О моделировании каталитических ветвящихся случайных блужданий

Сусорова М.А.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Воркшоп "9-я Санкт-Петербургская молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике"

19 ноября 2025 г.

Введение и основные понятия

- Пространство состояний: $\mathbb{Z}^d$.
- Основные элементы:
  - Марковская цепь S с непрерывным временем.
  - Катализаторы $W = \{w_1, \ldots, w_N\}$.
- Марковская цепь S:
  - Инфинитезимальная матрица $Q = (q(x,y))$.
  - Однородность: $q(x,y) = q(x-y,0) = q(0,y-x)$.
- Катализаторы W:
  - Время в катализаторе w_k: случайная величина с экспоненциальным распределением с параметром β_k.

Процесс ветвления

- Ветвление в катализаторах:
  - Частица в w_k:
    - Ветвится с вероятностью α_k.
    - Покидает w_k с вероятностью $1 - \alpha_k$.
  - При ветвлении:
    - Частица погибает, оставляя ξ_k потомков.
    - Производящая функция: $f_k(s) = Es^{\xi_k}$.
- Движение частиц:
  - Если частица покидает w_k, она переходит в $y \neq w_k$ с вероятностью:

$$-(1 - \alpha_k)q(w_k, y)q(w_k, w_k)^{-1}.$$

  - Новые частицы ведут себя как независимые копии родителя.

Классификация КВСБ

Для классификации КВСБ в работе [1] вводится вспомогательный процесс Беллмана–Харриса с $N^2 + N + 1$ типами частиц, где N — число катализаторов. Соответственно, тип КВСБ напрямую зависит от типа вспомогательного процесса.

Процесс Беллмана-Харриса

Рассмотрим ветвящийся процесс Беллмана–Харриса с n типами частиц. Процесс начинается с одной частицы типа $i \in \{1, \ldots, n\}$. Каждая родительская частица типа i имеет случайную продолжительность жизни с функцией распределения $G_i(t)$, $t \geq 0$. По окончании жизни частица производит потомков, количество и типы которых определяются вероятностной производящей функцией $g_i(\mathrm{s})$, где $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in [0, 1]^n$.
Матрица средних чисел непосредственных потомков определяется как:

$$M := (m_{i,j})_{i,j=1}^n, \quad \text{где} \quad m_{i,j} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial s_j}\right|_{\mathrm{s}=(1,\ldots,1)}.$$

Классификация процесса Беллмана-Харриса

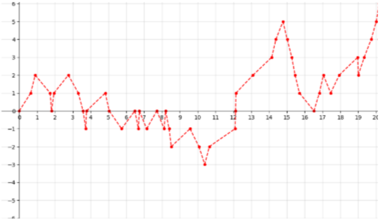
Процесс называется *неразложимым*, если матрица M является неразложимой. Пусть ρ — *перронов корень* матрицы M (наибольшее по модулю положительное собственное значение). В зависимости от значения ρ процесс классифицируется следующим образом:

- *Надкритический*, если $\rho > 1$;
- *Критический*, если $\rho = 1$;
- *Докритический*, если $\rho < 1$.

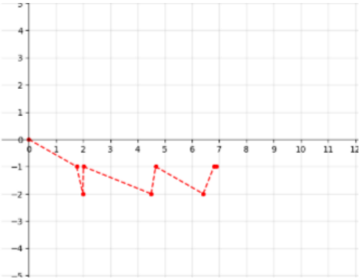
Постановка задачи

Основной целью исследования является изучение поведения плотности распределения частиц на конечных временных интервалах. В работе рассматриваются исключительно надкритические случаи, поскольку только для них возможен неограниченный рост популяции частиц при условии невырождения. В критических и докритических ветвящихся случайных блужданиях на решётке $\mathbb{Z}^d$ наблюдается локальное вырождение популяции.

Тривиальные реализации



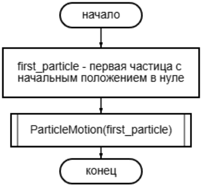
Стабилизация системы

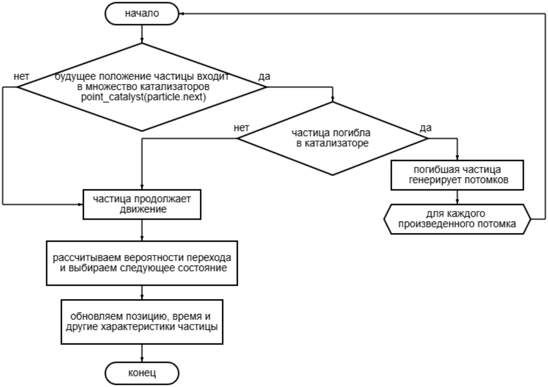


Вырождение

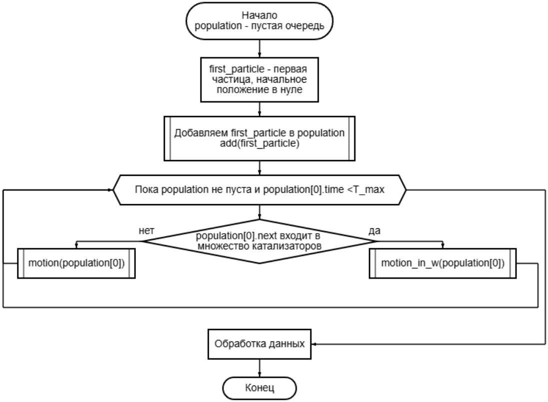
Рекурсивный алгоритм

Состояние системы каталитического ветвящегося случайного блуждания определяется множеством троек (x_1, x_2, t), где каждая тройка соответствует частице, находящейся в точке $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ и переходящей в точку x_2 в момент времени t.





Алгоритм-очередь



Для реализации состояния системы $Q = \{q = (x_1, x_2, t)\}$ удобно использовать структуру очередь, так как она поддерживает следующие операции: добавление элемента, выборку одного элемента из множества и его изъятие.

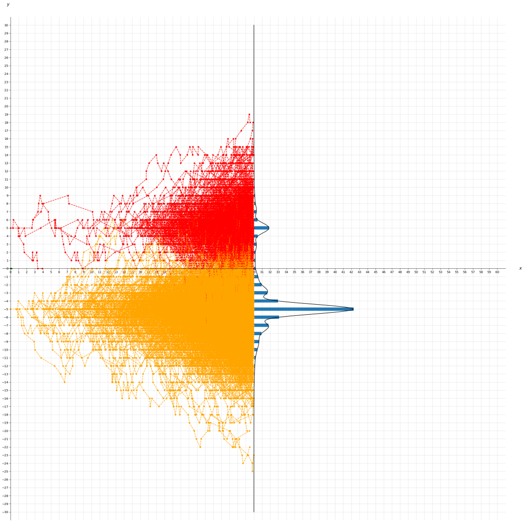
Сравнение алгоритмов моделирования

Рекурсивный алгоритм	**Алгоритм с очередью событий**
Обработка в глубину (depth-first)	Обработка событий по времени (breadth-first)
Использует стек вызовов	Использует приоритетную очередь
Риск переполнения стека	Нет риска переполнения
Простая реализация	Более сложная реализация
Сложный учёт времени	Естественная обработка времени
Плохо параллелится	Легко параллелится

Вывод: Для отладки малых систем предпочтителен рекурсивный подход, тогда как для реалистичного моделирования сложных систем рекомендуется использовать событийно-ориентированный алгоритм с очередью.

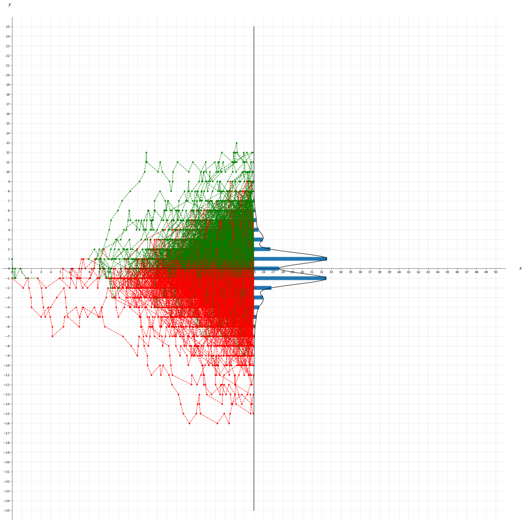
Одномерная решетка

- $W = \{-5, 5\}$
- $\alpha = (0.4, 0.4)$
- $\beta = (2, 2)$
- Число потомков в случае гибели частицы во всех случаях равно 2



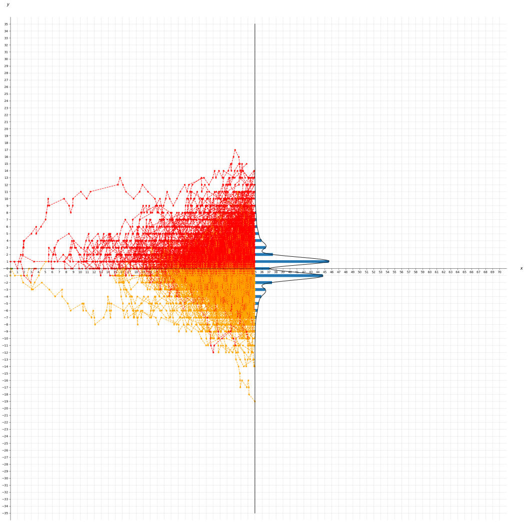
Одномерная решетка

- $W = \{-1, 1\}$
- $\alpha = (0.4, 0.4)$
- $\beta = (2, 2)$
- Число потомков в случае гибели частицы во всех случаях равно 2



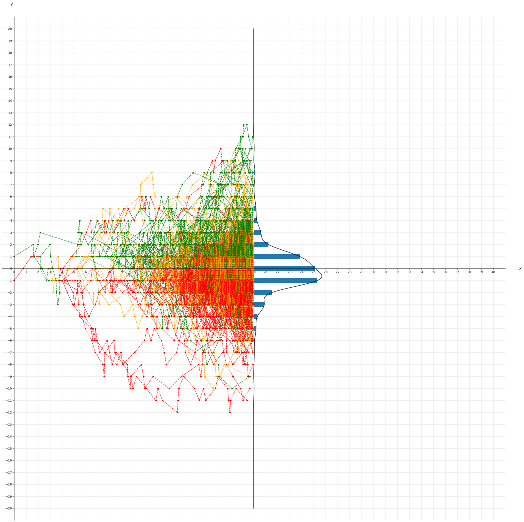
Одномерная решетка

- $W = \{-1, 0, 1\}$,
- $\alpha = (0.4, 0.4, 0.4)$
- $\beta = (2, 2, 2)$
- Число потомков в случае гибели частицы в катализаторах -1, 1 равно двум, в катализаторе 0 равно нулю



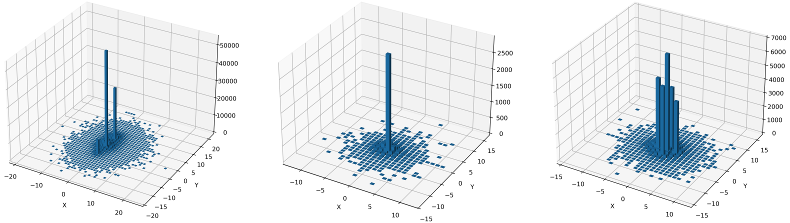
Одномерная решетка

- $W = \{-1, 0, 1\}$
- $\alpha = (0.4, 0.4, 0.4)$
- $\beta = (2, 2, 2)$
- Число потомков в случае гибели частицы во всех случаях равно 2



Двумерная решетка

Гистограммы численности частиц в КВСБ при различной конфигурации катализаторов: (a) 3 катализатора, (b) 1 катализатор, (c) 5 катализаторов.



(a) (b) (c)

Заключение

Наиболее интересным случаем является расположение источников, приводящее на начальных этапах к появлению нескольких пиков. Общее число частиц и локальные численности частиц растут экспоненциально быстро только в надкритическом КВСБ причем скорость экспоненциального роста обозначается $\nu > 0$ и традиционно носит название “мальтусовского параметра”.

Список литературы

- Булинская Е. В. Докторская диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук «Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания». — Москва, 2024.
- Ермишкина Е. М., Яровая Е. Б. Моделирование ветвящихся случайных блужданий по многомерной решётке // Фундаментальная и прикладная математика. — 2018. — Т. 22, № 3. — С. 37—56.

Спасибо за внимание!