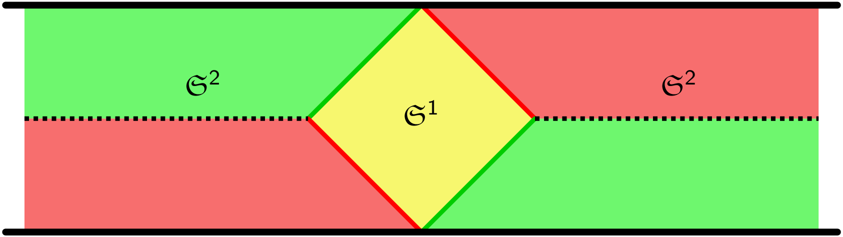
Утверждение

Для любого $p \in (2, +\infty)$ *имеет место равенство* $\mathfrak{B}[|t|^p, |t|^p](x, y) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1 + xy)\Gamma(p+1), & \textit{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{1}{2}|x-y| \cdot f_1(|x| \vee |y| - 1) + (1 - \frac{1}{2}|x-y|)g(|x| \vee |y| - 1), & \textit{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^2, \end{cases}$$

где $g(t) = e^t \int_t^{+\infty} s^p e^{-s}\, \mathrm{d}s$.

Следствие: $\mathbb{E}\psi_\infty \leqslant \frac{1}{2}\Gamma(p+1)$, если $p \in (2, +\infty)$.



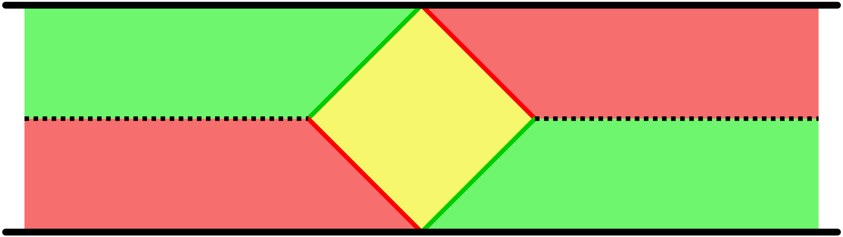
Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

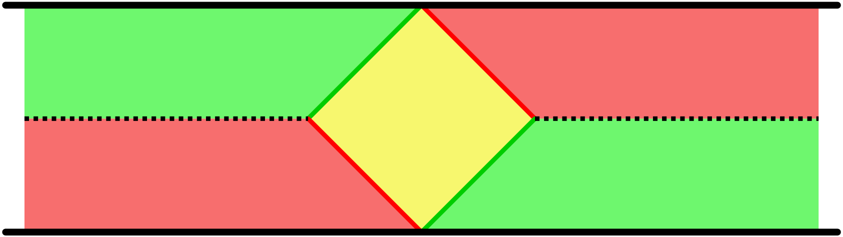
Для любого $\lambda \in [0,1)$ *имеет место равенство* $\mathfrak{B}[e^{|t|}, e^{|t|}](x,y) =$



Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

Для любого $\lambda \in [0,1)$ *имеет место равенство* $\mathfrak{B}[e^{|t|}, e^{|t|}](x,y) =$
$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-\lambda)}(1+xy) + \frac{1}{2}(1-xy), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{2}|x-y|\right) e^{\lambda(|x|\vee|y|)}, & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2. \end{cases}$$

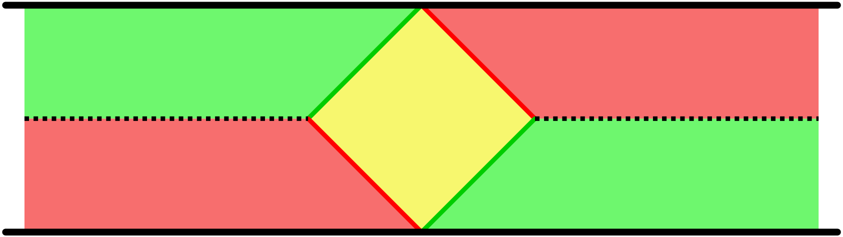


Профиль минимальной бивогнутой функции

Утверждение

Для любого $\lambda \in [0,1)$ *имеет место равенство* $\mathfrak{B}[e^{|t|}, e^{|t|}](x,y) =$
$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-\lambda)}(1+xy) + \frac{1}{2}(1-xy), & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{2}|x-y|\right) e^{\lambda(|x| \vee |y|)}, & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2. \end{cases}.$$

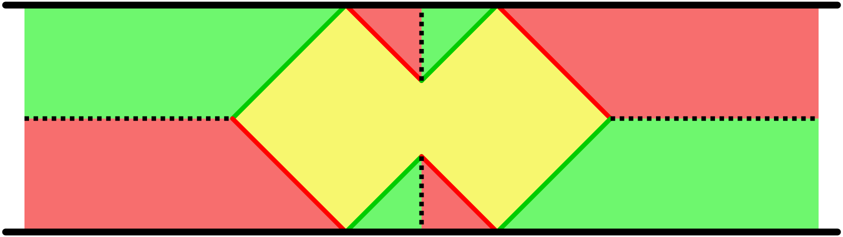
Следствие: $\mathbb{E} e^{\lambda|\psi_\infty|} \leqslant \frac{1-\lambda/2}{1-\lambda} < +\infty$, если $\lambda \in (0,1)$.



Утверждение

Утверждение

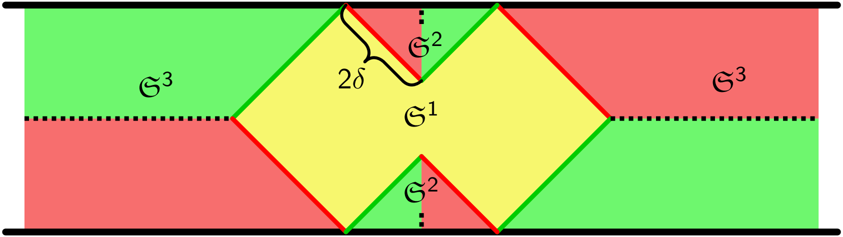
Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$.



Утверждение

Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f,f](x,y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \text{\textit{если} } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1-|x|\wedge|y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1-|x|\wedge|y|), & \text{\textit{если} } (x,y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x-y| f(|x|\vee|y|-1) + (1-\frac{1}{2}|x-y|) h(|x|\vee|y|-1), & \text{\textit{если} } (x,y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

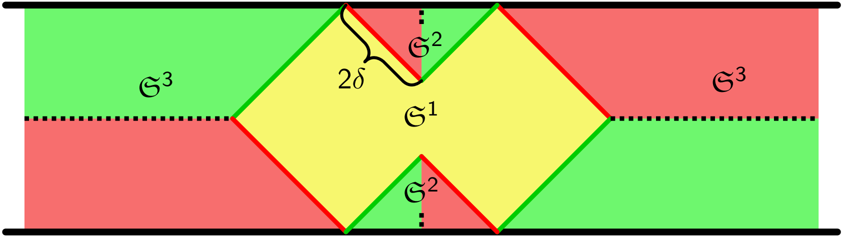


Утверждение

Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f,f](x,y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1-|x|\wedge|y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1-|x|\wedge|y|), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x-y| f(|x|\vee|y|-1) + (1-\frac{1}{2}|x-y|) h(|x|\vee|y|-1), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

где $\quad \mathrm{arcctg}(\delta) = \frac{2\delta^3-\delta^2+1}{\delta(1+\delta^2)^2}$

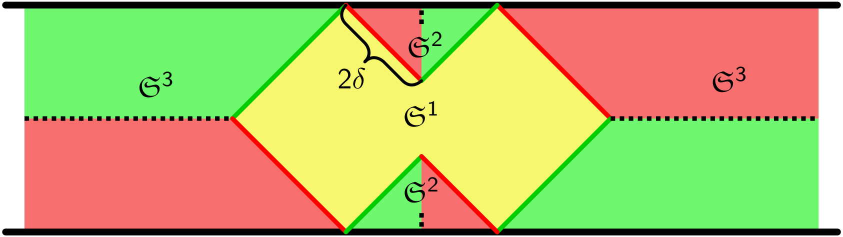


Утверждение

Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f,f](x,y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1-|x|\wedge|y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1-|x|\wedge|y|), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x-y| f(|x|\vee|y|-1) + (1-\frac{1}{2}|x-y|) h(|x|\vee|y|-1), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

где $\quad \operatorname{arcctg}(\delta) = \frac{2\delta^3-\delta^2+1}{\delta(1+\delta^2)^2}, \quad a = \frac{1+4\delta^3-\delta^4}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$

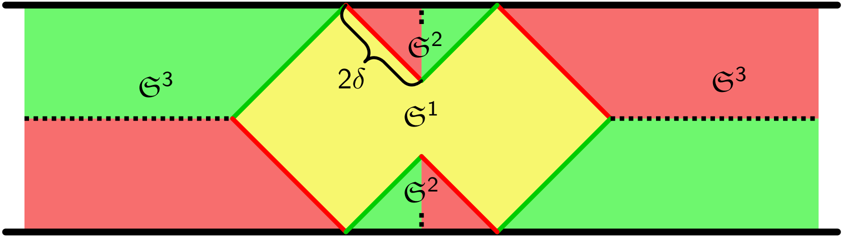


Утверждение

Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f,f](x,y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1-|x|\wedge|y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1-|x|\wedge|y|), & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x-y| f(|x|\vee|y|-1) + (1-\frac{1}{2}|x-y|) h(|x|\vee|y|-1), & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

где $\operatorname{arcctg}(\delta) = \frac{2\delta^3-\delta^2+1}{\delta(1+\delta^2)^2}$, $\quad a = \frac{1+4\delta^3-\delta^4}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $\quad b = \frac{(1-\delta)^2}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$



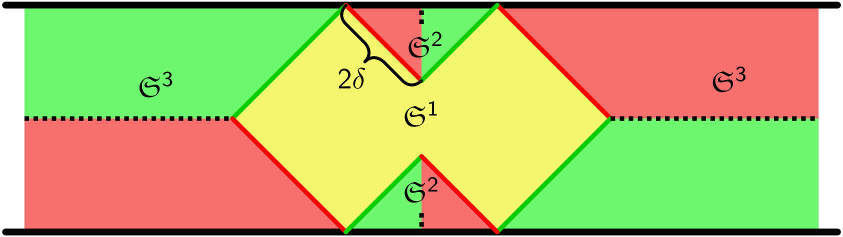
Утверждение

Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f,f](x,y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1-|x|\wedge|y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1-|x|\wedge|y|), & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x-y| f(|x|\vee|y|-1) + (1-\frac{1}{2}|x-y|) h(|x|\vee|y|-1), & \textit{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

где $\operatorname{arcctg}(\delta) = \frac{2\delta^3-\delta^2+1}{\delta(1+\delta^2)^2}$, $\quad a = \frac{1+4\delta^3-\delta^4}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $\quad b = \frac{(1-\delta)^2}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$,

$c = \frac{2-3\delta+4\delta^2-\delta^3}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$



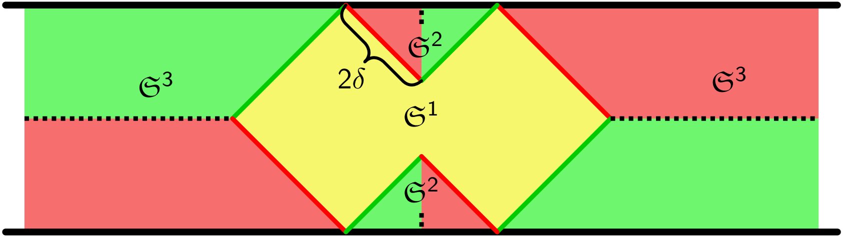
Утверждение

Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f, f](x, y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \text{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1 - |x| \wedge |y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1 - |x| \wedge |y|), & \text{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x - y| f(|x| \vee |y| - 1) + (1 - \frac{1}{2}|x - y|) h(|x| \vee |y| - 1), & \text{если } (x, y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

где $\operatorname{arcctg}(\delta) = \frac{2\delta^3-\delta^2+1}{\delta(1+\delta^2)^2}$, $a = \frac{1+4\delta^3-\delta^4}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $b = \frac{(1-\delta)^2}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$,

$c = \frac{2-3\delta+4\delta^2-\delta^3}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $g(t) = ct + t\int_t^\delta \frac{e^s \mathrm{d}s}{s^2(1+s^2)}$



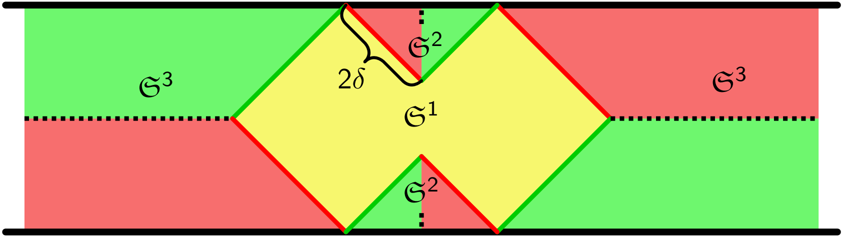
Утверждение

Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f,f](x,y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1-|x|\wedge|y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1-|x|\wedge|y|), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x-y| f(|x|\vee|y|-1) + (1-\frac{1}{2}|x-y|) h(|x|\vee|y|-1), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

где $\operatorname{arcctg}(\delta) = \frac{2\delta^3-\delta^2+1}{\delta(1+\delta^2)^2}$, $a = \frac{1+4\delta^3-\delta^4}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $b = \frac{(1-\delta)^2}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$,

$c = \frac{2-3\delta+4\delta^2-\delta^3}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $g(t) = ct + t\int_t^\delta \frac{e^s\,\mathrm{d}s}{s^2(1+s^2)}$, $h(t) = e^t \operatorname{arcctg}(t)$



Утверждение

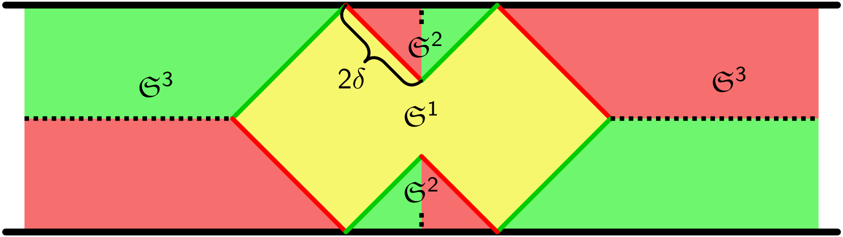
Пусть $f(t) = \frac{e^{|t|}}{1+t^2}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{B}[f,f](x,y) =$

$$\begin{cases} a + bxy, & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^1; \\ \frac{|x+y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} f(1-|x|\wedge|y|) + \frac{2-|x-y|}{2(1-|x|\wedge|y|)} g(1-|x|\wedge|y|), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^2;, \\ \frac{1}{2}|x-y| f(|x|\vee|y|-1) + (1-\frac{1}{2}|x-y|) h(|x|\vee|y|-1), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}^3; \end{cases}$$

где $\operatorname{arcctg}(\delta) = \frac{2\delta^3-\delta^2+1}{\delta(1+\delta^2)^2}$, $a = \frac{1+4\delta^3-\delta^4}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $b = \frac{(1-\delta)^2}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$,

$c = \frac{2-3\delta+4\delta^2-\delta^3}{2\delta(1+\delta^2)} f_3(\delta)$, $g(t) = ct + t\int_t^\delta \frac{e^s\,\mathrm{d}s}{s^2(1+s^2)}$, $h(t) = e^t \operatorname{arcctg}(t)$

Следствие: $\mathbb{E}\left(\frac{e^{|\psi_\infty|}}{1+\psi_\infty^2}\right) \leqslant a \approx 1.448 < +\infty.$



Профиль минимальной бивогнутой функции

Профиль минимальной бивогнутой функции

Приведём ещё несколько примеров минимальных бивогнутых функций.

Профиль минимальной бивогнутой функции

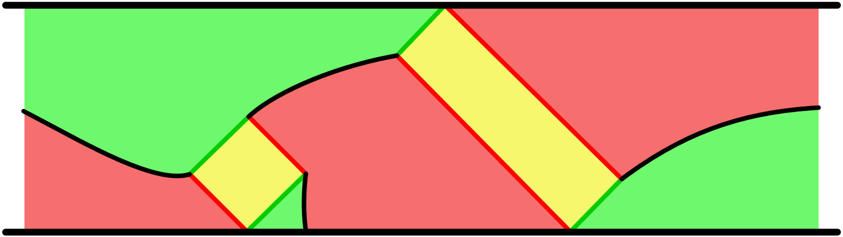
Приведём ещё несколько примеров минимальных бивогнутых функций.

$$f(t) = 2(t+8)(t+4.8)(t-0.4)(t-5)(t-8);$$
$$g(t) = 7(t+5.2)(t+0.4)(t-5.2)(t-3.8).$$

Профиль минимальной бивогнутой функции

Приведём ещё несколько примеров минимальных бивогнутых функций.

$$f(t) = 2(t+8)(t+4.8)(t-0.4)(t-5)(t-8);$$
$$g(t) = 7(t+5.2)(t+0.4)(t-5.2)(t-3.8).$$



Профиль минимальной бивогнутой функции

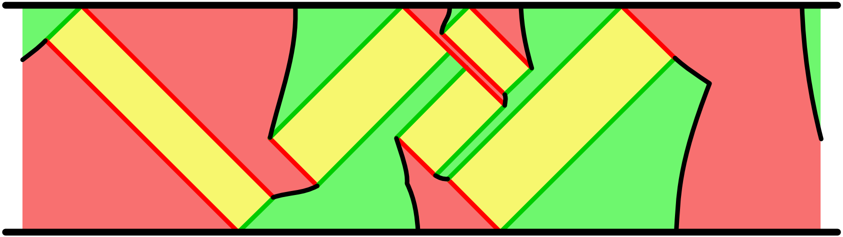
Приведём ещё несколько примеров минимальных бивогнутых функций.

$$f(t) = t\sin(3\log(|t| + 1.5));$$
$$g(t) = t\sin(5.5 \cdot \log(|t| + 1.5)).$$

Профиль минимальной бивогнутой функции

Приведём ещё несколько примеров минимальных бивогнутых функций.

$$f(t) = t\sin(3\log(|t| + 1.5));$$
$$g(t) = t\sin(5.5 \cdot \log(|t| + 1.5)).$$



Профиль минимальной бивогнутой функции

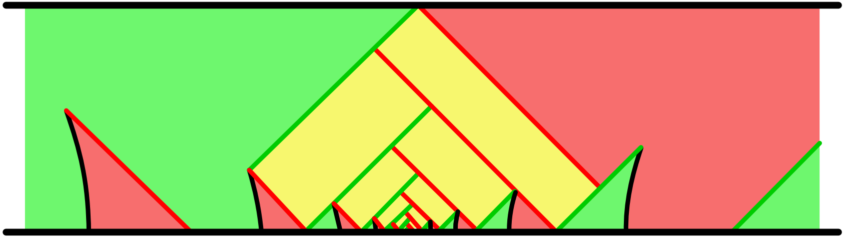
Приведём ещё несколько примеров минимальных бивогнутых функций.

$$f(t) = t\sin(8.15 \cdot \log(abs(t)));$$
$$g(t) = 1.$$

Профиль минимальной бивогнутой функции

Приведём ещё несколько примеров минимальных бивогнутых функций.

$$f(t) = t\sin(8.15 \cdot \log(abs(t)));$$
$$g(t) = 1.$$



Достаточные условия минимальности

Определение

Достаточные условия минимальности

Определение

Функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$

Достаточные условия минимальности

Определение

Функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$

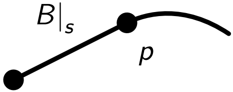
- линейна по x в точке $p \in \operatorname{int} \mathfrak{S}$, если линейно сужение $B|_s$, где $s \subset \mathbb{R}^2$ — открытый интервал, т. ч. $p \in s$ и $s \parallel Ox$.

Достаточные условия минимальности

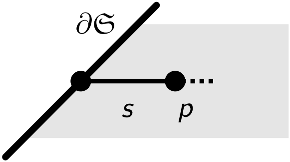
Определение

Функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$

- линейна по x в точке $p \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$, если линейно сужение $B\big|_s$, где $s \subset \mathbb{R}^2$ — открытый интервал, т. ч. $p \in s$ и $s \parallel Ox$.
- экстремальна по y в точке $p \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$, если $\frac{\partial}{\partial x}B(p)$ существует и сужение $B\big|_s$ линейно, где $s = [p, q] \subset \mathbb{R}^2$ — отрезок с концами в точках p, q, т. ч. $q \in \partial\mathfrak{S}$ и $s \parallel Ox$.



экстремальность



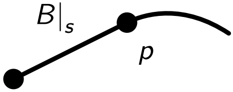
Достаточные условия минимальности

Определение

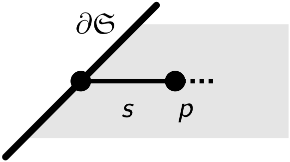
Функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$

- линейна по x в точке $p \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$, если линейно сужение $B\big|_s$, где $s \subset \mathbb{R}^2$ — открытый интервал, т. ч. $p \in s$ и $s \parallel Ox$.
- экстремальна по y в точке $p \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$, если $\frac{\partial}{\partial x}B(p)$ существует и сужение $B\big|_s$ линейно, где $s = [p, q] \subset \mathbb{R}^2$ — отрезок с концами в точках p, q, т. ч. $q \in \partial\mathfrak{S}$ и $s \parallel Ox$.

Аналогично вводится линейность и экстремальность по y.



экстремальность



Определение

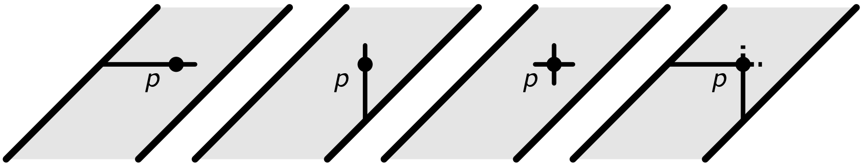
Определение

Функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется кандидатом, если она локально ограничена, полунепрерывна сверху и для любой точки $p \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$ выполняется хотя бы одно из условий

Определение

Функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется кандидатом, если она локально ограничена, полунепрерывна сверху и для любой точки $p \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$ выполняется хотя бы одно из условий

1. функция $\mathfrak{B}$ линейна по x и экстремальна по x в точке p;

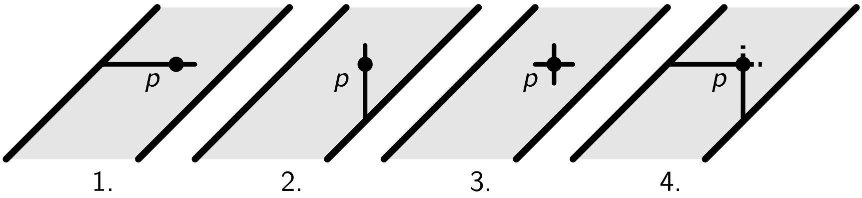


1. 2. 3. 4.

Определение

Функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется кандидатом, если она локально ограничена, полунепрерывна сверху и для любой точки $p \in \operatorname{int}\mathfrak{S}$ выполняется хотя бы одно из условий

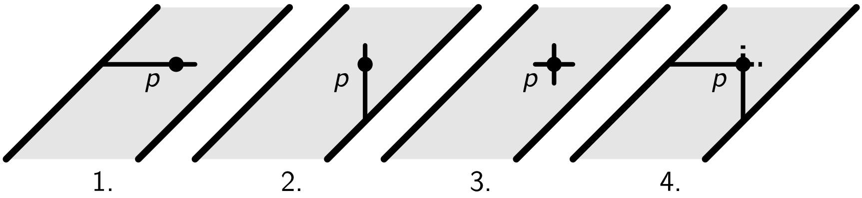
1. функция $\mathfrak{B}$ линейна по x и экстремальна по x в точке p;
2. функция $\mathfrak{B}$ линейна по y и экстремальна по y в точке p;



Определение

Функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется кандидатом, если она локально ограничена, полунепрерывна сверху и для любой точки $p \in \operatorname{int} \mathfrak{S}$ выполняется хотя бы одно из условий

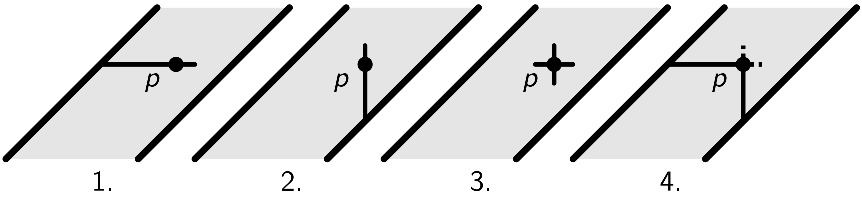
1. функция $\mathfrak{B}$ линейна по x и экстремальна по x в точке p;
2. функция $\mathfrak{B}$ линейна по y и экстремальна по y в точке p;
3. функция $\mathfrak{B}$ линейна по x и по y в точке p;



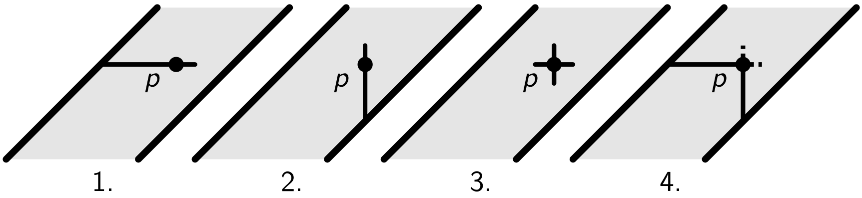
Определение

Функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется кандидатом, если она локально ограничена, полунепрерывна сверху и для любой точки $p \in \operatorname{int} \mathfrak{S}$ выполняется хотя бы одно из условий

1. функция $\mathfrak{B}$ линейна по x и экстремальна по x в точке p;
2. функция $\mathfrak{B}$ линейна по y и экстремальна по y в точке p;
3. функция $\mathfrak{B}$ линейна по x и по y в точке p;
4. функция $\mathfrak{B}$ экстремальна по x и по y в точке p.

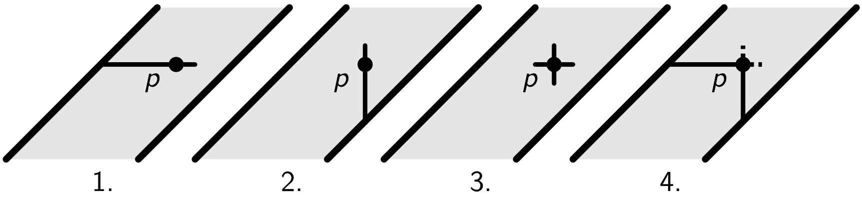


Теорема



Теорема

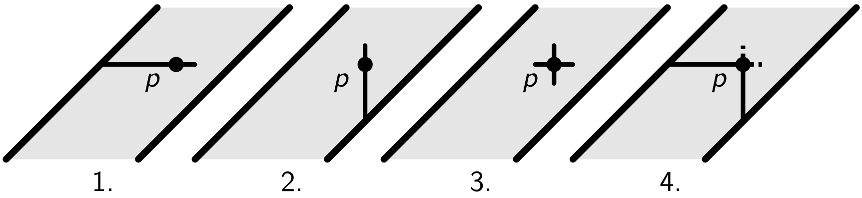
Пусть точки разрывов функций f, g дискретны, а бивогнутая функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:



Теорема

Пусть точки разрывов функций f, g дискретны, а бивогнутая функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

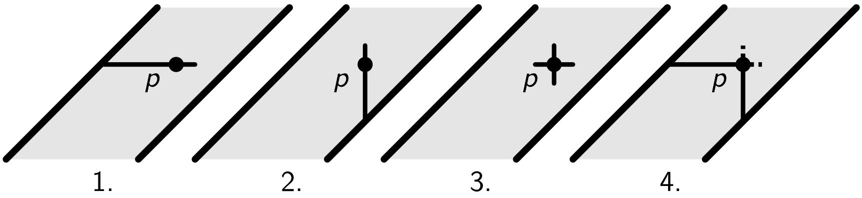
- $\mathfrak{B}(x+1, x-1) = f(x)$, $\mathfrak{B}(x-1, x+1) = g(x)$;



Теорема

Пусть точки разрывов функций f, g *дискретны, а бивогнутая функция* $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ *обладает следующими свойствами:*

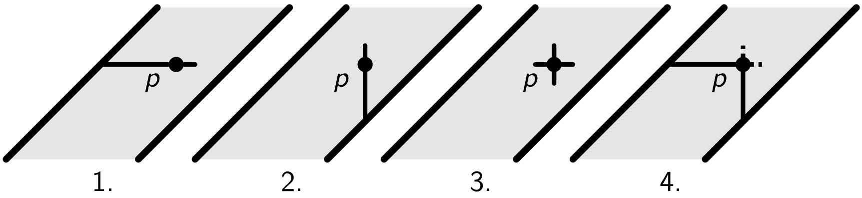
- $\mathfrak{B}(x+1, x-1) = f(x)$, $\mathfrak{B}(x-1, x+1) = g(x)$;
- $|\mathfrak{B}(x,y)| = o(e^{|x+y|/2})$ *при* $|x|, |y| \to +\infty$;



Теорема

Пусть точки разрывов функций f, g дискретны, а бивогнутая функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

- $\mathfrak{B}(x+1, x-1) = f(x)$, $\mathfrak{B}(x-1, x+1) = g(x)$;
- $|\mathfrak{B}(x, y)| = o(e^{|x+y|/2})$ *при* $|x|, |y| \to +\infty$;
- $\mathfrak{B}$ *является кандидатом.*

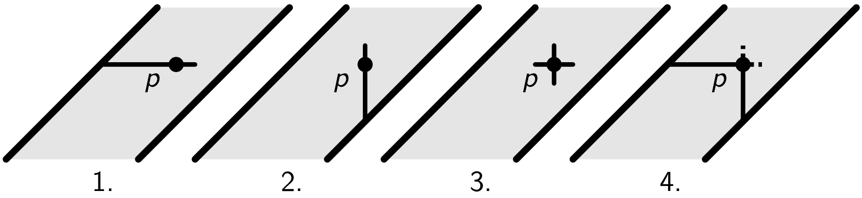


Теорема

Пусть точки разрывов функций f, g дискретны, а бивогнутая функция $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

- $\mathfrak{B}(x+1, x-1) = f(x)$, $\mathfrak{B}(x-1, x+1) = g(x)$;
- $|\mathfrak{B}(x, y)| = o(e^{|x+y|/2})$ *при* $|x|, |y| \to +\infty$;
- $\mathfrak{B}$ *является кандидатом.*

Тогда $\mathfrak{B} = \mathcal{B}[f, g]$.



Оценка роста минимальной бивогнутой функции

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f, g]$ будет невырожденной (то есть $\neq +\infty$)?

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f, g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?
Для гармонических функций в полосе известен следующий результат.

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f, g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?
Для гармонических функций в полосе известен следующий результат.

Теорема (1961, D. V. Widder)

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\neq +\infty$)?
Для гармонических функций в полосе известен следующий результат.

Теорема (1961, D. V. Widder)

Пусть функции $f, g \geqslant 0$ непрерывны. Тогда условие $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|/2}(|f(x)| + |g(x)|)\,\mathrm{d}x < +\infty$

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?
Для гармонических функций в полосе известен следующий результат.

Теорема (1961, D. V. Widder)

Пусть функции $f, g \geqslant 0$ непрерывны. Тогда условие $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|/2}(|f(x)| + |g(x)|)\,\mathrm{d}x < +\infty$ равносильно существованию непрерывной гармонической функции $H[f]\colon \mathfrak{S} \to [0,+\infty)$, т. ч. $H[f](x+1, x-1) \geqslant f(x)$ и $H[f](x-1, x+1) \geqslant g(x)$.

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?
Для гармонических функций в полосе известен следующий результат.

Теорема (1961, D. V. Widder)

Пусть функции $f, g \geqslant 0$ непрерывны. Тогда условие $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|/2}(|f(x)| + |g(x)|)\,\mathrm{d}x < +\infty$ равносильно существованию непрерывной гармонической функции $H[f]\colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$, т. ч. $H[f](x+1, x-1) \geqslant f(x)$ и $H[f](x-1, x+1) \geqslant g(x)$.

Бивогнутая функция субгармонична, следовательно $\mathcal{B}[f] \geqslant H$ (если H минимальна).

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f, g]$ будет невырожденной (то есть $\neq +\infty$)?

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f, g]$ будет невырожденной (то есть $\neq +\infty$)?

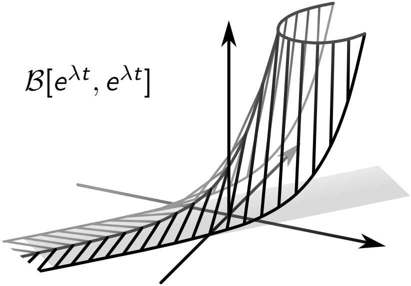
Пример

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?

Пример

Для всех $\lambda \in [0,1)$ верно отношение $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}](x,x) \asymp \frac{1}{1-\lambda} e^{\lambda x}$.

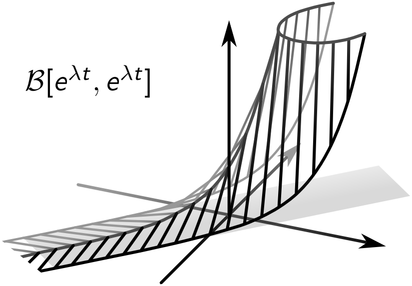


Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f, g]$ будет невырожденной (то есть $\neq +\infty$)?

Пример

Для всех $\lambda \in [0, 1)$ верно отношение $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}](x, x) \asymp \frac{1}{1-\lambda} e^{\lambda x}$. В частности, $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 1$.



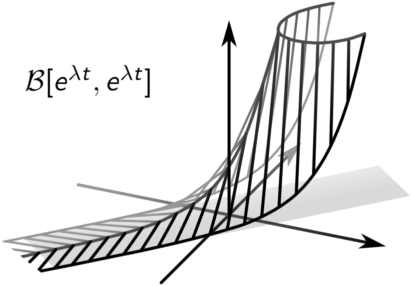
Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?

Пример

Для всех $\lambda \in [0,1)$ верно отношение $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}](x,x) \asymp \frac{1}{1-\lambda} e^{\lambda x}$. В частности, $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 1$.

Поэтому естественно изучать рост функций $e^{-|t|}f(t)$, $e^{-|t|}g(t)$.



Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?

Пример

Для всех $\lambda \in [0,1)$ верно отношение $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}](x,x) \asymp \frac{1}{1-\lambda} e^{\lambda x}$. В частности, $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 1$.

Поэтому естественно изучать рост функций $e^{-|t|}f(t)$, $e^{-|t|}g(t)$.
Были известны такие условия невырожденности функции $\mathcal{B}[f]$.

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?

Пример

Для всех $\lambda \in [0,1)$ верно отношение $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}](x,x) \asymp \frac{1}{1-\lambda}e^{\lambda x}$. В частности, $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 1.$

Поэтому естественно изучать рост функций $e^{-|t|}f(t)$, $e^{-|t|}g(t)$. Были известны такие условия невырожденности функции $\mathcal{B}[f]$.

Необходимые: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}f(t)\mathrm{d}t < +\infty$;

Оценка роста минимальной бивогнутой функции

При каких условиях на функции f, g минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ будет невырожденной (то есть $\not\equiv +\infty$)?

Пример

Для всех $\lambda \in [0,1)$ верно отношение $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}](x,x) \asymp \frac{1}{1-\lambda} e^{\lambda x}$. В частности, $\mathcal{B}[e^{\lambda|t|}, e^{\lambda|t|}] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 1$.

Поэтому естественно изучать рост функций $e^{-|t|}f(t)$, $e^{-|t|}g(t)$.
Были известны такие условия невырожденности функции $\mathcal{B}[f]$.

Необходимые: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} f(t)\mathrm{d}t < +\infty$;

Достаточные: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sup_{t\in[k,k+1]} e^{-|t|} f(t) < +\infty$.

Функционал $\mathcal{L}^p_\lambda$

Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определим для $p \in (0, 1]$ функционалы $\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\lambda^p$, действующие на функциях $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ по следующему правилу:

Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определим для $p \in (0, 1]$ функционалы $\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\lambda^p$, действующие на функциях $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ по следующему правилу:

$$\mathcal{L}_\lambda g = \inf \left\{h \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon\ h \geqslant g\right\};$$

Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определим для $p \in (0, 1]$ функционалы $\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\lambda^p$, действующие на функциях $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ по следующему правилу:

$$\mathcal{L}_\lambda g = \inf\left\{h \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon\ h \geqslant g\right\}; \qquad \mathcal{L}_\lambda^p g = \left(\mathcal{L}_{\lambda^p} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

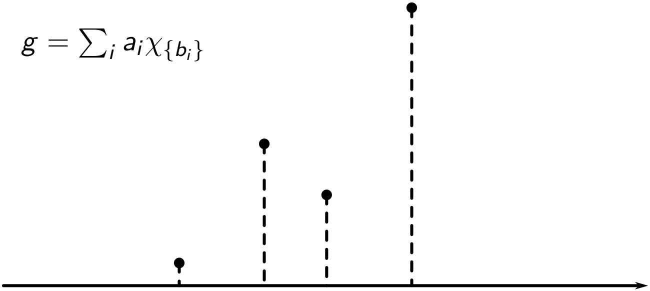
Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определим для $p \in (0, 1]$ функционалы $\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\lambda^p$, действующие на функциях $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ по следующему правилу:

$$\mathcal{L}_\lambda g = \inf\left\{h \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon\, h \geqslant g\right\}; \qquad \mathcal{L}_\lambda^p g = \left(\mathcal{L}_{\lambda^p} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$



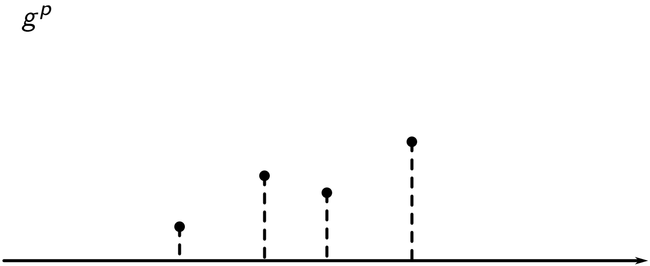
Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определим для $p \in (0,1]$ функционалы $\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\lambda^p$, действующие на функциях $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ по следующему правилу:

$$\mathcal{L}_\lambda g = \inf\left\{h \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon\ h \geqslant g\right\}; \qquad \mathcal{L}_\lambda^p g = \left(\mathcal{L}_{\lambda^p} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$



Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

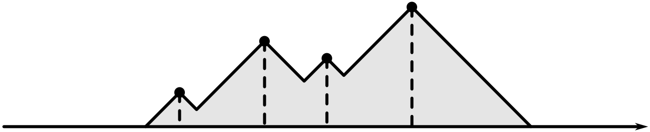
Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определим для $p \in (0,1]$ функционалы $\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\lambda^p$, действующие на функциях $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ по следующему правилу:

$$\mathcal{L}_\lambda g = \inf\left\{h \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon\, h \geqslant g\right\}; \qquad \mathcal{L}_\lambda^p g = \left(\mathcal{L}_{\lambda^p} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\mathcal{L}_{\lambda^p} g^p$



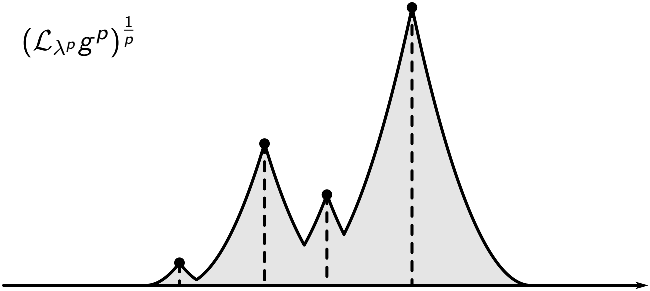
Функционал $\mathcal{L}_\lambda^p$

Пусть $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})$ — множество λ-липшицевых функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение

Определим для $p \in (0,1]$ функционалы $\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\lambda^p$, действующие на функциях $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ по следующему правилу:

$$\mathcal{L}_\lambda g = \inf\left\{h \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon\, h \geqslant g\right\}; \qquad \mathcal{L}_\lambda^p g = \left(\mathcal{L}_{\lambda^p} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$



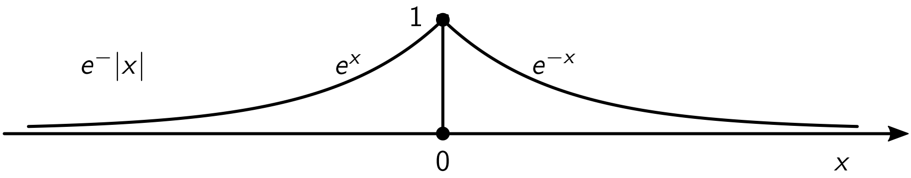
Условие невырожденности

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

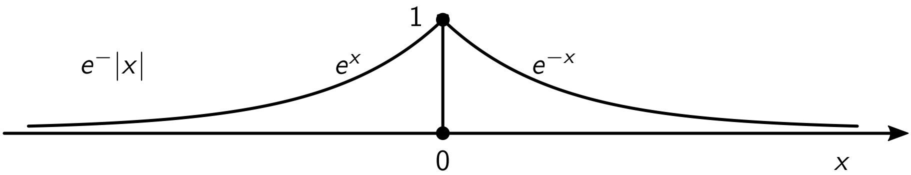
Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.



Условие невырожденности

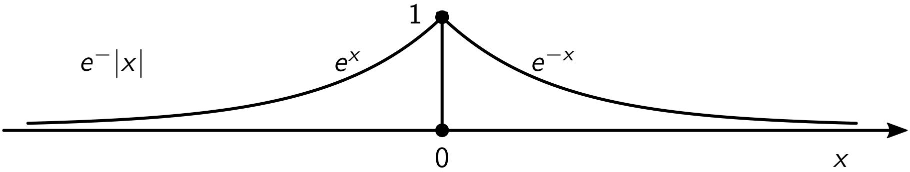
Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.



Теорема

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

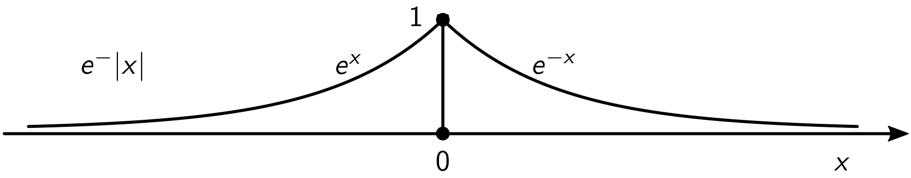


Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. Минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f, g]$ конечна

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.



Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. Минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ конечна

тогда и только тогда, когда $\quad \left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$*. Минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}[f,g]$ *конечна*

$$\text{тогда и только тогда, когда} \qquad \left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. *Минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}[f, g]$ *конечна*

$$\text{тогда и только тогда, когда} \qquad \left\|\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. Минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ конечна

$$\textit{тогда и только тогда, когда} \qquad \left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

$$\sup \{\mathbb{E} f(\psi_\infty) \colon (\varphi, \psi) \in M(\varphi, \psi)\}$$

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. *Минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}[f, g]$ *конечна*

$$\text{тогда и только тогда, когда} \qquad \left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

$$\sup \left\{ \mathbb{E} f(\psi_\infty) \colon (\varphi, \psi) \in M(\varphi, \psi) \right\} = \mathbf{B}[f, f](0, 0)$$

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. Минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[f,g]$ конечна

$$\text{тогда и только тогда, когда} \qquad \left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

$$\sup\{\mathbb{E} f(\psi_\infty) \colon (\varphi,\psi) \in M(\varphi,\psi)\} = \mathbf{B}[f,f](0,0) = \mathcal{B}[f,f](0,0)$$

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$*. Минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}[f,g]$ *конечна*

$$\text{тогда и только тогда, когда} \qquad \left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

Пусть число λ *удовлетворяет равенству* $\lambda = \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}(\xi f) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

$$\sup\left\{\mathbb{E} f(\psi_\infty) \colon (\varphi, \psi) \in M(\varphi, \psi)\right\} = \mathbf{B}[f,f](0,0) = \mathcal{B}[f,f](0,0)$$

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. *Минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}[f, g]$ *конечна*

$$\text{тогда и только тогда, когда} \qquad \left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

Пусть число λ *удовлетворяет равенству* $\lambda = \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}(\xi f) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}$. *Тогда*

$$\sup \{\mathbb{E} f(\psi_\infty) : (\varphi, \psi) \in M(\varphi, \psi)\} = \mathbf{B}[f, f](0, 0) = \mathcal{B}[f, f](0, 0) \asymp \lambda.$$

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. *Минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}[f,g]$ *конечна*

тогда и только тогда, когда $$\left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

Пусть число λ *удовлетворяет равенству* $\lambda = \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}(\xi f) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}$. *Тогда*

$$\sup\left\{\mathbb{E} f(\psi_\infty) \colon (\varphi, \psi) \in M(\varphi, \psi)\right\} = \mathbf{B}[f,f](0,0) = \mathcal{B}[f,f](0,0) \asymp \lambda.$$

Следствие

Условие невырожденности

Введём функцию $\xi(x) = e^{-|x|}$.

Теорема

Пусть $f, g \geqslant 0$. *Минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}[f,g]$ *конечна*

тогда и только тогда, когда $$\left\| \mathcal{L}_1^{1/2}(\xi f + \xi g) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Теорема

Пусть число λ *удовлетворяет равенству* $\lambda = \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}(\xi f) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}$. *Тогда*

$$\sup\left\{\mathbb{E}f(\psi_\infty) \colon (\varphi, \psi) \in M(\varphi, \psi)\right\} = \mathbf{B}[f,f](0,0) = \mathcal{B}[f,f](0,0) \asymp \lambda.$$

Следствие

Любая минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B} \geqslant 0$ *удовлетворяет равенству* $\mathcal{B}(x,x) = o(e^{|x|})$.

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$.

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$.

- *Пусть* $\tilde{f}$ *и* $\tilde{g}$ *— поточечно минимальные полунепрерывные сверху функции, т. ч.* $\tilde{f} \geqslant f$ *и* $\tilde{g} \geqslant g$.

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$*, т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$*,* $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$*.*

- *Пусть* $\tilde{f}$ *и* $\tilde{g}$ *— поточечно минимальные полунепрерывные сверху функции, т. ч.* $\tilde{f} \geqslant f$ *и* $\tilde{g} \geqslant g$*. Тогда*

$$\mathcal{B}[f, g](x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{если } y = x - 1; \\ g(y), & \text{если } x = y - 1; \\ \mathcal{B}[\tilde{f}, \tilde{g}](x, y), & \text{иначе,} \end{cases}$$

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$.

- *Пусть* $\tilde{f}$ *и* $\tilde{g}$ *— поточечно минимальные полунепрерывные сверху функции, т. ч.* $\tilde{f} \geqslant f$ *и* $\tilde{g} \geqslant g$. *Тогда*

$$\mathcal{B}[f, g](x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{если } y = x - 1; \\ g(y), & \text{если } x = y - 1; \\ \mathcal{B}[\tilde{f}, \tilde{g}](x, y), & \text{иначе,} \end{cases}$$

Далее будем считать, что функции f, g *полунепрерывны сверху.*

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^-(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^-(t)$.

- *Пусть* $\tilde{f}$ *и* $\tilde{g}$ *— поточечно минимальные полунепрерывные сверху функции, т. ч.* $\tilde{f} \geqslant f$ *и* $\tilde{g} \geqslant g$. *Тогда*

$$\mathcal{B}[f,g](x,y) = \begin{cases} f(x), & \text{если } y = x-1; \\ g(y), & \text{если } x = y-1; \\ \mathcal{B}[\tilde{f},\tilde{g}](x,y), & \text{иначе,} \end{cases}$$

  Далее будем считать, что функции f, g *полунепрерывны сверху.*

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f,g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$.

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$.

- *Пусть* $\tilde{f}$ *и* $\tilde{g}$ *— поточечно минимальные полунепрерывные сверху функции, т. ч.* $\tilde{f} \geqslant f$ *и* $\tilde{g} \geqslant g$. *Тогда*

$$\mathcal{B}[f, g](x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{если } y = x - 1; \\ g(y), & \text{если } x = y - 1; \\ \mathcal{B}[\tilde{f}, \tilde{g}](x, y), & \text{иначе}, \end{cases}$$

  Далее будем считать, что функции f, g *полунепрерывны сверху.*

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f, g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$. *Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$.

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$.

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f, g]|_{\mathrm{int}\,\mathfrak{S}} = +\infty$. *Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$.

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$*, т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$*,* $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$*.*

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$*, то* $\mathcal{B}[f, g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$*. Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$*.*
- *Введём следующие свойства функции* $B \in \mathcal{BC}(\mathfrak{S})$*:*

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^-(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^-(t)$.

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f, g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$. *Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$.
- *Введём следующие свойства функции* $B \in \mathcal{BC}(\mathfrak{S})$:
  1. $\forall t \in \mathbb{R}\colon B(t, t-1) = f(t), B(t-1, t) = g(t)$;

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$.

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f, g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$. *Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$.
- *Введём следующие свойства функции* $B \in \mathcal{BC}(\mathfrak{S})$:
  1. $\forall t \in \mathbb{R}\colon B(t, t-1) = f(t), B(t-1, t) = g(t)$;
  2. $|B(x, y)| = o(e^{|x+y|})$ *as* $|x|, |y| \to \infty$;

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^{-}(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^{-}(t)$.

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f,g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$. *Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$.
- *Введём следующие свойства функции* $B \in \mathfrak{BC}(\mathfrak{S})$:
  1. $\forall t \in \mathbb{R}\colon B(t, t-1) = f(t), B(t-1, t) = g(t)$;
  2. $|B(x,y)| = o(e^{|x+y|})$ *as* $|x|, |y| \to \infty$;
  3. B *является кандидатом.*

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^-(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^-(t)$.

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f, g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$. *Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$.
- *Введём следующие свойства функции* $B \in \mathfrak{BC}(\mathfrak{S})$:
  1. $\forall t \in \mathbb{R}\colon B(t, t-1) = f(t), B(t-1, t) = g(t)$;
  2. $|B(x, y)| = o(e^{|x+y|})$ *as* $|x|, |y| \to \infty$;
  3. B *является кандидатом.*

  Функция $B = \mathcal{B}[f, g]$ *удовлетворяет свойствам 1, 2, 3.*

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Теорема

Допустим, что существует бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, *т. ч.* $B(t+1, t-1) \geqslant f^-(t)$, $B(t-1, t+1) \geqslant g^-(t)$.

- *Если* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) = +\infty$, *то* $\mathcal{B}[f,g]|_{\operatorname{int}\mathfrak{S}} = +\infty$. *Далее будем считать, что* $\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi|f| + \xi|g|) < \infty$.
- *Введём следующие свойства функции* $B \in \mathfrak{BC}(\mathfrak{S})$:
  1. $\forall t \in \mathbb{R}\colon B(t, t-1) = f(t), B(t-1, t) = g(t)$;
  2. $|B(x,y)| = o(e^{|x+y|})$ *as* $|x|, |y| \to \infty$;
  3. B *является кандидатом.*

  Функция $B = \mathcal{B}[f,g]$ *удовлетворяет свойствам 1, 2, 3. И, если* $B \in \mathfrak{BC}(\mathfrak{S})$ *удовлетворяет свойствам 1, 2, 3 и у функций* f, g *множество точек разрыва дискретно, то* $\mathcal{B}[f,g] = B$.