О вероятностях позднего вырождения в надкритических процессах с ветвлением

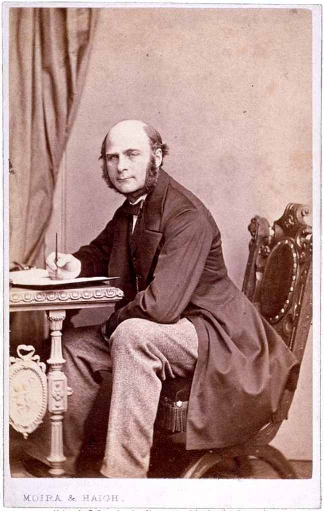
о процессах Гальтона-Ватсона, ветвящихся процессах в случайной среде и не только

А.В. Шкляев

МГУ имени М.В. Ломоносова, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

St. Petersburg Youth Meeting on Probability and Mathematical Physics.
Санкт-Петербург, Россия, 17-20 ноября 2025

Гальтон



Problem 4001

PROBLEM 4001: A large nation, of whom we will only concern ourselves with the adult males, N in number, and who each bear separate surnames, colonise a district. Their law of population is such that, in each generation, a_0 per cent of the adult males have no male children who reach adult life; a_1 have one such male child; a_2 have two; and so on up to a_5 who have five.

PROBLEM 4001: A large nation, of whom we will only concern ourselves with the adult males, N in number, and who each bear separate surnames, colonise a district. Their law of population is such that, in each generation, a_0 per cent of the adult males have no male children who reach adult life; a_1 have one such male child; a_2 have two; and so on up to a_5 who have five.

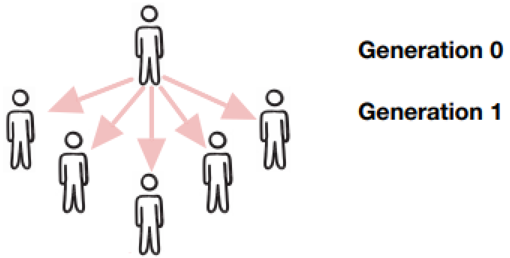
is it when the number of generations is increased indefinitely. We have a continual extinction of surnames going on, combined with constancy, or increase of population, as the case may be, until at length the number of surnames remaining is absolutely insensible, as compared with the number at starting; but the total number of representatives of those remaining surnames is infinitely greater than the original number.

В работе “De la loi de multiplication et de la duree des familles” (1845) И.Ж. Бьенеме опубликовал короткий текст с формулировкой условий вырождения процесса.

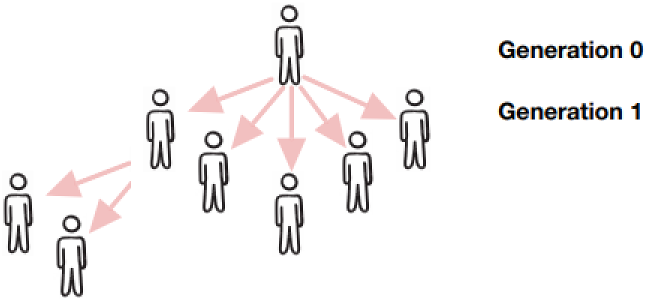
Irénée Jules Bienaymé

Определение

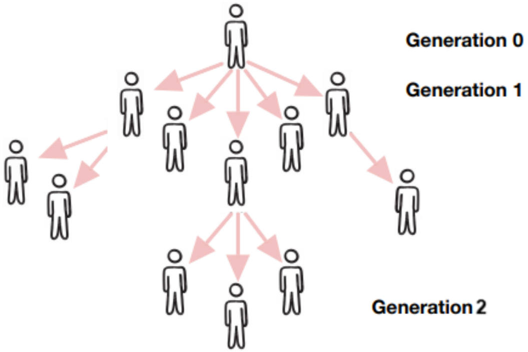
Определение



Определение



Определение



Определение

Пусть $(X_{i,j}, i, j > 0)$ н.о.р. целочисленные неотрицательные

Определение

Пусть $(X_{i,j}, i, j > 0)$ н.о.р. целочисленные неотрицательные
Последовательность, заданная соотношением $Z_0 = 1$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i},$$

называется ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона.

Определение

Пусть $(X_{i,j}, i, j > 0)$ н.о.р. целочисленные неотрицательные
Последовательность, заданная соотношением $Z_0 = 1$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i},$$

называется ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона. Здесь $X_{i,j}$ – число потомков j-й частицы в i-м поколении.

Асимптотика вероятности невырождения

Если $\mu = \mathsf{E}X_{1,1} < 1$, то процесс с вероятностью 1 погибает. Однако интерес представляет порядок убывания $\mathsf{P}(Z_n > 0)$.

Асимптотика вероятности невырождения

Если $\mu = \mathsf{E}X_{1,1} < 1$, то процесс с вероятностью 1 погибает. Однако интерес представляет порядок убывания $\mathsf{P}(Z_n > 0)$.

Теорема Яглома

Если $\mathsf{D}X_{1,1} < +\infty$, то $\mathsf{P}(Z_n > 0) \sim C\mu^n$, где C – некоторая константа.

Асимптотика вероятности невырождения

Если $\mu = \mathsf{E}X_{1,1} < 1$, то процесс с вероятностью 1 погибает. Однако интерес представляет порядок убывания $\mathsf{P}(Z_n > 0)$.

Теорема Яглома

Если $\mathsf{D}X_{1,1} < +\infty$, то $\mathsf{P}(Z_n > 0) \sim C\mu^n$, где C – некоторая константа.При этом $\mathsf{P}(Z_n = k | Z_n > 0) \to p_k^*$ для некоторого распределения $\{p_k^*\}$ на $\mathbb{N}$.

Асимптотика вероятности невырождения

Если $\mu = \mathsf{E}X_{1,1} < 1$, то процесс с вероятностью 1 погибает. Однако интерес представляет порядок убывания $\mathsf{P}(Z_n > 0)$.

Теорема Яглома

Если $\mathsf{D}X_{1,1} < +\infty$, то $\mathsf{P}(Z_n > 0) \sim C\mu^n$, где C – некоторая константа.При этом $\mathsf{P}(Z_n = k | Z_n > 0) \to p_k^*$ для некоторого распределения $\{p_k^*\}$ на $\mathbb{N}$.

Теорема доказывается с помощью п.ф., однако ее происхождение имеет другую природу.

Пусть P – м.в.п. ЦМ, $\lambda > 0$ – с.з., а h – с.в. с неотрицательными координатами, $Ph = \lambda h$.

h-преобразование Дуба

Пусть P – м.в.п. ЦМ, $\lambda > 0$ – с.з., а h – с.в. с неотрицательными координатами, $Ph = \lambda h$. Тогда

$$\widetilde{p}_{i,j} = \frac{p_{i,j} h_j}{\lambda h_i}$$

образует новую цепь Маркова.

Пусть P – м.в.п. ЦМ, $\lambda > 0$ – с.з., а h – с.в. с неотрицательными координатами, $Ph = \lambda h$. Тогда

$$\widetilde{p}_{i,j} = \frac{p_{i,j} h_j}{\lambda h_i}$$

образует новую цепь Маркова.

При этом

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$

Пусть P – м.в.п. ЦМ, $\lambda > 0$ – с.з., а h – с.в. с неотрицательными координатами, $Ph = \lambda h$. Тогда

$$\widetilde{p}_{i,j} = \frac{p_{i,j} h_j}{\lambda h_i}$$

образует новую цепь Маркова.
При этом

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$
$$\frac{p_{i_0,i_1} h_{i_1}}{h_{i_0}} \frac{p_{i_1,i_2} h_{i_2}}{h_{i_1}} \cdots \frac{p_{i_{n-1},i_n} h_{i_n}}{h_{i_{n-1}}} \frac{h_{i_0}}{h_{i_n}} =$$

h-преобразование Дуба

Пусть P – м.в.п. ЦМ, $\lambda > 0$ – с.з., а h – с.в. с неотрицательными координатами, $Ph = \lambda h$. Тогда

$$\widetilde{p}_{i,j} = \frac{p_{i,j} h_j}{\lambda h_i}$$

образует новую цепь Маркова.

При этом

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$
$$\frac{p_{i_0,i_1} h_{i_1}}{h_{i_0}} \frac{p_{i_1,i_2} h_{i_2}}{h_{i_1}} \cdots \frac{p_{i_{n-1},i_n} h_{i_n}}{h_{i_{n-1}}} \frac{h_{i_0}}{h_{i_n}} = P(\widetilde{X}_0 = i_0, \widetilde{X}_1 = i_1, \dots, \widetilde{X}_n = i_n) \frac{h_{i_0}}{h_{i_n}}$$

h-преобразование Дуба

Пусть P – м.в.п. ЦМ, $\lambda > 0$ – с.з., а h – с.в. с неотрицательными координатами, $Ph = \lambda h$. Тогда

$$\widetilde{p}_{i,j} = \frac{p_{i,j} h_j}{\lambda h_i}$$

образует новую цепь Маркова.

При этом

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$

$$\frac{p_{i_0,i_1} h_{i_1}}{h_{i_0}} \frac{p_{i_1,i_2} h_{i_2}}{h_{i_1}} \cdots \frac{p_{i_{n-1},i_n} h_{i_n}}{h_{i_{n-1}}} \frac{h_{i_0}}{h_{i_n}} = P(\widetilde{X}_0 = i_0, \widetilde{X}_1 = i_1, \ldots, \widetilde{X}_n = i_n) \frac{h_{i_0}}{h_{i_n}}$$

Связь полученных вероятностей позволяет сводить неудобную цепь к удобной.

Рассмотрим

$$p_{i,j} = P(Z_1 = j | Z_0 = i).$$

Очевидно, что 1 – с.з. оператора P, а $(1, 1, 1, \dots)$ – соответствующий с.в.

Можем ли мы угадать еще одно с.з. и с.в.?

Марковская цепь, соответствующая ВП

Рассмотрим

$$p_{i,j} = P(Z_1 = j | Z_0 = i).$$

Очевидно, что 1 – с.з. оператора P, а $(1, 1, 1, \dots)$ – соответствующий с.в.

Можем ли мы угадать еще одно с.з. и с.в.?

Да, это μ и $(i, i \geq 0)$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_1 = j | Z_0 = i) = E(Z_1 | Z_0 = i) = \mu i.$$

Марковская цепь, соответствующая ВП

Рассмотрим

$$p_{i,j} = P(Z_1 = j | Z_0 = i).$$

Очевидно, что 1 – с.з. оператора P, а $(1, 1, 1, \dots)$ – соответствующий с.в.

Можем ли мы угадать еще одно с.з. и с.в.?

Да, это μ и $(i, i \geq 0)$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_1 = j | Z_0 = i) = E(Z_1 | Z_0 = i) = \mu i.$$

Введем новую цепь Маркова $\{Z_n^*\}$ с м.в.п.

$$p^*_{i,j} = \frac{p_{i,j} j}{i}.$$

Заметим, что

$$\mathsf{P}(\mathsf{Z}_\mathsf{n} > 0) = \sum_{\mathsf{i}_1,\dots,\mathsf{i}_\mathsf{n}>0} \mathsf{p}_{1,\mathsf{i}_1}\mathsf{p}_{\mathsf{i}_1,\mathsf{i}_2}\cdots\mathsf{p}_{\mathsf{i}_{\mathsf{n}-1},\mathsf{i}_\mathsf{n}} =$$

Заметим, что

$$\mathsf{P}(Z_n > 0) = \sum_{i_1,\ldots,i_n>0} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$

$$\mu^n \sum_{i_1,\ldots,i_n>0} \frac{p_{1,i_1} i_1}{\mu} \frac{p_{i_1,i_2} i_2}{\mu i_1} \cdots \frac{p_{i_{n-1},i_n} i_n}{\mu i_{n-1}} \frac{1}{i_n} =$$

Первая часть теоремы Яглома

Заметим, что

$$P(Z_n > 0) = \sum_{i_1,\ldots,i_n>0} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$

$$\mu^n \sum_{i_1,\ldots,i_n>0} \frac{p_{1,i_1} i_1}{\mu} \frac{p_{i_1,i_2} i_2}{\mu i_1} \cdots \frac{p_{i_{n-1},i_n} i_n}{\mu i_{n-1}} \frac{1}{i_n} = \mu^n E(1/Z_n^*).$$

Заметим, что

$$\mathsf{P}(\mathsf{Z}_n > 0) = \sum_{i_1,\dots,i_n>0} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$

$$\mu^n \sum_{i_1,\dots,i_n>0} \frac{p_{1,i_1} i_1}{\mu} \frac{p_{i_1,i_2} i_2}{\mu i_1} \cdots \frac{p_{i_{n-1},i_n} i_n}{\mu i_{n-1}} \frac{1}{i_n} = \mu^n \mathsf{E}(1/\mathsf{Z}_n^*).$$

Таким образом, если цепь Z_n^* – положительно возвратна, то $\mathsf{P}(\mathsf{Z}_n > 0) \sim C\mu^n$,

Заметим, что

$$P(Z_n > 0) = \sum_{i_1,\ldots,i_n>0} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$

$$\mu^n \sum_{i_1,\ldots,i_n>0} \frac{p_{1,i_1} i_1}{\mu} \frac{p_{i_1,i_2} i_2}{\mu i_1} \ldots \frac{p_{i_{n-1},i_n} i_n}{\mu i_{n-1}} \frac{1}{i_n} = \mu^n E(1/Z_n^*).$$

Таким образом, если цепь Z_n^* – положительно возвратна, то $P(Z_n > 0) \sim C\mu^n$,где $C = E_\pi 1/Z_1^*$, где π – стационарное распределение Z_1^*.

Заметим, что

$$\mathsf{P}(Z_n > 0) = \sum_{i_1,\dots,i_n>0} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} =$$

$$\mu^n \sum_{i_1,\dots,i_n>0} \frac{p_{1,i_1} i_1}{\mu} \frac{p_{i_1,i_2} i_2}{\mu i_1} \cdots \frac{p_{i_{n-1},i_n} i_n}{\mu i_{n-1}} \frac{1}{i_n} = \mu^n \mathsf{E}(1/Z_n^*).$$

Таким образом, если цепь Z_n^* – положительно возвратна, то $\mathsf{P}(Z_n > 0) \sim C\mu^n$,где $C = \mathsf{E}_\pi 1/Z_1^*$, где π – стационарное распределение Z_1^*.

Если цепь не положительно возвратна, то $1/Z_n^*$ может стремиться к нулю.

Заметим, что

$$P(Z_n = i | Z_n > 0) = \frac{P(Z_n = i)}{P(Z_n > 0)} =$$

Заметим, что

$$\mathsf{P}(Z_n = i | Z_n > 0) = \frac{\mathsf{P}(Z_n = i)}{\mathsf{P}(Z_n > 0)} = \frac{\mathsf{P}(Z_n^* = i)/i}{\mathsf{E} 1/Z_n^*} \to \frac{\pi_i / i}{\mathsf{E}_\pi 1/Z_1^*},\ n \to \infty.$$

Заметим, что

$$P(Z_n = i | Z_n > 0) = \frac{P(Z_n = i)}{P(Z_n > 0)} = \frac{P(Z_n^* = i)/i}{E 1/Z_n^*} \to \frac{\pi_i/i}{E_\pi 1/Z_1^*},\ n \to \infty.$$

Таким образом, теорема Яглома требует лишь доказать положительную возвратность цепи Z_n^*.

При этом

$$\sum_j p^*_{i,j} s^j = \frac{s}{\mu i} \sum_j p_{i,j} j s^{j-1} =$$

При этом

$$\sum_j p^*_{i,j} s^j = \frac{s}{\mu i} \sum_j p_{i,j} j s^{j-1} = \frac{s}{\mu i} (\phi(s)^i)' =$$

При этом

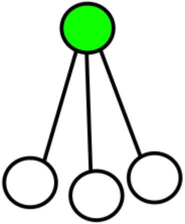
$$\sum_j p^*_{i,j} s^j = \frac{s}{\mu i} \sum_j p_{i,j} j s^{j-1} = \frac{s}{\mu i} (\phi(s)^i)' = \frac{s\phi'(s)}{\mu} \phi(s)^{i-1}.$$

При этом

$$\sum_j p^*_{i,j} s^j = \frac{s}{\mu i} \sum_j p_{i,j} j s^{j-1} = \frac{s}{\mu i} (\phi(s)^i)' = \frac{s\phi'(s)}{\mu} \phi(s)^{i-1}.$$

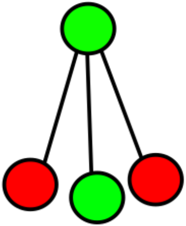
Это соответствует ВП, у которого одна случайная частица размножается с п.ф. с вероятностями ip_i/μ, а остальные с p_i.

Это соответствует ВП, у которого одна случайная частица размножается с п.ф. с вероятностями ip_i/μ, а остальные с p_i.

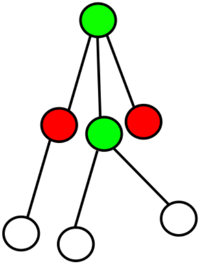


Структура невырождающейся цепи

Это соответствует ВП, у которого одна случайная частица размножается с п.ф. с вероятностями ip_i/μ, а остальные с p_i.

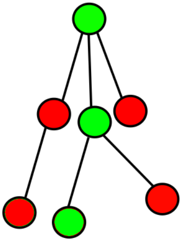


Это соответствует ВП, у которого одна случайная частица размножается с п.ф. с вероятностями $\mathrm{i}\mathrm{p}_\mathrm{i}/\mu$, а остальные с p_i.



Структура невырождающейся цепи

Это соответствует ВП, у которого одна случайная частица размножается с п.ф. с вероятностями ip_i/μ, а остальные с p_i.



Структура невырождающейся цепи

Это соответствует ВП, у которого одна случайная частица размножается с п.ф. с вероятностями ip_i/μ, а остальные с p_i.

Надкритический процесс

Представим себе другую задачу – пусть $\{Z_n\}$ надкритический процесс, T – время до его вырождения.

Надкритический процесс

Представим себе другую задачу – пусть $\{Z_n\}$ надкритический процесс, T – время до его вырождения.

Задача о позднем вырождении

Как устроены $P(n < T < \infty)$ и $P(Z_n = k | n < T < +\infty)$?

Представим себе другую задачу – пусть $\{Z_n\}$ надкритический процесс, T – время до его вырождения.

Задача о позднем вырождении

Как устроены $P(n < T < \infty)$ и $P(Z_n = k | n < T < +\infty)$?

Проблема в том, что скорее всего T мало или $T = \infty$.

Пусть q – вероятность вырождения процесса. Заметим, что $(q^i, i > 0)$ тоже собственный вектор:

Преобразование меры

Пусть q – вероятность вырождения процесса. Заметим, что $(q^i, i > 0)$ тоже собственный вектор:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} q^j = \phi(q)^i = q^i.$$

Преобразование меры

Пусть q – вероятность вырождения процесса. Заметим, что $(q^i, i > 0)$ тоже собственный вектор:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} q^j = \phi(q)^i = q^i.$$

Введем новую переходную матрицу $p^{**}_{i,j} = p_{i,j} q^j / q^i$.

Преобразование меры

Пусть q – вероятность вырождения процесса. Заметим, что $(q^i, i > 0)$ тоже собственный вектор:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} q^j = \phi(q)^i = q^i.$$

Введем новую переходную матрицу $p^{**}_{i,j} = p_{i,j} q^j / q^i$.

Тогда

$$E\left(s^{X_1^{**}} \middle| X_0^{**} = i\right) = \left(\frac{\phi(qs)}{q}\right)^i,$$

Пусть q – вероятность вырождения процесса. Заметим, что $(q^i, i > 0)$ тоже собственный вектор:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} q^j = \phi(q)^i = q^i.$$

Введем новую переходную матрицу $p_{i,j}^{**} = p_{i,j} q^j / q^i$.
Тогда

$$E\left(s^{X_1^{**}} \,\middle|\, X_0^{**} = i\right) = \left(\frac{\phi(qs)}{q}\right)^i,$$

то есть это ВП с п.ф. $\phi(qs)/q$.

Преобразование меры

Пусть q – вероятность вырождения процесса. Заметим, что $(q^i, i > 0)$ тоже собственный вектор:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} q^j = \phi(q)^i = q^i.$$

Введем новую переходную матрицу $p^{**}_{i,j} = p_{i,j} q^j / q^i$.

Тогда

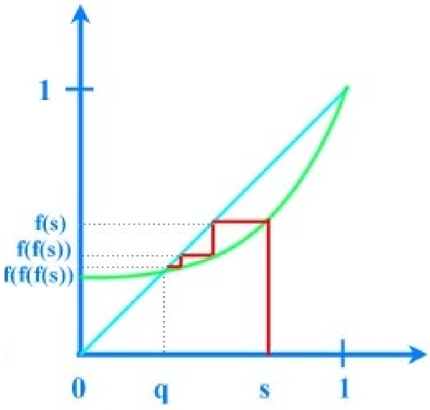
$$E\left(s^{X^{**}_1} \,\middle|\, X^{**}_0 = i\right) = \left(\frac{\phi(qs)}{q}\right)^i,$$

то есть это ВП с п.ф. $\phi(qs)/q$.

При этом

$$(\phi(qs)/q)'|_{s=1} = \phi'(q) < 1.$$

Картинка



Следовательно, $\mathsf{P}\big(n < T < \infty, Z_n = i\big)$ имеет вид

$$\frac{\mathsf{P}\big(n < T^{**} < \infty, Z_n^{**} = i\big)}{q^{i-1}} =$$

Следовательно, $P(n < T < \infty, Z_n = i)$ имеет вид

$$\frac{P(n < T^{**} < \infty, Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{P(Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{(\phi'(q))^n P(Z_n^{*} = i)}{iq^{i-1}},$$

где процесс Z_n^* построен по Z_n^{**} также как и прежде:

$$p_{i,j}^* = \frac{p_{i,j} q^j j}{i q^i \phi'(q)}$$

Выводы

Следовательно, $P(n < T < \infty, Z_n = i)$ имеет вид

$$\frac{P(n < T^{**} < \infty, Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{P(Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{(\phi'(q))^n P(Z_n^* = i)}{iq^{i-1}},$$

где процесс Z_n^* построен по Z_n^{**} также как и прежде:

$$p_{i,j}^* = \frac{p_{i,j} q^j j}{iq^i \phi'(q)}$$

При этом

$$P(n < T < \infty) = (\phi'(q))^n \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} P(Z_n^* = i)/i.$$

Выводы

Следовательно, $P(n < T < \infty, Z_n = i)$ имеет вид

$$\frac{P(n < T^{**} < \infty, Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{P(Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{(\phi'(q))^n P(Z_n^* = i)}{iq^{i-1}},$$

где процесс Z_n^* построен по Z_n^{**} также как и прежде:

$$p_{i,j}^* = \frac{p_{i,j} q^j j}{iq^i \phi'(q)}$$

При этом

$$P(n < T < \infty) = (\phi'(q))^n \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} P(Z_n^* = i)/i.$$

Если $P(Z_n^* = i)$ положительно возвратна и $q^{-i}P(Z_n^* = i)$ имеет суммируемый предел π_i^*,

Выводы

Следовательно, $P(n < T < \infty, Z_n = i)$ имеет вид

$$\frac{P(n < T^{**} < \infty, Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{P(Z_n^{**} = i)}{q^{i-1}} = \frac{(\phi'(q))^n P(Z_n^* = i)}{iq^{i-1}},$$

где процесс Z_n^* построен по Z_n^{**} также как и прежде:

$$p_{i,j}^* = \frac{p_{i,j}q^j j}{iq^i\phi'(q)}$$

При этом

$$P(n < T < \infty) = (\phi'(q))^n \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} P(Z_n^* = i)/i.$$

Если $P(Z_n^* = i)$ положительно возвратна и $q^{-i}P(Z_n^* = i)$ имеет суммируемый предел π_i^*,то

$$P(n < T < \infty) \sim (\phi'(q))^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi_i^*}{i}$$

Структура преобразованной цепи

При этом цепь Z_n^* есть ВПСС с одной частицей, размножающейся с вероятностями $ip_i q^i/\phi'(q)$, а остальные с $p_i q^i/\phi(q)$.

Две теоремы Vere-Jones

Всюду ниже $\{X_n\}$ – счетная неразложимая непериодичная (кроме нуля) ЦМ с поглощением в нуле п.н.,

Две теоремы Vere-Jones

Всюду ниже $\{X_n\}$ – счетная неразложимая непериодичная (кроме нуля) ЦМ с поглощением в нуле п.н.,T – время до поглощения,

Две теоремы Vere-Jones

Всюду ниже $\{X_n\}$ – счетная неразложимая непериодичная (кроме нуля) ЦМ с поглощением в нуле п.н.,T – время до поглощения, P^{+} – м.в.п. без нулевых строки и столбца.

Две теоремы Vere-Jones

Всюду ниже $\{X_n\}$ – счетная неразложимая непериодичная (кроме нуля) ЦМ с поглощением в нуле п.н.,T – время до поглощения, P^+ – м.в.п. без нулевых строки и столбца.

Vere-Jones, 1967

Существует такой параметр $R \in (0, 1]$, что $\sqrt[n]{P(X_n = j | X_0 = i)} \to R$, $n \to \infty$ при всех i, j.

Две теоремы Vere-Jones

Всюду ниже $\{X_n\}$ – счетная неразложимая непериодичная (кроме нуля) ЦМ с поглощением в нуле п.н.,T – время до поглощения, P^+ – м.в.п. без нулевых строки и столбца.

Vere-Jones, 1967

Существует такой параметр $R \in (0,1]$, что $\sqrt[n]{P(X_n = j | X_0 = i)} \to R$, $n \to \infty$ при всех i, j.

Vere-Jones, Seneta, 1966

Если $\limsup R^{-n} p_{i,i}(n) > 0$ для какого-то i, то найдется положительный "собственный" вектор f матрицы P^+ с с.з. R,

Две теоремы Vere-Jones

Всюду ниже $\{X_n\}$ – счетная неразложимая непериодичная (кроме нуля) ЦМ с поглощением в нуле п.н.,T – время до поглощения, P^+ – м.в.п. без нулевых строки и столбца.

Vere-Jones, 1967

Существует такой параметр $R \in (0, 1]$, что $\sqrt[n]{P(X_n = j | X_0 = i)} \to R$, $n \to \infty$ при всех i, j.

Vere-Jones, Seneta, 1966

Если $\limsup R^{-n} p_{i,i}(n) > 0$ для какого-то i, то найдется положительный "собственный" вектор f матрицы P^+ с с.з. R, положительный "собственный" вектор g м.в.п. $(P^+)^T$ с с.з. R,

Две теоремы Vere-Jones

Всюду ниже $\{X_n\}$ – счетная неразложимая непериодичная (кроме нуля) ЦМ с поглощением в нуле п.н.,T – время до поглощения, P^+ – м.в.п. без нулевых строки и столбца.

Vere-Jones, 1967

Существует такой параметр $R \in (0,1]$, что $\sqrt[n]{P(X_n = j|X_0 = i)} \to R$, $n \to \infty$ при всех i, j.

Vere-Jones, Seneta, 1966

Если $\limsup R^{-n} p_{i,i}(n) > 0$ для какого-то i, то найдется положительный "собственный" вектор f матрицы P^+ с с.з. R, положительный "собственный" вектор g м.в.п. $(P^+)^T$ с с.з. R,причем $\sum f_i g_i = 1$.

Такие цепи называют R-положительными.

Такие цепи называют R-положительными. Тогда можно ввести цепь

$$p^*_{i,j} = \frac{p_{i,j} f_j}{R f_i},$$

Такие цепи называют R-положительными. Тогда можно ввести цепь

$$p^*_{i,j} = \frac{p_{i,j} f_j}{R f_i},$$

для которой

$$P(X_n > 0 | X_0 = 1) = f_1 R^n E 1 / f_{X^*_n}.$$

Такие цепи называют R-положительными. Тогда можно ввести цепь

$$p^*_{i,j} = \frac{p_{i,j} f_j}{R f_i},$$

для которой

$$P(X_n > 0 | X_0 = 1) = f_1 R^n E 1/f_{X^*_n}.$$

Если $\sum g_i$ конечна, то цепь X^*_n имеет стационарное распределение $f_i g_i$

Такие цепи называют R-положительными. Тогда можно ввести цепь

$$p^*_{i,j} = \frac{p_{i,j} f_j}{R f_i},$$

для которой

$$P(X_n > 0 | X_0 = 1) = f_1 R^n E 1/f_{X^*_n}.$$

Если $\sum g_i$ конечна, то цепь X^*_n имеет стационарное распределение $f_i g_i$ и $E 1/f_{X^*_n}$ сходится к $\sum g_i$.

Как проверить R-положительность?

Итак, нам нужна R-положительность и суммируемость вектора g.

Итак, нам нужна R-положительность и суммируемость вектора g.

Kesten, Ferrari, Martinez, 1996

Пусть для некоторых k, δ, C

$$P(T > n, X_i > k, i \leq n | X_0 = 1) < C(R - \delta)^n.$$

Итак, нам нужна R-положительность и суммируемость вектора g.

Kesten, Ferrari, Martinez, 1996

Пусть для некоторых k, δ, C

$$P(T > n, X_i > k, i \leq n | X_0 = 1) < C(R - \delta)^n.$$

Тогда оба названных условия выполнены.

Итак, нам нужна R-положительность и суммируемость вектора g.

Kesten, Ferrari, Martinez, 1996

Пусть для некоторых k, δ, C

$$P(T > n, X_i > k, i \leq n | X_0 = 1) < C(R - \delta)^n.$$

Тогда оба названных условия выполнены. При этом

$$P(T > n) \sim R^n \sum g_i, \quad P(X_n = j | T > n, X_0 = i) \to \frac{g_j}{\sum g_j}.$$

Как проверить условие для докритического ВП?

Пусть Z_n – докритический ВП, $EX^{1+\delta} < \infty$, $I_n = I_{Z_i > k, i \leq n}$.

Как проверить условие для докритического ВП?

Пусть Z_n – докритический ВП, $EX^{1+\delta} < \infty$, $I_n = I_{Z_i > k, i \le n}$. Тогда

$$EI_n \le \frac{1}{k^{1+\delta}} EZ_n^{1+\delta} I_n.$$

Как проверить условие для докритического ВП?

Пусть Z_n – докритический ВП, $EX^{1+\delta} < \infty$, $I_n = I_{Z_i > k, i \le n}$. Тогда

$$EI_n \le \frac{1}{k^{1+\delta}} EZ_n^{1+\delta} I_n.$$

Если $\Delta_n = Z_n - \mu Z_{n-1}$, то

$$\left(EZ_n^{1+\delta} I_n\right)^{1/(1+\delta)} \le \mu^{1+\delta} \left(EZ_{n-1}^{1+\delta} I_{n-1}\right)^{1/(1+\delta)} + \left(E\Delta_n^{1+\delta} I_n\right)^{1/(1+\delta)}.$$

При этом

$$\mathsf{E}\left((\mathsf{Z}_n - \mu \mathsf{Z}_{n-1})^{1+\delta} \middle| \mathsf{Z}_{n-1} \right) =$$

Оценка Δ_n

При этом

$$\mathsf{E}\left(\left(Z_n - \mu Z_{n-1}\right)^{1+\delta}\middle| Z_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}(X_{n,i} - \mu)\right)^{1+\delta}\middle| Z_{n-1}\right)$$

При этом

$$\mathsf{E}\left(\left(Z_n - \mu Z_{n-1}\right)^{1+\delta} \middle| Z_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} (X_{n,i} - \mu)\right)^{1+\delta} \middle| Z_{n-1}\right) \le$$

$$2Z_{n-1}\mathsf{E}(X_{n,1} - \mu)^{1+\delta} \le$$

При этом

$$\mathsf{E}\left(\left(Z_n-\mu Z_{n-1}\right)^{1+\delta}\,\middle|\,Z_{n-1}\right)=\mathsf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}(X_{n,i}-\mu)\right)^{1+\delta}\,\middle|\,Z_{n-1}\right)\le$$

$$2Z_{n-1}\mathsf{E}(X_{n,1}-\mu)^{1+\delta}\le 2Z_{n-1}^{1+\delta}\frac{\mathsf{E}(X_{n,1}-\mu)^{1+\delta}}{k^{\delta}}.$$

При этом

$$\mathsf{E}\left(\left(Z_n - \mu Z_{n-1}\right)^{1+\delta} \middle| Z_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} (X_{n,i} - \mu)\right)^{1+\delta} \middle| Z_{n-1}\right) \leq$$

$$2Z_{n-1}\mathsf{E}(X_{n,1} - \mu)^{1+\delta} \leq 2Z_{n-1}^{1+\delta}\frac{\mathsf{E}(X_{n,1} - \mu)^{1+\delta}}{k^\delta}.$$

Значит,

$$\left(\mathsf{E}Z_n^{1+\delta} I_n\right)^{1/(1+\delta)} \leq \mu^{1+\delta}\left(\mathsf{E}Z_{n-1}^{1+\delta} I_{n-1}\right)^{1/(1+\delta)}\left(1 + \frac{\mathsf{E}(X_{n,1} - \mu)^{1+\delta}}{\mu^{1+\delta}k^\delta}\right).$$

Оценка Δ_n

При этом

$$\mathsf{E}\left(\left(Z_n-\mu Z_{n-1}\right)^{1+\delta}\,\Big|\,Z_{n-1}\right)=\mathsf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}(X_{n,i}-\mu)\right)^{1+\delta}\,\middle|\,Z_{n-1}\right)\le$$

$$2Z_{n-1}\mathsf{E}(X_{n,1}-\mu)^{1+\delta}\le 2Z_{n-1}^{1+\delta}\frac{\mathsf{E}(X_{n,1}-\mu)^{1+\delta}}{k^{\delta}}.$$

Значит,

$$\left(\mathsf{E}Z_n^{1+\delta}I_n\right)^{1/(1+\delta)}\le\mu^{1+\delta}\left(\mathsf{E}Z_{n-1}^{1+\delta}I_{n-1}\right)^{1/(1+\delta)}\left(1+\frac{\mathsf{E}(X_{n,1}-\mu)^{1+\delta}}{\mu^{1+\delta}k^{\delta}}\right).$$

Выбирая k достаточно большим, получаем

$$\left(\mathsf{E}Z_n^{1+\delta}I_n\right)^{1/(1+\delta)}\le(\mu-\varepsilon)^n.$$

Цепи с необязательным поглощением

Если цепь может не поглощаться, то сперва преобразуем ее с помощью $p_{i,j}q_j / q_i$, где q_j – вероятность поглощения для цепи с j частицами.

Цепи с необязательным поглощением

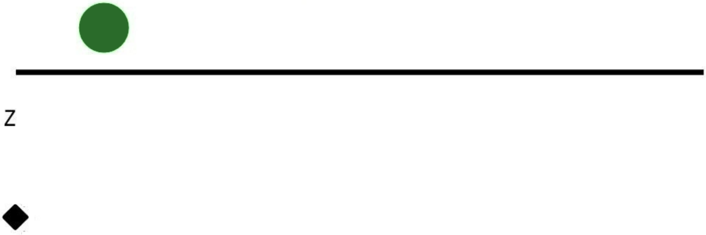
Если цепь может не поглощаться, то сперва преобразуем ее с помощью $p_{i,j}q_j/q_i$, где q_j – вероятность поглощения для цепи с j частицами. Получим цепь X_n^{**} с обязательным поглощением (и с тем же R).

Если цепь может не поглощаться, то сперва преобразуем ее с помощью $p_{i,j}q_j/q_i$, где q_j – вероятность поглощения для цепи с j частицами. Получим цепь X_n^{**} с обязательным поглощением (и с тем же R). Для нее условие

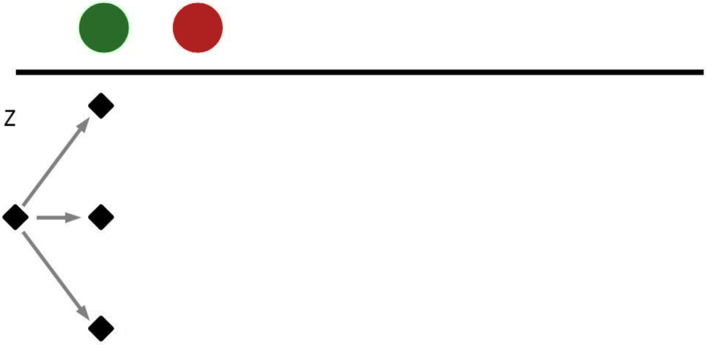
$$P(T^{**} > n, X_i^{**} > k, i \leq n | X_0^{**} = 1) < C(R - \delta)^n.$$

переписывается в виде

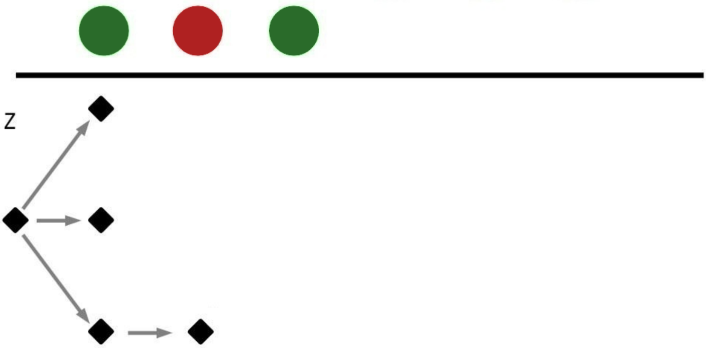
$$E\left(\frac{q_{X_n}}{q_1} I_{X_i > k, i \leq n} \middle| X_0 = 1\right) < C(R - \delta)^n.$$

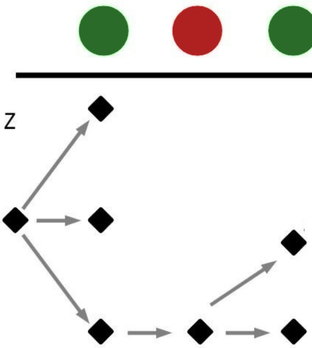

Z

ВПСС

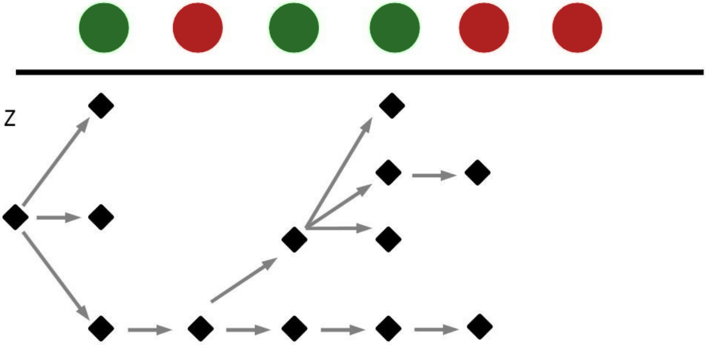


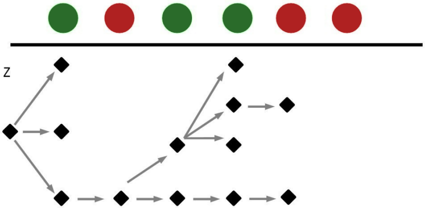
ВПСС




Z

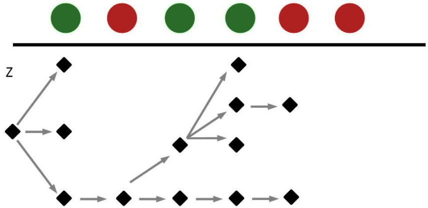
ВПСС



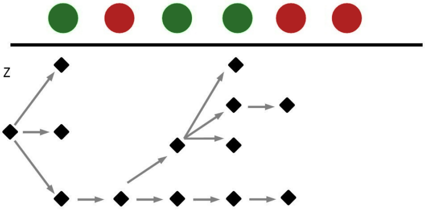


- Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$.

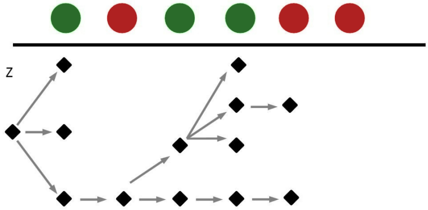
ВПСС



- Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$.
- При каждом i для каждого η_i разыгрываем $(\mathrm{X}_{\mathrm{i,j}}, \mathrm{j} > 0)$ с распределением $\mathrm{P}_{\eta_\mathrm{i}}$, где $\{\mathrm{P}_\mathrm{y}\}$ – набор мер.



- Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$.
- При каждом i для каждого η_i разыгрываем $(\mathrm{X}_{\mathrm{i,j}}, \mathrm{j} > 0)$ с распределением $\mathrm{P}_{\eta_\mathrm{i}}$, где $\{\mathrm{P}_\mathrm{y}\}$ – набор мер.
- Определим ВПСС соотношениями $\mathrm{Z}_0 = 1$,



- Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$.
- При каждом i для каждого η_i разыгрываем $(X_{i,j}, j > 0)$ с распределением P_{η_i}, где $\{P_y\}$ – набор мер.
- Определим ВПСС соотношениями $Z_0 = 1$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i}.$$

Сопровождающее случайное блуждание

Сопровождающее случайное блуждание

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i} =$$

Сопровождающее случайное блуждание

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i} = Z_n \mathsf{E}_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i} + \sum_{i=1}^{Z_n} \left(X_{n+1,i} - \mathsf{E}_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i} \right) .$$

Сопровождающее случайное блуждание

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i} = \underbrace{Z_n \mathsf{E}_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i}}_{O(Z_n)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{Z_n} \left(X_{n+1,i} - \mathsf{E}_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i} \right)}_{O(\sqrt{Z_n})}.$$

Сопровождающее случайное блуждание

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i} = \underbrace{Z_n \mathsf{E}_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i}}_{O(Z_n)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{Z_n} \left(X_{n+1,i} - \mathsf{E}_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i} \right)}_{O(\sqrt{Z_n})}.$$

Пусть $\xi_i = \ln \mathsf{E}_{\eta_i} X_{i,1}$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ – сопровождающее случайное блуждание.

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i} = \underbrace{Z_n E_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i}}_{O(Z_n)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{Z_n} \left(X_{n+1,i} - E_{\eta_{n+1}} X_{n+1,i} \right)}_{O(\sqrt{Z_n})}.$$

Пусть $\xi_i = \ln E_{\eta_i} X_{i,1}$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ – сопровождающее случайное блуждание. Положим $\mu = E\xi$, $R(h) = Ee^{h\xi}$.

Процесс называется

- надкритическим, если $\mu > 0$;
- критическим, если $\mu = 0$;
- докритическим, если $\mu < 0$, причем
  - слабо докритическим, если $\mathsf{R}'(1) = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{e}^{\xi_1} > 0$;
  - умеренно докритическим, если $\mathsf{R}'(1) = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{e}^{\xi_1} = 0$;
  - строго докритическим, если $\mathsf{R}'(1) = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{e}^{\xi_1} < 0$.

Процесс называется

- надкритическим, если $\mu > 0$;
- критическим, если $\mu = 0$;
- докритическим, если $\mu < 0$, причем
  - слабо докритическим, если $\mathsf{R}'(1) = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{e}^{\xi_1} > 0$;
  - умеренно докритическим, если $\mathsf{R}'(1) = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{e}^{\xi_1} = 0$;
  - строго докритическим, если $\mathsf{R}'(1) = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{e}^{\xi_1} < 0$.

Известно, что для строго докритических процессов $\mathsf{P}(\mathsf{Z}_\mathsf{n} > 0) \sim \mathsf{C}\mathsf{R}(1)^\mathsf{n}$.

Почему так?

Опять же $(i, i \geq 0)$ – собственный вектор с с.з. $EX_{1,1}$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_1 = j | Z_0 = i) = E(Z_1 | Z_0 = i) =$$

Почему так?

Опять же $(i, i \geq 0)$ – собственный вектор с с.з. $EX_{1,1}$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_1 = j | Z_0 = i) = E(Z_1 | Z_0 = i) = EX_{1,1} i =$$

Почему так?

Опять же $(i, i \geq 0)$ – собственный вектор с с.з. $\mathsf{E}X_{1,1}$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\mathsf{P}(Z_1 = j | Z_0 = i) = \mathsf{E}(Z_1 | Z_0 = i) = \mathsf{E}X_{1,1} i = R(1) i.$$

Почему так?

Опять же $(i, i \geq 0)$ – собственный вектор с с.з. $EX_{1,1}$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_1 = j | Z_0 = i) = E(Z_1 | Z_0 = i) = EX_{1,1} i = R(1) i.$$

Значит можно ввести сопряженную цепь

$$p^*_{i,j} = \frac{p_{i,j} j}{R(1) i}$$

Опять же $(i, i \geq 0)$ – собственный вектор с с.з. $EX_{1,1}$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_1 = j | Z_0 = i) = E(Z_1 | Z_0 = i) = EX_{1,1} i = R(1) i.$$

Значит можно ввести сопряженную цепь

$$p^*_{i,j} = \frac{p_{i,j} j}{R(1) i}$$

$$\sum_j p^*_{i,j} s^j = \frac{1}{R(1) i} \sum_j p_{i,j} j s^j = \frac{E\phi_1'(1) \frac{s\phi_1'(s)}{\phi_1'(1)} \phi_1(s)^{i-1}}{E\phi_1'(1)} = \widetilde{E} \frac{s\phi_1'(s)}{\phi_1'(1)} \phi_1(s)^{i-1}$$

R-положительность

Если при некоторых δ, k

$$\mathsf{P}(\mathsf{Z}_\mathsf{i} > \mathsf{k}, \mathsf{i} \leq \mathsf{n}) \leq (\mathsf{R}(1) - \delta)^\mathsf{n},$$

то $\mathsf{P}(\mathsf{Z}_\mathsf{n} > 0) \sim \mathsf{CR}(1)^\mathsf{n}$.

Пусть ξ:

$$\mathrm{R}(\mathrm{h}) = \mathrm{E}e^{\mathrm{h}\xi} < \infty,\ \mathrm{h}^{-} \leq \mathrm{h} \leq \mathrm{h}^{+}, \quad (\text{Cramer condition}).$$

Крамеровское сопряжение

Пусть ξ:

$$\mathsf{R}(\mathsf{h}) = \mathsf{E}e^{\mathsf{h}\xi} < \infty,\ \mathsf{h}^- \le \mathsf{h} \le \mathsf{h}^+, \quad (\text{Cramer condition}).$$

Случайная величина с распределением

$$\mathsf{P}(\xi^{(\mathsf{h})} \in \mathsf{A}) = \frac{1}{\mathsf{R}(\mathsf{h})} \int_{\mathsf{A}} e^{\mathsf{h}x} \mathsf{P}(\xi \in dx)$$

называется сопряженной к ξ.

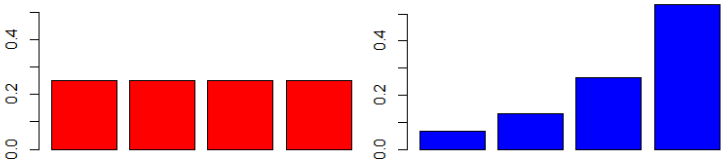
Пусть ξ:

$$R(h) = Ee^{h\xi} < \infty, \; h^- \le h \le h^+, \quad (\text{Cramer condition}).$$

Случайная величина с распределением

$$P(\xi^{(h)} \in A) = \frac{1}{R(h)} \int_A e^{hx} P(\xi \in dx)$$

называется сопряженной к ξ.



Крамеровское сопряжение

Пусть ξ:

$$\mathrm{R}(\mathrm{h}) = \mathrm{E}e^{\mathrm{h}\xi} < \infty,\ \mathrm{h}^- \le \mathrm{h} \le \mathrm{h}^+, \quad (\text{Cramer condition}).$$

Случайная величина с распределением

$$\mathrm{P}(\xi^{(\mathrm{h})} \in \mathrm{A}) = \frac{1}{\mathrm{R}(\mathrm{h})} \int_{\mathrm{A}} e^{\mathrm{hx}} \mathrm{P}(\xi \in \mathrm{dx})$$

называется сопряженной к ξ.

Сопряжение блуждания

Как сопрячь всю траекторию блуждания:

Сопряжение блуждания

Как сопрячь всю траекторию блуждания:

$$P((S_1, \ldots, S_n) \in A) = \int_{(s_1,\ldots,s_n)\in A} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in d(s_i - s_{i-1})) =$$

Как сопрячь всю траекторию блуждания:

$$P((S_1, \dots, S_n) \in A) = \int_{(s_1,\dots,s_n)\in A} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in d(s_i - s_{i-1})) =$$

$$R(h)^n \int_{(s_1,\dots,s_n)\in A} e^{-hs_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{h(s_i - s_{i-1})} P(X_i \in d(s_i - s_{i-1}))}{R(h)} =$$

Как сопрячь всю траекторию блуждания:

$$P((S_1,\ldots,S_n)\in A)=\int_{(s_1,\ldots,s_n)\in A}\prod_{i=1}^{n}P(X_i\in d(s_i-s_{i-1}))=$$

$$R(h)^n\int_{(s_1,\ldots,s_n)\in A}e^{-hs_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{h(s_i-s_{i-1})}P(X_i\in d(s_i-s_{i-1}))}{R(h)}=$$

$$R(h)^n E^{(h)}e^{-hS_n}I_{(S_1,\ldots,S_n)\in A}.$$

Оценка

Если $I_n = I_{Z_1>k,\dots,Z_n>k}$, то

$$P(Z_i > k, i \le n) = EI_n \le k^{-1-\delta} EZ_n^{1+\delta} I_n$$

Если $I_n = I_{Z_1>k,\dots,Z_n>k}$, то

$$P(Z_i > k, i \le n) = EI_n \le k^{-1-\delta} E Z_n^{1+\delta} I_n = \frac{R(1+\delta)^n}{k^{1+\delta}} E^{(1+\delta)} \left(\frac{Z_n}{e^{S_n}}\right)^{1+\delta} I_n$$

Оценка

Если $I_n = I_{Z_1>k,\dots,Z_n>k}$, то

$$P(Z_i > k, i \leq n) = EI_n \leq k^{-1-\delta} EZ_n^{1+\delta} I_n = \frac{R(1+\delta)^n}{k^{1+\delta}} E^{(1+\delta)} \left(\frac{Z_n}{e^{S_n}}\right)^{1+\delta} I_n$$

При этом если $W_n = Z_n e^{-S_n}$, $\Delta_n = W_n - W_{n-1}$, то

$$\left(E^{(1+\delta)} W_n^{1+\delta} I_n\right)^{1/(1+\delta)} \leq \left(E^{(1+\delta)} W_{n-1}^{1+\delta} I_n\right)^{1/(1+\delta)} + \left(E^{(1+\delta)} \Delta_n^{1+\delta} I_n\right)^{1/(1+\delta)}$$

Дальнейшие оценки те же.

Оценка

Если $I_n = I_{Z_1 > k, \ldots, Z_n > k}$, то

$$P(Z_i > k, i \leq n) = EI_n \leq k^{-1-\delta} EZ_n^{1+\delta} I_n = \frac{R(1+\delta)^n}{k^{1+\delta}} E^{(1+\delta)} \left(\frac{Z_n}{e^{S_n}} \right)^{1+\delta} I_n$$

При этом если $W_n = Z_n e^{-S_n}$, $\Delta_n = W_n - W_{n-1}$, то

$$\left(E^{(1+\delta)} W_n^{1+\delta} I_n \right)^{1/(1+\delta)} \leq \left(E^{(1+\delta)} W_{n-1}^{1+\delta} I_n \right)^{1/(1+\delta)} + \left(E^{(1+\delta)} \Delta_n^{1+\delta} I_n \right)^{1/(1+\delta)}$$

Дальнейшие оценки те же. Значит, $P(Z_n > 0) \sim CR(1)^n$.

Позднее вырождение надкритического процесса

Пусть Z_n – надкритический ВПСС. Как ведет себя $P(n < T < \infty)$, где T велико?

Позднее вырождение надкритического процесса

Пусть Z_n – надкритический ВПСС. Как ведет себя $P(n < T < \infty)$, где T велико?

Пусть $q(k) = P(T < \infty | Z_0 = k)$.

Позднее вырождение надкритического процесса

Пусть Z_n – надкритический ВПСС. Как ведет себя $P(n < T < \infty)$, где T велико?

Пусть $q(k) = P(T < \infty | Z_0 = k)$.Тогда пусть

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(Z_n = 1 | Z_0 = 1)}.$$

Позднее вырождение надкритического процесса

Пусть Z_n – надкритический ВПСС. Как ведет себя $P(n < T < \infty)$, где T велико?
Пусть $q(k) = P(T < \infty | Z_0 = k)$.Тогда пусть

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(Z_n = 1 | Z_0 = 1)}.$$

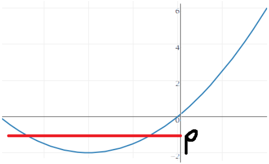
Условие R-положительности приобретает вид

$$P_n := E\left(\frac{q(Z_n)}{q(1)} I_{Z_i > k, i \le n} \middle| Z_0 = 1 \right) < C(\rho - \delta)^n$$

h^*

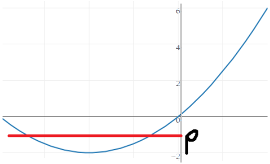
Пусть $h^* : R(h^*) = \rho$, $R'(h^*) > 0$.

Пусть $h^* : R(h^*) = \rho, R'(h^*) > 0.$



h^*

Пусть $h^* : R(h^*) = \rho, R'(h^*) > 0.$



Мы считаем, что $\inf_{h<0} R(h) < \rho$. Такой процесс назовем строго надкритическим.

h^*

Пусть $h^* : R(h^*) = \rho$, $R'(h^*) > 0$. Мы считаем, что $\inf_{h<0} R(h) < \rho$. Такой процесс назовем строго надкритическим. Тогда при $h = -(h^* - \delta)$

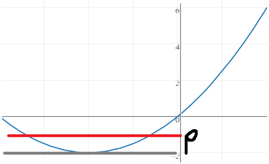
$$P_n = R(-h)^n E^{(-h)} \left(\frac{q(Z_n)e^{S_n h}}{q(1)} I_{Z_i > k, i \le n} \middle| Z_0 = 1 \right)$$

Можно показать, что $q(k) < ck^{-h}$, если δ достаточно мало.

Пусть $h^* : R(h^*) = \rho$, $R'(h^*) > 0$. Мы считаем, что $\inf_{h<0} R(h) < \rho$. Такой процесс назовем строго надкритическим. Тогда при $h = -(h^* - \delta)$

$$P_n = R(-h)^n E^{(-h)} \left(\frac{q(Z_n) e^{S_n h}}{q(1)} I_{Z_i > k, i \le n} \middle| Z_0 = 1 \right)$$

Можно показать, что $q(k) < c k^{-h}$, если δ достаточно мало.



Пусть $h^* : R(h^*) = \rho$, $R'(h^*) > 0$. Мы считаем, что $\inf_{h<0} R(h) < \rho$. Такой процесс назовем строго надкритическим. Тогда при $h = -(h^* - \delta)$

$$P_n = R(-h)^n E^{(-h)} \left(\frac{q(Z_n) e^{S_n h}}{q(1)} I_{Z_i > k, i \le n} \middle| Z_0 = 1 \right)$$

Можно показать, что $q(k) < ck^{-h}$, если δ достаточно мало. Получаем

$$P_n \le cR(-h)^n E^{(-h)} \left(\frac{e^{S_n}}{Z_n} \right)^{-h} I_{Z_i > k, i \le n}.$$

Остается показать, что

$$E^{(-h)} \left(e^{S_n} Z_n^{-1} \right)^{-h} I_{Z_i > k, i \le n}$$

растет медленнее чем $(\rho / R(-h))^n$.

$$\frac{e^{S_n}}{Z_n} - \frac{e^{S_{n-1}}}{Z_{n-1}} = -\frac{(Z_n - e^{\xi_n} Z_{n-1}) e^{S_{n-1}}}{Z_n Z_{n-1}}.$$

$$\frac{e^{S_n}}{Z_n} - \frac{e^{S_{n-1}}}{Z_{n-1}} = -\frac{(Z_n - e^{\xi_n} Z_{n-1}) e^{S_{n-1}}}{Z_n Z_{n-1}}.$$

Если $Z_n > (1-\varepsilon) Z_{n-1} e^{\xi_n}$, то

$$\left| \frac{(Z_n - e^{\xi_n} Z_{n-1}) e^{S_{n-1}}}{Z_n Z_{n-1}} \right| \leq \frac{\varepsilon e^{\xi_n}}{1-\varepsilon} \frac{e^{S_{n-1}}}{Z_{n-1}}.$$

Если $Z_n > (1-\varepsilon)Z_{n-1}e^{\xi_n}$, то

$$\left|\frac{(Z_n - e^{\xi_n}Z_{n-1})e^{S_{n-1}}}{Z_nZ_{n-1}}\right| \leq \frac{\varepsilon e^{\xi_n}}{1-\varepsilon}\frac{e^{S_{n-1}}}{Z_{n-1}}.$$

Если $Z_n \leq (1-\varepsilon)Z_{n-1}e^{\xi_n}$, то

$$\left|\frac{(Z_n - e^{\xi_n}Z_{n-1})e^{S_{n-1}}}{Z_nZ_{n-1}}\right| \leq \frac{\varepsilon e^{\xi_n}}{1-\varepsilon}\frac{e^{S_{n-1}}}{k}.$$

Если $Z_n > (1-\varepsilon)Z_{n-1}e^{\xi_n}$, то

$$\left|\frac{(Z_n - e^{\xi_n}Z_{n-1})e^{S_{n-1}}}{Z_n Z_{n-1}}\right| \le \frac{\varepsilon e^{\xi_n}}{1-\varepsilon}\frac{e^{S_{n-1}}}{Z_{n-1}}.$$

Если $Z_n \le (1-\varepsilon)Z_{n-1}e^{\xi_n}$, то

$$\left|\frac{(Z_n - e^{\xi_n}Z_{n-1})e^{S_{n-1}}}{Z_n Z_{n-1}}\right| \le \frac{\varepsilon e^{\xi_n}}{1-\varepsilon}\frac{e^{S_{n-1}}}{k}.$$

При этом

$$P\left(Z_n < (1-\varepsilon)Z_{n-1}e^{\xi_n} \,\middle|\, Z_{n-1}, \boldsymbol{\eta}\right) \le$$
$$\frac{1}{\varepsilon^{2+2\delta}e^{\xi_n(2+2\delta)}Z_{n-1}^{2+2\delta}} E\left(\left(Z_n - Z_{n-1}e^{\xi_n}\right)^{2+2\delta} \,\middle|\, Z_{n-1}, \boldsymbol{\eta}\right)$$

Основная теорема

Если процесс строго надкритический и $\mathsf{E}X^{1-h^*} < +\infty$, то

$$\mathsf{P}(n < T < \infty) \sim c\rho^n,$$

Основная теорема

Если процесс строго надкритический и $EX^{1-h^*} < +\infty$, то

$$P(n < T < \infty) \sim c\rho^n, P(Z_n = k | n < T < \infty) \to p_k^*$$

для некоторого распределения p_k^*.

Бансайе и Боингхофф в 2016 показали это на уровне логарифмической асимптотики. Афанасьев в 2024 доказал аналог в случае геометрического распределения.

Основная теорема

Если процесс строго надкритический и $EX^{1-h^*} < +\infty$, то

$$P(n < T < \infty) \sim c\rho^n, P(Z_n = k | n < T < \infty) \to p_k^*$$

для некоторого распределения p_k^*.

Бансайе и Боингхофф в 2016 показали это на уровне логарифмической асимптотики. Афанасьев в 2024 доказал аналог в случае геометрического распределения. Оба факта обобщаются на другие цепи Маркова, в которых

$$E|Y_n - Y_{n-1}e^{\xi_n}|^h \le cY_{n-1}^{h_0},$$

где $0 < h_0 < h$.

Вывод

1. Преобразование мер позволяет нам сводить долго не поглощающиеся цепи к эргодическим.

Вывод

1. Преобразование мер позволяет нам сводить долго не поглощающиеся цепи к эргодическим.
2. Преобразование мер позволяет нам сводить не поглошающиеся цепи к поглощающимся.

Вывод

1. Преобразование мер позволяет нам сводить долго не поглощающиеся цепи к эргодическим.
2. Преобразование мер позволяет нам сводить не поглошающиеся цепи к поглощающимся.
3. Ветвящиеся процессы удобнее изучать в терминах производящих функций, но последний результат в них получать не удается.

Вывод

1. Преобразование мер позволяет нам сводить долго не поглощающиеся цепи к эргодическим.
2. Преобразование мер позволяет нам сводить не поглошающиеся цепи к поглощающимся.
3. Ветвящиеся процессы удобнее изучать в терминах производящих функций, но последний результат в них получать не удается.
4. Результаты для ВПСС обобщаются на более общие классы цепей.

Процесс называется

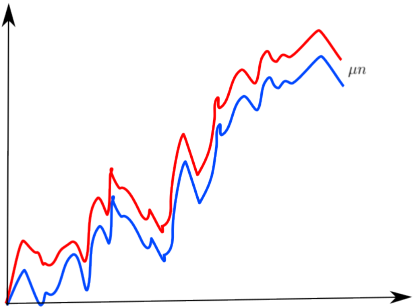
- надкритическим, если $\mu > 0$;
  - слабо надкритическим, если $\inf_{h<0} R(h) > \rho$;
  - умеренно надкритическим, если $\inf_{h<0} R(h) = \rho$;
  - строго надкритическим, если $\inf_{h<0} R(h) < \rho$.
- критическим, если $\mu = 0$;
- докритическим, если $\mu < 0$, причем
  - слабо докритическим, если $R'(1) = E\xi_1 e^{\xi_1} > 0$;
  - умеренно докритическим, если $R'(1) = E\xi_1 e^{\xi_1} = 0$;
  - строго докритическим, если $R'(1) = E\xi_1 e^{\xi_1} < 0$.

Первая зона уклонения

Пусть $\{Z_n\}$ надкритический ВПСС. Как асимптотически ведет себя $P(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n))$, $x/n \in (0, \mu)$.

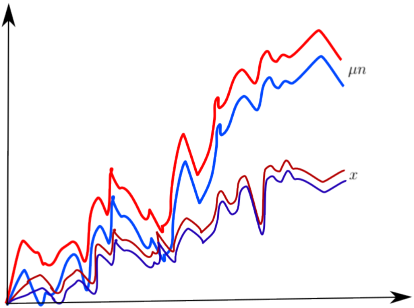
Первая зона уклонения

Пусть $\{Z_n\}$ надкритический ВПСС. Как асимптотически ведет себя $P(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n)), x/n \in (0, \mu)$.



Первая зона уклонения

Пусть $\{Z_n\}$ надкритический ВПСС. Как асимптотически ведет себя $P(\ln Z_n \in [x, x+\Delta_n))$, $x/n \in (0, \mu)$.

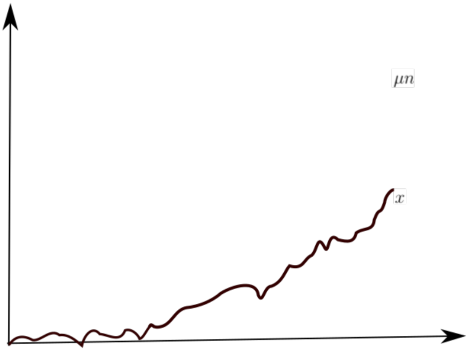


Пусть $\{Z_n\}$ надкритический ВПСС. Как асимптотически ведет себя $P(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n)), x/n \in (0, \mu)$.

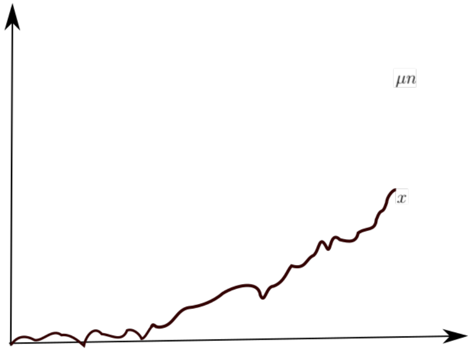
Для x/n из некоторой "первой зоны"

$$P(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim I_Z\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n\sigma(h(x/n))}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right).$$

Вторая зона уклонений



Вторая зона уклонений



Но для некоторых ВПСС выгоднее делать вот так.

Assumptions

BPL-1 ξ_i н.о.р. нерешетчатые, $E\xi_1 = \mu$, $(h) = Ee^{h\xi_1} < \infty$, $h \in (h^-, 0)$, $h^- < h^*$;

Assumptions

BPL-1 ξ_i н.о.р. нерешетчатые, $\mathrm{E}\xi_1 = \mu$, $(h) = \mathrm{E}e^{h\xi_1} < \infty$, $h \in (h^-, 0)$, $h^- < h^*$;

BPL-2 процесс строго надкритический;

Assumptions

BPL-1 ξ_i н.о.р. нерешетчатые, $E\xi_1 = \mu$, $(h) = Ee^{h\xi_1} < \infty$, $h \in (h^-, 0)$, $h^- < h^*$;

BPL-2 процесс строго надкритический;

BPL-3 кроме нуля процесс неразложим и непериодичен;

Assumptions

BPL-1 ξ_i н.о.р. нерешетчатые, $\mathsf{E}\xi_1 = \mu$, $(\mathsf{h}) = \mathsf{E}e^{\mathsf{h}\xi_1} < \infty$, $\mathsf{h} \in (\mathsf{h}^-, 0)$, $\mathsf{h}^- < \mathsf{h}^*$;

BPL-2 процесс строго надкритический;

BPL-3 кроме нуля процесс неразложим и непериодичен;

BPL-4 $\mathsf{E}X_{1,1}^{1-\mathsf{h}^-} < \infty$.

Теорема 1

При условиях, описанных выше

$$\mathsf{P}(\ln Z_n \in [x, x + \Delta)) \sim C(\Delta) e^{-\Lambda(\theta) n}, \; n \to \infty,$$

равномерно по $x \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq (0, m^*)$, $m^* = \mathsf{E}\xi^{(h^*)}$,

$$\Lambda(\theta) = \theta h^* - \ln \rho.$$

Теорема 1

При условиях, описанных выше

$$\mathsf{P}(\ln Z_n \in [x, x+\Delta)) \sim C(\Delta)e^{-\Lambda(\theta)n},\ n \to \infty,$$

равномерно по $x \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq (0, m^*)$, $m^* = \mathsf{E}\xi^{(h^*)}$,

$$\Lambda(\theta) = \theta h^* - \ln \rho.$$

Теорема 2

При тех же условиях найдется такое t, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\frac{\tau_n - n + nx/m^*}{\sqrt{n}} \le y \middle| \ln Z_n \in [x, x+\Delta)\right) \to \Phi\left(\frac{y(m^*)^{3/2}}{\sigma(h^*)}\right),$$

где сходимость равномерна по $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq (0, m^*)$.

1. Vere-Jones D. Ergodic properties of nonnegative matrices. I //Pacific Journal of Mathematics. – 1967. – Т. 22. – №. 2. – С. 361-386.
2. Vere-Jones D. Ergodic properties of nonnegative matrices. II //Pacific Journal of Mathematics. – 1968. – Т. 26. – №. 3. – С. 601-620.
3. Seneta E., Vere-Jones D. On quasi-stationary distributions in discrete-time Markov chains with a denumerable infinity of states //Journal of Applied Probability. – 1966. – Т. 3. – №. 2. – С. 403-434.
4. Ferrari P. A., Kesten H., Martínez S. R-positivity, quasi-stationary distributions and ratio limit theorems for a class of probabilistic automata //The Annals of Applied Probability. – 1996. – Т. 6. – №. 2. – С. 577-616.

1. Afanasyev, V. I. Strongly Supercritical Branching Process in a Random Environment Conditioned on Dying at a Distant Moment. In:Diskretnaya matematika, in Russian (2024). In Discrete Mathematics & Applications, in print.
2. Bansaye, V., & Böinghoff, C. Small positive values for supercritical branching processes in random environment. In: Annales de l'IHP Probabilités et statistiques, V. 50, No. 3, pp. 770-805 (2014).
3. Bansaye, V., Böinghoff C. Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment. In: Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, V. 282, № 1, 15-34 (2013).
4. А. В. Шкляев, "Нижние большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде", Дискрет. матем., 36:3 (2024), 127–140.